

Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Présenté par

BENCHOUIEB Charif

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Construction Mécanique

Analyse Statique et Dynamique des Paliers à Gaz Poreux

Sous la direction de

Pr. LAHMAR Mustapha

Année universitaire 2022-2023

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude à mon encadreur du mémoire, Monsieur le Professeur Mustapha LAHMAR. Je tiens à le remercier de m'avoir encadré, guidé, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs et les doctorants du Laboratoire de Mécanique et Structures (LMS), et à toutes les personnes qui, par leurs paroles, leurs écrits, et leurs conseils et critiques, m'ont permis d'orienter ma réflexion et d'avoir accepté de m'aider et de répondre à mes questions lors de la préparation de ce mémoire de fin d'études.

Dédicaces

*Je dédie ce mémoire
à mes chers parents ma mère et mon père
pour leur patience, leur amour et leurs
encouragements.*

A mes frères.

A mes amis et mes camarades.

*Sans oublier tous les professeurs des cycles
primaire, moyen, secondaire, et de
l'enseignement supérieur.*

Report's Title :

Steady-State and Dynamic Analysis of Porous Gas Bearings (PGB)

Abstract

Increasingly, technological developments impose severe operating conditions for the rotors of rotating machinery due to the increase of rotational velocities, transmitted powers, and loads.

These conditions require us to use supporting elements with the best Steady-State and Dynamic performance characteristics.

The research study carried out in this report is essentially based on a linear modeling of the dynamic behavior of rotors mounted in porous gas bearings (PGB) operating in a hybrid lubrication regime which is a superposition of aerostatic and aerodynamic effects.

The linear approach developed by *Stodola* and retaken by *Hori* to study the stability of equilibrium position of the system as it exists thanks to the introduction of eight fluid-film dynamic coefficients, namely: four stiffness coefficients and four damping coefficients.

To calculate the *Lund's* stability parameters (i.e. the critical mass and the whirl frequency ratio), the eight dynamic coefficients should be determined using an analytical perturbation of the modified compressible *Reynolds* equation derived for turbulent flow in transient conditions.

The first order perturbation process and the adoption of the complex variables technique lead to the writing of three PDEs of order zero and one instead of five PDEs whose unknowns are the static pressure p_0 and the complex dynamic pressures q_ε and q_ϕ .

The nonlinear zero-order equation is solved by the central finite differences and the *Newton-Raphson* methods using two calculation molecules with five and nine points. On the other hand, the two dynamic equations are discretized using the finite differences method and the resulting algebraic equations system by the iterative *Gauss-Seidel* method with over-relaxation factor.

The obtained results highlight the non-negligible effects of the external supply pressure and the fluid flow regime on the steady-state and dynamic behavior of the porous gas bearing operating in hybrid lubrication regime.

Keywords :

Porous gas bearings, Hybrid lubrication, turbulent flow, Compressible fluid, Stiffness and damping coefficients, Dynamic Stability, Analytical perturbation technique, Finite differences Method, Newton-Raphson iterative Method, Gauss-Seidel iterative method.

العنوان: التحليل السكوني و الديناميكي للمحامل الغازية المسامية

ملخص

تفرض التطورات التكنولوجية ظروف تشغيل قاسية بشكل متزايد على أعمدة الماكينات الدوارة الناتجة عن زيادة سرعات الدوران ، القوى المنقولة ، والحمولات.

تتطلب هذه الشروط منا استخدام أنظمة محامل ذات الخصائص الثابتة وبالأخص الديناميكية الجيدة.

تعتمد الدراسة في هذه المذكرة أساسًا على مقارنة خطية للسلوك الديناميكي للعمود الدوار المركب في محامل الغاز المسامية التي تعمل بنظام هجين (تراكب للتأثيرات الهوائية في الظروف الساكنة والديناميكية الهوائية).

النموذج الخطي الذي طوره العالم الألماني ستودولا ثم استعمله من بعد الباحث الياباني هوري لدراسة استقرار نقطة التوازن للنظام في حالة وجودها بفضل استغلال المعاملات الديناميكية الثمانية للطبقة الهوائية.

يتم تحديد المعاملات الثمانية الديناميكية باستخدام تقنية الاضطراب التحليلي للمعادلة الرياضية لرينولدز حيث يتم تحويل هذه المعادلة الى ثلاث معادلات لحساب الضغوط في الظروف الساكنة والديناميكية.

تم حل المعادلة السكوني ذات السمة اللاخطية عن طريق الفروق المنتهية المركزية وطريقة الحساب التكراري لنيوتن رافسون باستخدام جزئين حسابيين (5 و 9 نقاط). بالمقابل يتم حل المعادلتين الديناميكتين من خلال طريقة الفروق المنتهية المركزية ومجموعة المعادلات الجبرية الناتجة عن هذه المقاربة العددية باستعمال طريقة غوس سايدال التكرارية.

تسلط النتائج التي تم الحصول عليها الضوء على الدور المؤثر للمحامل الغازية على السلوك الديناميكي للأعمدة الدوارة للماكينات مثل الضواغط التوربينية التي تجهز بعض المحركات الحرارية الخاصة .

تسلط النتائج التي تم الحصول عليها الضوء على تأثيرات ضغط الإمداد الخارجي و نظام تدفق السوائل في محمل الغاز المسامي الذي يعمل في نظام التزيت الهجين والتي لا ينبغي صرف النظر عنها.

Résumé

Les développements technologiques imposent des conditions de fonctionnement des rotors de machines tournantes de plus en plus sévères dues aux élévations des vitesses de rotation, des puissances transmises, et des charges.

Ces conditions nous imposent d'utiliser des organes de supportage dotés de bonnes caractéristiques statiques et surtout dynamiques.

L'étude résumée dans ce mémoire s'appuie essentiellement sur une modélisation linéaire du comportement dynamique d'une ligne d'arbre montée dans des paliers à gaz poreux (PGB) fonctionnant en régime de lubrification hybride où on a une superposition des effets aérostatiques et aérodynamiques.

L'approche linéaire développée par Stodola puis reprise par Hori nous permet d'étudier la stabilité de la position d'équilibre du système lorsque celle-ci existe grâce à l'introduction des huit coefficients dynamiques du film, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement.

Pour calculer les paramètres de stabilité de *Lund* (c-à-d ; la masse et la fréquence critiques), les huit coefficients dynamiques doivent être déterminés à l'aide d'une technique de perturbation analytique de l'équation de Reynolds compressible modifiée dérivée pour un écoulement non laminaire en régime transitoire.

Le processus de perturbation d'ordre un et l'adoption de la technique des variables complexes conduisent à l'écriture de trois EDPs d'ordre zéro et un au lieu de cinq dont les inconnues sont la pression statique p_0 et les pressions dynamiques complexes q_ε et q_ϕ qui dépendent sensiblement de la fréquence de perturbation ou d'excitation.

L'équation d'ordre zéro à caractère non linéaire est résolue par les méthodes des différences finies centrées et de Newton-Raphson en utilisant deux molécules de calcul (5 et 9 points). En revanche, les deux équations dynamiques sont discrétisées par la méthode des différences finies et le système d'équations algébriques résultant par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec facteur de sur-relaxation.

Les résultats obtenus mettent en évidence les effets non négligeables de la pression d'alimentation extérieure et du régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) sur le comportement statique et dynamique du palier à gaz poreux fonctionnant en régime de lubrification.

Mots clés :

Paliers à gaz poreux, Lubrification hybride, Ecoulement non laminaire, Fluide compressible, Coefficients de raideur et d'amortissement, Stabilité dynamique, Technique de perturbation analytique, Méthode des différences finies, Méthode itérative de Newton-Raphson, Méthode itérative de Gauss-Seidel.

Table de matières

Liste des figures	
Introduction générale	1
Chapitre I	
Analyse bibliographique sur les différentes technologies de paliers à gaz radiaux	
I.1 Introduction	6
I.2 Paliers cylindriques lisses	7
➤ Géométrie et notation	8
I.3 Palier à rainures en chevrons (herring bonegrooved bearing)	9
I.4 Paliers aérostatiques et hybrides	10
I.5 Paliers à patins oscillants (Tilting Pad Air Bearings)	15
I.6 Paliers aérodynamiques à feuilles (foil air journal bearings)	17
I.6.1 Paliers à feuille compliants : État de l'art	19
A) Premiers développements des paliers à feuilles	19
B) Progrès récents dans les paliers à feuille à l'échelle macro	20
MiTi Fuel Cell Compressor and high temperature Turbo-machinery	20
NASA Oil Free Turbomachinery Laboratory	21
Modélisation des paliers à feuille	21
Technologie de fabrication	23
I.7 Paliers à profil ondulé (wave journal bearing)	24
Le concept de palier à profil ondulé	25
I.8 Paliers à gaz poreux	27
I.9 Conclusion	30
Références du chapitre I	32

Chapitre II

Théorie des paliers à gaz poreux

II.1 Caractérisation d'un milieu poreux et modèles d'écoulements	37
II.1.1 Porosité	38
II.1.2 Perméabilité	39
II.1.3 La compacité	39
II.1.4 La connectivité et la tortuosité	39
II.2 Modèles d'écoulement en milieux poreux	41
II.2.1 Modèle de Darcy classique	41
II.2.2 Modèle de Darcy – Brinkman	42
II.2.3 Modèle de Darcy-Forchheimer	43
II.2.4 Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer-	43
II.3 Modélisation d'un palier poreux	44
II.3.1 Débit d'alimentation : loi de Darcy	44
II.3.2 Ecoulement du film : Equation de Reynolds modifiée	46
II.4 Extension de la théorie au cas du palier fonctionnant en régime turbulent : Équation de Reynolds turbulente	49
II.4.1 Tourbillons de Taylor	51
II.4.2 Transition entre les différents régimes d'écoulement dans un palier	51
II.4.3 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor	51
II.4.4 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent	52
II.5 Conclusion	52
Références du chapitre	53

Chapitre III

Modélisation du comportement dynamique linéaire du système rotor-paliers à gaz hybrides

III.1 Introduction	56
III.2 Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes	57
III.3 Normalisation de l'équation de Reynolds modifiée	58
III.4 Cas des petits mouvements : Modélisation linéaire	58
III.4.1 Concept des coefficients dynamiques d'un palier	59
III.4.2 Méthode de perturbation analytique : Calcul des coefficients dynamiques	62
a-Perturbation de l'épaisseur du film adimensionnelle H	63
b-Perturbation de la pression aérodynamique adimensionnelle P	64
c-Perturbation de la viscosité dynamique adimensionnelle $\tilde{\mu}$	64

d-Perturbation du nombre de Reynolds local Re	65
e-Perturbation des coefficients de turbulence K'_x et K'_z	65
III.5 Caractéristiques statiques du palier	69
III.5.1 Capacité de charge ou portance aérodynamique	69
III.5.2 Couple de frottement à la surface de l'arbre pour un écoulement turbulent	69
III.5.3 Débit massique de fuite latérale & vitesses moyennes de l'écoulement non laminaire	70
III.6 Analyse de la stabilité dynamique d'un palier à gaz hybride : Système en vibrations libres	71
III.7 Réponse dynamique d'un palier à gaz hybride: Système en vibrations forcées	72
Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre	72
III.8 Conclusion	75
Références du chapitre	76

Chapitre IV

Etude statique et dynamique d'un palier à gaz poreux

IV.1 Introduction	77
IV.2 Solution statique du problème de lubrification direct dans le cas d'une excentricité imposée	77
IV.2. 1. Schéma de discrétisation 1 : Utilisation de la molécule de calcul à cinq points	79
IV.2. 2. Schéma de discrétisation 2 : Utilisation de la molécule de calcul à neuf points	82
IV.3 Solution dynamique du problème d'interaction fluide-structure dans le cas d'une excentricité imposée: calcul des coefficients dynamiques et des paramètres de stabilité de Lund	85
IV.4 Validation	87
IV.5 Etude paramétrique	88
IV.5.1 Influence du régime d'écoulement sur les performances statiques et dynamiques du PGB	90
IV.5.2 Influence de la pression d'alimentation sur les performances statiques et dynamiques du PGB	93
IV.6 Conclusion	96
Références du chapitre	98
Conclusions générales et perspectives	99
ANNEXE A Discrétisation par différences finies des équations dynamiques	101

Liste des illustrations

Chapitre I

Fig. I.1. Typical journal bearing arrangement.....	7
Fig. I.2 Cylindrical bearing configurations : (a) plain bearing, (b) textured bearing.....	8
Fig. I.3 Geometric details and operating conditions of the plain journal bearing.....	9
Fig. I.4 Herringbone grooved journal bearings with and without smooth central part.....	10
Fig. I.5 Grooved rotor of a micro turbomachine.....	10
Fig. I.6 Schematic of EP journal bearings with single and double feed planes.....	11
Fig. I.7 EP journal bearing with a single feed plane equipped with 8 inherent orifices....	11
Fig. I.8 Typical pressure distribution in a concentric EP JB with a single feed plane.....	12
Fig. I.9 Typical pressure distribution in an eccentric EP JB with a single feed plane.....	13
Fig. I.10 Typical pressure distribution in a concentric EP JB with a double feed planes	13
Fig. I.11 Typical pressure distribution in an eccentric EP JB with a double feed planes...	14
Fig. I.12 Three lobed gas journal bearing.....	15
Fig. I.13 Schematic illustration of a tilting pad bearing with three pads.....	16
Fig. I.14 Overview foil bearing types: tension type and flexible surface.....	18
Fig. I.15 Overview compliant foil bearing types.....	19
Fig. I.16 Air Conditioning Pack.....	20
Fig. I.17 First-generation gas foil bearing cross-section schematic, and gas-film and bump foil structure models.....	22
Fig. I.18 Bump-type flexible elements with a top-foil (undeformed bumps in dashed lines)	23
Fig. I.19 Current design of foil bearings MITI technology.	23
Fig. I.20 Comparison between the wave journal bearing and the plain journal bearing..	24
Fig. I.21 Typical wave thrust bearing.....	24
Fig. I.22 The geometric details of a wave journal bearing.....	26
Fig. I.23 Configuration and notation of a porous aerostatic journal bearing.....	30

Chapitre II

Fig. II.1 Examples of natural porous materials: a) sandstone, b) limestone, c) beach sand, d) bread, e) wood, f) joint cartilage.....	36
Fig. II.2 Structure of voids in a porous medium: (a) connected voids, (b) unconnected void	37
Fig. II.3 Representation of the tortuosity of a porous medium.....	39
Fig. II.4 Structure of the polyurethane foam.....	39
Fig. II.5 Comparison of experimental values of permeabilities measured with water and ISO VG 46 oil for different porosities.....	40
Fig. II.6 Configuration and notation of a porous aerostatic journal bearing.....	46
Fig. II.7 Taylor vortices for a flow between two rotating concentric cylinders.....	50

Chapitre III

Fig. III.1 Cut-away view turbocharger.....	56
Fig. III.2 Linear dynamic model of a self-acting aerodynamic bearing.....	59
Fig. III.3 Systems of axes and notations.....	63

Fig. III.4 Characteristics of an elliptical trajectory.....	74
---	----

Chapitre IV

Fig. IV.1 2D orthogonal Cartesian finite difference grid used for spatial discretization of the first order modified Reynolds equation	78
Fig. IV.2 Computational molecule (stencil) used for the discretization of the modified Reynolds equation by central finite difference scheme.....	80
Fig. IV.3 Computational molecule (stencil) used for the generation of the Jacobian matrix coefficients by forward finite difference scheme	82
Fig. IV.4 Iterative calculation scheme of the stability parameters according to the Lund's stability criterion.	86
Fig. IV. 5 Comparison of pressure profiles calculated by the developed code with those published in the technical literature	87
Fig. IV. 6 Photograph of a porous material cylindrical journal bearing (PGB)	89
Fig. IV. 7 Steady-state performance characteristics of PGB versus operating eccentricity ratio.	90
Fig. IV.8 Variations of PGB laminar and turbulent synchronous stiffness coefficients over a range of eccentricity ratios.	91
Fig. IV.9 Variations of PGB laminar and turbulent synchronous damping coefficients over a range of eccentricity ratios.	92
Fig. IV.10 Representation of steady-state pressure field p_0 in [MPa] generated in the aerodynamic journal bearing for $\varepsilon_0 = 0.8, \beta = 0.$, and $p_s = 0$.	93
Fig. IV.11 Variations of steady-state performance characteristics as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .	94
Fig. IV.12 Variations of stiffness dynamic coefficients as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .	95
Fig. IV.13 Variations of damping dynamic coefficients as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .	96

Introduction générale

Les machines tournantes de conception ancienne se caractérisaient par des formes massives et de faibles vitesses de rotation. Pour améliorer les performances et le rendement de leurs machines, les constructeurs ont été amenés à réduire les masses en mouvement et augmenter les vitesses de fonctionnement. Une des premières conséquences de ces modifications est la sensibilité plus grande des machines modernes (turbo-compresseurs embarqués) aux problèmes de vibrations.

Parmi les phénomènes vibratoires qui affectent le comportement des machines tournantes telles que les turbomachines, ceux inhérents aux balourds ont été les premiers à se manifester. L'amélioration des techniques d'équilibrage a permis de les résoudre en partie, mais de nouveaux types de vibrations auto-excitées, liées non plus à la partie tournante seule (le rotor), mais au couplage partie tournante-supports fluides, ont alors été mis en évidence. En particulier, certaines instabilités aux conséquences dramatiques constatées sur des lignes d'arbre reposant sur des paliers à film d'huile ne peuvent s'expliquer que par la présence de paliers de ce type qui, dans certaines conditions de fonctionnement, peuvent devenir une source d'instabilité.

En effet, une simple avarie de palier rendant indisponible un groupe turbo-alternateur d'une centrale électrique cause de grosses pertes financières à la compagnie de production d'électricité. La connaissance des caractéristiques dynamiques des organes de supportage est donc devenue un élément indispensable dans la conception des machines tournantes modernes.

Historiquement, ce n'est qu'au début du XX^{ème} siècle qu'un intérêt fut porté sur l'influence des paliers fluides sur le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre. En 1924, Newkirk [1,2] montre expérimentalement la présence d'une vibration qui peut être supprimée par simple réduction de l'alimentation en huile du palier.

Humel [3] et Newrkik [4] confirmèrent, à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant joué par les paliers fluides. Ils observèrent qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement lorsque, le palier est faiblement chargé, l'arbre est animé d'un mouvement secondaire de fréquence proche de la moitié de la vitesse de la rotation (half frequency whirl) alors que pour des excentricités plus importantes, le système redevient stable. En 1956, Hori [5] détermina les huit coefficients dynamiques du palier, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement, en se basant sur la schématisation linéaire de Stodola [6] Figures 1 et 2. L'étude de paliers courts

effectuée par Holmes [7] confirma la validité des résultats obtenus par le modèle dynamique proposé par Hori [5].

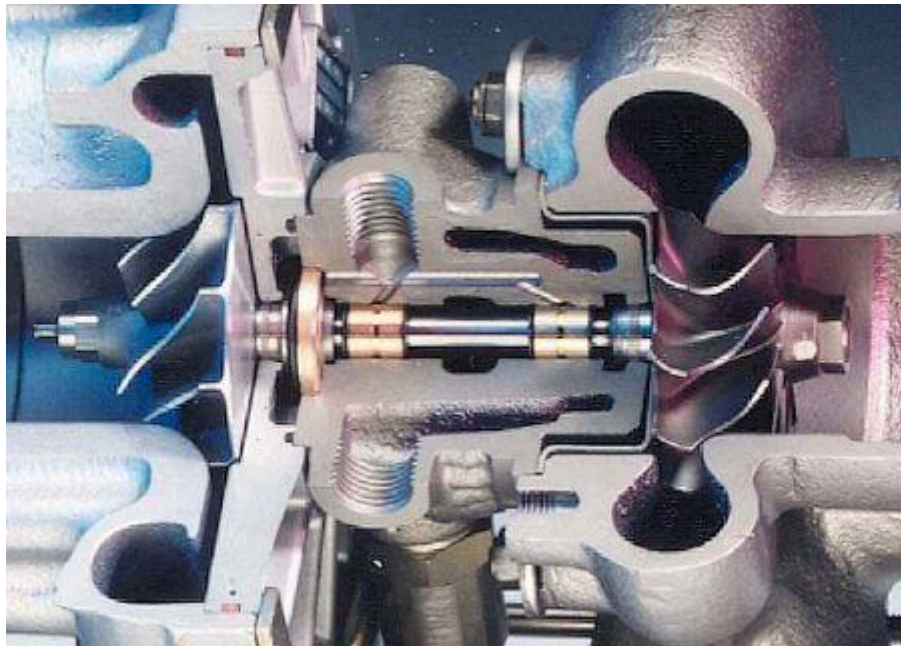


Fig. 1 Sectional view of an exhaust gas turbocharger for a gasoline engine showing compressor wheel (left) and turbine wheel (right). The bearing system consists of a thrust bearing and two fully floating journal bearings

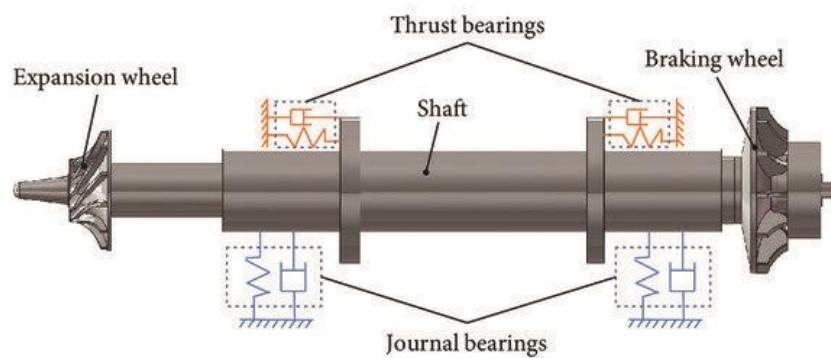


Fig. 2 Rotor of high-speed turbo-expander for gases liquefaction.

Il a été montré expérimentalement que les paliers utilisant des gaz comme lubrifiants (air, H_2 , He, CO_2) sont les meilleurs éléments de machines habilités pour atteindre des vitesses théoriquement illimitées en raison de la faible viscosité des gaz. Par comparaison aux paliers hydrodynamiques (HD) à film d'huile, il s'agit de systèmes mécaniques non polluants (eco-friendly) ne nécessitant que peu de maintenance.

D'autre part cette faible viscosité du gaz confère au palier un couple de frottement visqueux réduit comparé au palier HD à film d'huile. Outre cela, la viscosité du gaz varie peu avec la température ce qui permet des fonctionnements aussi bien à très hautes températures (700 °C) qu'à des températures cryogéniques. En revanche, cette faible viscosité engendre deux inconvénients majeurs, à savoir : une faible capacité de la charge et un amortissement limité.

Pour atténuer ces inconvénients, le concept du palier à gaz hybride (présence concomitantes des effets aérostatique et aérodynamique) est proposé comme une solution technologie alternative en vue d'améliorer davantage la capacité de charge et de réduire sensiblement le coefficient de frottement et par conséquent l'usure.

Par rapport au palier à gaz classique fonctionnant en régime aérodynamique pur, la différence essentielle est qu'il n'y a jamais de contact entre les deux surfaces puisqu'une pompe extérieure permet l'introduction du fluide sous pression à l'intérieur de la zone de contact via une matrice poreuse par exemple ce qui assure l'existence permanente d'un film lubrifiant même à vitesse nulle. Cela entraîne les avantages suivants :

- l'absence d'usure (plus longue durée de vie du système lubrifié) ;
- un coefficient de frottement très faible ;
- pas de frottement saccadé (stick-slip) ;
- une très grande raideur permettant de conserver un positionnement précis malgré des fluctuations de charge importantes ;
- la charge appliquée supportée par une plus grande surface ;
- les effets des défauts de forme des surfaces en présence sont moins importantes qu'en régime aérodynamique pur ;
- les effets thermiques au sein du film lubrifiant ne sont pas aussi significatifs ; ainsi, l'hypothèse d'un régime d'écoulement isotherme est justifiée.

Compte tenu des difficultés tant sur le plan technique que financier soulevées par la détermination expérimentale des caractéristiques dynamiques de ce type de palier, des approches théoriques ont été envisagées. Celles-ci ont connu un essor considérable avec le développement des moyens de calcul et des méthodes numériques tels que les différences finies, les volumes finis, et les éléments finis.

L'étude présentée dans ce mémoire de fin d'études représente une étape vers une meilleure connaissance théorique des caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à gaz hybrides fonctionnant à excentricité imposée telles que : la capacité de charge, le couple de frottement, le débit de fuite, les coefficients de raideur et d'amortissement, les paramètres de stabilité (fréquence et masse critique). Elle a conduit à l'élaboration d'un code MS-Fortran 90 d'aide à la conception des paliers à gaz poreux fonctionnant en régime de lubrification hybride (superposition des effets aérostatique et

aérodynamique) qui peut être intégré dans un système de calcul plus général conçu spécifiquement pour l'analyse dynamique des machines tournantes.

Le mémoire présentant ce travail comprend quatre chapitres, une introduction générale, et une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à une analyse bibliographique détaillée portant sur les

différentes technologies de paliers à gaz utilisés dans les applications industrielles modernes.

Nous avons considéré trois conditions de fonctionnement de paliers, à savoir les paliers aérodynamiques purs (self-acting bearings) comme les paliers à feuilles, les paliers à rainure hélicoïdale, et les paliers à profil ondulé ainsi que les paliers aérostatiques purs EP (Externally Pressurized Bearings) et les paliers hybrides (Hybrid Bearings) tels que les paliers poreux souvent utilisés pour des applications à grande vitesse nécessitant une rigidité et une stabilité dynamique élevées par comparaison aux paliers fonctionnant en régime aérodynamique pur.

Parmi toutes les technologies de paliers présentés dans cette investigation, nous avons retenu la technologie des paliers poreux fonctionnant en régime de lubrification hybride (présence concomitante des effets aérostatique et aérodynamique) dont l'analyse détaillée de leur comportement statique et dynamique sera présentée dans les deuxième et troisième chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la théorie de la lubrification aérodynamique en régime non laminaire basée sur le modèle mathématique de Boussinesq. Cette théorie a permis de dériver, à partir des équations décrivant un écoulement turbulent, une équation de Reynolds modifiée appelée équation de Reynolds turbulente permettant d'étudier le comportement des paliers aérodynamiques fonctionnant en régime turbulent pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 50000. L'intégration de cette équation moyennant certaines conditions limites permet de calculer la répartition de la pression dans le palier.

Le troisième chapitre est réservé à la modélisation linéaire du comportement dynamique du système rotor-paliers à gaz hybrides basée sur une schématisation du film fluide par huit coefficients dynamiques (modèle d'Hori) obtenus à partir d'une linéarisation des équations de mouvement du rotor à l'aide d'un développement en série de Taylor au voisinage de la position d'équilibre limité à l'ordre un. Ces huit coefficients, calculés au moyen d'une technique de perturbation analytique de l'équation de Reynolds compressible turbulente, servent comme des données pour l'analyse de stabilité dynamique du système rotor-palier en utilisant le critère de Routh-Hurwitz.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre est dévolu d'une part à la formulation et au traitement numérique des équations aux dérivées partielles d'ordres zéro et un décrivant le comportement

statique et dynamique du palier à gaz hybride muni d'une matrice poreuse. Ces trois équations sont dérivées à partir du processus de perturbation analytique de l'équation de Reynolds compressible modifiée écrite pour un écoulement turbulent. D'autre part, la deuxième partie de ce chapitre est dédiée à la présentation des résultats obtenus par le code de calcul développé avec interprétation dans le cadre de l'étude paramétrique envisagée.

Références

- [1] Newkirk, B,L., Shaft whipping, Gen. Electr. Rev., Vol. 27,169-178, 1924.
- [2] Newkirk, B,L., Taylor H.D, Shaft whipping due to oil action in journal bearings, Gen. Electr. Rev, P.559, 1925.
- [3] Hummel, B,L., Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des schmiermittels im Lager (*Critical speeds as a result of the flexibility of the lubricant in the bearing*), VDI-Forschift, P.287,1926.
- [4] Newkirk, B,L., whiling balance Shafts, Third ICAM, Stockholm, Proc . 3, PP. 105-110, 1931.
- [5] Hori Y., Thoery of oil whip, Fifth Japan Nat. Cong. A. M., 1955.
- [6] Stodola, A., Kritische Wellenstörung Infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager (*Critical shaft failure as a result of the flexibility of the oil cushion in the bearing*), Schweizerische Bauzeitung, PP.85-265,1955.
- [7]Holmes, R., The vibration of a rigid shaft in short sleeve bearings, J. Mech. Eng. Sci, Vol.2, 337-341, 1960.

Chapitre I

Analyse bibliographique sur les différentes technologies de paliers à gaz radiaux

I.1 Introduction

Dans le cas de mécanismes supportant de faibles charges ou demandant une très grande précision, le guidage en rotation des arbres par des paliers et des butées aérodynamiques constitue une solution technologique satisfaisante et relativement économique.

En effet, lorsque les vitesses de rotation deviennent très élevées ; c'est-à-dire lorsque la vitesse de rotation de l'arbre N dépasse 50000 *rpm*, la puissance dissipée par frottement visqueux ainsi que les problèmes thermiques qui en résultent ne sont plus négligeables. Il est alors possible de recourir à des fluides très peu visqueux; c'est le cas des gaz et en particulier de l'air pour lequel la viscosité dynamique est deux cent fois plus faible qu'une huile peu visqueuse.

Cependant, L'utilisation de l'air comme fluide sustentateur entraîne des modifications importantes dans l'étude théorique des lois d'écoulement ainsi que dans les principes de réalisation et les choix technologiques.

L'utilisation de paliers aérodynamiques présente donc un certain nombre d'avantages par rapport au palier à film d'huile. Parmi ces avantages, on peut citer :

- ✚ la possibilité de limiter les frottements fluides et donc les gradients de températures ce qui permet d'atteindre de grandes vitesses de rotation (application aux gyroscopes, aux turbines cryogéniques, aux réacteurs et aux turbines de conditionnement d'avions, etc.),
- ✚ une plus grande précision de guidage en rotation et en translation (application en métrologie, aux tables de machines-outils faiblement chargées (usinage d'alliages légers), aux supports d'antennes radars, aux capteurs sismiques à haute sensibilité, etc.),
- ✚ une meilleure fiabilité,

La faible viscosité des gaz présente néanmoins des inconvénients. Ainsi, lors de la conception d'un système mécanique utilisant un palier ou une butée à gaz, un certain nombre de problèmes doivent être pris en compte, à savoir :

- ✚ faible capacité de charge de ces mécanismes : les pressions maximales rencontrées dans le film aérodynamique sont de 10 à 20 fois plus faibles que celles des paliers à film d'huile,
- ✚ problèmes technologiques inhérents à la fabrication : afin de conserver des charges portantes raisonnables, il est nécessaire de diminuer le jeu radial ce qui exige une qualité

d'usinage très poussée, une stabilité dimensionnelle des matériaux utilisés ainsi qu'une bonne qualité de l'air,

✚ problème des instabilités de ces dispositifs que l'on peut regrouper en deux grandes familles :

- les vibrations dues à une perturbation extérieure (vitesse critique d'ensemble),
- les vibrations auto-excitées (whirl),

✚ lors des phases d'arrêt-démarrage, il y a contact entre les surfaces en regard avant la création du film aérodynamique d'où la nécessité de prévoir un revêtement de surface.

Dans ce qui suit, nous présenterons une description des différentes technologies de paliers à gaz utilisés comme organes de supportage des arbres de transmission de puissance de machines tournantes.

I.2 Paliers cylindriques lisses

Le terme palier lisse désigne un type spécifique de palier radial constitué d'un arbre tournant dans un alésage appelé coussin et Figure I.1. Ces paliers sont parfois appelés paliers complets (360°), par opposition aux paliers constitués de patins séparés appelés aussi paliers à arcs partiels [1].

Ce type de palier de réalisation simple peut fonctionner en régime de lubrification aérodynamique, aérostatique ou hybride. Considéré comme un élément essentiel de machines, le palier lisse a fait l'objet de nombreuses recherches, en particulier lorsque celui-ci utilise un liquide comme lubrifiant.

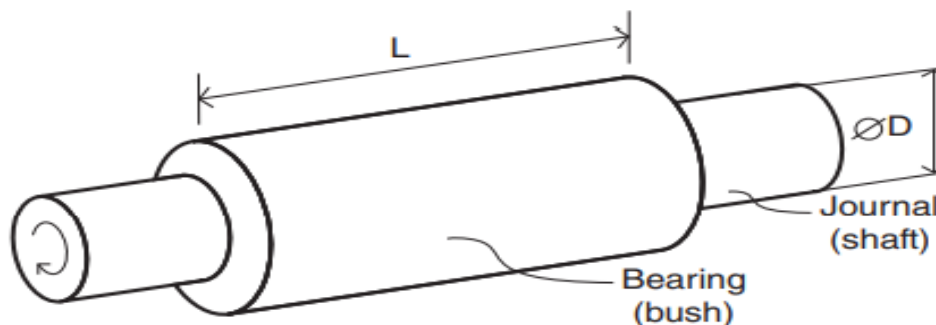


Fig. I.1. Typical journal bearing arrangement.

Les paliers cylindriques lubrifiés en régime aérodynamique peuvent être lisses ou texturés où des alvéoles ou des cavités sont usinées soit sur la surface du coussinet, soit sur celle de l'arbre, ou sur les deux, dans le but d'améliorer les performances aérodynamiques du palier Figure I.2.

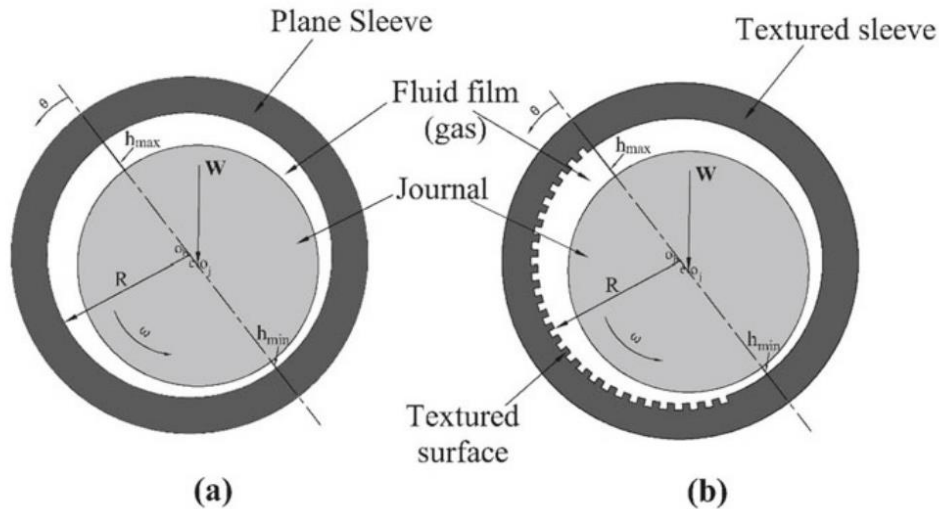


Fig. I.2 Cylindrical bearing configurations : (a) plain bearing, (b) textured bearing.

Malgré sa forme géométrique simple, le palier lisse peut constituer une source d'instabilité dynamique (whirl phenomenon) de la ligne d'arbre qu'il supporte lorsque celui-ci est faiblement chargé.

➤ Géométrie et notation

En se référant à la figure I.3, les caractéristiques géométriques du palier supposé parfaitement cylindrique sont :

- Rayon de l'arbre R (ou diamètre $D = 2R$).
- Jeu radial du palier C .
- La longueur du palier L .
- Excentricité du centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet e .
- Lorsque le coussinet est soumis à une pression externe, le nombre, la position et la taille des trous d'alimentation doivent en outre être spécifiés.
- Lorsque le coussinet ou l'arbre n'est pas lisse, la géométrie des surfaces doit être spécifiée par rapport à un cylindre ou alésage de référence nominal. Ceci est particulièrement pertinent pour deux types de paliers :

(i) les paliers aérodynamiques à rainures en chevrons (HGJB) et (ii) les paliers aérostatiques (EP) avec des cavités ou alvéoles peu profondes, ou des conicités des orifices d'alimentation.

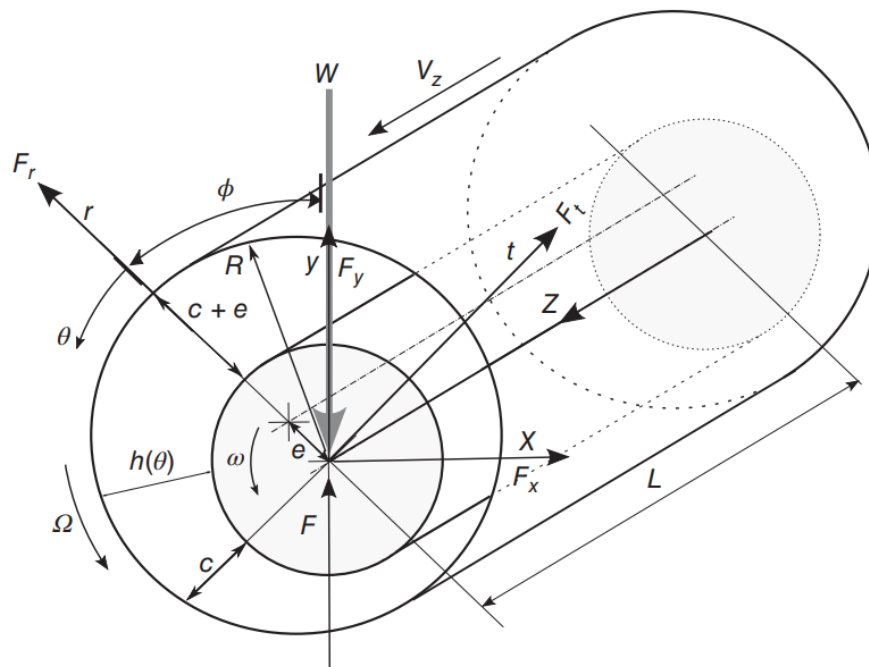


Fig. I.3 Geometric details and operating conditions of the plain journal bearing.

I.3 Palier à rainures en chevrons (herringbonegroovedbearing)

Le palier à rainures en chevrons, ou palier à rainures hélicoïdales (HGJB), est le type de palier rainuré le plus connu Figure I.4. Il a été largement développé dans les années 1950 et 1960 dans le but d'obtenir des performances supérieures à celles du palier lisse.

Par comparaison au palier lisse, le palier à rainures en chevrons bénéficie d'une plus grande marge de stabilité dynamique. Parmi les investigations effectuées sur ce type de palier, citons (Cunningham et al. [1] ; Wilcock [2] ; Muijderman [3] ; Vohr et Chow [4]); des travaux plus récents, contenant des modélisations et des analyses numériques, ont été publiés dans la littérature par (Bonneau et Absi [5]; Faria [6] ; Schiffmann [7]; Tomioka et al. [8]) et bien d'autres.

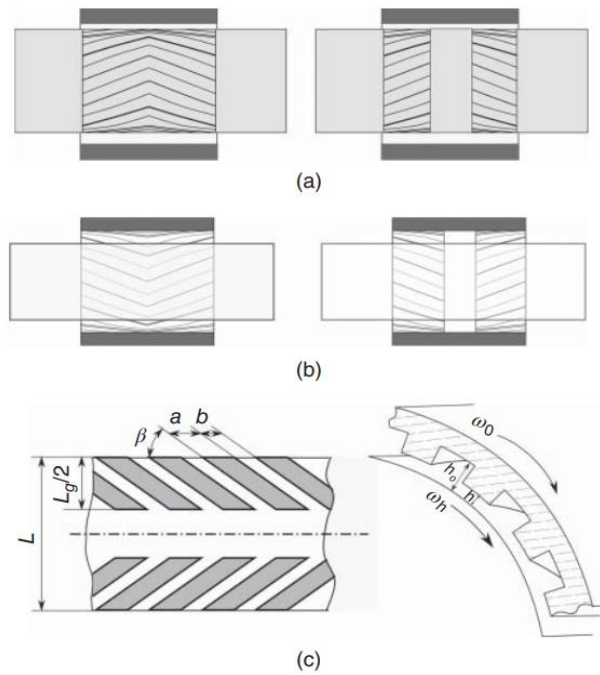


Fig. I.4 Herringbone grooved journal bearings with and without smooth central part (Not to scale).

(a) :grooves on shaft (full,left ; partial,right). (b) :grooves on bearing (bush)(full,left ;partial,right).(c) :notation.



Fig. I.5 Grooved rotor of a micro turbomachine

I.4 Paliers aérostatiques et hybrides

Contrairement aux paliers aérodynamiques, les paliers aérostatiques (Externally Pressurized journal bearings) dépendent d'une alimentation externe en gaz sous pression en vue d'augmenter la pression dans l'interstice. Ces paliers peuvent fonctionner à très basse vitesse avec une rigidité élevée et un amortissement raisonnable. Ils sont généralement utilisés pour des applications de haute précision.

Leurs caractéristiques de rigidité et d'amortissement dépendent du nombre et de la taille des orifices d'alimentation, ainsi que de la présence ou de l'absence de textures de surface telles que des cavités ou alvéoles peu profondes ou des conicités autour des trous d'alimentation. Lorsque la vitesse de rotation augmente, un effet aérodynamique est généré, qui peut devenir aussi important que l'effet aérostatique, donnant lieu à des problèmes d'instabilité dynamique (whirl). Dans ce cas, le palier aérostatique (EP) est communément appelé palier hybride. L'avantage de ce type de palier est qu'il assure une rigidité élevée et un amortissement adéquat pour des faibles vitesses mais il perd son avantage en matière de stabilité dynamique à des vitesses très élevées. Les applications typiques sont les broches de machines-outils tournant à grande vitesse destinées à l'usinage de haute précision.

Les paliers aérostatiques ont schématiquement la même structure de base que les paliers lisses, à l'exception du fait que le film d'air est alimenté par un fluide sous pression provenant d'une source externe. Il peut y avoir un seul plan d'alimentation ou plusieurs, comme le montre le schéma de la figure I.6.

L'objectif ou l'avantage d'opter pour un palier aérostatique est triple. Premièrement, ils conviennent le mieux aux applications de haute précision, par exemple les tables rotatives, etc., à des vitesses relativement faibles, voir par exemple Stout et Barrans [9]; deuxièmement, afin d'éviter le frottement et l'usure dus au démarrage et à l'arrêt ; troisièmement, pour fournir une meilleure stabilité dynamique dans les applications à grande vitesse.

L'équation de Reynolds décrivant le comportement du fluide dans le palier est la même que celle du palier lisse. Cependant, les conditions aux limites impliquent, en plus de la pression atmosphérique aux bords libres du palier, les pressions en aval des trous d'alimentation.

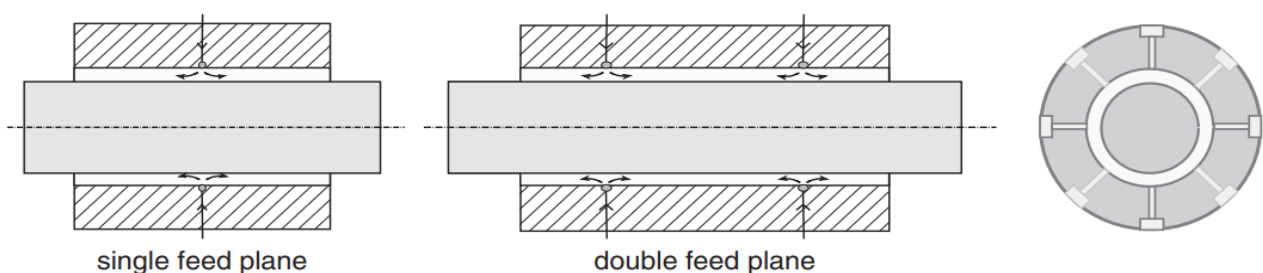


Fig. I.6 Schematic of EP journal bearings with single and double feed planes.

Chaque plan d'alimentation contient plusieurs trous d'alimentation, généralement plus de trois, mais de préférence plus de quatre, pour assurer la stabilité statique à une excentricité élevée figure I.7.

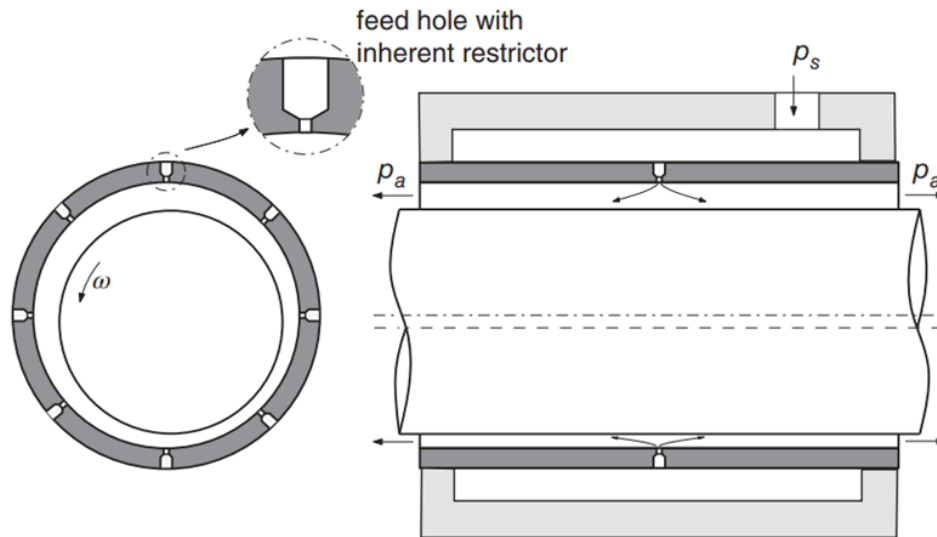


Fig. I.7 EP journal bearing with a single feed plane equipped with 8 inherent orifices.

La figure I.8 présente la répartition typique de pression dans un palier aérostatique muni d'un seul plan d'alimentation fonctionnant à une excentricité nulle, où l'on peut observer la symétrie du champ de pression aussi bien dans la direction axiale que la direction circonférentielle du palier. Lorsque l'excentricité augmente, comme sur la figure I.9, cette distribution s'écarte de la symétrie de sorte qu'une force radiale nette est générée.

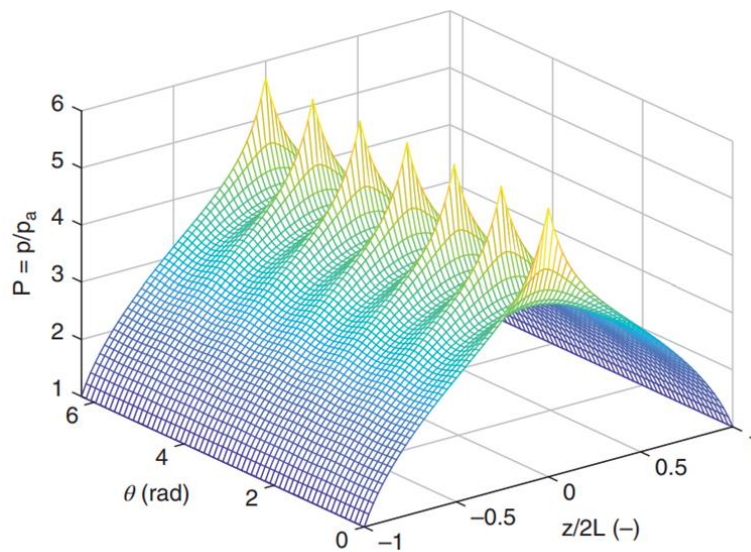


Fig. I.8 Typical pressure distribution in a concentric EP JB with a single feed plane.

Notons que malgré le rapport d'excentricité élevé de 0.8, les gradients de pression dans la direction circonférentielle ne sont pas aussi élevés que ceux des paliers aérodynamiques figure I.9.

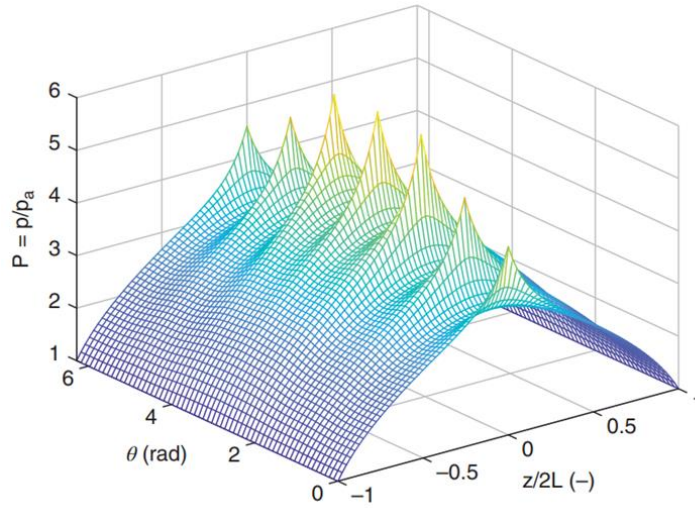


Fig. I.9 Typical pressure distribution in an eccentric EP JB with a single feed plane.

Les figures I.10 et I.11 présentent les distributions de pression d'un palier muni de deux plans d'alimentation. On observe le même comportement que celui du palier aérostatique à un seul plan d'alimentation, à l'exception de la présence d'une crête de pression quasi-uniforme dans la direction axiale entre chaque paire de trous d'alimentation et ce pour les deux configurations concentrique et excentrique.

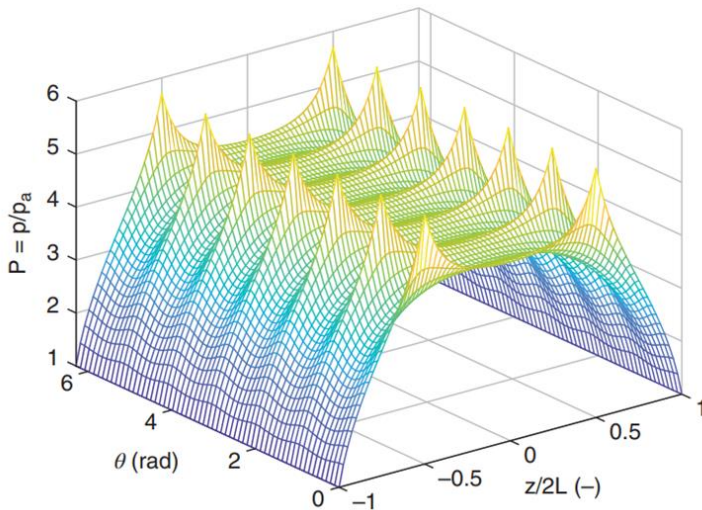


Fig. I.10 Typical pressure distribution in a concentric EP JB with a double feed planes.

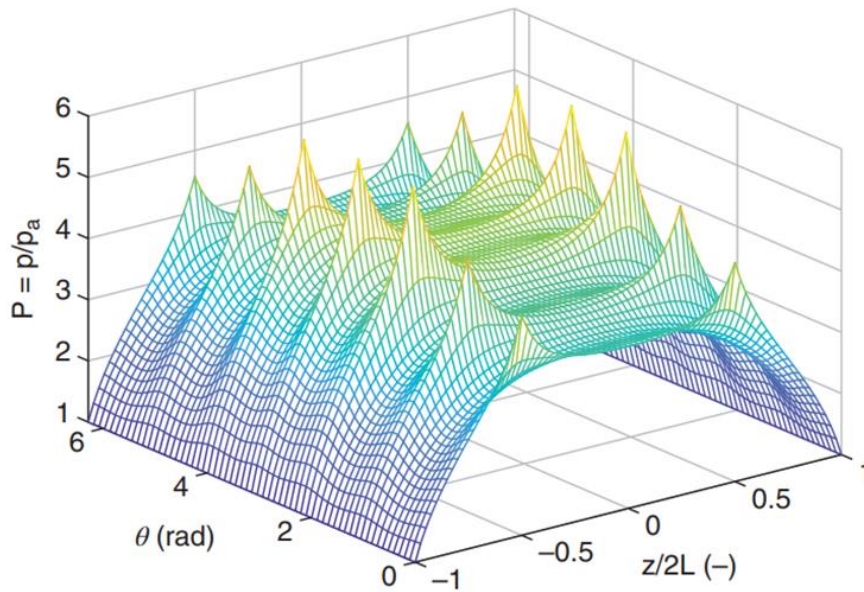


Fig. I.11 Typical pressure distribution in aneccentric EP JB with a double feed planes.

Dans la pratique, on peut trouver d'autres configurations géométriques de paliers à gaz tels que :

- des paliers lisses équipés d'une rainure longitudinale usinée à l'intérieur du coussinet pour améliorer la stabilité dynamique,
- des paliers à 2 ou 3 lobes pour améliorer la stabilité dynamique figure I.12,
- les paliers HGJB équipés de trous d'alimentation pour faciliter le démarrage-arrêt et ajouter de la rigidité à basse vitesse,
- les paliers HGJB dotés de rainures irrégulières,
- les paliers avec des surfaces compliantes ou avec des surfaces poreuses.

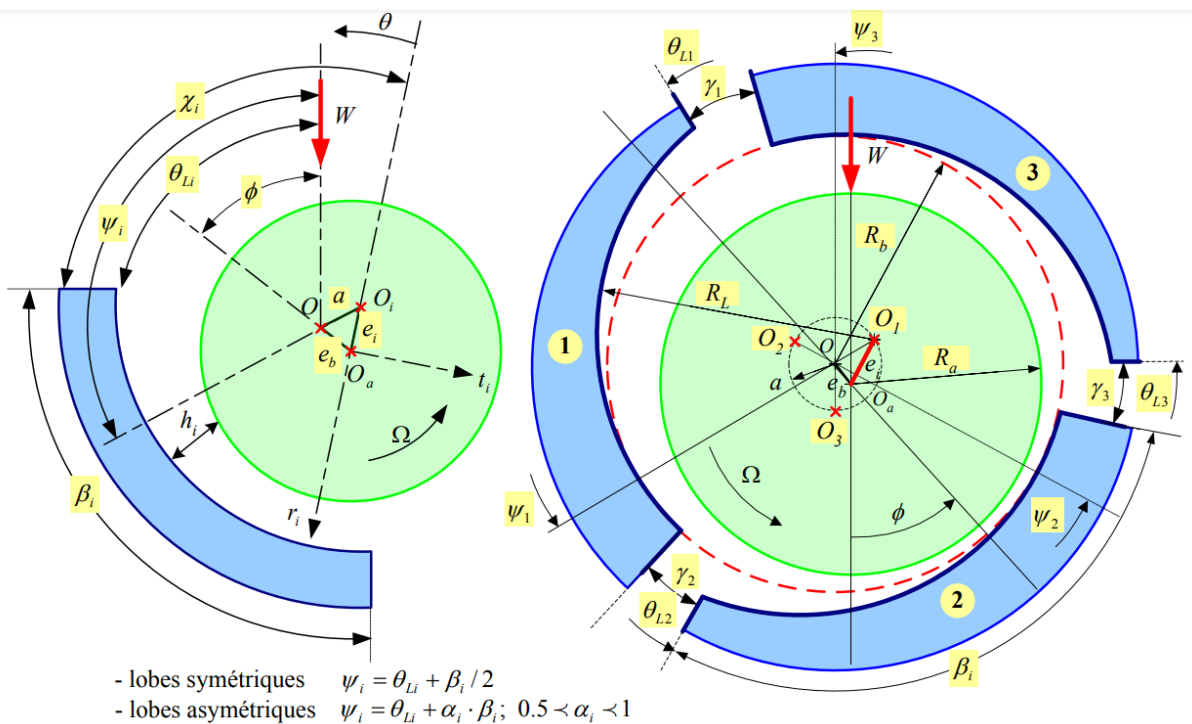


Fig. I.12 Three lobed gas journal bearing.

Depuis les années 1950 jusqu'à aujourd'hui, les paliers aérostatiques ou hybrides ont fait l'objet de nombreuses études en vue de mettre en évidence les effets aérodynamiques sur le comportement dynamique et la stabilité de ce type de palier : (Franchek [10] ; Kazimierski et Jarzecki [11] ; Liu et al. [12] ; Lund [13] ; Mori et al. [14] ; Osborne et San Andrés [15] ; Pink et Stout [16] ; Robinson et Sterry [17] ; Rohde et Ezzat [18] ; San Andrés et Ryu [19] ; San Andres [20] ; Stout et Rowe [21] ; Stout et Tawfik [22] ; Su et Lie [23] ; Tawfik et Stout [24] ; Waumans [25]. Stout [26]).

I.5 Paliers à patins oscillants (Tilting Pad Air Bearings)

Un palier à patins oscillants ou pivotants est constitué de plusieurs arcs mobiles comme le montre la Figure I.13. Chacun de ces arcs, souvent appelés patins, peut effectuer une petite rotation autour d'un point de pivotement. Le degré de liberté de rotation ainsi obtenu donne aux patins individuels la capacité de s'aligner sur le tourillon en rotation avec un angle de calage minimal, comme illustré à la Figure I.13. La mobilité du patin donne une meilleure stabilité dynamique au système par comparaison au palier lisse complet 360° ou de tout autre type de palier à paroi rigide. En outre, l'auto-alignement des patins facilite les tolérances de fabrication requises pour les surfaces des patins.

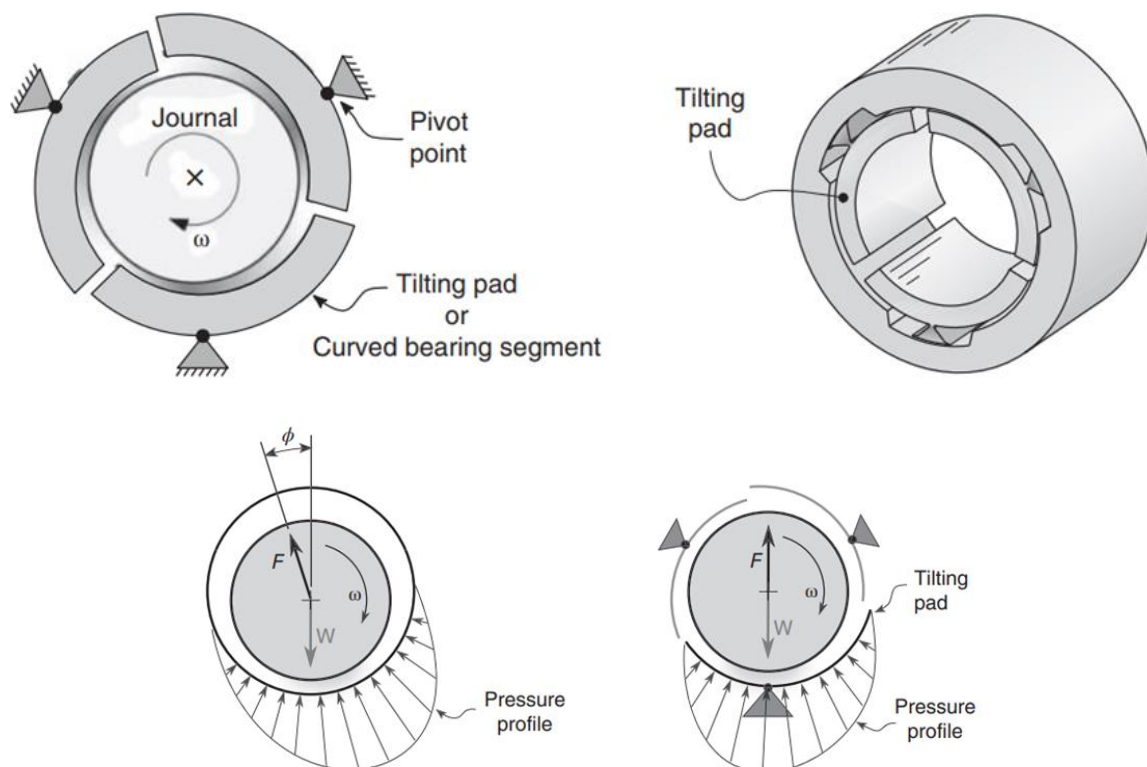


Fig. I.13 Schematic illustration of a tilting pad bearing with three pads.

Source: Nabuurs M [34].

Les avantages des paliers à patins oscillants étaient déjà reconnus il y a plus d'un siècle. Deux des premiers pionniers étaient Anthony G M Michell et Albert Kingsbury qui ont développé, au début du XXème siècle, et indépendamment l'un de l'autre, un palier ou butée axial hydrodynamique de type patin oscillant (Dimond et al. [27]). Ces paliers axiaux étaient utilisés dans les turbines à vapeur, les pompes centrifuges et les générateurs hydroélectriques. Michell a également inventé le palier à patins oscillants lubrifié à l'huile vers 1916 (Dimond et al. [27] ; Simmons et Advani [28]). Toutefois, ce n'est que dans les années 1960 que les premiers paliers à patins oscillants ont commencé à apparaître avec du gaz comme lubrifiant. L'une des premières mises en œuvre réussies de paliers à patins oscillants lubrifiés au gaz a été réalisée pour un circulateur à hélium, développé par la société française Rateau au début des années 1960 (Grassam et Powell [29] ; Powell [30] ; Shaw [31]). Le circulateur à hélium tournait à 12 000 rpm et était supporté par deux paliers à gaz à patins oscillants de diamètres internes de 160 mm et 140 mm. Ces paliers se sont révélés robustes et ont présenté un comportement démarrage-arrêt exceptionnel. Ils constituaient à l'époque un bel exemple des avantages des paliers aérodynamiques par rapport aux paliers aérostatiques équipant les grands circulateurs de gaz.

La recherche sur les paliers à gaz à patins oscillants a commencé à se développer dans les années 1960, ce qui a donné lieu à de nombreux modèles théoriques pour prédire leur comportement. L'une des principales contributions de cette époque est un article publié par Lund [32]. Lund a présenté une méthodologie analytique élégante pour calculer les coefficients de rigidité et d'amortissement synchrones pour les paliers à patins oscillants non flexibles. Sa méthode est maintenant connue sous le nom de méthode d'assemblage de Lund et a été mise en œuvre dans de nombreux modèles depuis lors (Nicholas [33]). Jusqu'au début des années 1970, les études sur les paliers lisses à patins oscillants se sont principalement concentrées sur les propriétés en régime permanent, telles que la capacité de charge et les pertes de puissance. Les quelques modèles dynamiques non synchrones, destinés à prédire le comportement tourbillonnaire (whirl) et la stabilité dynamique, étaient à l'époque limités aux paliers infiniment longs, ou étaient mathématiquement incorrects en raison de l'utilisation de la fréquence synchrone dans leurs calculs de stabilité (Dimond et al. [27]). Il a fallu attendre près de dix ans de plus pour que Lund finisse par faire remarquer en 1978 que ce n'est pas la fréquence synchrone mais la fréquence naturelle (amortie) qui doit être utilisée pour les calculs de stabilité (Dimond et al. [27] ; Nicholas [33]).

I.6 Paliers aérodynamiques à feuilles (foil air journal bearings)

Le palier à feuilles est un cas particulier des systèmes lubrifiés en régime élastoaérodynamique (EAD) dans lequel la surface du palier compliant (souple) peut être déformée sous l'action des

pressions aérodynamiques engendrées dans le film fluide. Cette situation pourrait offrir certains avantages intéressants.

Les paliers à feuilles peuvent être classés en deux catégories :

- (i) les paliers avec (au moins une) surface d'appui sous tension (appelés en anglais tension type foil bearings TTFB),
- (ii) les paliers avec (au moins une) surface d'appui comportant un matériau à faible module d'élasticité (Gross [35]) (appelés paliers à feuille compliant ou en anglais : compliant surface foil bearings), Figure I.14. Dans cette dernière catégorie, le matériau à faible module d'élasticité dont le comportement rhéologique peut être élastique ou viscoélastique (par exemple, du caoutchouc de silicone).

Le développement des TTFB a commencé avec la publication de Blok et Van Rossum [36]. La plupart des développements concernant les TTFB ont eu lieu au début des années 1970 avec les publications de Licht [37] Eshel et Wildmann [38] et Barlow [39] pour les types aérodynamique et aérostatique. La principale application de ce type de palier est l'utilisation dans les magnétophones où la bande se déplace sur un arbre. La version aérostatique a été développée par Al-Bender (Al-Bender et Smets [40]) qui utilise des paliers à feuille sous pression externe comme palier lisse linéaire sur un arbre non rotatif. Les paliers à film tendu ne sont plus utilisés comme paliers lisses pour les applications à haute vitesse.

À la fin des années 1970, deux types différents de paliers à feuilles flexibles étaient en cours de développement (Figure I.15). Le modèle en porte-à-faux (a), souvent appelé palier à feuilles multiples (Multi-leaf foil bearing), a été développé par des sociétés comme AiResearch (Air Force Aero Propulsion Laboratory). De nos jours, la conception en porte-à-faux n'est plus utilisée.

Le développement du palier à feuilles de première génération, également appelé conception Hydresil, était initialement le travail de Mechanical Technology Incorporated (MTI) (Walowit et Anno [41]) et plus tard de Mohawk Innovative Technologies (MiTi). L'histoire de ce type de palier à feuille est également bien illustrée dans la publication d'Agrawal [42] Au début, le développement était (presque) uniquement le fait d'entreprises et non d'instituts de recherche. Cela explique le manque de modélisation et de connaissances précises dans la littérature. La plupart des connaissances se trouvent encore au sein de ces entreprises et les applications se limitent très spécifiquement aux cas où il est possible d'investir dans le développement d'une conception spécifique de palier à feuille. L'accent est clairement mis sur les résultats et les avantages obtenus et non sur la compréhension physique du palier. Il existe plusieurs générations de paliers à feuilles, chacune offrant une capacité de charge plus élevée. Dans la deuxième génération de paliers à feuille (Figure I.15c), un raidisseur

(stiffner) à rigidité variable et un raidisseur de feuille supérieure sont utilisés. Dans la troisième génération, la rigidité variable est encore plus prononcée (cf. Figure I.15d).

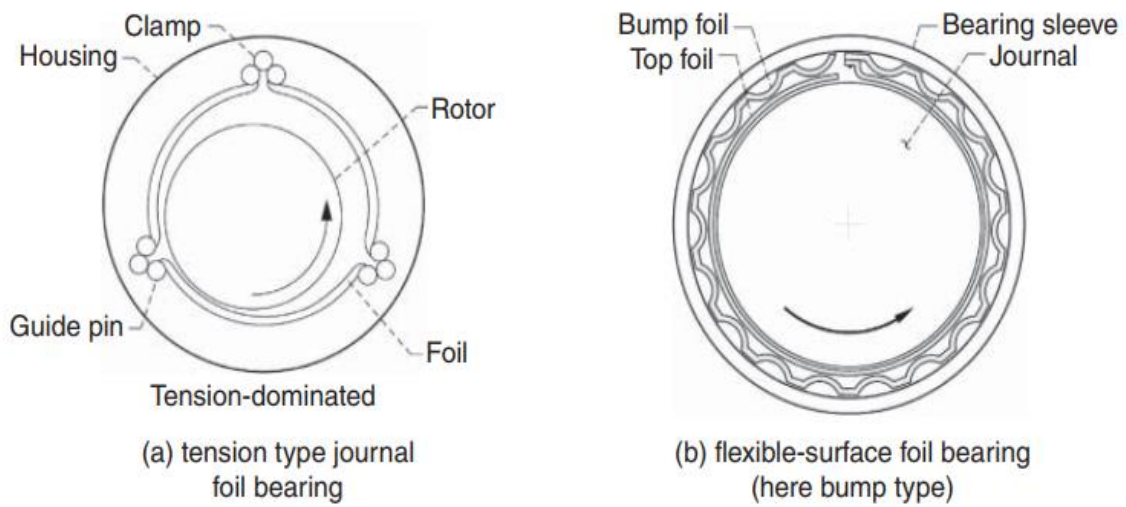


Fig. I.14 Overview foil bearing types: tension type and flexible surface.

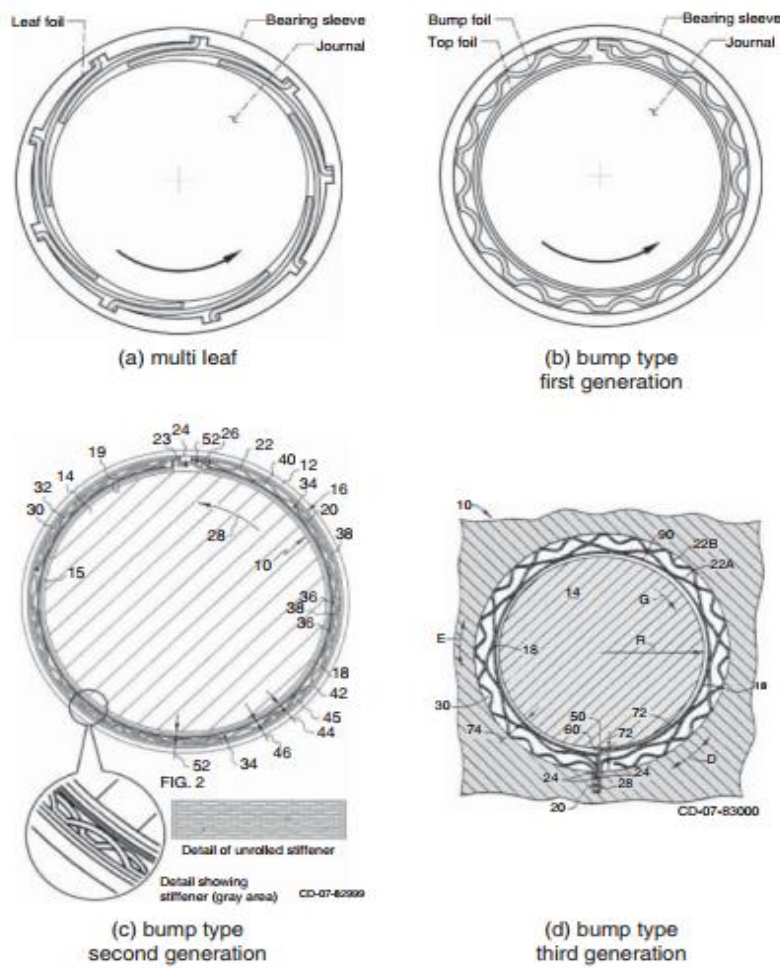


Fig I.15 Overview compliant foil bearing types.

À la fin des années 1990, les paliers à feuilles sont devenus très populaires, et même très médiatisés, dans la recherche, souvent en raison du besoin de turbomachines sans huile (free oilmachinery) et des exigences de vitesse élevée. La plupart des publications se concentrent donc sur des applications à l'échelle macro ou sur des diamètres d'arbre de plus de 20 mm et une vitesse limitée à 150 000 rpm. La caractérisation des paliers à feuilles est essentiellement basée sur des essais expérimentaux. Cependant, récemment, de plus en plus d'articles ont été publiés sur la modélisation théorique des paliers à feuille en général et sur les applications à très petite échelle (diamètre d'arbre < 20 mm) et à haute vitesse (> 150 000 rpm) en particulier.

I.6.1 Paliers à feuille compliants : État de l'art

A) Premiers développements des paliers à feuilles

La réduction des masses et volumes embarqués est une question centrale dans le domaine des transports, en particulier dans le secteur aéronautique. Il est à l'heure actuelle possible d'améliorer les performances des turbomachines, notamment en augmentant les vitesses de rotation et en diminuant le diamètre des arbres. De cette façon, il est alors possible de concevoir des turbomachines qui seront à la fois plus compactes et plus efficaces.

Les machines à cycle air (ACM : Air Cycle Machines) dont les paliers à feuille font partie intégrante sont des turbomachines tournant à haute vitesse employées comme des organes centraux du système de contrôle de l'environnement (ECS) de l'avion (Figure I.16). Ce système est celui qui est responsable du contrôle de refroidissement, de chauffage et de la pressurisation de l'avion. De nos jours, la plupart des systèmes de contrôle de l'environnement équipant les avions civils et militaires utilisent des paliers à feuilles.

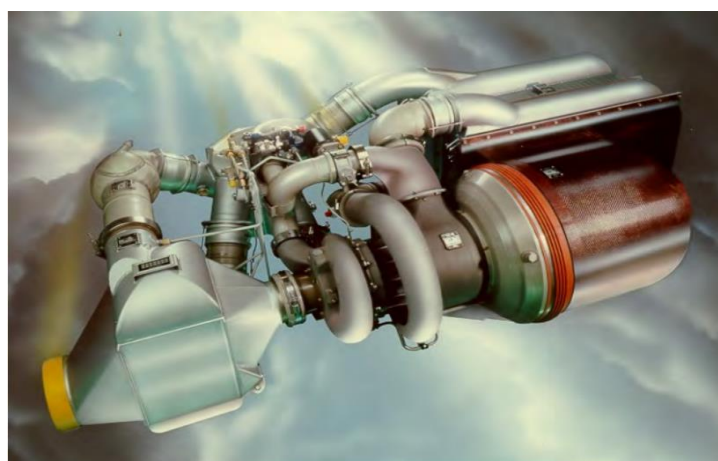


Fig I.16 Air Conditioning Pack.

(Agrawal, [42]) affirme qu'en 1997, presque toutes les unités ACM des avions militaires et civils utilisent des paliers à feuille. Il montre également, malheureusement sans aucun détail sur les paliers,

les résultats de plusieurs ACM, comme l'avion de chasse F-18 qui tourne jusqu'à 95 000 rpm et pour le Cessna Aircraft-550 qui tourne jusqu'à 105 000 rpm.

B) Progrès récents dans les paliers à feuille à l'échelle macro

MiTi Fuel Cell Compressor and high temperature Turbo-machinery

Mohawk InnovativeTechnologyInc., ou MITI, est le plus grand fournisseur mondial de paliers à feuille. L'utilisation des paliers à feuille est aujourd'hui limitée à des applications spécifiques dans les turbomachines des avions (ACM). Dans leurs dernières publications, les constructeurs de moteurs d'avion (Pratt & Whitney, General Electric) essaient de remplacer les roulements à rouleaux des turboréacteurs par des paliers à feuilles. Ces applications sont très difficiles car la vitesse et la température sont beaucoup plus élevées. En 2005, Heshmat et (Walton, [43]) ont présenté un rapport dans lequel ils ont brièvement décrit un banc d'essai de palier à feuille fonctionnant à des hautes températures allant jusqu'à 650°C. Pour ce turboréacteur spécifique, la réduction des coûts serait de 20% et le poids pourrait être réduit de 30%, en raison de l'élimination du système de lubrification complet. En 2006, Heshmat (Heshmat et Tomaszewski, [44]) a présenté une nouvelle conception d'un turboréacteur de classe *134 N, 120 000 rpm*, avec un palier à feuille haute température et un roulement à billes monté de manière conforme près du compresseur. Les conclusions sont comparables à celles de la publication précédente. Les paliers à feuille peuvent également constituer une solution intéressante pour les piles à combustible (fuel cells). MITI (Walton et al. [45]) a présenté une étude préliminaire de conception du système pour le turbocompresseur d'une pile à combustible à membrane d'échange de protons. Dans cette conception, ils visent une vitesse de 250 000 rpm avec un arbre de l'ordre de 20 mm de diamètre. Un point important dans cette conception est le palier de butée. Plusieurs paliers de butée différents ont été testés pour une charge allant jusqu'à 98 N et une vitesse allant jusqu'à 250 000 rpm.

NASA Oil Free Turbomachinery Laboratory

La NASA (Howard et al, [46] ; Radil et al, [47]) a réalisé de nombreux travaux expérimentaux. Leur travail actuel se concentre sur un revêtement résistant à la chaleur et à faible friction appelé PS304. Ce revêtement est appliqué sur la surface du rotor afin de réduire le frottement et d'éviter ainsi l'usure excessive du rotor. Il s'agit d'un mélange d'un liant NiCr, d'un durcisseur d'oxyde de chrome, et d'argent.

Ils ont testé ce revêtement sur une microturbine Capstone C30 disponible dans le commerce à une vitesse de 100 000 rpm.

La NASA a réalisé un grand nombre d'expériences sur le comportement des paliers à feuille à haute température. La rigidité statique a diminué d'un facteur de deux à 500°C par rapport à la rigidité à température ambiante. Malheureusement, ils n'ont pas donné une bonne explication de la cause de cette diminution. Pour ces expériences, ils ont utilisé un palier à feuille de 35 mm de diamètre tournant à une vitesse de 30 000 rpm, ce qui n'est pas si rapide.

Récemment, des recherches ont été entreprises sur l'influence de l'air de refroidissement sur les paliers à feuilles. En raison des pertes par effet visqueux, on peut s'attendre à un gradient de température qui peut être suffisamment important pour avoir une influence sur le comportement du palier. En 2006, Dykasfit quelques essais portant sur l'influence de l'air de refroidissement sur le comportement d'un palier de butée. Ils conclurent que l'air de refroidissement affecte de façon significative la capacité de charge de la butée.

Modélisation des paliers à feuille

Bien que les paliers à feuille (Figure I.17) soient des systèmes complexes composés d'un film d'air, d'une feuille supérieure, d'une structure flexible et, dans certains cas, d'une source d'amortissement (par exemple, frottement hystérétique ou revêtements spéciaux), il est possible de simuler facilement certains aspects de leur comportement. Un modèle très populaire a été publié pour la première fois par (Heshmat et al, [48]) et est toujours utilisé. Dans ce modèle, la feuille supérieure est modélisée comme un profilé supérieur idéal assez rigide pour ne pas avoir de "flèche ou déformée(sag)" entre les "bumps" ou les ressorts (Figure I.18) mais sans rigidité de membrane ou de flexion. Cela signifie que la déflexion locale en chaque point ne dépend que des forces agissant sur ce point particulier.

L'hypothèse de l'absence de membrane ou de rigidité en flexion est contestable car le voile supérieur est plié en une coquille qui lui confère une rigidité dans la direction axiale (Carpino et al. [49]). Néanmoins, cet effet de raidissement (stiffening) ne doit pas être surestimé. La flexibilité de la feuille supérieure dans la direction axiale est utilisée dans les paliers à feuille ondulée de deuxième et troisième générations pour améliorer les performances en faisant varier, dans la direction axiale, la rigidité de l'élément flexible, c'est-à-dire les "bumps".

L'hypothèse d'une feuille supérieure idéale surestime la déflexion dans la section centrale du palier, car la pression est plus élevée dans cette région, et sous-estime la hauteur du film d'air près des bords où la pression est faible.

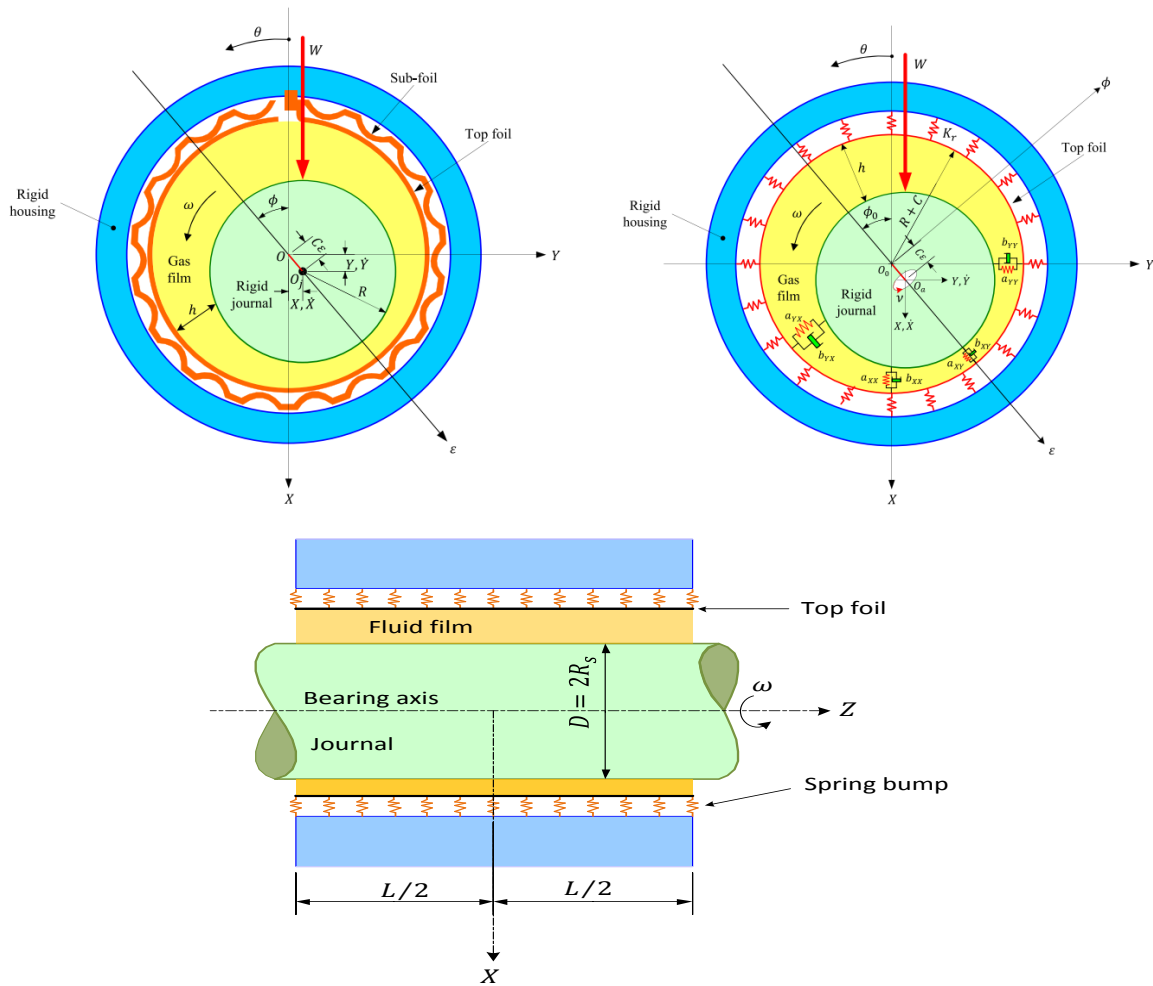


Fig. I.17 First-generation gas foil bearing cross-section schematic, and gas-film and bump foil structure models (the flexible structure is represented by spring elements).

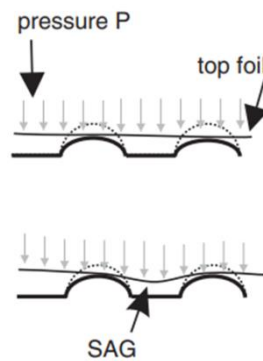


Fig. I.18 Bump-type flexible elements with a top-foil (undeformed bumps in dashed lines). The bottom figure shows the effect of sag between two bumps, caused by a top-foil with too low stiffness.

Technologie de fabrication

La conception la plus courante d'un palier à feuilles consiste en une feuille ondulée sous-jacente (appelée feuille à bosses) comme élément flexible et une feuille supérieure; Figure I.19. La rigidité de l'élément flexible est un paramètre crucial dans toutes les conceptions de paliers à feuilles. Pour les

"bumps" semi-cylindriques avec un frottement négligeable, la rigidité de surface $k(N/m^3$ ou Pa/m) peut être calculée par la relation ci-dessous (Walowit and Anno, [41]) :

$$k_{bump} = \frac{Et_b^3}{2s(1-\nu^2)l^3}$$

où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson du matériau constituant la feuille ondulée.

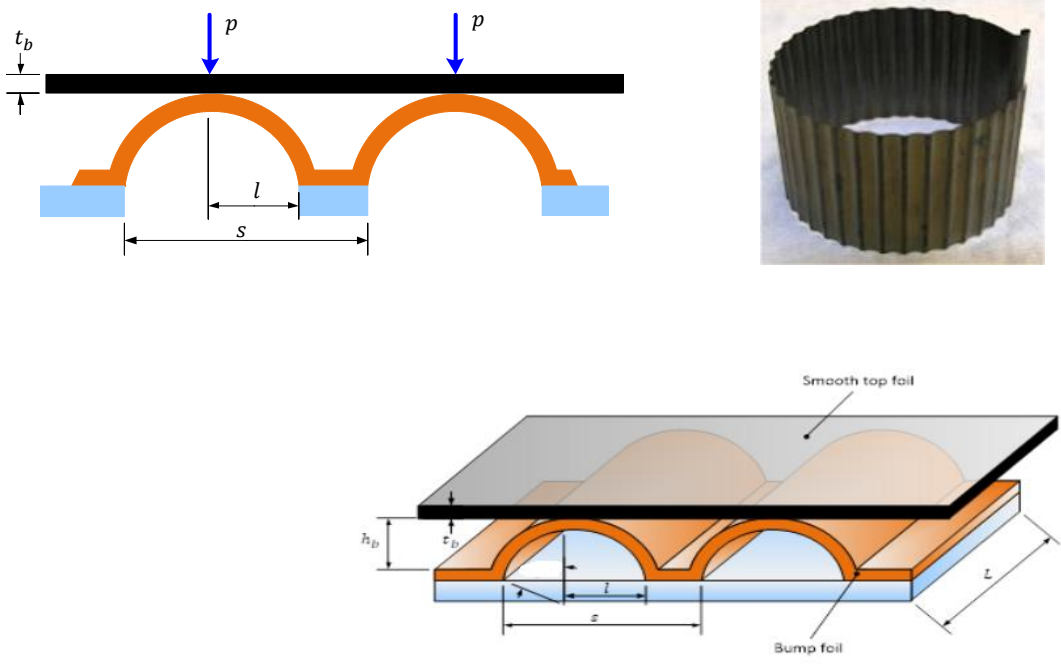


Fig. I.19 Current design of foil bearings MITI technology.

I.7 Paliers à profil ondulé (wave journal bearing)

Ce nouveau type spécial de palier à film fluide appelé aussi "palier ondulé" a été développé depuis les années 1990 par Dimofte (Dimofte, [50] ; Dimofte, [51]). La principale caractéristique géométrique de ce type de paliers est qu'il présente un profil d'onde continu sur la partie fixe du palier figure I.20.

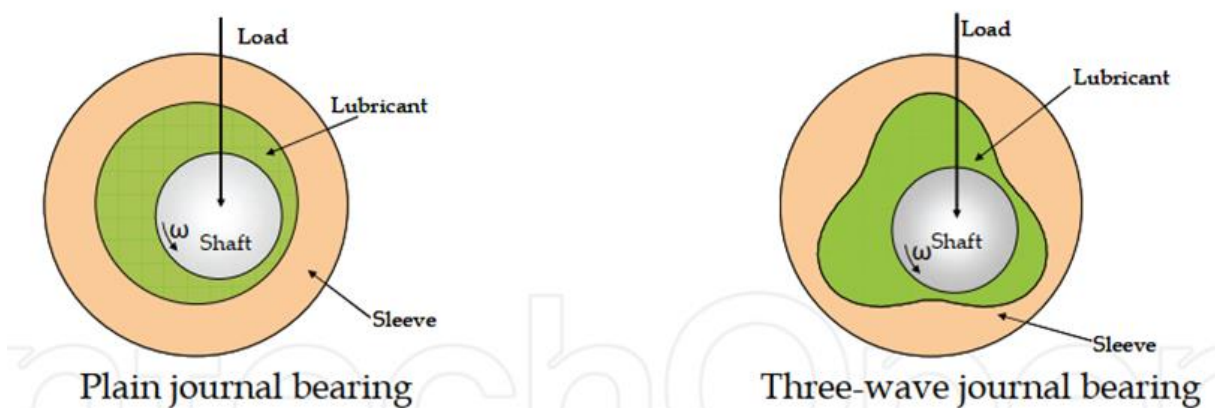


Fig. I.20 Comparison between the wave journal bearing and the plain journal bearing.

Les paliers à surface ondulée peuvent être conçus comme des paliers lisses pour supporter des charges radiales ou comme des paliers de butée pour les charges axiales. L'un des principaux avantages des paliers à surface ondulée est qu'ils sont très simples et faciles à fabriquer. D'autre part, ce type de palier génère une pression aérodynamique quel que soit le sens de rotation du rotor (sens horaire ou antihoraire). Dans la plupart des cas, ils ne comportent que deux parties. Un palier lisse se compose d'un arbre et d'un coussinet, tandis qu'un palier de butée (thrust bearing) se compose d'un disque fixe et d'un disque rotatif Figure I.21.

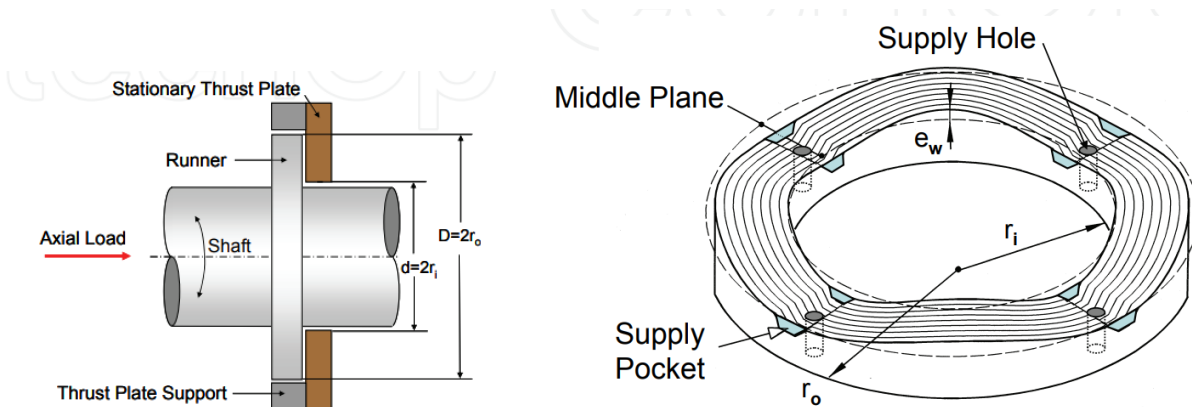


Fig. I.21 Typical wave thrust bearing.

L'une des parties du palier est parfois incorporée dans la pièce de la machine qui est supportée par le palier. Par exemple, le palier ondulé peut être utilisé pour supporter l'engrenage d'une transmission planétaire, le manchon du palier étant incorporé à l'engrenage (Dimofte et al. [52]). Des fluides compressibles (gaz) ou incompressibles (liquides) peuvent être utilisés comme lubrifiants pour les paliers et les butées ondulés. Des essais ont été réalisés avec des lubrifiants liquides (huile de turbine synthétique, perfluoropolyéthères -PFPE-K) et de l'air sur des bancs d'essai installés au centre de recherche Glenn de la NASA à Cleveland, OH USA (Dimofte et al. [52] ; Dimofte et al. [53]).

Le concept de palier à profil ondulé

Pour illustrer le concept du palier à surface ondulée, la figure I.20 présente une comparaison entre un palier cylindrique lisse et un palier ondulé dont le profil comprend trois ondes. Sur cette figure, l'amplitude de l'onde e_w et le jeu entre l'arbre et le coussinet C sont fortement exagérés pour mieux visualiser la géométrie. En réalité, le rapport du jeu de fonctionnement diamétral au diamètre du palier est de l'ordre de un millième ($\frac{C}{D}=10^{-3}$) et l'amplitude de l'onde est inférieure au jeu radial.

Comme la géométrie du palier ondulé est très proche de celle du palier circulaire lisse, la capacité de charge du palier à surface ondulée est proche de celle du palier lisse et est supérieure à celle des autres types de paliers fluides. En fait, en raison de leur meilleure stabilité thermique, les paliers

ondulés peuvent supporter une charge supérieure à celle des paliers lisses. Le concept de palier à profil ondulé résout deux problèmes rencontrés par les paliers lisses à film fluide en assurant une meilleure stabilité dynamique du système (Ene et al. [54]) et en donnant une rigidité accrue au palier (Dimofte, [50]). Les paliers ondulés ont également d'importantes propriétés d'amortissement. Ils permettent ainsi d'atténuer les amplitudes de vibrations du rotor. Par conséquent, le système d'amortissement fluide supplémentaire, généralement requis lorsque d'autres types de paliers sont utilisés pour supporter l'arbre en l'occurrence les paliers de roulement, peut être éliminé. En raison de leurs propriétés d'amortissement, les paliers ondulés peuvent également être utilisés pour atténuer les émissions acoustiques générées par l'engrènement dans une transmission par engrenages (Dimofte & Ene, [55]). Les paramètres géométriques d'un palier à profil ondulé sont illustrés sur la figure I.22.

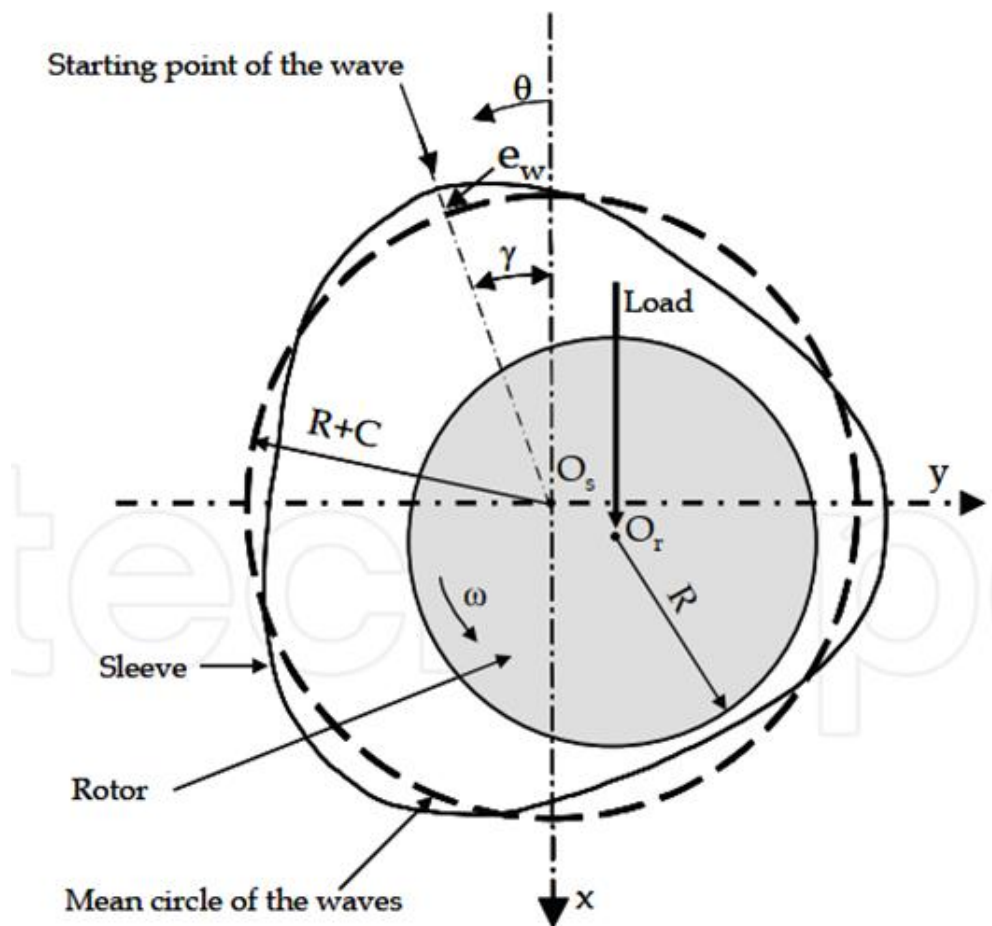


Fig. I.22 The geometric details of a wave journal bearing.

Le jeu radial C de ce palier à profil spécial est défini comme la différence entre le rayon du cercle moyen des ondes, R_{med} , et le rayon, R , de l'arbre :

$$C = R_{med} - R$$

Pour les calculs, l'amplitude de l'onde est généralement adimensionnée en la divisant par le jeu radial :

$$\varepsilon_w = \frac{e_w}{C}$$

Le rapport ε_w est généralement appelé rapport d'amplitude de l'onde. Le rapport d'amplitude de l'onde est l'une des caractéristiques géométriques les plus importantes d'un palier ondulé car les performances de ce palier sont sensiblement influencées par ce rapport (Ene et al. [54]) dont la valeur est inférieure à 0,5.

Les performances du palier ondulé dépend également du nombre d'ondes, n_w , et de l'angle de positionnement des ondes, γ défini comme l'angle entre le point de départ des ondes (un des points où l'onde a une amplitude maximale) et la direction de la charge appliquée au palier. Les études théoriques et expérimentales indiquent que la meilleure performance est obtenue pour un palier avec trois ondes et un angle de positionnement $\gamma=0$ (Dimofte, [50]; Dimofte, [51]).

La capacité de charge d'un palier ondulé est due à la rotation de l'arbre et à la variation de l'épaisseur du film le long de la circonférence. Dans un système de référence (O_s, x, y) fixé par rapport à la charge, l'épaisseur du film est donnée par :

$$h = C + x \cos \theta + y \sin \theta + e_w \cos[n_w(\theta + \gamma)]$$

où C est le jeu radial du palier, θ est l'angle du palier dont l'origine est située sur l'axe $O_s x$ négatif, et (x_j, y_j) sont les coordonnées cartésiennes du centre de l'arbre (journal).

1.8 Paliers à gaz poreux

Les paliers poreux offrent une autre possibilité d'introduire le lubrifiant (gazeux) dans le palier au travers d'un très grand nombre d'orifices d'alimentation de diamètre extrêmement petit appelés pores. De cette manière, on obtient un débit réparti sur toute la surface du palier, ce qui présente certains avantages importants, mais aussi quelques inconvénients.

L'utilisation des paliers à air poreux remonte aux années 1950, où ils ont été utilisés avec succès dans la construction de machines et les applications à grande vitesse (Montgomery et Sterry [56] ; Robinson et Sterry [57] ; Sheinberg et Shuster [58]). La première publication sur les paliers à gaz poreux est à notre connaissance celle de Montgomery et Sterry [56]. Ils ont démontré l'efficacité d'un palier à gaz poreux en faisant tourner un arbre à 250 000 rpm dans une paire de bagues poreuses munies de joints toriques en caoutchouc "rubber O-rings". Depuis 1950, de nombreux articles publiés dans la littérature technique sur l'utilisation réussie des paliers à gaz poreux dans toutes sortes

d'applications. En 1970, Booser affirma que les paliers à gaz poreux furent produits à un taux d'environ 20 millions par jour.

Ces dernières années, l'utilisation des matrices à structures poreuses dans les paliers aérostatiques est devenue très populaire à cause de leur capacité de charge plus élevée, de leur rigidité, de leur simplicité de conception, et de leur faible coût de fabrication (Kwan et Corbett [59]; Singh et al. [60]; Sneck [61]). Un autre aspect particulier est l'effet filtrant du milieu poreux, qui peut être considéré comme un avantage ou un inconvénient. D'une part, il empêche les petites particules de passer à travers la matrice poreuse, ce qui augmente la durée de vie des surfaces. D'autre part, les pores peuvent être obturés avec le temps, ce qui entraîne une diminution de la perméabilité, ce qui est un inconvénient.

En raison des nombreuses applications, non seulement dans les paliers à gaz mais aussi dans des applications plus générales telles que les filtres industriels, de nombreux travaux se sont concentrés sur le développement de matériaux poreux aux caractéristiques améliorées. Les matériaux typiques des paliers à gaz poreux sont les métaux frittés, les céramiques (par exemple SiC) et le graphite (carbone poreux). La perméabilité de ces matériaux doit, pour des caractéristiques statiques et dynamiques optimales, être comprise entre 1×10^{-16} et $1 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ selon Fourka et Bonis [62].

La plupart des exemples de paliers aérostatiques poreux publiés jusqu'à présent sont basés sur des matériaux métalliques ou en graphite, en raison de leur moindre coût et de leur facilité d'usinage (Kwan [63]). De plus, les paliers poreux en graphite sont également très résistants aux crashes. En 2013, Cracaoanu et Bremer [64] ont démontré qu'un palier poreux en graphite était encore opérationnel après 50 crashes, alors qu'un palier à gaz conventionnel avec orifices est déjà mis en hors-service après 8 à 16 crashes. L'un des plus gros problèmes des matériaux ductiles, comme le graphite, est le problème de "poresmearing" qui entraîne un mauvais contrôle de la perméabilité. Les céramiques poreuses éliminent ce problème (Kwan [63]).

Malgré les nombreux avantages des paliers à gaz poreux, leur utilisation généralisée est toujours entravée par une perméabilité inhomogène et variable. Cela entraîne des problèmes de reproductibilité des caractéristiques des paliers telles que la capacité de charge, la rigidité et l'amortissement (Fourka et Bonis [62] 1997). À l'université de Cranfield, des recherches de longue date ont été menées sur la production de structures céramiques poreuses uniformes à une ou deux couches pour les paliers aérostatiques. Kwan [63] et Kwan et Corbett [65] ont montré que le frittage isostatique à chaud est une technique appropriée pour produire des céramiques uniformes. Un autre résultat intéressant de cette étude est qu'un palier poreux à deux couches, avec une couche densifiée à

l'interface du palier, est plus stable sur une large gamme de pressions d'alimentation et de jeu de fonctionnement du palier, alors qu'un palier à une seule couche souffre d'instabilités. Une autre étude de l'Université de Cranfield, Durazo-Cardenas [66]; Durazo-Cardenas et al. [67], a montré qu'un palier hydrostatique poreux-céramique peut également être fabriqué par une technique de consolidation de l'amidon (SC). Ils ont montré que le palier en céramique poreuse SC a une performance améliorée par rapport aux paliers hydrostatiques plus conventionnels en l'occurrence la rigidité statique était 95 % plus élevée. En outre, le débit et la puissance de pompage ont diminué de 64 %, tandis que la génération de chaleur dans le palier en céramique poreuse a montré une augmentation de température la plus basse de 50 %.

Chien et al. [68] ont également développé un palier muni de deux couches poreuses. Au lieu d'utiliser deux matériaux poreux avec une perméabilité et une taille de pores différentes, ils ont calfeutré la couche de substrat à l'interface du palier avec une résine époxy solide de 40 microns d'épaisseur. Ensuite, un réseau à pas rapproché de trous de 50 microns a été gravé au laser dans l'époxy pour le flux d'écoulement de l'air. Les résultats expérimentaux ont montré que la rigidité du palier double couche est 3,6 fois supérieure à celle d'un palier poreux traditionnel. Malheureusement, aucune donnée n'a été fournie concernant l'amortissement ou la stabilité.

Les matériaux poreux, souvent en métal fritté (technologie des poudres), peuvent également être utilisés pour construire des résistances hydrauliques (restrictors)"laminaires" pour les paliers EP (Externally Pressurized), qui présentent certains avantages par rapport aux autres types de résistances (Belforte et al. 2005 ; Fourka et Bonis [61] ; Silveira et al. [69]). Ces derniers ont étudié la distribution de pression et le débit massique d'un coussinet circulaire avec un système d'alimentation en toile métallique tissée et l'ont comparé avec une poche d'alimentation et une résistance poreuse.

Les paliers à gaz poreux sont vulnérables aux instabilités dynamiques par comparaison aux paliers à gaz classiques (Rao et Majumdar [70]).

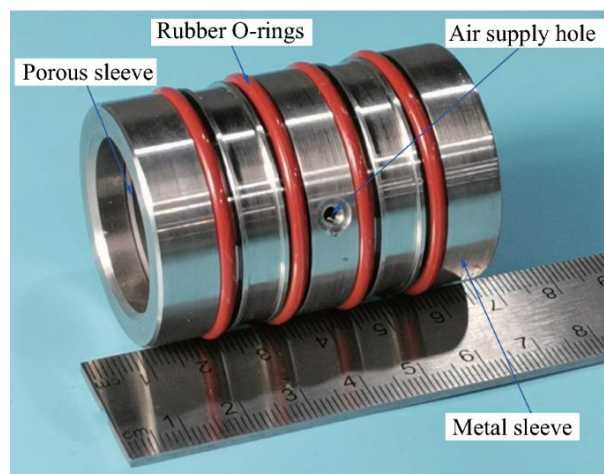
Su et Lie [71] ont démontré que les performances d'un palier comportant des orifices avec cinq rangées de trous d'alimentation se rapproche de celles d'un palier poreux. En outre, Su et Lie [72] ont comparé la stabilité dynamique d'un palier aérostatique comportant un certain nombre de rangées de résistances (restrictors) à celle d'un palier poreux. Ils ont constaté que ce dernier est plus stable à de faibles vitesses de rotation (c'est-à-dire lorsque le nombre de compressibilité $\Lambda < 0.1$) et à des vitesses de rotation élevées (c'est-à-dire pour des valeurs de $\Lambda > 1$).

Avec l'émergence des techniques d'usinage par faisceau laser et du micro-perçage ou forage, l'intérêt s'est accru pour les paliers aérostatiques dotés de très petits trous d'alimentation dont les diamètres

varient de 30 à 50 microns, comme un compromis entre les paliers à orifice et les paliers poreux. À cette fin, Miyatake et Yoshimoto [73] ont étudié les caractéristiques statiques et dynamiques des paliers lubrifiés au gaz avec de tels petits trous d'alimentation. Leur analyse numérique a montré qu'une rigidité maximale plus élevée peut être obtenue, ainsi qu'un coefficient d'amortissement plus élevé.

Dans ce qui suit, nous donnerons un aperçu de la modélisation statique et dynamique des paliers aérostatiques ou hybrides poreux (EP).

La figure I.22 présente une schématisation d'un palier à gaz lisse poreux. La résistance à l'écoulement du gaz se produit dans une matrice poreuse en graphite, métal fritté ou céramique au lieu d'une résistance hydraulique (restrictor). La perméabilité du matériau poreux est généralement comprise entre 10^{-14} et $10^{-16}m^2$ pour garantir des caractéristiques statiques et dynamiques optimales du palier (Fourka et Bonis [62]), alors que la porosité est généralement d'environ 20 %. Comme l'illustre la figure I.22, de l'air sous pression, c'est-à-dire à une pression d'alimentation constante p_s , est introduit depuis une grande cavité à travers le matériau poreux de largeur L_p et d'épaisseur h_p . La pression de l'air se réduit à $p'(x, y, z)$ dans le milieu poreux et chute encore à $p(x, y)$ dans le jeu (gap) du palier.



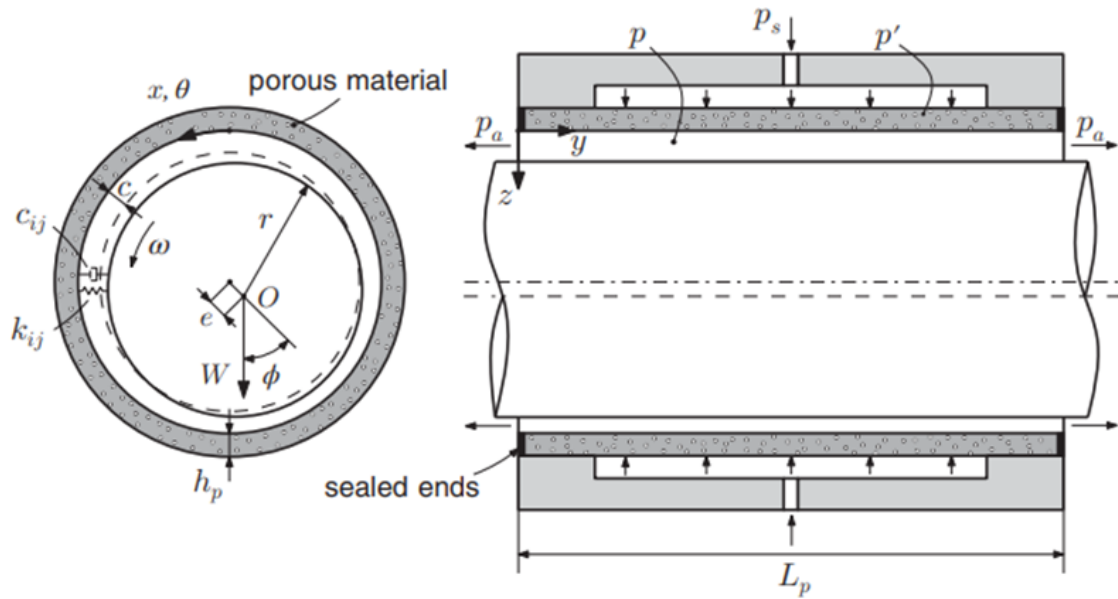


Fig. I.23 Configuration and notation of a porous aerostatic journal bearing.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse bibliographique détaillée sur les différentes technologies de paliers à gaz utilisés dans les applications industrielles modernes.

Nous avons considéré trois conditions de fonctionnement de paliers, à savoir les paliers aérodynamiques purs (self-acting bearings) comme les paliers à feuilles, les paliers à rainure hélicoïdale, et les paliers à profil ondulé ainsi que les paliers aérostatiques purs EP (Externally Pressurized Bearings) et les paliers hybrides (Hybrid Bearings) tels que les paliers poreux souvent utilisés pour des applications à grande vitesse nécessitant une rigidité et une stabilité dynamique élevées par comparaison aux paliers fonctionnant en régime aérodynamique pur.

Parmi toutes les technologies de paliers présentés dans cette investigation, nous avons retenu la technologie des paliers poreux fonctionnant en régime de lubrification hybride dont l'analyse détaillée de leur comportement statique et dynamique sera présentée dans les prochains chapitres.

Références du chapitre

- [1] Cunningham, R.E., Fleming, D.P. and Anderson, W.J., (1969). Experimental stability studies of the herringbone-grooved gas-lubricated journal bearing. Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology 91, 52–59.
- [2] Wilcock, D.F. (ed.) (1969). Design of Gas Bearings. Mechanical Technology Inc. (MTI), Latham NY.
- [3] Muijderman, E.A., (1967). Analysis and design of spiral-groove bearings. Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology 89(3): 291–306.
- [4] Vohr, J. and Chow, C. (1965). Characteristics of the herringbone-grooved, gas-lubricated journal bearings. Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 86(3): 568–578.
- [5] Bonneau, D. and Absi, J., (1994) Analysis of aerodynamic journal bearings with small number of herringbone grooves by finite element method. Transactions of the ASME - Journal of Tribology 116(4): 698–704.
- [6] Faria, M.T.C, (2001). Some performance characteristics of high speed gas lubricated herringbone groove journal bearings. JSME International Journal - Series C 44(3): 775–781.
- [7] Schiffmann, J., (2008). Integrated design, optimization and experimental investigation of a direct driven turbocompressor for domestic heat pumps PhD thesis École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [8] Tomioka, J., Miyanaga, N., Outa, E., et al. (2007). Development of herringbone grooved aerodynamic journal bearings for the support of ultra-high-speed rotors. Transactions of the JSME - Machine Elements and Manufacturing 73(730):1840–1846.
- [9] Stout, K. and Barrans, S. (2000). The design of aerostatic bearings for application to nanometre resolution manufacturing machine systems. Tribology International 33(12): 803–809.
- [10] Franchek, N.M., (1992). Theory versus experimental results and comparisons for five orifice-compensated hybrid bearing configurations Master's thesis Texas A&M University - Mechanical Engineering Department College Station, TX.
- [11] Kazimierski, Z. and Jarzecki, K., (1979). Stability threshold of flexibly supported hybrid gas journal bearings. Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology 101, 451–457.
- [12] Liu, L.X., Teo, C.J., Epstein, A.H. and Spakovszky, Z.S., (2005). Hydrostatic gas journal bearings for micro-turbomachinery. Journal of Vibration and Acoustics 127(2): 157–164. [13] Lund, J.W., (1967). A theoretical analysis of whirl instability and pneumatic hammer for a rigid rotor in pressurized gas journal bearings. Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology 89(2): 154–166.

- [14]** Mori, A., Aoyama, K. and Mori, H., (1980a). Influence of the gas-film inertia forces on the dynamic characteristics of externally pressurized, gas lubricated journal bearings—part I: Proposal of governing equations. *Bulletin of the JSME* 23 (178): 582–586.
- [14]** Mori, A., Aoyama, K. and Mori, H., (1980b). Influence of the gas-film inertia forces on the dynamic characteristics of externally pressurized, gas lubricated journal bearings –part ii: Analysis of whirl instability and plane vibrations. *Bulletin of the JSME* 23(180): 953–960.
- [15]** Osborne, D.A. and San Andrés, L., (2006). Experimental response of simple gas hybrid bearings for oil-free turbomachinery. *Transactions of the ASME - Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 128(3): 626–633.
- [16]** Pink, E.G. and Stout, K.J., (1981). Characteristics of orifice compensated hybrid journal bearings. *Proceedings of the 8th Gas Bearing Symposium*, 29–44 number 3 Leicester Polytechnic. BHRA Fluid Engineering, Cranfield, U.K.
- [17]** Robinson, C.H. and Sterry, F., (1958). The static strength of pressure fed gas journal bearings. *AERE ED/R*.
- [18]** Rohde, S.M. and Ezzat, H.A., (1967). On the dynamic behavior of hybrid journal bearings. *ASME - Journal of Lubrication Technology* 98, 90–94.
- [19]** San Andrés, L. and Ryu, K., (2008). Hybrid gas bearings with controlled supply pressure to eliminate rotor vibrations while crossing system critical speeds. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 130(6): 062505 (10 pages).
- [20]** San Andres, L.A., (1991). Effect of compressibility on the dynamic response of hydrostatic journal bearings. *Wear* 146, 296–283.
- [21]** Stout, K. and Rowe, W., (1974). Externally pressurized bearings—design for manufacture part 1—journal bearing selection. *Tribology* 7(3): 98–106.
- [22]** Stout, K. and Tawfik, M., (1983). Graphical design procedures for slot entry hybrid gas journal bearings. *Wear* 87(1): 51–68.
- [23]** Su, J.C. and Lie, K.N., (2003). Rotation effects on hybrid air journal bearings. *Tribol. Int.* 36, 717–726. **[23]** Su, J.C. and Lie, K.N., (2006). Rotor dynamic instability analysis on hybrid air journal bearings. *Tribology International* 39, 238–248.
- [24]** Tawfik, M. and Stout, K., (1982). Optimisation of slot entry hybrid gas bearings. *Tribology International* 15(1): 31–36.
- [25]** Waumans, T., (2009). On the Design of High-Speed Miniature Air Bearings: Dynamic Stability, Optimisation and Experimental Validation PhD thesis K. U. Leuven, Department of Mechanical Engineering, (2009D16).

- [26] Tawfik, M. and Stout, K., (1982). Optimisation of slot entry hybrid gas bearings. *Tribology International* 15(1): 31–36.
- [27] Dimond, T., Younan, A. and Allaire, P., (2011). A review of tilting pad bearing theory. *International Journal of Rotating Machinery*.
- [28] Simmons, J. and Advani, S., (1987). Michell and the development of tilting pad bearing *Fluid Film Lubrication—Osborne Reynolds Centenary: Proceedings of the 13th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, pp. 49–56 Elsevier Science. On the dynamic stability of flexible tilting pad gas bearings .
- [29] Grassam, N.S. and Powell, J.W., (1964). *Gas lubricated bearings*. Butterworths, London.
- [30] Powell, J., (1970). A review of progress in gas lubrication .*Review of Physics in Technology* 1(2): 96.
- [31] Shaw, E., (1983). *Europe's Nuclear Power Experiment*. Pergamon.
- [32] Lund, J., (1964). Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing .*ASLE transactions* 7(4): 342–352.
- [33] Nicholas, J.C., (2003). Lund's tilting pad journal bearing pad assembly method. *Journal of vibration and acoustics* 125(4): 448–454.
- [34] Nabuurs, M., (2020). *Tilting pad gas bearings for high speed applications: Analysis, Design and Validation* PhD thesis. KU Leuven.
- [35] Gross, W.A., (1980). *Fluid Film Lubrication* chapter Chapter Compliant Bearings, 483–549.
- [36] Blok, H. and Van Rossum, J., (1953). The foil bearing - a new departure in hydrodynamic lubrication.
- [37] Licht, L., (1969). An experimental study of high-speed rotors supported by air-lubricated foil bearings—Part 1: Rotation in pressurized and self-acting foil bearings. *ASME, Journal of lubrication technology*.
- [38] Eshel, A. and Wildmann, M., (1968). Dynamic behavior of a foil in the presence of a lubricating film. *Journal of applied mechanics* 35(2): 242–247.
- [39] Barlow, E., (1967). Derivation of governing equations for self-acting foil bearings. *Journal of lubrication technology* 7,334–339.
- [40] Al-Bender, F. and Smets, K., (2004). Development of externally pressurised foil bearings *Proceedings of the 4th Euspen International Conference*, 434–435.
- [41] Walowit, J. and Anno, J., (1975). *Modern Developments in Lubrication Mechanics*. John Wiley and Sons, New York.

- [42]** Agrawal GL (1997 Foil air/gas bearing technology (97-GT-347) Proc. of the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition, Orlando, Florida, USA. **[43]** Heshmat, H. and Walton, J., (2005). Turbojet engine demonstration with a high temperature air foil bearing.
- [44]** Heshmat, H. and Tomaszewski, M., (2006). Small gas turbine engine operating with high-temperature foil bearings Paper GT2006-90791, presented at the International Gas Turbine Institute Turbo Expo Conference, Barcelona, Spain, May 2006.
- [45]** Walton, J., Tomaszewski, M., Heshmat, C. and Heshmat, H., (2006). On the development of an oil-free electric-turbocharger for fuel cells. GT2006-90796, 395–400.
- [46]** Howard, S., Dellacorte, C., Valco, M., et al. (2001b). Dynamic stiffness and damping characteristics of a high-temperature air foil journal bearing. *Tribology Transactions* 44(4): 657–663.
- [47]** Radil, K., Howard, S. and Dykas, B., (2002). The role of radial clearance on the performance of foil air bearings. *Tribology Transactions* 45(4): 485–490.
- [48]** Heshmat, H., Walowit, J. and Pinkus, O., (1983b). Analysis of gas-lubricated foil journal bearings. *Journal of lubrication technology* 105, 647–655.
- [49]** Carpino, M., Lynn, A. and Peng, J., (1994). Effects of membrane stresses in the prediction of foil bearing performance. *Tribology Transactions* 37, 43–50.
- [50]** Dimofte, F. (1995). Wave journal bearing with compressible lubricant – Part I : The wave bearing concept and a comparison to the plain circular bearing, *Tribology Transactions*, Vol. 38, No. 1, pp. 153-160
- [51]** Dimofte, F. (1995). Wave journal bearing with compressible lubricant – Part II : A comparison of the wave bearing with a groove bearing and a lobe bearing, *Tribology Transactions*, Vol. 38, No. 2, pp. 364-372
- [52]** Dimofte, F.; Proctor, M. P.; Fleming, D. P. & Keith, T. G. Jr. (2000). Wave fluid film bearing tests for an aviation gearbox, Proceedings of the 8th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC- 8, Honolulu, Hawaii, March 26-30, 2000, NASA/TM-2000-209766, January 2000
- [53]** Dimofte, F.; Fleming, D. P.; Anderson, W. J. & Klein, R. C. (2005). Test of a fluid film wave bearing at 350°C with liquid lubricants, *STLE Tribology Transactions*, Vol. 48, pp. 515-521
- [54]** Ene, N. M; Dimofte, F. & Keith Jr., T. G. (2008). A dynamic analysis of hydrodynamic wave journal bearings, *STLE Tribology Transactions*, Vol. 51, No. 1, pp. 82-91
- [55]** Dimofte, F. & Ene, N.M. (2009). Comparison of the vibration/ noise of a geared transmission with shafts on fluid film bearings and on rolling element bearings, Proceedings of the 3rd International Conference Power Transmissions '09, 1-2 October, Chalkidiki, Greece.

- [56]** Montgomery, A.G. and Sterry, F., (1955). A simple air bearing rotor for very high rotational speeds. AERE ED/R.
- [57]** Robinson, C.H. and Sterry, F, (1958). The static strength of pressure fed gas journal bearings. AERE ED/R.
- [58]** Sheinberg, S.A. and Shuster, V.G., (1960). A porous thrust bearing which is stable under vibrations. *Stanki i instrument* 31, 23–27.
- [59]** Kwan, Y. and Corbett, J. (1998a). Porous aerostatic bearings – an updated review. *Wear* 222, 69–73.
- [60]** Singh, K.C., Rao, N.S. and Majumdar, B.C., (1984). Effect of slip flow on the steady-state performance of aerostatic porous journal bearings. *ASME Journal of Tribology* 106, 156–162
- [61]** Sneck, H.J., (1968). A survey of gas-lubricated porous bearings. *ASME Journal of Lubrication Technology* 804–809. Sneck, H.J. and Elwell, R.C., (1965). The externally pressurized, porous wall, gas-lubricated journal bearing – ii. *ASLE Transactions* 8(4): 339–345.
- [62]** Fourka, M. and Bonis, M., (1997). Comparison between externally pressurized gas thrust bearings with different orifice and porous feeding systems. *Wear* 210, 311–317. **[63]** Kwan, Y. (1996). Processing and fluid flow characteristics of hot iso-statically pressed porous alumina for aerostatic bearing applications PhD thesis Cranfield University.
- [64]** Cracaoanu, I. and Bremer, F., (2013). Air bearings in high precision systems. International conference on sustainable construction and design (SCAD).
- [65]** Kwan, Y. and Corbett, J. (1998b). A simplified method for the correction of velocity slip and inertia effects in porous aerostatic thrust bearings. *Tribol. International* 31(12): 779–786.
- [66]** Durazo-Cardenas, I.S., (2003). Development of porous-ceramic hydrostatic bearings PhD thesis Cranfield University.
- [67]** Durazo-Cardenas, I.S., Corbett, J. and Stephenson, D.J., (2010). The performance of a porous ceramic hydrostatic journal bearing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part J: Journal of Engineering Tribology* 224, 81–89.
- [68]** Chien, K., Tsai, C., Hsu, F., et al. (2012). Development of a planar porous aerostatic bearing with dual restrictive layer. *Proceedings of the 9th International Conference on Multi-Material Micro Manufacture (4M 2012)* 175–179.
- [69]** Silveira, Z.C., Nicoletti, R., Fortulan, C.A. and Purquerio, B.M., (2010). Ceramic matrices applied to aerostatic porous journal bearings: material characterization and bearing modeling. *Ceramica* 56, (201–211).

[70] Rao, N.S. and Majumdar, B.C., (1979). Analysis of pneumatic instability of externally pressurized porous gas journal bearings. ASME Journal of Lubrication Technology 101, 48–53.

[71] Su, J.C. and Lie, K.N., (2003). Rotation effects on hybrid air journal bearings. Tribology International 36, 717–726.

[72] Su, J.C. and Lie, K.N., (2006). Rotor dynamic instability analysis on hybrid air journal bearings. Tribol. International 39, 238–248.

[73] Miyatake, M. and Yoshimoto, S., (2010). Numerical investigation of static and dynamic characteristics of aerostatic thrust bearings with small feed holes. Tribology International 1353–1359.

Références additives

[74] Farid Al-Bender, Tribology in Practice Series - Air Bearings_Theory, Design and Applications- Wiley (2021)

[75] Florin Dimofte, Nicoleta M.Ene and Abdollah A. Afjeh (2011), No Conventional Fluid Bearings with Waved Surface, New Tribological Ways, Dr.Taher Ghrib (Ed.), ISBN :978-953-307-206-7, InTech, Available from :<http://www.intechopen.com/books/new-tribological-ways/no-conventional-fluid-film-bearings-with-waved-surface>.

Chapitre II

Théorie des paliers à gaz poreux

II.1. Caractérisation d'un milieu poreux et modèles d'écoulements

Un milieu poreux est usuellement défini comme étant un milieu solide contenant des espaces vides, appelés aussi pores, répartis de façon ordonnée ou chaotique reliés entre eux par des canaux ou éventuellement isolés (Figures II.1 et II.2).

La matrice solide peut soit être rigide, soit être soumise à de petites déformations. Le milieu poreux trouve plusieurs applications en biomécanique articulaire mais aussi en lubrification industrielle à travers l'utilisation des paliers à coussinet poreux.

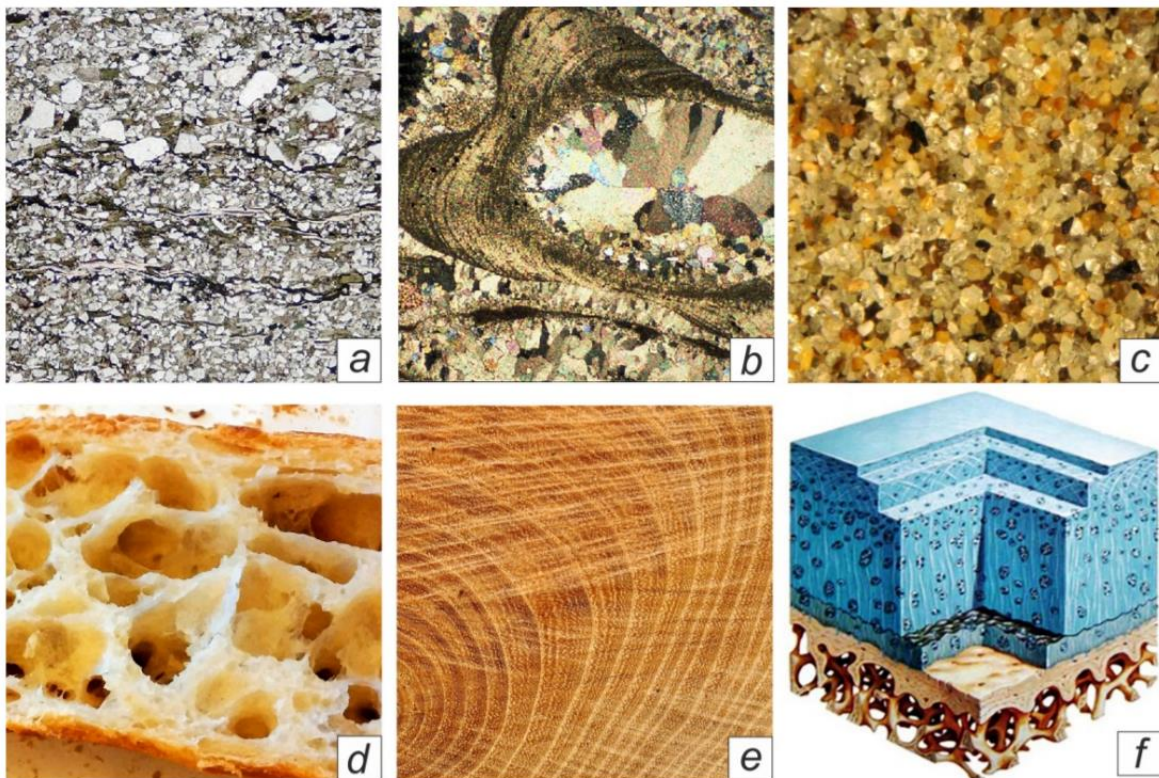


Fig. II. 1: Examples of natural porous materials: a) sandstone, b) limestone, c) beach sand, d) bread, e) wood, f) joint cartilage.

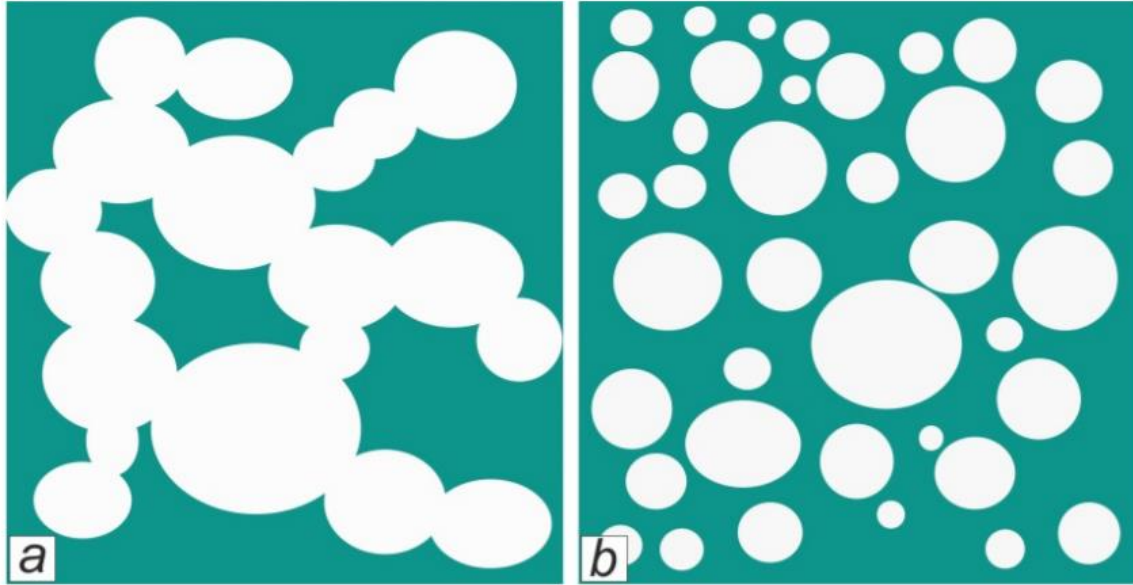


Fig. II. 2: Structure of voids in a porous medium: (a) connected voids, (b) unconnected voids.

L'utilisation de tels milieux en lubrification, par filtration du film fluide dans la couche poreuse, a pour conséquence d'améliorer les performances hydrodynamiques des contacts.

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent de la géométrie de la matrice, celle-ci peut être caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques (porosité, perméabilité, etc.).

Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles qui sont la porosité ε et la perméabilité k .

II.1.1 Porosité

La porosité représente le pourcentage de vides qui peuvent être occupés par des fluides. Elle constitue un indice du volume relatif des vides dans le milieu poreux et est définie comme le rapport du volume des vides V_p au volume total du milieu poreux V_t :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} \quad (II.1)$$

Cette grandeur ne donne aucune information sur la distribution des pores. En effet, deux matériaux de même porosité peuvent avoir des propriétés physiques différentes. Un pore peut être connecté à d'autres pores interconnectés, comme il peut être isolé. Des mesures expérimentales ont montré que la porosité varie de l'ordre de 0.02 à 0.98 suivant le type de matériau.

II.1.2 Perméabilité

La perméabilité intrinsèque, notée k , est la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Elle est dimensionnellement homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel. La perméabilité est un paramètre physique qui caractérise la capacité du milieu poreux à conduire à travers lui un fluide sous un gradient de pression donné. L'équation dimensionnelle de la perméabilité est alors $[k] = L^2$ ou encore le Darcy tel que ($1 \text{ Darcy} = 0.987 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \approx 1 \mu\text{m}^2$).

Ainsi, le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux. Les perméabilités de quelques matériaux poreux, issues des travaux de Sheidegger [1], varient entre environ 10^{-15} et 10^{-8} m^2 .

Il est possible d'évaluer la perméabilité k grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de la porosité ϕ et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. La relation de Kozeny - Carmen [2] donne une estimation de la perméabilité k pour un milieu poreux, non consolidé, constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$k = \frac{d_g^2 \phi^3}{36C_0(1-\phi)^2} \quad (\text{II.2})$$

où d_g désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et C_0 la constante de Kozeny dépendant de la forme du volume des solides ($3.6 < C_0 < 5$).

II.1.3. La compacité

La troisième caractéristique des milieux poreux est la compacité qui est cette fois-ci le pourcentage de volume solide dans le milieu poreux. Ainsi, on peut dire que la compacité représente le taux d'occupation réel de l'espace à l'intérieur d'un milieu poreux et est calculée par la relation :

$$c = \frac{V_s}{V_t} = 1 - \phi \quad \text{où } V_s \text{ est le volume du solide.}$$

II.1.4 La connectivité et la tortuosité

La connectivité caractérise la topologie du volume des pores, le voisinage des pores et la présence de pores bouchés tandis que la tortuosité représente la non-rectilinéarité des trajectoires à l'intérieur du milieu poreux figure II.3. Si on considère un échantillon de longueur L d'une part, et un canal de longueur effective $L_e > L$ qui traverse cet échantillon d'une extrémité à l'autre, on peut déterminer la tortuosité comme: $\tau = \frac{L_e}{L}$.

Autrement dit, la tortuosité caractérise la ligne de courant d'un fluide dans le milieu poreux, par rapport à une ligne droite entre les extrémités d'écoulement dans le milieu poreux.

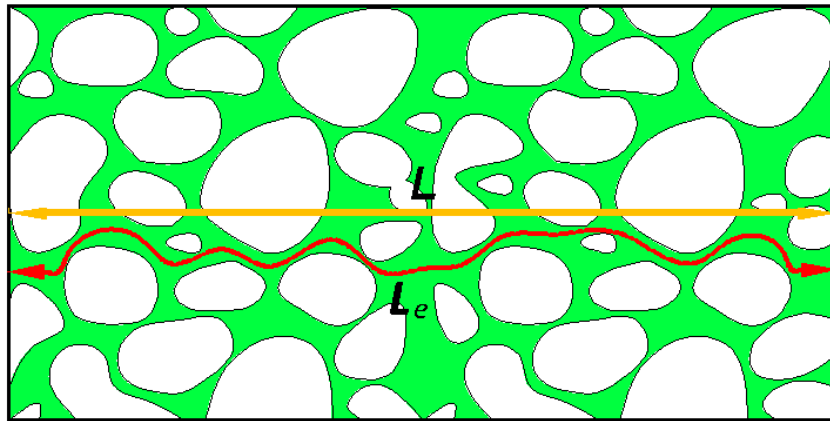


Fig. II. 3 Schematic representation of the porous medium tortuosity

Dans le tableau II.1, on reporte quelques propriétés de la roche de sable (grès ou sandstone) et de la mousse en polyuréthane (figure II.4) considérées comme des milieux poreux naturels et industriels.

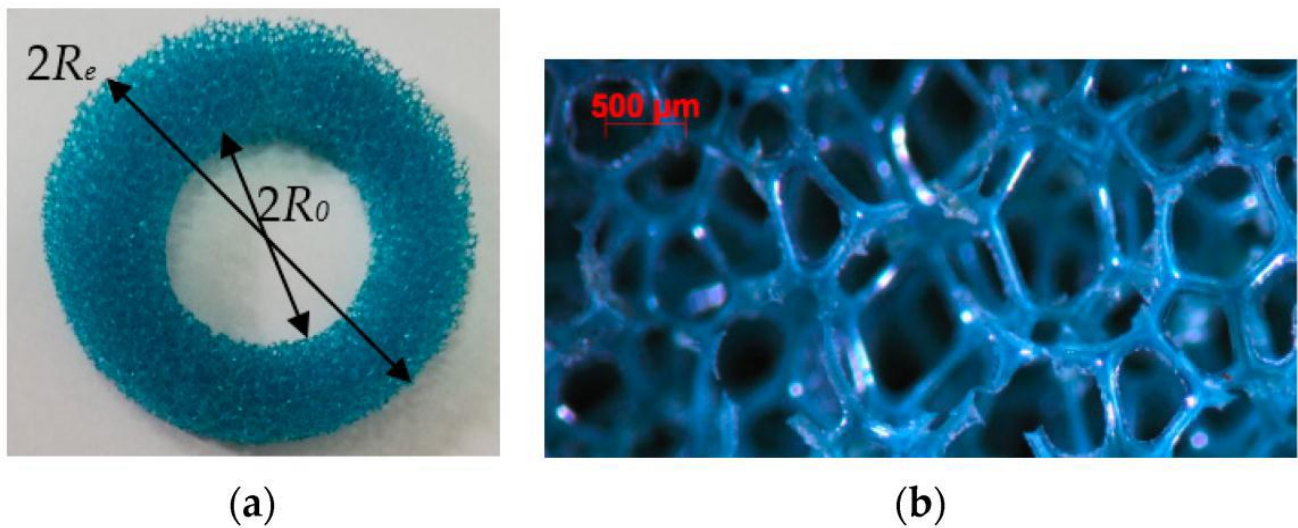


Fig. II. 4 Structure of the polyurethane foam

La figure II.5 représente les variations typiques de la perméabilité avec la porosité de la mousse en polyuréthane imbibée à l'eau et à l'huile.

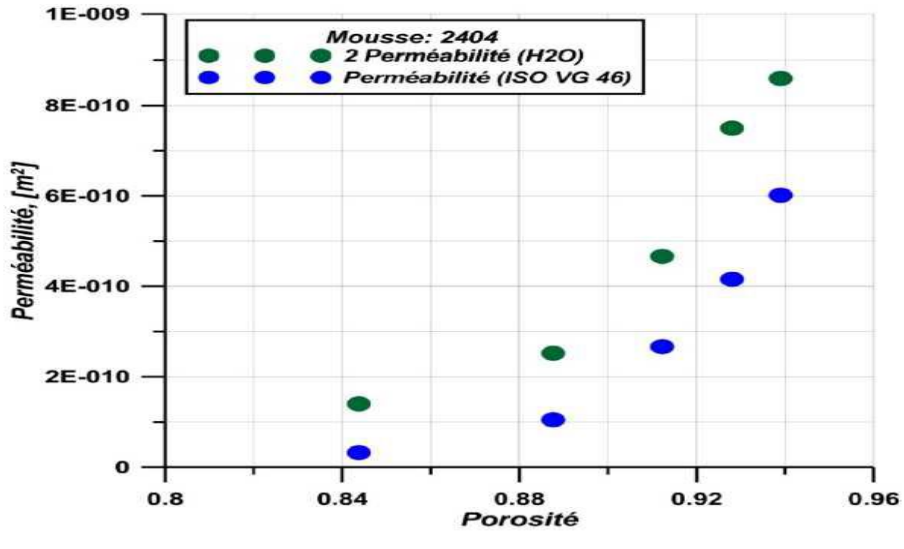


Fig. II. 5 Comparison of experimental values of permeabilities measured with water and ISO VG 46 oil for various porosities

Table II. 1: Typical properties of sandstone and polyurethane foam

Porosité ε (-)	Perméabilité k (m ²)	Tortuosité τ (-)	Module d'Young, E (GPa)	Coefficient de Poisson ν (-)	Masse volumique, ρ (kg/m ³)
0.3	10 ⁻¹⁰ -10 ⁻⁴	1.02	7.3	0.3	2300
0.97	1.53×10 ⁻¹⁰	1.60	168×10 ⁻⁶	0.3	998

II.2. Modèles d'écoulement en milieux poreux

Pour étudier les processus d'écoulement dans un milieu poreux, il existe différents modèles mathématiques qui utilisent des lois basiques de transfert de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Dans ce qui suit, on ne présentera que les modèles les plus utilisés :

II.2.1 Modèle de Darcy classique

La loi fondamentale de l'écoulement dans un milieu poreux a été établie expérimentalement par Darcy [3]. Elle s'écrit dans le cas d'un écoulement incompressible et pour un milieu homogène et isotrope sous la forme :

$$\vec{\nabla} p' = -\frac{\mu}{k} \vec{v}' \quad \text{ou encore} \quad \vec{v}' = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p' \quad (\text{II.3})$$

où \vec{v}' est la vitesse de filtration, μ est la viscosité dynamique du fluide, k est la perméabilité du milieu poreux et p' est la pression du fluide dans le milieu poreux.

Le signe moins apparaissant dans la loi de Darcy (II.3) signifie que l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens des pressions décroissantes. Notons que pour un milieu poreux anisotrope, la loi de Darcy prend la forme suivante :

$$\vec{v}' = -\frac{\bar{k}}{\mu} \vec{\nabla} p' \quad \text{où } \bar{k} = k_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{II.4})$$

La loi de Darcy relie donc linéairement la vitesse de filtration et le gradient de pression interstitielle, elle découle de la linéarité des équations de Stokes. Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si on fait une moyennisation ou une homogénéisation de la vitesse et des gradients de pression sur un volume plus grand que la taille des pores.

Bien que la loi de Darcy soit largement utilisée, elle s'est avérée insuffisante. En effet, quand la vitesse de filtration augmente, on note une déviation des résultats expérimentaux par rapport ceux obtenus par la théorie de Darcy. Cette déviation est due aux effets combinés de l'inertie et de la viscosité. Ces deux effets opposent une résistance à l'écoulement du fluide. Pour tenir compte de tous ces effets, d'autres modèles ont été proposés et utilisés [4-5].

II.2.2 Modèle de Darcy - Brinkman

La loi précédente de Darcy montre que le champ de vitesse ne dépend que de la pression. Les conditions aux limites appliquées au milieu poreux portent sur la pression ou sur sa dérivée normale. Si le milieu poreux est limité par un milieu fluide en mouvement, ce dernier entraîne un écoulement dans le milieu poreux, c'est le résultat de la contrainte de cisaillement à l'interface des deux milieux. De même, lorsque le milieu poreux est partiellement limité par un milieu solide étanche, la condition adéquate est la condition d'adhérence du fluide à la paroi solide. Or, avec la loi de Darcy, il n'est pas possible d'appliquer des conditions sur la vitesse tangentielle ou sur sa dérivée. En 1949, Brinkman [5] a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme visqueux dans les célèbres équations de Navier-Stokes :

$$\vec{\nabla} p' = -\frac{\mu}{k} \vec{v}' + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{v}' \quad (\text{II.5})$$

Cette équation vectorielle est connue sous le nom de la loi de Darcy - Brinkman. Le premier terme du membre droit de l'équation (II.5) est le terme de Darcy, et le second qui présente une analogie avec le terme de Laplace dans l'équation de Navier- Stokes est appelé terme de Brinkman. Bien que l'utilisation de la correction de Brinkman permette d'imposer la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles à l'interface fluide - milieu poreux, elle fait cependant intervenir la viscosité effective μ' du milieu poreux dont la détermination reste controversée [6.7]. La viscosité effective peut différer fortement de la viscosité μ du fluide. Valdes-Parada et al. [8] se sont intéressés à son évolution en fonction de la porosité ε . La correction de Brinkman est valide pour des valeurs élevées de la

porosité [9]. Dans l'équation (I.5), la viscosité effective s'exprime comme le rapport de la viscosité dynamique du fluide à la porosité : $\mu' = \frac{\mu}{\varepsilon}$.

II.2.3 Modèle de Darcy-Forchheimer

En dépit de sa large utilisation dans l'étude des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy est mis en défaut lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est très élevé. Dans ces conditions, les forces d'inertie deviennent prépondérantes et ne doivent pas être ignorées. Ce modèle a donc subi des modifications par certains auteurs dont le but est d'introduire un terme représentant l'inertie du fluide en écoulement. Parmi ces auteurs, Forchheimer a proposé le modèle suivant [4]:

$$\vec{\nabla} p' = -\frac{\mu}{k} \vec{v}' - \frac{\rho c_f |\vec{v}'|}{\sqrt{k}} \vec{v}' \quad (\text{II.6})$$

où c_f est le coefficient de traînée appelé parfois le coefficient de Forchheimer, qui n'est pas une constante universelle mais varie selon la nature du matériau poreux et la vitesse d'écoulement.

Le passage du modèle de Darcy au modèle de Darcy-Forchheimer se produit lorsqu'on arrive à un nombre de Reynolds modifié égal à 10, cette transition est caractérisée par l'apparition des premiers tourbillons dans l'écoulement.

II.2.4. Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Afin d'obtenir une formulation universelle pour caractériser avec une précision suffisante les écoulements dans les milieux poreux, une autre correction a été faite en vue d'améliorer la loi décrivant les écoulements visqueux dans les milieux poreux. Cette correction, basée sur la fusion des trois modèles évoqués précédemment, a permis de dériver un modèle global et complet communément appelé loi de Darcy-Brinkman- Forchheimer. Ce modèle s'exprime par l'équation vectorielle non linéaire suivante :

$$\vec{\nabla} p' = -\frac{\mu}{k} \vec{v}' + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{v}' - \frac{\rho c_f |\vec{v}'|}{\sqrt{k}} \vec{v}' \quad (\text{II.7})$$

Sous forme plus générale, l'équation (II.7) s'écrit lorsque les forces d'inertie sont prises en considération comme suit :

$$\frac{\rho}{\phi} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}}{\phi} \right) \right) = -\vec{\nabla} p' - \frac{\mu}{k} \vec{v}' + \frac{\mu}{\phi} \vec{\nabla}^2 \vec{v}' - \frac{\rho c_f |\vec{v}'|}{\sqrt{k}} \vec{v}' \quad (\text{II.8})$$

A notre connaissance et autant qu'on sache, cette équation vectorielle ne fut pas validée expérimentalement, d'autant plus d'après la littérature la justification de cette loi n'est pas suffisamment claire. Toutefois, elle représente une certaine analogie avec l'équation vectorielle de

Navier-Stokes et elle est très utilisée dans les simulations numériques des écoulements de fluides Newtoniens dans les milieux poreux (approches CFD : Computational Fluid Dynamics).

II.3 Modélisation d'un palier poreux

Dans ce paragraphe, nous présentons les modèles analytiques et numériques mis en œuvre pour la description d'un palier poreux à gaz. De nombreuses théories ont été publiées dans la littérature technique pour modéliser l'écoulement dans un palier poreux (Majumdar [10]; Mori et al. [11] ; Sneck et Elwell [12]; Sneck et Yen [13]; Sun [14]). En général, le problème est divisé en deux sections d'écoulement qui sont considérées conjointement. Il s'agit de l'écoulement dans le milieu poreux (écoulement d'alimentation), où la pression est désignée par le symbole p' pour la distinguer de la pression du film, et de l'écoulement du lubrifiant (écoulement du film sur une surface poreuse), où la pression est désignée par le symbole habituel p . Les théories mathématiques utilisées pour modéliser l'écoulement dans l'une ou l'autre de ces milieux sont dérivées en utilisant la même approche que celle d'un palier aérostatique alimenté par des orifices. Une revue détaillée de la modélisation théorique et des applications des paliers poreux à gaz est présentée dans (Kwan et Corbett [15] ; Majumdar [16] ; Sneck [17]).

II.3.1 Débit d'alimentation : loi de Darcy

La littérature sur les écoulements en présence de milieux poreux est assez vaste, non seulement pour les paliers poreux, mais aussi pour les écoulements de l'huile, de l'eau, et du gaz à travers toutes sortes de milieux poreux tels que le sable, les roches et les filtres industriels. Dans les paliers poreux, l'écoulement à travers les milieux poreux est principalement décrit par la loi de Darcy. Cette loi a été définie expérimentalement par Darcy au *XIX^{ème}* siècle lorsqu'il a étudié l'écoulement (1-D) de l'eau à travers des lits de sable. Darcy a découvert que le débit Q à travers un milieu poreux normal à l'écoulement est proportionnel à la perte de charge $\partial p' / \partial z$ à travers le milieu poreux. Plus tard, Robinson et Sterry [18] ont démontré expérimentalement que cette loi n'est valable que pour un écoulement laminaire (visqueux). Pour surmonter cette limitation, plusieurs tentatives ont été faites pour tenir compte de l'effet des forces d'inertie (Kwan [19]; Kwan et Corbett [20]). Le modèle le plus largement accepté pour décrire l'effet de l'écoulement par inertie dans un milieu poreux est l'équation de Forchheimer (Withaker [21]). Il s'agit essentiellement de la loi de Darcy à laquelle est rajoutée un terme d'inertie supplémentaire. Cependant, plusieurs auteurs ont démontré numériquement et expérimentalement qu'il n'y a pas de différence significative lorsque les forces d'inertie sont négligées (Schroter et Heinzl [22]). En outre, Taylor et Lewis [23] et Cieslicki [24] ont montré l'existence d'un régime à faible débit où l'équation de Forchheimer semble invalide et où la loi de Darcy

correspondrait beaucoup mieux aux données expérimentales. Taylor et Lewis [25] ont démontré que ce régime de faible débit s'applique normalement aux paliers aérostatiques. Ceci a été confirmé par Greenberg et Weger [26].

Par conséquent, la plupart des analyses théoriques des paliers poreux à gaz sont basées sur la loi de Darcy (Kwan et Corbett [27]). En fait, il s'agit d'une expression de la conservation de la quantité de mouvement qui peut être dérivée des équations de Navier-Stokes par homogénéisation. Pour un écoulement incompressible 1-D et en l'absence de forces de volume (body forces), la loi de Darcy peut s'écrire comme suit :

$$Q = -\frac{k_p A}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (\text{II.9})$$

où Q est le débit volumique, A est la section transversale, et k_p la perméabilité du milieu poreux isotrope. Cette dernière dépend de la nature du matériau poreux et de sa porosité ϕ . Notons que cette loi a la même forme que celle relative à l'écoulement visqueux dans un tuyau ou un canal étroit. D'autre part, le signe moins apparaissant dans la loi de Darcy (II.9) signifie que l'écoulement s'effectue dans le sens des pressions décroissantes de sorte que Q est positif dans le sens de l'écoulement.

En divisant l'équation (II.9) par la section transversale A , la loi de Darcy prend sa forme générale suivante :

$$q = -\frac{k_p A}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (\text{II.10})$$

où q est la vitesse moyenne du fluide dans le milieu poreux pour une unité de porosité.

En d'autres termes, la vitesse dans un milieu poreux dépend de la porosité effective ϕ du matériau poreux. Ce paramètre sans dimension est défini comme le rapport entre le volume des espaces vides à travers lesquels le fluide peut s'écouler et le volume total. Cette notion nous permet d'étendre la loi 1-D à la loi 3-D plus générale.

Ainsi en notant le vecteur vitesse du fluide dans le milieu poreux par $\vec{v}' = (u', v', w')$, alors cette vitesse est déterminée par le rapport du flux \vec{q} sur la porosité effective ϕ :

$$\vec{v}' = \frac{q}{\phi} \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, la vitesse du fluide peut être obtenue comme suit :

$$\vec{v}' = \frac{-k_p}{\mu\phi} \vec{\nabla} p' \quad (\text{II.12})$$

En substituant \vec{v}' à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}') = 0 \quad (\text{II.13})$$

et en supposant que le coefficient de perméabilité k_p du matériau poreux est constant, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{-k_p}{\mu \phi} \vec{\nabla} p' \right) = 0 \quad (\text{II.14})$$

De plus, en considérant la loi des gaz parfaits ($p = \rho r T$) en écoulement isotherme ($T = cte$), la masse volumique ρ peut être remplacée par la pression p' , soit

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(p' \frac{-k_p}{\mu \phi} \vec{\nabla} p' \right) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Enfin, la distribution de la pression p' à l'intérieur du corps poreux en régime isotherme doit donc obéir à la loi suivante :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{k_p}{2\mu\phi} \vec{\nabla}^2 p'^2 = 0 \quad (\text{II.16})$$

Notons que lorsque le terme temporel est égal à zéro (par exemple, pour un d'écoulement permanent), l'Eq. (II.16) devient l'équation classique de Laplace ; c'est-à-dire :

$$\vec{\nabla}^2 p'^2(x, y, z) = 0 \quad (\text{II.17})$$

II.3.2 Ecoulement du film : Equation de Reynolds modifiée

L'écoulement du fluide dans le palier poreux peut également être décrit par les équations de Navier-Stokes. En négligeant l'effet des forces d'inertie, il en résulte les équations bien connues de l'écoulement de films minces visqueux :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.20})$$

La dernière équation (II-20) indique que la pression selon la direction de l'épaisseur du film est constante.

Puisque la pression et la composante normale de la vitesse du fluide doivent être continues à travers l'interface du palier poreux ($z = 0$), il s'ensuit, selon la configuration du palier de la figure II.6, où $z = 0$ à la surface poreuse, que :

$$\left. \begin{aligned} p(x, y, 0) &= p'(x, y, 0) \\ w(x, y, 0) &= w'(x, y, 0) \end{aligned} \right\} \text{ sur la surface du palier.} \quad (\text{II.21})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{a}{\sqrt{k_p}} [u(x, y, 0) - u'(x, y, 0)] \quad (\text{II.22})$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{a}{\sqrt{k_p}} [v(x, y, 0) - v'(x, y, 0)] \quad (\text{II.23})$$

où α est un coefficient de glissement sans dimension qui dépend des caractéristiques du matériau perméable et non des propriétés physiques du fluide (Beavers et Joseph [28]). La concordance entre leur modèle et les résultats expérimentaux pour différents matériaux poreux est assez bonne (Beavers et al. [29]).

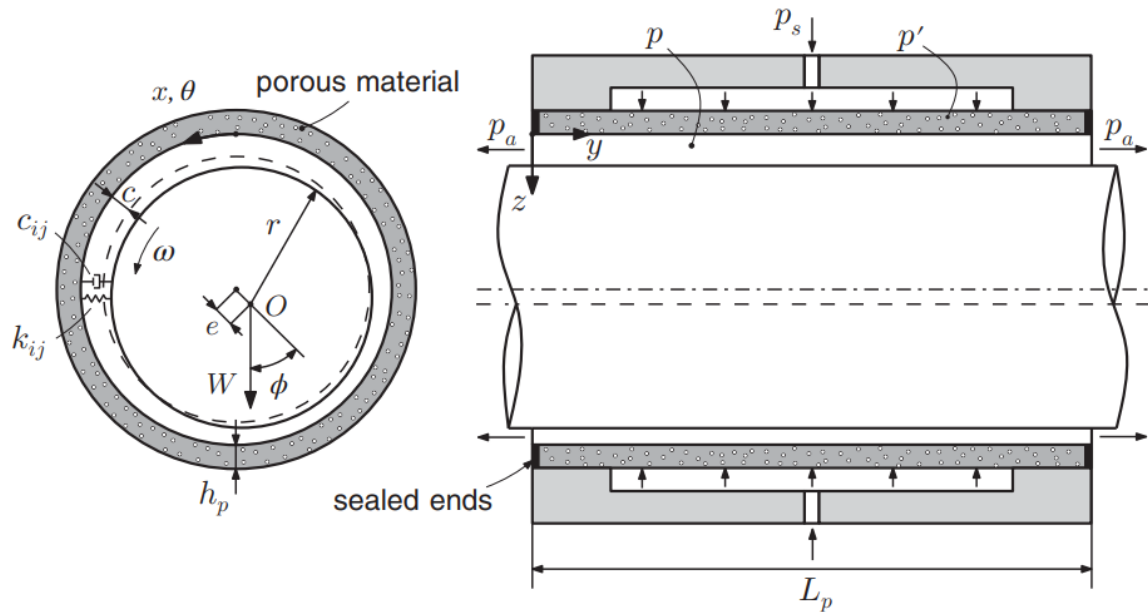


Fig. II.6 Geometric configuration and notation of a porous gas hybrid journal bearing.

Bien que la relation ci-dessus ait été déterminée à l'origine pour des fluides incompressibles, à savoir l'eau, Beavers et al. [29] ont montré que leur condition limite d'écoulement par glissement s'applique également aux fluides compressibles tels que l'air. Sur la base de ces résultats, la condition limite de glissement de Beavers-Joseph a été largement utilisée par de nombreux chercheurs dans le domaine de l'étude des écoulements dans les paliers à gaz poreux.

Une condition de non-glissement (no-slip condition) est imposée à la surface imperméable de l'arbre. Autrement dit, la particule de fluide adhère parfaitement à la paroi. Ainsi, si U_s représente la vitesse tangentielle à cette surface, les conditions limites suivantes peuvent être spécifiées :

$$\begin{cases} u(x, y, h) = U_s \\ v(x, y, h) = 0 \\ w(x, y, h) = \frac{dh(x, y, t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_s \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Notons que dans le cas où la particule de fluide adhère parfaitement à l'interface film fluide-matrice poreuse, les conditions (II.22) et (II.23) deviennent :

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0 \quad (\text{II.25})$$

Enfin, nous devons définir les conditions limites aux extrémités du palier. Tout d'abord, comme la couche poreuse est étanche à ses deux extrémités (sealed edges) pour éviter les fuites, la vitesse du fluide est alors nulle dans la direction y :

$$\begin{cases} v'(x, 0, z) = 0 \\ v'(x, L_p, z) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi r \text{ et } -h_p \leq z \leq 0. \quad (\text{II.26})$$

Les conditions liées à la pression aux extrémités du palier sont :

$$\begin{cases} p(x, 0, z) = p_a \\ p(x, L_p, z) = p_a \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi r \text{ et } -h_p \leq z \leq 0. \quad (\text{II.27})$$

En intégrant les équations (II.18) et (II.19) moyennant les conditions aux limites II.21 à II.24, on obtient les distributions de vitesses $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ dans le film fluide. La substitution de ces dernières dans l'équation de continuité (II.13) et l'intégration à travers l'épaisseur du film, nous dérivons l'équation de Reynolds modifiée pour un palier poreux à gaz :

$$\nabla \cdot \left[\frac{ph^3}{12\mu} (1 + \Phi) \nabla p - \frac{U_s}{2} (1 + \Psi) ph \right] = \frac{k_p}{2\mu} \frac{\partial p'^2}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.28}) \quad \Phi =$$

$$\frac{3(\sqrt{k_p}h + 2ak_p)}{h(\sqrt{k_p} + ah)} \quad (\text{II.29})$$

$$\Psi = \frac{\sqrt{k_p}}{\sqrt{k_p} + ah} \quad (\text{II.30})$$

Φ et Ψ sont deux paramètres sans dimension qui tiennent compte de l'effet de glissement à l'interface film fluide-paroi poreuse. Si on néglige l'effet de glissement à l'interface en posant $\Phi = \Psi = 0$, l'équation de Reynolds (II.28) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{ph^3}{12\mu} \vec{\nabla} p - \frac{ph}{2} \vec{U} \right) = \frac{k_p}{2\mu} \frac{\partial p'^2}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.31a})$$

$$\text{où } \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_s \\ U_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{U_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} (ph) + \frac{k_p}{2\mu} \frac{\partial p'^2}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.31b})$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = \frac{U_s}{2} \frac{\partial}{\partial x} (ph) + \frac{k_p}{2\mu} \frac{\partial p'^2}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.31c})$$

$$\text{Sachant que } \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 2p \frac{\partial p}{\partial x}$$

En outre, en comparant l'équation (II.28) avec l'équation de Reynolds classique dérivée pour un palier à paroi solide (imperméable), on constate qu'un terme supplémentaire est ajouté au membre droit de l'équation. Ce terme décrit l'écoulement dans le milieu poreux à l'interface ($z=0$), en couplant l'écoulement dans le film lubrifiant avec l'écoulement dans la matrice poreuse.

Une simplification supplémentaire est possible si l'on suppose que l'écoulement à travers le milieu poreux est unidirectionnel (cf. l'analogie avec les orifices capillaires). Cette situation se produit lorsque l'épaisseur de la matrice poreuse h_p est beaucoup plus petite que sa largeur ($\frac{h_p}{L_p} \ll 1$), ce qui est généralement le cas ; on peut donc écrire :

$$\left. \frac{\partial p^2}{\partial z} \right|_{z=0} \approx -\frac{p_s^2 - p^2}{h_p} = \frac{p^2 - p_s^2}{h_p} \quad (\text{II.32})$$

où p_s est la pression d'alimentation (Supply pressure) Figure II.6.

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h^3}{12\mu} p \vec{\nabla} p - \frac{ph}{2} \vec{U} \right) = \frac{k_p}{2\mu} \frac{(p^2 - p_s^2)}{h_p} + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.33a})$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = U_s \frac{\partial}{\partial x} (ph) + \frac{k_p}{\mu} \frac{(p^2 - p_s^2)}{h_p} + 2 \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{II.33b})$$

L'équation de Reynolds modifiée (II.33) est similaire à celle dérivée par San Andrés [30] pour l'analyse dynamique linéaire d'un palier à gaz poreux en régime laminaire.

II.4 Extension de la théorie au cas du palier fonctionnant en régime turbulent : Équation de Reynolds turbulente

En négligeant les effets d'inertie, l'équation de Reynolds peut être modifiée de façon simple pour tenir compte de l'effet de la turbulence dans le film fluide. Elrod et Ng [31] proposent une méthode utilisant des facteurs de turbulence dépendant de la pression. Cependant, la méthode largement adoptée est basée sur Hirs [32], dans laquelle l'équation de Reynolds compressible pour un palier imperméable s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.34})$$

avec

$$Q_x = -\frac{\rho h^3}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{U_x h}{2} \quad \text{et} \quad Q_y = -\frac{\rho h^3}{\mu k_y} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{II.35})$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\mu k_y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{U_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.36})$$

où $\rho = \frac{p}{\mathcal{R}T}$ qui est l'équation d'état d'un gaz parfait, $\mathcal{R} = C_p - C_v$ est la constante des gaz parfaits,

T est la température absolue du gaz,

$$k_x = m_x \left(\frac{\rho U_x h}{\mu} \right)^{n_x} = m_x (Re_x)^{n_x} \text{ et } k_y = m_y \left(\frac{\rho U_y h}{\mu} \right)^{n_y} = m_y (Re_y)^{n_y}$$

Les valeurs typiques de n et m sont déterminées de manière empirique. Ainsi, certains auteurs préfèrent corréliser les facteurs de turbulence k_x et k_y comme suit :

$$k_x = 12 + m'_x (Re)^{n'_x} \quad (\text{II.37a})$$

$$k_y = 12 + m'_y (Re)^{n'_y} \quad (\text{II.37b})$$

où $Re = \rho(p) \frac{U_s h}{\mu} = \frac{p}{RT} \frac{\omega R h}{\mu}$ est le nombre de Reynolds local de l'écoulement qui exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide.

Notons que certains auteurs préfèrent d'utiliser les facteurs G_x et G_y tels que $G_x = \frac{1}{k_x}$ et $G_y = \frac{1}{k_y}$.

II.4.1 Tourbillons de Taylor

Les tourbillons de Taylor (Taylor vortices) [33] représentés sur la figure (II.7) constituent un type distinct de turbulence dans les écoulements annulaires de Couette. Avant l'apparition d'un écoulement totalement turbulent dans les paliers lisses, des types spécifiques de tourbillons peuvent apparaître dans le film, à savoir les tourbillons de Taylor. Pour les cylindres concentriques, ces caractéristiques à grande échelle apparaissent dans le champ d'écoulement si le nombre de Taylor local $Ta^* = (Re)^2 \frac{h}{R}$ dépasse une certaine valeur critique Ta_c :

$$Ta^* = \frac{\rho^2 U_s^2 h^3}{\mu^3 R} \geq 1700 \text{ ou encore } Ta = \sqrt{Ta^*} = Re \sqrt{\frac{h}{R}} \geq 41.2 \quad (\text{II.38})$$

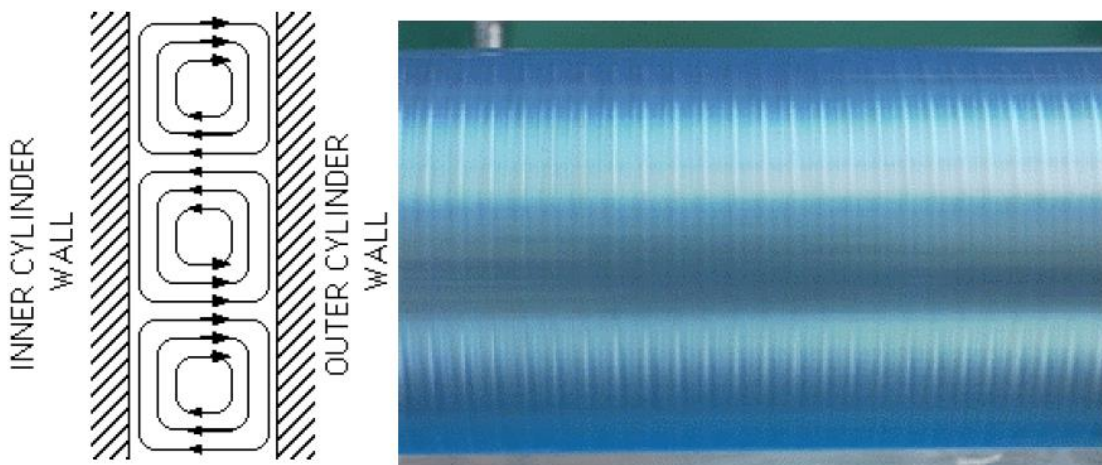


Fig. II.7 Taylor vortices occurring in a flow between two rotating concentric cylinders

Il est utile de noter que le nombre de Taylor exprime le rapport des forces centrifuges aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide en écoulement.

II.4.2 Transition entre les différents régimes d'écoulement dans un palier

Entre le régime turbulent, qui existe dans les paliers pour des nombres de Reynolds ou de Taylor élevés, et le régime laminaire, on distingue trois types d'écoulements :

- 1) les forces d'inertie ou centrifuges sont faibles, mais non négligeables devant les forces de viscosité. Le comportement des paliers qui fonctionnent dans ces conditions ne peut plus être décrit par la théorie laminaire classique ;
- 2) les forces d'inertie sont du même ordre que les forces de viscosité. Il se produit alors à l'intérieur du film un écoulement secondaire communément connu sous le nom de tourbillons de Taylor (Taylor's vortices) [33] ;
- 3) les forces d'inertie sont importantes devant les forces de viscosité. Autrement dit, le nombre de Reynolds de l'écoulement, qui exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide, dépasse de loin certaines valeurs dites critiques. Dans ces conditions, on atteint le régime turbulent.

II.4.3 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor

Depuis les travaux de G. I. Taylor [33], on sait que pour un écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants (cas d'un palier non chargé fonctionnant à excentricité nulle), les tourbillons se développent dans le film lorsque le nombre de Taylor, Ta , atteint la valeur de 41,2. Cette valeur donne dans le cas du palier non chargé la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor. L'apparition de ces tourbillons figure II.7 qui forment des tores régulièrement superposées suivant l'axe de rotation du palier est liée aux forces d'inertie engendrées par la rotation de l'arbre. Précisons que dans le cas où l'alésage (coussinet) est en rotation autour d'un arbre fixe, les instabilités de Taylor n'existent pas. Dans le cas du palier chargé, c'est-à-dire pour un écoulement entre deux cylindres excentrés, il a été remarqué que le nombre de Taylor critique au-delà duquel la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor se produit varie avec l'excentricité relative. Malgré de nombreuses études expérimentales qui avaient pour but de déterminer la valeur du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative, il est encore difficile, pour un jeu relatif du palier C/R donné, de connaître avec précision la variation du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative $T_c(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon=e/C$. Il est donc nécessaire, pour déterminer la transition, d'effectuer des essais expérimentaux dans les conditions réelles de fonctionnement d'un palier hydrodynamique ou aérodynamique.

Selon Frêne [34], la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor dans un palier chargé s'effectue localement dès que le nombre de Taylor local atteint la valeur critique donnée par la relation semi-empirique :

$$Ta_c = 63,3 \varepsilon^2 - 38 \varepsilon + 41,2 \quad (\text{II.39})$$

II.4.4 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent

On admet que le régime turbulent peut être établi dans un palier chargé lorsque le nombre de Taylor local atteint la valeur de $2Ta_c$.

A partir de l'équation de Reynolds turbulente (II.36) et des relations (II.37), on est en mesure de calculer la pression engendrée dans le film et la charge que peut supporter un palier fonctionnant en régime turbulent. Pour le calcul de la force ou du couple de frottement, on utilisera pour la contrainte de cisaillement pariétale, l'expression suivante :

$$\tau_{xy}(y = 0, h) = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\mu U_s}{h} (1 + 0,0012 \mathcal{R}e^{0,94}) \quad (\text{II.40})$$

Par ailleurs, les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz = -\frac{h^2}{\mu} G_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{U_s}{2} \quad (\text{II.41a})$$

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dz = -\frac{h^2}{\mu} G_y \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (\text{II.41b})$$

\bar{p} étant la pression moyenne dans le film fluide.

Les composantes du vecteur débit volumique suivant les directions x et y peuvent se calculer, dans une section du palier, à partir des vitesses moyennes par une simple intégration.

On remarque ainsi que les performances hydrodynamiques (pression, capacité de charge, angle de calage, force ou couple de frottement, débits, ...) d'un palier en régime turbulent peuvent être déterminées en utilisant les mêmes méthodes de calcul qu'en régime laminaire.

II.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime non laminaire en utilisant le modèle mathématique de Boussinesq. Cette théorie a permis de dériver, à partir des équations décrivant un écoulement turbulent, une équation de Reynolds modifiée appelée équation de Reynolds turbulente permettant d'étudier le comportement des paliers hydrodynamiques fonctionnant en régime turbulent pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 50000. L'intégration de cette équation moyennant certaines conditions limites permet de calculer la répartition de la pression dans le palier.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons le processus de perturbation analytique aux équations de Reynolds écrites en régimes laminaire et turbulent.

Références du chapitre

- [1] A. Scheidegger, The physics of flow through porous media. University Of Toronto Press: London. (1958)
- [2] P. C. Carman, Fluid Flow through Granular Beds, Transactions-Institution of Chemical Engineers, Vol. 15, pp. 150-166. (1937)
- [3] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Victor Dalmont. (1856).
- [4] P. Forchheimer, Wasserbewegung durch boden, Z. Ver. Deutsch, Ing. , Vol. 45, pp. 1782-1788. (1901)
- [5] H. C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 1, No. 1, pp. 27. (1949)
- [6] S. Liu and J. H. Masliyah, Dispersion in porous media, Handbook of porous media, CRC Press, pp. 81–140. (2005)
- [7] H. Liu, P. R. Patil, and U. Narusawa, On Darcy-Brinkman equation: viscous flow between two parallel plates packed with regular square arrays of cylinders, Entropy, Vol. 9, No. 3, pp. 118–131. (2007)
- [8] F. J. Valdes-Parada, J. A. Ochoa-Tapia and J. Alvarez-Ramirez, On the effective viscosity for the Darcy–Brinkman equation, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 385, No. 1, pp. 69–79. (2007)
- [9] T. S. Lundgren, Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 51, No. 2, pp. 273–299. (1972)
- [10] Majumdar, B.C., (1975). Analysis of externally pressurized porous gas journal bearings - i. Wear 33, 25–35.
- [11] Mori, H., Yabe, H. and Yamakage, H., (1968). Theoretical analysis of externally pressurized porous gas journal bearings (1st report). Bulletin of JSME 11, 527–532. [11] Mori, H., Yabe, H. and Yamakage, H., (1969). Theoretical analysis of externally pressurized porous gas journal bearings (2nd report). Bulletin of JSME 12, 1512–1518.
- [12] Sneck, H.J. and Elwell, R.C., (1965). The externally pressurized, porous wall, gas-lubricated journal bearing – ii. ASLE Transactions 8(4): 339–345.
- [13] Sneck, H.J. and Yen, K.T., (1964). The externally pressurized, porous wall, gas-lubricated journal bearing – i. ASLE Transactions 7(3): 288–298. Sneck, H.J. and Yen, [13] K.T., (1967). The externally pressurized, porous wall, gas-lubricated journal bearing – iii. ASLE Transactions 10, 339–347.

- [14] Sun, D.C., (1975a). Analysis of the steady state characteristics of gas lubricated, porous journal bearings. *ASME Journal of Lubrication Technology* 97, 44–51.
- [15] Kwan, Y. and Corbett, J. (1998a). Porous aerostatic bearings – an updated review. *Wear* 222, 69–73.
- [16] Majumdar, B.C., (1976a). Gas lubricated porous bearings: A bibliography. *Wear* 36, 269–273.
- [17] Sneek, H.J., (1968). A survey of gas-lubricated porous bearings. *ASME Journal of Lubrication Technology* 804–809.
- [18] Robinson, C.H. and Sterry, F, (1958). The static strength of pressure fed gas journal bearings. *AERE ED/R*.
- [19] Kwan, Y. (1996). Processing and fluid flow characteristics of hot iso-statically pressed porous alumina for aerostatic bearing applications PhD thesis Cranfield University.
- [20] Kwan, Y. and Corbett, J. (1998b). A simplified method for the correction of velocity slip and inertia effects in porous aerostatic thrust bearings. *Tribol. International* 31(12): 779–786.
- [21] Withaker, S., (1996). The forchheimer equation: A theoretical development. Springer link: *Transport in Porous Media* 25, 27–61.
- [22] Schroter, A. and Heinzl, J., (1994). Air-bearings with areal disposed micro-orifices. *Proceedings 3rd International Conference on Ultraprecision in Manufacturing Engineering* 253–256.
- [23] Taylor, R. and Lewis, G.K., (1975) Experience relating to the steady performance of aerostatic porous thrust bearings. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers* 189, 383–390.
- [24] Cieslicki, K., (1994). Investigations of the effect of inertia on flow of air through porous bearing sleeves. *Wear* 172, 73–78.
- [25] Taylor, R. and Lewis, G.K., (1974). *Proceedings of the 6th International Gas Bearing Symposium*. British Hydromechanics Research Association Fluid Engineering.
- [26] Greenberg, D.B. and Weger, E., (1960). An investigation of the viscous and inertial coefficients for the flow of gases through porous sintered metals with high pressure gradients. *Chemical Engineering Science* 12(1): 8–19.
- [27] Kwan, Y. and Corbett, J. (1998a). Porous aerostatic bearings – an updated review. *Wear* 222, 69–73.
- [28] Beavers, G.S and Joseph D.D., *J,Fluid Mech* (1967),vol,30,part I,pp.197-207 Printed in Great Britain.
- [29] Beavers, G.S., Sparrow, E.M. and Masha, B.A., (1974). Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE Journal* 20(3): 596–597.

[30] Luis San Andrés, Jing Yang and Andrew Devitt. Porous Gas Journal Bearings : An Exact Solution Revisited and Force coefficients for Stable Rotordynamic Performance : 1-22.

[31] Elrod, H.G. and Ng, C.W., (1967). A theory for turbulent fluid films and its application to bearings. Transactions of the ASME - Journal of Lubrication Technology 89(3): 346–362.

[32] Hirs, G., (1973). A bulk-flow theory for turbulence in lubricant films. ASME, Journal of Lubrication Technology 94, 137–146.

[33] Taylor, G., (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A 223, 289–343.

[34] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe et M. Godet, Lubrification hydrodynamique : paliers et butées, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France (EdF), N°72, 1990, Editons Eyrolles.

Référence additive :

[35] Farid Al-Bender, Tribology in Practice Series - Air Bearings_Theory, Design and Applications- Wiley (2021).

Chapitre III

Modélisation du comportement dynamique linéaire du système rotor-paliers à gaz hybrides

III.1 Introduction

Le rotor d'une turbomachine tel que le turbocompresseur (turbocharger) utilisé dans les moteurs thermiques suralimentés est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Il est souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des disques de butée axiale, des roues de turbines et de compresseurs, et des ventilateurs comme illustré sur la figure III.1. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre ; c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

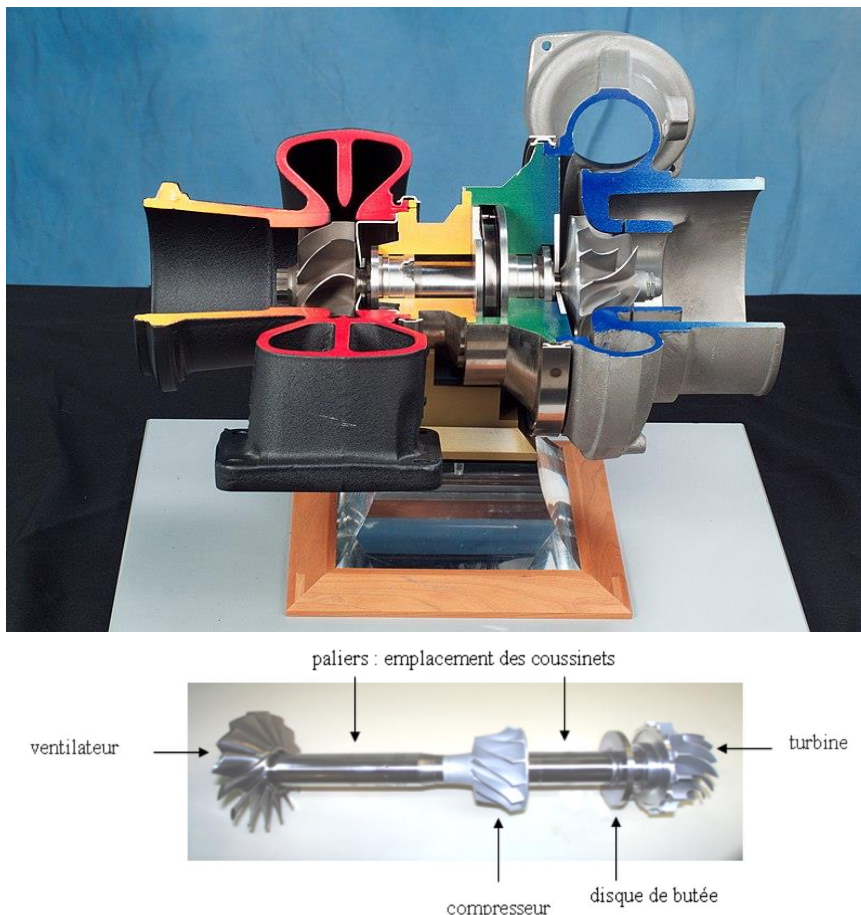


Fig. III.1 Cut-away view turbocharger (turbine section on the left, compressor section on the right)

Un palier est en fonctionnement dynamique ou instationnaire si :

1° La charge appliquée est stationnaire mais l'arbre est écarté de sa position d'équilibre statique par une perturbation, le problème est de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable. C'est le cas des paliers de lignes d'arbre équilibrées de machines tournantes (rotating machinery).

2° La charge appliquée W est une fonction du temps, dans ce cas on cherche la trajectoire ou l'orbite, qui en résulte, du centre de l'arbre (rotor) dans le palier afin de déterminer la hauteur minimale du film lubrifiant et pouvoir éviter les avaries éventuelles. Ce cas correspond aux conditions de fonctionnement des paliers de moteurs à combustion (paliers de vilebrequin et de bielle, par exemple) et des paliers de lignes d'arbre de machines tournantes déséquilibrées (présence de balourds).

III.2 Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes

Dans ce type de mécanisme, la force extérieure est le poids de la ligne d'arbre à laquelle viennent se superposer des forces dynamiques d'amplitudes plus ou moins importantes (balourds, par exemple). On schématise la ligne d'arbre par un rotor rigide de masse $2M$ supporté de façon symétrique par 2 paliers identiques.

A chaque palier est attribué une masse M du rotor, une charge statique $\vec{W} = W\vec{x}$, une charge dynamique $\vec{W}(t)$ et une excitation synchrone due à un balourd caractérisé par son excentricité e_b dont le module est $Me_b\omega^2$. Lorsque l'équilibrage est parfait, le centre d'inertie G de l'arbre est confondu avec son centre géométrique. L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = W_0 + W_x(t) + Me_b\omega^2 \cos \omega t + F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ M\ddot{y} = W_y(t) + Me_b\omega^2 \sin \omega t + F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent les coordonnées instantanées du centre de l'arbre, i.e.

$$\overrightarrow{OO_a} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \cos \phi \\ e \sin \phi \end{Bmatrix}$$

et $\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p - p_a) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} R d\theta dz$ sont les composantes de l'action aérodynamique calculées à partir du champ de pression obtenu par intégration de l'équation de Reynolds compressible non linéaire (III.2) dans le cas d'un palier à gaz poreux :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial (p^2)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial (p^2)}{\partial z} \right) = U_s \frac{\partial}{\partial x} (ph) + \frac{k_p}{\mu} \frac{(p^2 - p_s^2)}{h_p} + 2 \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (\text{III.2})$$

$$k_x = 12 + m_x (Re)^{n_x} \quad \text{et} \quad k_z = 12 + m_z (Re)^{n_z} \quad (\text{III.3})$$

avec $m_x = 0.0136$; $n_x = 0.90$; $m_z = 0.0043$; $n_z = 0.96$

En régime d'écoulement laminaire, les coefficients de turbulence k_x et k_z valent 12.

La pression aérodynamique p doit satisfaire l'équation différentielle (III.2) et les conditions limites suivantes :

(i) Conditions aux extrémités libres du palier :

$$p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}, t\right) = p\left(\theta, z = \frac{L}{2}, t\right) = p_a \quad (\text{III.4})$$

(ii) la pression est continue et périodique suivant la direction circonférentielle, i. e.

$$p(\theta + 2\pi, z, t) = p(\theta, z, t) \quad (\text{III.5})$$

III.3 Normalisation de l'équation de Reynolds modifiée

Pour le traitement numérique, il est recommandé d'écrire l'équation de Reynolds modifiée (III.2) en variables adimensionnelle. Pour cela, on pose :

$$\theta = \frac{x}{R}, Z = \frac{z}{R}, P = \frac{p}{p_a}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_a}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_a}, H = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cos(\theta), \tilde{t} = \Omega t, P_s = \frac{p_s}{p_a}, H_p = \frac{h_p}{R},$$

$$\beta = \frac{6k_p R^2}{h_p C^3}, \Lambda = \frac{6\mu_a \Omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}{p_a}$$

Compte de ce changement de variables, l'équation (III.2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{\tilde{\mu} K'_x} \frac{\partial (P^2)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H^3}{\tilde{\mu} K'_z} \frac{\partial (P^2)}{\partial Z} \right) = 2\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (PH) + 4\Lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (PH) + 2\beta (P^2 - P_s^2) \quad (\text{III.6})$$

$$\text{où } K'_x = 1 + \frac{m'_x}{12} (Re)^{n'_x}, K'_z = 1 + \frac{m'_z}{12} (Re)^{n'_z}, \text{ et } Re = \frac{\rho \Omega R h}{\mu} = \frac{\rho_a \Omega R C}{\underbrace{\mu_a}_{Re_a}} \frac{\tilde{\rho} H}{\tilde{\mu}}$$

$Re_a = \frac{\rho_a \Omega R C}{\mu_a}$ étant le nombre de Reynolds moyen.

Si $\tilde{\rho} = \tilde{\mu} = 1$, on a : $Re = Re_a H$

III.4 Cas des petits mouvements : Modélisation linéaire

Le comportement dynamique d'une ligne d'arbre supportée par des paliers fluides est non linéaire. En effet, les forces aérodynamiques F_x et F_y engendrées par le film d'air sont des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre.

L'analyse exacte d'un système rotor-palier est donc très complexe puisqu'elle nécessite la résolution du système d'équations relatives au mouvement du rotor (III.1) et au comportement aérodynamique des paliers décrit par l'équation de Reynolds compressible (III.2). Compte tenu des difficultés inhérentes à la résolution des problèmes non linéaires, une étude simplifiée peut être réalisée en linéarisant les équations du mouvement (III.1). Dans le cas d'une ligne d'arbre soumise à des charges extérieures fixes en direction, cette étude peut comporter deux étapes :

- Une analyse statique permettant de déterminer la position d'équilibre de l'arbre (x_0, y_0) à l'intérieur du palier par une méthode itérative.
- Une analyse dynamique linéarisée de la ligne d'arbre autour de la position d'équilibre statique.

Cette étude permet de modéliser le film d'air par huit coefficients dynamique, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement figure III.2.

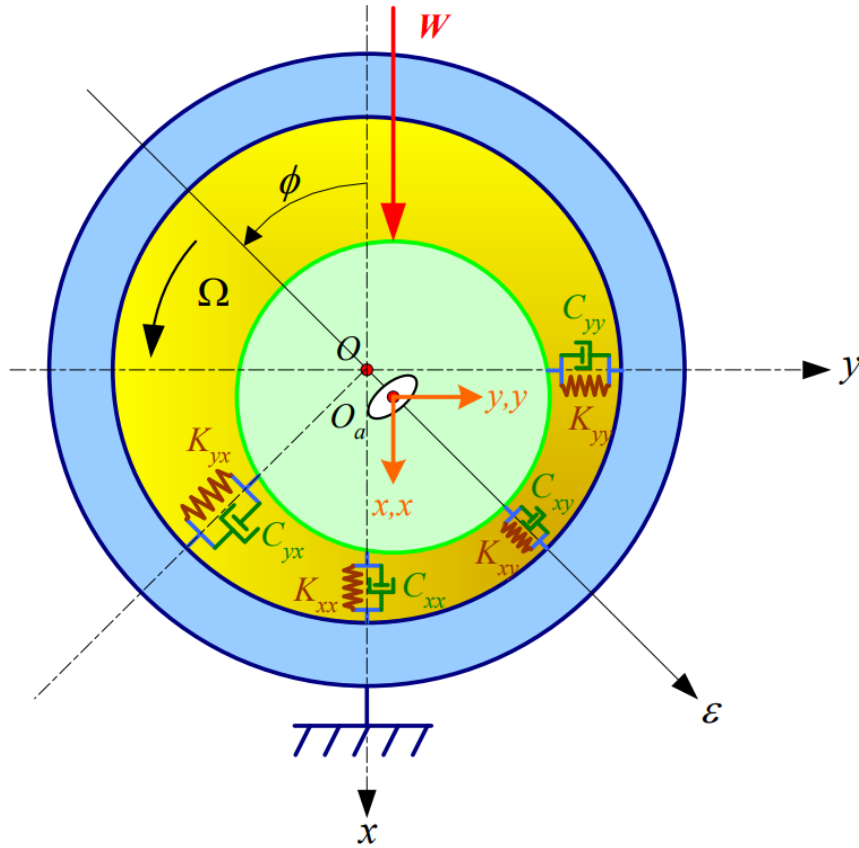


Fig. III.2 Linear dynamic model of a self-acting aerodynamic bearing.

Ces coefficients serviront comme des données pour :

- connaître la stabilité d'un point de fonctionnement ;
- introduire l'effet du film fluide sur la réponse de la ligne d'arbre à des sollicitations dynamique de faible amplitude (balourd résiduel, par exemple) ;
- rechercher les vitesses critiques du rotor.

III.4.1 Concept des coefficients dynamiques d'un palier

Ce concept a été introduit en 1959 par Hori [1] pour décrire le comportement d'un palier long. Si on se limite à des petits déplacements x, y et vitesses de déplacements \dot{x}, \dot{y} au voisinage de la position d'équilibre statique du centre de l'arbre O_{a0} ou O_{j0} définie par les coordonnées x_0, y_0 , on peut écrire à l'aide d'un développement en série de Taylor limité au premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \ddot{x}, \delta \ddot{y}) \approx F_x(x_0, y_0, 0, 0) + \delta x \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_0 + \delta y \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 + \delta \dot{x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_0 + \delta \dot{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0 + \\ \delta \ddot{x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \ddot{x}} \right)_0 + \delta \ddot{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \ddot{y}} \right)_0 \\ F_y(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \ddot{x}, \delta \ddot{y}) \approx F_y(x_0, y_0, 0, 0) + \delta x \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_0 + \delta y \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0 + \delta \dot{x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_0 + \delta \dot{y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0 + \\ \delta \ddot{x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \ddot{x}} \right)_0 + \delta \ddot{y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \ddot{y}} \right)_0 \end{array} \right.$$

(III.7)

Sous forme matricielle, la force additionnelle $\delta \vec{f} = \vec{F} - \vec{F}_0$ est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \delta f_x \\ \delta f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \ddot{x}, \delta \ddot{y}) - F_x(x_0, y_0, 0, 0, 0, 0) \\ F_y(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \ddot{x}, \delta \ddot{y}) - F_y(x_0, y_0, 0, 0, 0, 0) \end{Bmatrix} = -[k] \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{Bmatrix} - [c] \begin{Bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{Bmatrix} - [m] \begin{Bmatrix} \delta \ddot{x} \\ \delta \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Les coefficients k_{ij} , c_{ij} , et m_{ij} correspondent respectivement aux raideurs, aux amortissements, et aux masses rajoutées (added masses) dus à l'existence du film d'air. On remarque que $F_x(x_0, y_0, 0, 0)$ est équivalent à la charge statique appliquée W_0 et que la composante $F_y(x_0, y_0, 0, 0)$ est nulle. Par identification des équations (III.7) et (III.8), on peut écrire :

$$k_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_0, \quad c_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \right)_0, \quad m_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}_j} \right)_0; \quad (i, j) = (x, y) \quad (\text{III.9})$$

Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement ou de la vitesse de déplacement ou encore de l'accélération. L'existence de termes croisés traduit le fait que dans un palier fluide, en général, la force aérodynamique n'est pas colinéaire au déplacement comme dans le cas d'un palier de roulement.

Les composantes de la portance aérodynamique sont obtenues dans le repère fixe lié à la charge statique appliquée (O, \vec{x}, \vec{y}) par intégration de la pression dans le film fluide sur la surface de l'arbre :

$$\begin{cases} F_x(t) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z, t) \cos\theta R d\theta dz \\ F_y(t) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z, t) \sin\theta R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

où l'origine de la coordonnée circonférentielle du palier θ est située sur l'axe (O, \vec{x}) correspondant à $\phi = 0$ où ϕ est l'angle de calage du palier Figure III-2.

Notons que la description mathématique du problème de lubrification direct (excentricité imposée) s'effectue toujours dans le repère lié à la ligne des centres (ligne qui passe par les centres de l'arbre et du coussinet) $(O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ Figure III-3. Dans ce repère dit aussi repère intermédiaire, les relations (III.7) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} F_\varepsilon(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon, \phi_0 + \delta\phi, \delta\dot{\varepsilon}, \delta\dot{\phi}, \delta\ddot{\varepsilon}, \delta\ddot{\phi}) \approx F_\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_0, 0, 0, 0, 0) + \delta\varepsilon \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right)_0}_{k_{\varepsilon\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\phi \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \phi} \right)_0}_{k_{\varepsilon\phi}} + \delta\dot{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0}_{c_{\varepsilon\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \dot{\phi}} \right)_0}_{c_{\varepsilon\phi}} + \\ \delta\ddot{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \ddot{\varepsilon}} \right)_0}_{m_{\varepsilon\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\ddot{\phi} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \ddot{\phi}} \right)_0}_{m_{\varepsilon\phi}} \\ F_\phi(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon, \phi_0 + \delta\phi, \delta\dot{\varepsilon}, \delta\dot{\phi}, \delta\ddot{\varepsilon}, \delta\ddot{\phi}) \approx F_\phi(\varepsilon_0, \phi_0, 0, 0, 0, 0) + \delta\varepsilon \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \varepsilon} \right)_0}_{k_{\phi\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\phi \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right)_0}_{k_{\phi\phi}} + \delta\dot{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0}_{c_{\phi\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \dot{\phi}} \right)_0}_{c_{\phi\phi}} + \\ \delta\ddot{\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \ddot{\varepsilon}} \right)_0}_{m_{\phi\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\ddot{\phi} \underbrace{\left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \ddot{\phi}} \right)_0}_{m_{\phi\phi}} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Pour un mouvement sinusoïdal ou harmonique du rotor au voisinage de la position d'équilibre, on peut écrire :

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon^* e^{i\omega t} = \delta\varepsilon^* e^{i\gamma\Omega t}, \quad \delta\dot{\varepsilon}(t) = i\omega \delta\varepsilon^* e^{i\omega t} = i\omega \delta\varepsilon, \quad \delta\ddot{\varepsilon}(t) = -\omega^2 \delta\varepsilon^* e^{i\omega t} = -\omega^2 \delta\varepsilon$$

$$\delta\phi(t) = \delta\phi^* e^{i\omega t} = \delta\phi^* e^{i\gamma\Omega t}, \delta\dot{\phi}(t) = i\omega \delta\phi^* e^{i\omega t} = i\omega \delta\phi, \delta\ddot{\phi}(t) = -\omega^2 \delta\phi^* e^{i\omega t} = -\omega^2 \delta\phi \quad (\text{III.12})$$

Dans ces conditions, l'équation (III.11) s'écrit sous forme plus compacte comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \delta F_\varepsilon \\ \delta F_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_\varepsilon - F_{\varepsilon_0} \\ F_\phi - F_{\phi_0} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) & Z_{\varepsilon\phi}(\omega) \\ Z_{\phi\varepsilon}(\omega) & Z_{\phi\phi}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon \\ \varepsilon_0\delta\phi \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

où :

$z_{ij}(\omega) = k_{ij} - \omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij}$; $(i, j) = (\varepsilon, \phi)$ qui sont les raideurs dynamiques complexes appelées aussi impédances complexes du système.

$$\begin{Bmatrix} F_{\varepsilon_0} \\ F_{\phi_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_0, 0, 0, 0, 0) \\ F_\phi(\varepsilon_0, \phi_0, 0, 0, 0, 0) \end{Bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_0(\theta, z) \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} R d\theta dz \quad (\text{III.14})$$

Dans le repère $(O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$, les composantes de la portance s'écrivent :

$$\begin{cases} F_\varepsilon(t) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z, t) \cos\theta R d\theta dz \\ F_\phi(t) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z, t) \sin\theta R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

où l'origine de la coordonnée circonférentielle du palier θ est située sur l'axe $(O, \vec{\varepsilon})$ colinéaire avec la ligne des centres.

Dans l'équation (III.15), la pression p est exprimée à l'aide d'un développement limité :

$$p \approx p_0 + \delta\varepsilon \left. \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right|_0 + \varepsilon_0 \delta\phi \left. \frac{\partial p}{\partial \phi} \right|_0 + \delta\dot{\varepsilon} \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_0 + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}} \right|_0 \quad (\text{III.16.a})$$

ou

$$p \approx p_0 + \delta\varepsilon \left. \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right|_0 + \varepsilon_0 \delta\phi \left. \frac{\partial p}{\partial \phi} \right|_0 + \delta\dot{\varepsilon} \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_0 + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}} \right|_0 \quad (\text{III.16.b})$$

ou encore

$$p \approx p_0 + \delta\varepsilon p_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi p_\phi + \delta\dot{\varepsilon} p_{\dot{\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} p_{\dot{\phi}} \quad (\text{III.16.c})$$

Compte tenu de la relation (III.16.c), l'équation (III.15) devient :

$$\begin{cases} F_\varepsilon = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 + \delta\varepsilon p_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi p_\phi + \delta\dot{\varepsilon} p_{\dot{\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} p_{\dot{\phi}}) \cos\theta R d\theta dz \\ F_\phi = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 + \delta\varepsilon p_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi p_\phi + \delta\dot{\varepsilon} p_{\dot{\varepsilon}} + \varepsilon_0 \delta\dot{\phi} p_{\dot{\phi}}) \sin\theta R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

En vertu des relations (III.12), l'équation (III.15) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} F_\varepsilon = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 + e^{i\omega t} (\delta\varepsilon^* q_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi^* q_\phi)) \cos\theta R d\theta dz \\ F_\phi = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p_0 + e^{i\omega t} (\delta\varepsilon^* q_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi^* q_\phi)) \sin\theta R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

où : $q_\varepsilon = p_\varepsilon + i\omega p_{\dot{\varepsilon}}$; $q_\phi = p_\phi + i\omega p_{\dot{\phi}}$

L'identification entre les équations (III.18) et (III.13) et sachant que $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon^* e^{i\omega t}$, $\delta\phi = \delta\phi^* e^{i\omega t}$ permet de trouver les expressions des impédances :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) & \mathbf{z}_{\varepsilon\phi}(\omega) \\ \mathbf{z}_{\phi\varepsilon}(\omega) & \mathbf{z}_{\phi\phi}(\omega) \end{bmatrix} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\varepsilon(\omega)\cos\theta & \mathbf{q}_\phi(\omega)\cos\theta \\ \mathbf{q}_\varepsilon(\omega)\sin\theta & \mathbf{q}_\phi(\omega)\sin\theta \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (\text{III.19})$$

III.4.2 : Méthode de perturbation analytique : Calcul des coefficients dynamiques

Le calcul des coefficients dynamiques peut s'effectuer soit dans le repère fixe (O_c, \vec{x}, \vec{y}) dans le cas d'une charge statique imposée (problème inverse) ou intermédiaire $(O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ lorsque l'excentricité de fonctionnement est imposée (problème direct) figure III.3.

Dans le cas d'une excentricité imposée, il convient d'utiliser le paramétrage (ε, ϕ) pour calculer les coefficients dynamiques dans le repère intermédiaire. Un changement de base de rotation $(-\phi_0)$ permettra de les exprimer dans le repère fixe (O, \vec{x}, \vec{y}) .

Lorsque le rotor est soumis à des vibrations harmoniques de faible amplitude de pulsation ω au voisinage de la position d'équilibre statique O_{j0} caractérisée par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) , l'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par :

$$\phi(\tilde{t}) = \phi_0 + \delta\phi ; \varepsilon(\tilde{t}) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon \text{ tels que } |\delta\varepsilon| \ll \varepsilon_0, |\delta\phi| \ll \phi_0 \quad (\text{III.20})$$

Le mouvement du rotor étant harmonique, on peut écrire :

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon^* e^{i\gamma\tilde{t}} \text{ et } \delta\phi = \delta\phi^* e^{i\gamma\tilde{t}} \quad (\text{III.21})$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $\gamma = \frac{\omega}{\Omega}$ est la fréquence de perturbation appelée aussi fréquence d'excitation relative, et $\delta\varepsilon^*$ et $\delta\phi^*$ sont respectivement les amplitudes complexes de l'excentricité relative et de l'angle de calage. Les dérivées premières et secondes de $\delta\varepsilon$ et $\delta\phi$ sont :

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon' &= i\gamma\delta\varepsilon^* e^{i\gamma\tilde{t}} = i\gamma\delta\varepsilon ; \delta\phi' = i\gamma\delta\phi^* e^{i\gamma\tilde{t}} = i\gamma\delta\phi \\ \delta\varepsilon'' &= -\gamma^2\delta\varepsilon^* e^{i\gamma\tilde{t}} = -\gamma^2\delta\varepsilon ; \delta\phi'' = -\gamma^2\delta\phi^* e^{i\gamma\tilde{t}} = -\gamma^2\delta\phi \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

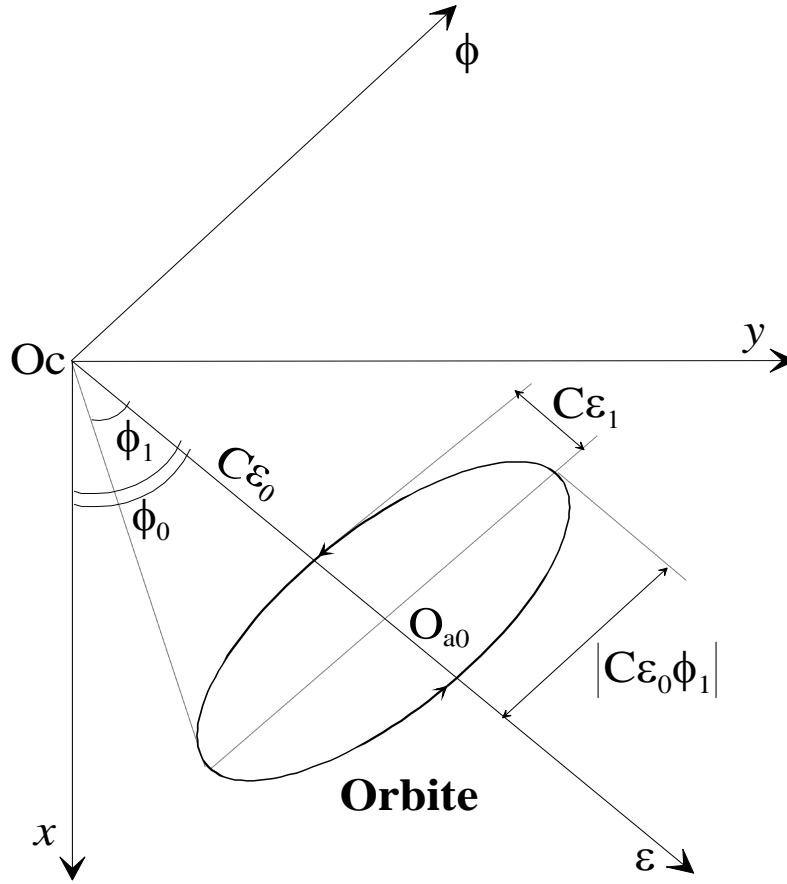


Fig. III.3: Systems of axes and notations.

a-Perturbation de l'épaisseur du film adimensionnelle H

En faisant un développement limité à l'ordre un au voisinage de la position d'équilibre, l'épaisseur du film adimensionnée s'écrit pour un palier rigide comme suit:

$$H \approx H_0 + \underbrace{\delta\varepsilon}_{\delta\varepsilon^* e^{i\gamma\tilde{t}}} \left. \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \right|_0 + \varepsilon_0 \underbrace{\delta\phi}_{\delta\phi^* e^{i\gamma\tilde{t}}} \left. \frac{\partial H}{\partial \phi} \right|_0 = H_0 + \underbrace{\delta\varepsilon}_{\delta\varepsilon^* e^{i\gamma\tilde{t}}} H_\varepsilon + \varepsilon_0 \underbrace{\delta\phi}_{\delta\phi^* e^{i\gamma\tilde{t}}} H_\phi \quad (\text{III.23})$$

ou encore

$$H = H_0 + \delta H_d \quad |\delta H_d| \ll H_0$$

où $H_0 = \frac{h_0}{c}$ est l'épaisseur du film stationnaire.

Par identification avec l'équation géométrique du film (III.24) :

$$H = 1 + \varepsilon(\tilde{t}) \cos(\theta - \phi(\tilde{t})) \quad (\text{III.24})$$

et compte des équations (III.20) et (III.21), on trouve :

$$\mathbf{H_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos\theta ; H_\varepsilon = \cos\theta ; H_\phi = \sin\theta}$$

Par conséquent, l'expression complète de l'épaisseur du film est :

$$\mathbf{H = H_0 + (\delta\varepsilon^* H_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi^* H_\phi) e^{i\gamma\tilde{t}} = 1 + \varepsilon_0 \cos\theta + (\delta\varepsilon^* \cos\theta + \varepsilon_0 \delta\phi^* \sin\theta) e^{i\gamma\tilde{t}} = H_0 + \delta H} \quad (\text{III.25})$$

H_0 étant l'épaisseur du film statique correspondant à la position d'équilibre.

b-Perturbation de la pression aérodynamique adimensionnelle P

De même, le développement limité de la pression P au voisinage de la position d'équilibre donne :

$$P \approx P_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon}{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_0 + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi}{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial P}{\partial \phi} \right|_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon'}{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \right|_0 + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi'}{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial P}{\partial \phi'} \right|_0 = P_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon}{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} P_\varepsilon + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi}{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} P_\phi + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon'}{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} P_{\varepsilon'} + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi'}{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} P_{\phi'} \quad (\text{III.26})$$

L'équation (III.26) peut s'écrire aussi :

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_0 + (\delta \varepsilon^* \mathbf{Q}_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta \phi^* \mathbf{Q}_\phi) e^{i\gamma \bar{t}} = \mathbf{P}_0 + \delta \mathbf{P} \quad (\text{III.27})$$

où : $Q_\varepsilon = P_\varepsilon + i\gamma P_{\varepsilon'}$ et $Q_\phi = P_\phi + i\gamma P_{\phi'}$

$P_\varepsilon = \text{Real}(Q_\varepsilon)$; $P_{\varepsilon'} = \frac{1}{\gamma} \text{Imag}(Q_\varepsilon)$ et des relations similaires pour P_ϕ et $P_{\phi'}$.

$P_0 \geq 0$ étant la pression statique correspondant à la position d'équilibre.

Compte tenu des équations (III.25) et (III.27), on peut établir les relations suivantes :

$$P^2 \approx P_0^2 + 2P_0 \delta P \quad (\text{III.28.a})$$

$$H^3 \approx H_0^3 + 3H_0^2 \delta H \quad (\text{III.28.b})$$

$$PH \approx P_0 H_0 \left(1 + \frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} \right) \quad (\text{III.28.c})$$

c-Perturbation de la viscosité dynamique adimensionnelle $\tilde{\mu}$

Le développement limité de la viscosité dynamique normalisée au voisinage de la position d'équilibre donne :

$$\tilde{\mu} \approx \tilde{\mu}_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon}{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varepsilon} \right|_0 + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi}{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi} \right|_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon'}{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varepsilon'} \right|_0 + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi'}{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi'} \right|_0 = \tilde{\mu}_0 + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon}{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \tilde{\mu}_\varepsilon + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi}{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{\delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \tilde{\mu}_\phi + \underbrace{\frac{\delta \varepsilon'}{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \varepsilon^* e^{i\gamma \bar{t}}} \tilde{\mu}_{\varepsilon'} + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\delta \phi'}{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}}}_{i\gamma \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}} \tilde{\mu}_{\phi'} \quad (\text{III.29.a})$$

$$\tilde{\mu} \approx \tilde{\mu}_0 + (\delta \varepsilon^* \tilde{\mu}_\varepsilon^* + \varepsilon_0 \delta \phi^* \tilde{\mu}_\phi^*) e^{i\gamma \bar{t}} = \tilde{\mu}_0 + \delta \tilde{\mu} \quad (\text{III.29.b})$$

où : $\tilde{\mu}_\varepsilon^* = \tilde{\mu}_\varepsilon + i\gamma \tilde{\mu}_{\varepsilon'}$ et $\tilde{\mu}_\phi^* = \tilde{\mu}_\phi + i\gamma \tilde{\mu}_{\phi'}$ qui sont des viscosités dynamiques complexes.

$\tilde{\mu}_0 \geq 0$ étant la viscosité dynamique du fluide statique.

A partir de l'équation (III.29.b), on peut écrire en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_0 \left(1 + \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} \right)} = \frac{\left(1 + \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} \right)^{-1}}{\tilde{\mu}_0} = \frac{1}{\tilde{\mu}_0} \left(1 - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} \right) \quad (\text{III.30})$$

Dans l'équation (III.29.a), les différentes dérivées partielles de $\tilde{\mu}$ peuvent être exprimées en appliquant la règle de dérivation en chaîne comme suit :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varepsilon} \right|_0 = \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial P} \right)_T \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_0 = \tilde{\mu}_P P_\varepsilon ; \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi} \right|_0 = \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial P} \right)_T \left. \frac{\partial P}{\partial \phi} \right|_0 = \tilde{\mu}_P P_\phi ;$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varepsilon'} \right|_0 = \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial P} \right)_T \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \right|_0 = \tilde{\mu}_P P_{\varepsilon'} ; \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi'} \right|_0 = \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial P} \right)_T \left. \frac{\partial P}{\partial \phi'} \right|_0 = \tilde{\mu}_P P_{\phi'} \quad (\text{III.31})$$

avec $\tilde{\mu}_P = \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial P} \right)_T$; $P_\varepsilon = \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_0$; etc.

Compte tenu de (III.31), l'équation (III.29.b) devient

$$\tilde{\mu} \approx \tilde{\mu}_0 + (\delta\varepsilon^* Q_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta\phi^* Q_\phi) \tilde{\mu}_p e^{i\gamma\tilde{t}} \quad (\text{III.32})$$

Si le fluide est par hypothèse iso-visqueux ; c'est-à-dire $\tilde{\mu}_p = 0$, on a : $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$

d-Perturbation du nombre de Reynolds local Re

Le nombre de Reynolds local de l'écoulement peut s'écrire compte tenu de l'équation d'état des gaz parfaits ($\tilde{T} = \frac{T}{T_a} = 1$; c'est - à - dire pour un régime isotherme) comme suit : $Re = \frac{\rho\Omega R h}{\mu} = \frac{p\Omega R h}{\mu RT} = Re_a \frac{pH}{\tilde{\mu}}$ où $Re_a = \frac{\rho_a \Omega R C}{\mu_a}$ est le nombre de Reynolds adimensionnel moyen.

Compte tenu des équations (III.28.c) et (III.30), le nombre de Reynolds perturbé s'écrit :

$$Re = \underbrace{Re_a \frac{p_0 H_0}{\tilde{\mu}_0}}_{Re_0} \left(1 + \frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0}\right) \left(1 - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right) \approx Re_0 \left(1 + \frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right) \quad (\text{III.33})$$

avec $Re_0 = Re_a \frac{p_0 H_0}{\tilde{\mu}_0}$ qui est le nombre de Reynolds stationnaire.

e-Perturbation des coefficients de turbulence K'_x et K'_z

Compte de l'expression du nombre de Reynolds local perturbé (III.31), les deux coefficients de turbulence apparaissant dans l'équation de Reynolds peuvent s'écrire :

$$K'_x = 1 + \frac{m_x}{12} \left(Re_0 \left(1 + \frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right) \right)^{n_x}, \quad K'_z = 1 + \frac{m_z}{12} \left(Re_0 \left(1 + \frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right) \right)^{n_z}$$

Soit :

$$\begin{cases} K'_x = 1 + \frac{m_x}{12} \left[Re_0^{n_x} \left(1 + n_x \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right) \right] \\ K'_z = 1 + \frac{m_z}{12} \left[Re_0^{n_z} \left(1 + n_z \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right) \right] \end{cases} \quad (\text{III.34.a})$$

ou

$$\begin{cases} K'_x = 1 + m'_x Re_0^{n_x} \left[1 + n_x \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \\ K'_z = 1 + m'_z Re_0^{n_z} \left[1 + n_z \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{III.34.b})$$

avec $m'_x = \frac{m_x}{12}$ et $m'_z = \frac{m_z}{12}$

ou encore

$$\begin{cases} K'_x = K'_{x_0} \left[1 + n_x \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \\ K'_z = K'_{z_0} \left[1 + n_z \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{III.34.c})$$

où $K'_{x_0} = 1 + m'_x Re_0^{n_x}$; $K'_{z_0} = 1 + m'_z Re_0^{n_z}$

Certains auteurs expriment les coefficients de turbulence sous la forme suivante en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{cases} G'_x = \frac{1}{K'_x} = \frac{1}{K'_{x_0}} \left[1 - n_x \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \\ G'_z = \frac{1}{K'_z} = \frac{1}{K'_{z_0}} \left[1 - n_z \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

En assumant que le fluide est iso-visqueux (autrement dit la viscosité du fluide n'est pas affectée par la pression et la température), les relations (III.35) se réduisent à :

$$\begin{cases} G'_x = \frac{1}{K'_x} = \frac{1}{K'_{x0}} \left[1 - n_x \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} \right) \right] \\ G'_z = \frac{1}{K'_z} = \frac{1}{K'_{z0}} \left[1 - n_z \left(\frac{\delta H}{H_0} + \frac{\delta P}{P_0} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

On rappelle que

$$\delta P = (\delta \varepsilon^* Q_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta \phi^* Q_\phi) e^{i\gamma \tilde{t}} ;$$

$$\delta H = (\delta \varepsilon^* H_\varepsilon + \varepsilon_0 \delta \phi^* H_\phi) e^{i\gamma \tilde{t}} = (\delta \varepsilon^* \cos \theta + \varepsilon_0 \delta \phi^* \sin \theta) e^{i\gamma \tilde{t}}$$

$$\text{où } H_\varepsilon = \cos \theta ; H_\phi = \sin \theta$$

Le report des relations (III.28), (III.32), et (III.36) dans l'équation de Reynolds modifiée (III.6) et en tenant compte des expressions (III.25) et (III.27) définissant H et P , on obtient une cascade de trois EDPs couplées, à savoir :

- Equation statique : Identification des termes d'ordre zéro

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{x0}} \frac{\partial (P_0^2)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{z0}} \frac{\partial (P_0^2)}{\partial Z} \right) = 2\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 H_0) + 2\beta (P_0^2 - P_s^2) \quad (\text{III.37})$$

où $H_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos \theta$ est l'équation géométrique statique du film d'air qui ne dépend pas de la pression statique P_0 .

Les conditions limites associées à l'équation (III.37) liées à l'environnement du palier, la périodicité de la pression, et à l'écoulement du fluide lubrifiant dans le palier sont :

$$P_0(\theta, Z = \pm L/D) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$P_0(\theta, Z) = P_0(\theta + 2\pi, Z), \quad \left. \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, Z} = \left. \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi, Z}, \quad \forall Z \in [-L/D, L/D]$$

$$P_0(\theta, Z) = 1 \text{ pour } \theta \in [\theta_{d_0}(Z), 2\pi] \text{ tel que } Z \in [-L/D, L/D] \text{ qui est la condition de Gumbel.}$$

θ_{d_0} étant l'abscisse de la frontière délimitant la zone active du palier.

- Première équation dynamique : Identification des termes d'ordre un facteurs de $\delta \varepsilon^* e^{i\gamma \tilde{t}}$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x0}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \right) + (1 - n_x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial \theta}}{\tilde{\mu}_0 K'_{x0}} \frac{Q_\varepsilon}{P_0} \right) + (3 - n_x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial \theta}}{\tilde{\mu}_0 K'_{x0}} \frac{H_\varepsilon}{H_0} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z0}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \right) + \\ & (1 - n_z) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial Z}}{\tilde{\mu}_0 K'_{z0}} \frac{Q_\varepsilon}{P_0} \right) + (3 - n_z) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial Z}}{\tilde{\mu}_0 K'_{z0}} \frac{H_\varepsilon}{H_0} \right) = 2\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_0 H_0 \left(\frac{H_\varepsilon}{H_0} + \frac{Q_\varepsilon}{P_0} \right) \right] + 4i\gamma \Lambda P_0 H_0 \left(\frac{H_\varepsilon}{H_0} + \frac{Q_\varepsilon}{P_0} \right) + 4\beta P_0^2 \left(\frac{Q_\varepsilon}{P_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

où $H_\varepsilon = \cos \theta$

- Seconde équation dynamique : Identification des termes d'ordre un facteurs de $\varepsilon_0 \delta \phi^* e^{i\gamma \bar{t}}$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\bar{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} \right) + (1 - n_x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial \theta}}{\bar{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{Q_\phi}{P_0} \right) + (3 - n_x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial \theta}}{\bar{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{H_\phi}{H_0} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\bar{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial Q_\phi}{\partial Z} \right) + \\
& (1 - n_z) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial Z}}{\bar{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{Q_\phi}{P_0} \right) + (3 - n_z) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 \frac{\partial P_0^2}{\partial Z}}{\bar{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{H_\phi}{H_0} \right) = 2\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_0 H_0 \left(\frac{H_\phi}{H_0} + \frac{Q_\phi}{P_0} \right) \right] + 4i\gamma\Lambda P_0 H_0 \left(\frac{H_\phi}{H_0} + \right. \\
& \left. \frac{Q_\phi}{P_0} \right) + 4\beta P_0^2 \left(\frac{Q_\phi}{P_0} \right) \tag{III.39}
\end{aligned}$$

où $H_\phi = \sin\theta$

Les conditions limites associées aux équations (III.38) et (III.39) sont :

$$\begin{aligned}
& Q_\varepsilon(\theta, Z = \pm L/D) = Q_\phi(\theta, Z = \pm L/D) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \\
& Q_\varepsilon(\theta, Z) = Q_\varepsilon(\theta + 2\pi, Z), \quad \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, Z} = \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi, Z}, \quad \forall Z \in [-L/D, L/D] \\
& Q_\phi(\theta, Z) = Q_\phi(\theta + 2\pi, Z), \quad \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, Z} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi, Z}, \quad \forall Z \in [-L/D, L/D]
\end{aligned}$$

Les deux dernières conditions reflètent la périodicité circonférentielle des deux pressions dynamiques. Il est à souligner que l'équation (III.37) est une équation différentielle partielle non linéaire dont l'inconnue est la pression statique P_0 . Cette dernière doit être déterminée à l'aide d'un processus de calcul itératif telle que la méthode de Newton-Raphson et la méthode du point fixe. En revanche, les équations dynamiques complexes (III.38) et (III.39) sont linéaires en terme des pressions dynamiques complexes $Q_\varepsilon = P_\varepsilon + i\gamma P_\varepsilon'$ et $Q_\phi = P_\phi + i\gamma P_\phi'$.

On note que le domaine d'intégration des équations d'ordre un (III.38) et (III.39) correspond à la zone active du palier où $P_0 > 1$ ou $p_0 > p_a$.

Il est intéressant de noter que certains auteurs tel que [2] utilisent les conditions de Reynolds pour la résolution de l'équation d'ordre zéro (III.37) :

$P_0(\theta_{d_0}, Z_{d_0}) = 1$ et $\left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta}\right)_{(\theta_{d_0}, Z_{d_0})} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial Z}\right)_{(\theta_{d_0}, Z_{d_0})} = 0$ où $\theta_{d_0}(Z)$ est la frontière délimitant la zone active de la zone inactive (région en dépression) du palier. Ceci peut être démontré au moyen d'un développement limité de $P_0(\theta, Z)$ au voisinage de (θ_{d_0}, Z_{d_0}) :

$$P_0(\theta, Z) = P_0(\theta_{d_0} + \Delta\theta, Z_{d_0} + \Delta Z) \approx P_0(\theta_{d_0}, Z_{d_0}) + \underbrace{\left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta}\right)_{(\theta_{d_0}, Z_{d_0})}}_{=0} \Delta\theta + \underbrace{\left(\frac{\partial P_0}{\partial Z}\right)_{(\theta_{d_0}, Z_{d_0})}}_{=0} \Delta Z = 1$$

Les distributions complexes Q_ε et Q_ϕ sont obtenues à partir des Eqs (III. 38) et (III.39) à partir desquelles les quatre coefficients d'impédances dynamiques adimensionnelles peuvent être calculés dans le système d'axes intermédiaire $(O, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ par intégration numérique :

$$\begin{aligned}
Z_{\varepsilon\varepsilon} &= K_{\varepsilon\varepsilon}(\gamma) - \gamma^2 M_{\varepsilon\varepsilon}(\gamma) + i\gamma C_{\varepsilon\varepsilon}(\gamma) = - \int_0^{2\pi} \int_{-L/D}^{L/D} Q_\varepsilon(\gamma) \cos\theta \, dZ d\theta; \quad Z_{\varepsilon\phi} = K_{\varepsilon\phi}(\gamma) - \gamma^2 M_{\varepsilon\phi}(\gamma) + \\
i\gamma C_{\varepsilon\phi}(\gamma) &= - \int_0^{2\pi} \int_{-L/D}^{L/D} Q_\phi(\gamma) \cos\theta \, dZ d\theta
\end{aligned}$$

$$Z_{\phi\varepsilon} = K_{\phi\varepsilon}(\gamma) - \gamma^2 M_{\varepsilon\varepsilon}(\gamma) + i\gamma C_{\phi\varepsilon}(\gamma) = - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} Q_\varepsilon(\gamma) \sin\theta \, dZ d\theta; \quad Z_{\phi\phi} = K_{\phi\phi} - \gamma^2 M_{\varepsilon\varepsilon}(\gamma) + i\gamma C_{\phi\phi} = - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} Q_\phi(\gamma) \sin\theta \, dZ d\theta \quad (\text{III.40})$$

$$\text{où } K_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} \frac{C}{R^2 p_a}; \quad C_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \frac{\Omega C}{R^2 p_a}; \quad M_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} \frac{\Omega^2 C}{R^2 p_a}; \quad (\alpha, \beta) = (\varepsilon, \phi)$$

Les coefficients de raideur et d'amortissement dans le système d'axes (O, \vec{x}, \vec{y}) peuvent être déterminés à partir des coefficients calculés dans le repère $(O, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ en utilisant les relations de transformation des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de système d'axes :

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} K_{\varepsilon\varepsilon} & K_{\varepsilon\phi} \\ K_{\phi\varepsilon} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (\text{III.41.a})$$

$$\begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & C_{\varepsilon\phi} \\ C_{\phi\varepsilon} & C_{\phi\phi} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (\text{III.41.b})$$

où $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi_0 & \sin\phi_0 \\ -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{bmatrix}$ est la matrice de passage ou la matrice rotation orthogonale.

ϕ_0 étant l'angle de calage statique calculé par la relation suivante:

$$\phi_0 = \arctg \left(- \frac{\int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} P_0 \sin\theta \, d\theta dZ}{\int_{-\frac{L}{D}}^{\frac{L}{D}} \int_0^{2\pi} P_0 \cos\theta \, d\theta dZ} \right) \quad (\text{III.42})$$

Compte tenu des relations (III.41), il vient :

$$\begin{aligned} K_{xx} &= K_{\varepsilon\varepsilon} \cos^2 \phi_0 + K_{\phi\phi} \sin^2 \phi_0 - (K_{\varepsilon\phi} + K_{\phi\varepsilon}) \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ K_{xy} &= K_{\varepsilon\phi} \cos^2 \phi_0 + K_{\phi\varepsilon} \sin^2 \phi_0 - (K_{\varepsilon\varepsilon} + K_{\phi\phi}) \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ K_{yx} &= K_{\phi\varepsilon} \cos^2 \phi_0 + K_{\varepsilon\phi} \sin^2 \phi_0 - (K_{\varepsilon\varepsilon} + K_{\phi\phi}) \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ K_{yy} &= K_{\phi\phi} \cos^2 \phi_0 + K_{\varepsilon\varepsilon} \sin^2 \phi_0 - (K_{\varepsilon\phi} + K_{\phi\varepsilon}) \sin \phi_0 \cos \phi_0 \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

et des relations similaires pour les termes d'amortissement B_{ij} et les termes de masses rajoutées.

Pour les coefficients dynamiques exprimés dans le repère fixe, on adopte la normalisation suivante :

$$\begin{cases} K_{ij} = k_{ij} \frac{C}{W_0} \\ C_{ij} = c_{ij} \frac{C\Omega}{W_0} \end{cases} ; (i, j) = (x, y)$$

III.5 Caractéristiques statiques du palier

La détermination de la pression statique p_0 à partir de la résolution numérique de l'équation de Reynolds stationnaire (III.37) moyennant les conditions limites sur la pression établies dans la section (III.42) permet de calculer les performances statiques du palier à gaz hybride, à savoir : la capacité de charge du système en intégrant le champ de pression statique sur la surface du palier développée, le

couple de frottement par intégration des contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre, et le débit massique de fuite par intégration des vitesses axiales moyennes calculées au bord libre du palier ($z = \pm \frac{L}{2}$).

III.5.1 Capacité de charge ou portance aérodynamique

La capacité de charge dimensionnelle du palier \vec{F}_0 qui est l'action du fluide sur l'arbre est obtenue par intégration du champ de pression statique :

$$\vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{\varepsilon_0} \\ F_{\phi_0} \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} (p_0 - p_a) \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} R d\theta dz$$

$$\text{ou encore sous forme adimensionnelle : } \tilde{F}_0 = \frac{F_0}{p_a R^2} = \sqrt{\tilde{F}_{\varepsilon_0}^2 + \tilde{F}_{\phi_0}^2}$$

où $F_{\varepsilon_0}, F_{\phi_0}$ sont les composantes de la charge portante (carrying load) \vec{F}_0 suivant la ligne des centres et la normale à cette dernière dont les expressions sont :

$$\tilde{F}_{\varepsilon_0} = \int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} (P_0 - 1) \cos\theta d\theta dZ ; \quad \tilde{F}_{\phi_0} = \int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} (P_0 - 1) \sin\theta d\theta dZ$$

L'angle de calage statique (attitude angle) est alors déduit : $\phi_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{\tilde{F}_{\phi_0}}{\tilde{F}_{\varepsilon_0}}\right)$

III.5.2 Couple de frottement à la surface de l'arbre pour un écoulement turbulent

Les composantes de la force de frottement sont obtenues par intégration des contraintes de cisaillement exercées par le fluide sur la surface de l'arbre dont la résultante est :

$F_f = |\vec{F}_f| = \sqrt{F_{f_1}^2 + F_{f_2}^2}$ où F_{f_1} et F_{f_2} sont les composantes de la force de frottement \vec{F}_f suivant les directions circonférentielle et axiale du palier :

$$F_{f_1} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy}|_{\theta,y=h,z} R d\theta dz ; \quad F_{f_2} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{zy}|_{\theta,y=h,z} R d\theta dz$$

$$\text{où : } \tau_{xy}(x = R\theta, y, z) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \text{ et } \tau_{zy}(x = R\theta, y, z) = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$$

τ_{xy} et τ_{zy} sont les contraintes de cisaillement selon les directions circonférentielle et axiale du palier.

A la surface de l'arbre d'équation $y=h$, on peut alors écrire [4]:

$$\tau_{xy}|_{y=h} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{x,y=h,z} = \underbrace{\mu \frac{\Omega R}{h} (1 + 0.0012 \mathcal{R}_{\varepsilon_0}^{0.94})}_{\text{terme de Couette en régime turbulent}} + \underbrace{\frac{h_0}{2} \frac{\partial p_0}{R \partial \theta}}_{\text{terme de Hagen-Poiseuille}} \quad \text{et}$$

$$\tau_{zy}|_{y=h} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}|_{x,y=h,z} = \underbrace{\frac{h_0}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}}_{\text{terme de Hagen-Poiseuille}}$$

Le coefficient de frottement statique adimensionnel peut être calculé par la relation suivante : $C_{f_0} = \frac{F_f}{F_0}$

Le couple de frottement \mathcal{T}_f et la puissance dissipée \mathcal{P}_f peuvent être calculés par les expressions suivantes : $\mathcal{T}_f = R F_f$ et $\mathcal{P}_f = \mathcal{T}_f \Omega$.

On peut montrer que le couple de frottement adimensionnel peut être exprimé par la relation suivante : $\tilde{\mathcal{F}}_f = \frac{\mathcal{F}_f}{\rho_a R^2 C} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{H_0}{2} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + \frac{\Lambda}{6H_0} (\mathbf{1} + \mathbf{0.0012} \mathcal{R}_{e_0}^{0.94}) \right] d\theta dZ$ pour un écoulement laminaire, et $\tilde{\mathcal{F}}_f = \frac{\mathcal{F}_f}{\rho_a R^2 C} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{H_0}{2} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + \frac{\Lambda}{6H_0} \right] d\theta dZ$

III.5.3 Débit massique de fuite latérale & vitesses moyennes de l'écoulement non laminaire

Le débit massique de fuite latéral sur les bords libres du palier ($z = \pm \frac{L}{2}$) est calculé par la relation suivante :

$$M_z = \rho_a \left| \int_0^{\theta_{d_0}} h_0(\theta, z = -\frac{L}{2}) \bar{w}(\theta, z = -\frac{L}{2}) R d\theta \right| + \rho_a \left| \int_0^{\theta_{d_0}} h_0(\theta, z = \frac{L}{2}) \bar{w}(\theta, z = \frac{L}{2}) R d\theta \right|$$

avec $\theta = \frac{x}{R}$ est l'angle du palier, θ_{d_0} est l'angle auquel la pression devient inférieure à la pression ambiante, et $\rho_a = \rho(p_a, T_a)$ est la masse volumique de l'air dans les conditions ambiantes.

Dans l'équation ci-dessus, h_0 est l'épaisseur du film statique et $\bar{w}(\theta, z) = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} w(\theta, y, z) dy$ est la vitesse moyenne axiale d'écoulement exprimée par la relation suivante : $\bar{w}(\theta, z) = -\frac{h_0^2}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z}$ en régime d'écoulement laminaire.

(31b)

La vitesse axiale d'écoulement $w(\theta, y, z)$ ainsi que la vitesse circonférentielle $u(\theta, y, z)$ sont déterminées à partir de l'intégration des équations de Navier-Stokes régissant le mouvement du fluide dans les directions θ et z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z}$$

Les solutions générales des équations de Navier-Stokes sont de la forme suivante :

$$u(x, y, z) = A_0 + A_1 y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} y^2 \quad ; \quad w(x, y, z) = B_0 + B_1 y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} y^2$$

En utilisant les conditions aux limites de non glissement (No slip conditions) suivantes:

$$u(x, 0, z) = 0; \quad u(x, h, z) = \Omega R; \quad w(x, 0, z) = w(x, h, z) = 0$$

on trouve :

$$u(x, y, z) = \underbrace{\Omega R \frac{y}{h_0}}_{\text{Couette flow}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} y(y - h_0)}_{\text{Hagen-Poiseuille flow}} \quad ; \quad w(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} y(y - h_0)}_{\text{Hagen-Poiseuille flow}}$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Pour un écoulement turbulent, la vitesse moyenne suivant la direction axiale du palier s'exprime comme suit : $\bar{w}(\theta, z) = -\frac{h_0^2}{12\mu K'_{z_0}} \frac{\partial p_0}{\partial z}$

Rappelons que $K'_{z_0} = 1 + m'_z Re_0^{n_z}$ en régime non laminaire (turbulent) et $K'_{z_0} = 1$ pour un écoulement laminaire.

$$\text{ou encore sous forme normalisée : } \frac{\bar{w}}{\Omega R} = -\frac{H_0^2}{2\Lambda K'_{z_0}} \frac{\partial P_0}{\partial Z}$$

De même, on obtient pour le débit massique adimensionnel :

$$\tilde{M}_z = \frac{M_z}{\rho_a \Omega C R^2} = \left| \int_0^{\theta_{d_0}} H_0 \left(\theta, Z = -\frac{L}{D} \right) \frac{\bar{w}(\theta, Z = -\frac{L}{D})}{\Omega R} d\theta \right| + \left| \int_0^{\theta_{d_0}} H_0 \left(\theta, Z = \frac{L}{D} \right) \frac{\bar{w}(\theta, Z = \frac{L}{D})}{\Omega R} d\theta \right|$$

III.6 Analyse de la stabilité dynamique d'un palier à gaz hybride : Système en vibrations libres

Les paliers fluides constituent une source d'instabilité pour la ligne d'arbre qu'ils supportent due à la présence du film lubrifiant. Il est donc nécessaire d'étudier leur stabilité de fonctionnement. Différents critères de stabilité ont été proposés, le plus utilisé est celui de Routh-Hurwitz [3].

L'étude de la stabilité d'une position d'équilibre est effectuée dans le cas d'un rotor rigide symétrique de masse $2m$, et supporté horizontalement par deux paliers identiques dont la charge est $2W_0$. Chaque palier supporte la partie de masse m du rotor.

En vibrations libres, le système linéaire associé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.44})$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont les composantes instantanées du déplacement du centre de l'arbre à partir de sa position d'équilibre.

La solution de l'équation matricielle (III.44) est de la forme :

$$\begin{cases} x = X e^{\lambda t} \\ y = Y e^{\lambda t} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

où $\lambda = \eta + i\omega$ est une valeur propre complexe $i = \sqrt{-1}$. Le signe du coefficient η (amortissement structural) permet de définir la stabilité du système rotor-palier ; c'est-à-dire :

$\eta < 0$, le régime est stable ;

$\eta > 0$, le régime est instable.

A la limite de la stabilité $\eta = 0$, le mouvement est purement harmonique $\lambda = i\omega$. Dans ces conditions, le report de x et y dans les équations du mouvement conduit au système homogène :

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - m\omega^2 + i\omega c_{xx} & k_{xy} + i\omega c_{xy} \\ k_{yx} + i\omega c_{yx} & k_{yy} - m\omega^2 + i\omega c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.46})$$

qui admet une solution non triviale lorsque le déterminant est nul. L'annulation des parties réelles est imaginaires permet de déterminer la fréquence d'instabilité ω_c et la masse critique m_c au-delà de laquelle la position d'équilibre est instable.

Pour l'analyse de stabilité, il convient d'utiliser les variables sans dimension suivantes :

$$K_{ij} = k_{ij} \frac{C}{W_0}, C_{ij} = c_{ij} \frac{C\Omega}{W_0}, M = \frac{mC\Omega^2}{W_0}, \gamma = \frac{\omega}{\Omega}, (X, Y) = \frac{(x, y)}{C}, (X', Y') = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{C\Omega}$$

$$(X'', Y'') = \frac{(\ddot{x}, \ddot{y})}{C\Omega^2} \text{ où : } X' = \frac{dX}{d\bar{t}} \text{ et } \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \text{ etc.}$$

Le système précédent (III.46) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} K_{xx} - M\gamma^2 + i\gamma C_{xx} & K_{xy} + i\gamma C_{xy} \\ K_{yx} + i\gamma C_{yx} & K_{yy} - M\gamma^2 + i\gamma C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.47})$$

L'annulation du déterminant conduit aux équations couplées :

$$\begin{cases} M_c \gamma_c^2 = \frac{K_{xx}C_{yy} + K_{yy}C_{xx} - K_{xy}C_{yx} - K_{yx}C_{xy}}{K_{xx}C_{yy}} \\ \gamma_c^2 = \frac{(K_{xx} - M_c \gamma_c^2)(K_{yy} - M_c \gamma_c^2) - K_{yx}K_{xy}}{C_{xx}C_{yy} + C_{xy}C_{yx}} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

où $\gamma_c = \frac{\omega_c}{\Omega}$ est la fréquence de fouettement relative (whirl frequency ratio).

- Si le coefficient $\gamma_c^2 < 0$, ceci entraîne que le système est stable.
- Si le coefficient $\gamma_c^2 > 0$, alors nous pouvons calculer la masse critique M_c du rotor.

Pour une masse M de l'arbre inférieure à la masse critique, le palier est stable. En revanche, pour une masse de l'arbre $>$ à la masse critique, le palier est instable.

Il faut noter que la vitesse de rotation intervient dans le dimensionnement de la masse : la détermination d'une masse critique est donc équivalente à la détermination d'une vitesse critique de rotation, soit : $\Omega_c = \sqrt{\frac{M_c W_0}{MC}}$.

Remarque

Un palier ayant des termes directs de raideur et d'amortissement > 0 et des termes de couplage nul est infiniment stable. Cette situation peut être obtenue avec des paliers à géométrie variable tels que les paliers à patins oscillants (Cf. Chapitre I).

III.8 Réponse dynamique d'un palier à gaz hybride: Système en vibrations forcées

La trajectoire du centre de l'arbre (rotor) prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd résiduel de faible excentricité e_b . Celle-ci est obtenue à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = m e_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.49.a})$$

En variable sans dimension, l'équation (IV.65a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X''(\tilde{t}) \\ Y''(\tilde{t}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X'(\tilde{t}) \\ Y'(\tilde{t}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X(\tilde{t}) \\ Y(\tilde{t}) \end{Bmatrix} = M \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos(\tilde{t}) \\ \sin(\tilde{t}) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.49.b})$$

où $\tilde{t} = \Omega t$ et $\varepsilon_b = \frac{e_b}{c}$ qui est l'excentricité relative du balourd (unbalance eccentricity ratio).

Le vecteur solution du système d'équation (III.49.b) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \cos(\tilde{t}) + \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \sin(\tilde{t}) \quad (\text{III.50})$$

En remplaçant (III.50) dans le système (III.49b) et en identifiant les termes en $\cos(\tilde{t})$ et $\sin(\tilde{t})$, on aura :

$$\begin{bmatrix} (K_{xx} - M) & C_{xx} & K_{xy} & C_{xy} \\ -C_{xx} & (K_{xx} - M) & -C_{xy} & K_{xy} \\ K_{yx} & C_{yx} & (K_{yy} - M) & -C_{yy} \\ -C_{yx} & K_{yx} & -C_{yy} & (K_{yy} - M) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = M \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} X_1 = M \varepsilon_b \frac{AC+BD}{C^2+D^2} \\ X_2 = -M \varepsilon_b \frac{BC+AD}{C^2+D^2} \\ Y_1 = M \varepsilon_b \frac{EC+FD}{C^2+D^2} \\ Y_2 = -M \varepsilon_b \frac{FC+ED}{C^2+D^2} \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

avec

$$A = -M + K_{yy} - C_{xy}$$

$$B = K_{xy} + C_{yy}$$

$$C = M^2 - M(K_{xx} + K_{yy}) + K_{xx}C_{yy} - K_{xy}K_{yx} - (C_{xx}C_{yy} - C_{xy}C_{yx})$$

$$D = -M(C_{xx} + C_{yy}) + K_{xx}C_{yy} - K_{yy}C_{xx} - K_{xy}C_{yx} - K_{yx}C_{xy}$$

$$E = -K_{yx} + C_{xx}$$

$$F = M - K_{yx} - C_{yx}$$

Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (III.50) du système (III.49b) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure III.3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$: demi-grand axe ; $b = \tilde{b}C$: demi-petit axe ; φ : angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement ; δ : l'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X . Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse (o_{a_0}, X^*, Y^*) où o_{a_0} ou o_{j_0} correspond à la position d'équilibre statique du centre de l'arbre, l'équation de l'ellipse s'écrit

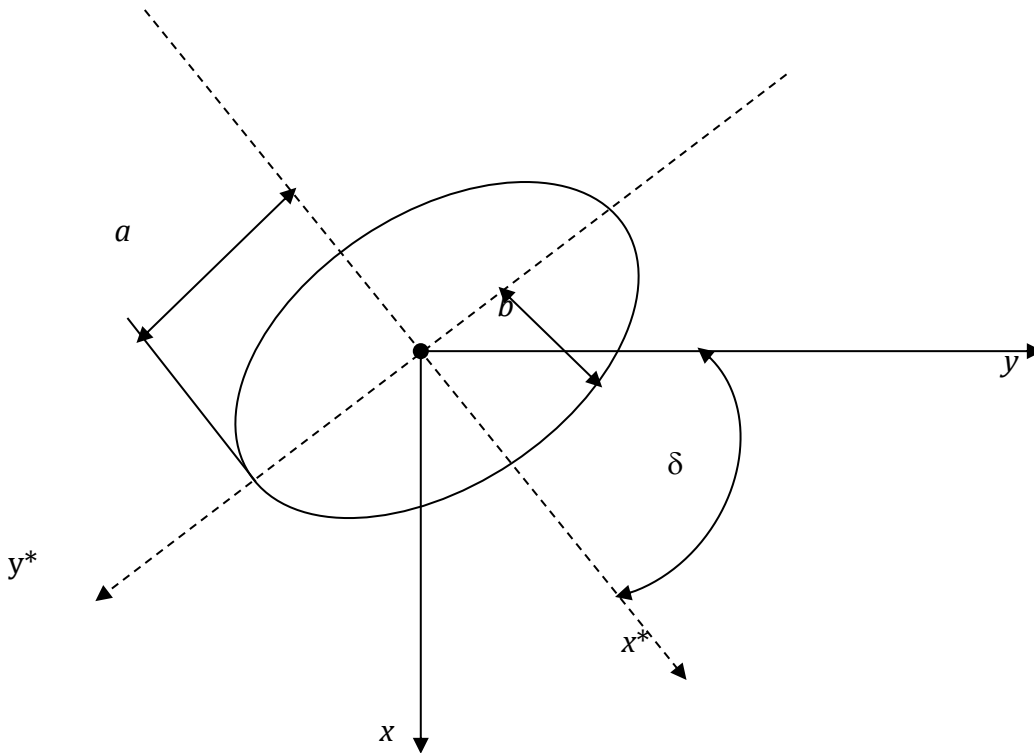


Fig. III.3 Characteristics of an elliptical trajectory.

$$\begin{cases} X^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ Y^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

où : $(X^*, Y^*) = \frac{(x^*, y^*)}{c}$

Compte tenu de la relation (III.53), la projection sur (o_{a_0}, x, y) donne :

$$\begin{cases} X = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ Y = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

Les équations (III.50) sont identiques aux équations (III.54), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} X_1 \cos \tilde{t} + X_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ Y_1 \cos \tilde{t} + Y_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps \tilde{t} , il vient en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$:

$$\begin{cases} X_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ X_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ Y_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ Y_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{III.56})$$

La résolution des équations (III.56) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\begin{cases} \tilde{a} = \sqrt{\frac{(X_1^2 + X_2^2 + Y_1^2 + Y_2^2)}{2} + \sqrt{(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)^2 + \frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 - Y_1^2 - Y_2^2)^2}} \\ \tilde{b} = \sqrt{\frac{(X_1^2 + X_2^2 + Y_1^2 + Y_2^2)}{2} - \sqrt{(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)^2 + \frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 - Y_1^2 - Y_2^2)^2}} \\ \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)}{X_1^2 + X_2^2 - Y_1^2 - Y_2^2} \right) \\ \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)}{X_1^2 + X_2^2 - Y_1^2 - Y_2^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé et présenté de façon détaillée les équations de base et les relations permettant de calculer les paramètres de stabilité en utilisant le critère de stabilité de **Lund**, à savoir la masse critique M_c et la fréquence de fouettement (whirl) ω_c ainsi que les caractéristiques de la trajectoire elliptique décrite par le centre de l'arbre (rotor) dans le cas d'une charge statique imposée et d'une excitation synchrone de type balourd ; c'est-à-dire $\omega = \Omega$ ou $\gamma = 1$. Le calcul des coefficients dynamiques du film, à savoir : les coefficients de raideurs k_{ij} et les coefficients d'amortissement c_{ij} servant comme des données pour l'analyse de la stabilité et la réponse dynamique linéarisée du système rotor-palier à gaz hybride a été effectué en perturbant l'équation de Reynolds compressible modifiée écrite en régime transitoire et pour un écoulement turbulent. Le processus de perturbation a permis de dériver trois équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont la pression statique p_0 , et les pressions dynamiques complexes q_ε et q_ϕ . La connaissance de ces pressions permet déterminer les performances statiques et dynamiques du palier à gaz hybride, à savoir : la capacité de charge du palier, le couple de frottement, le débit de fuite, et les huit coefficients dynamiques du film.

Références du chapitre

- [1] Hori Y., A theory of oil whip, 5th Japan Nat. Cong. A. M., 1955, Proc. 395, 8(a) JAM 26, T81, 1959, pp. 189-198.
- [2] H. Heshmat, J. A. Walowit, O. Pinkus, Analysis of Gas-Lubricated Foil Journal Bearings, Journal of Lubrication Technology, 1983, Vol. 105, 647-655.
- [3] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet, Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles.
- [4] V. N. Constantinescu, Basic relationships in turbulent lubrication and their extension to include thermal effects, Trans. ASME Journal of Lubrication Technology, 95, 2, 147-154, 1973.

Chapitre IV

Etude statique et dynamique d'un palier à gaz poreux (PGB)

IV.1 Introduction

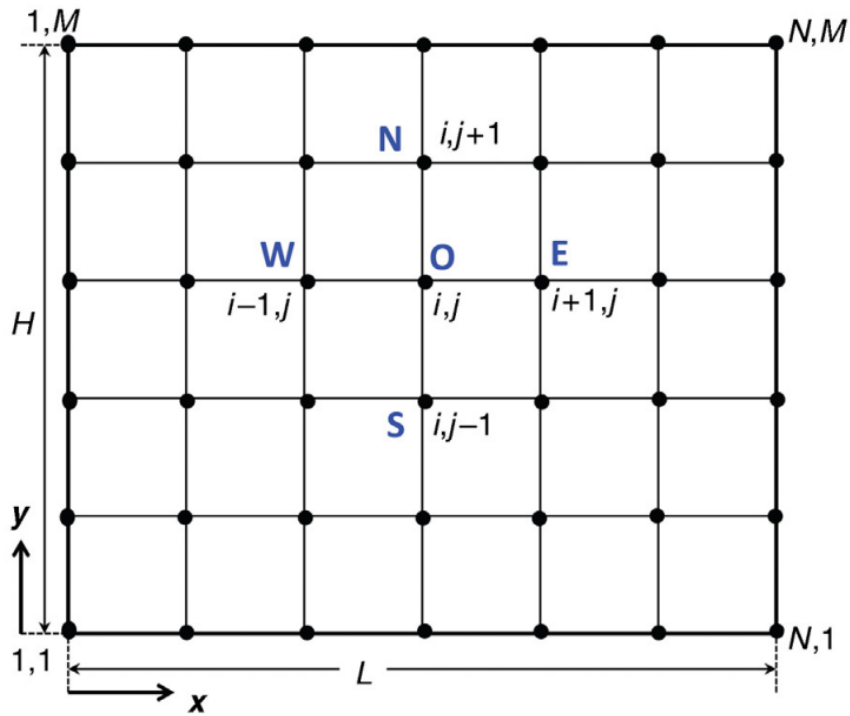
Après avoir présenté, dans les chapitres précédents, les équations de base décrivant le problème dynamique de la lubrification hybride (superposition des effets aérostatique et aérodynamique) en régime isotherme, nous allons développer dans le présent chapitre les méthodes de résolution du problème direct ; c'est-à-dire dans le cas d'une excentricité imposée, et étudier les effets du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) ainsi que de la pression d'alimentation normalisée $P_s = \frac{p_s}{p_a}$ sur :

- les performances statiques et dynamiques du système, à savoir : la capacité de charge, le couple de frottement, le débit de fuite, les coefficients de raideur $K_{ij} = k_{ij} \frac{c}{p_a R^2}$ et d'amortissement $C_{ij} = c_{ij} \frac{c \Omega}{p_a R^2}$.

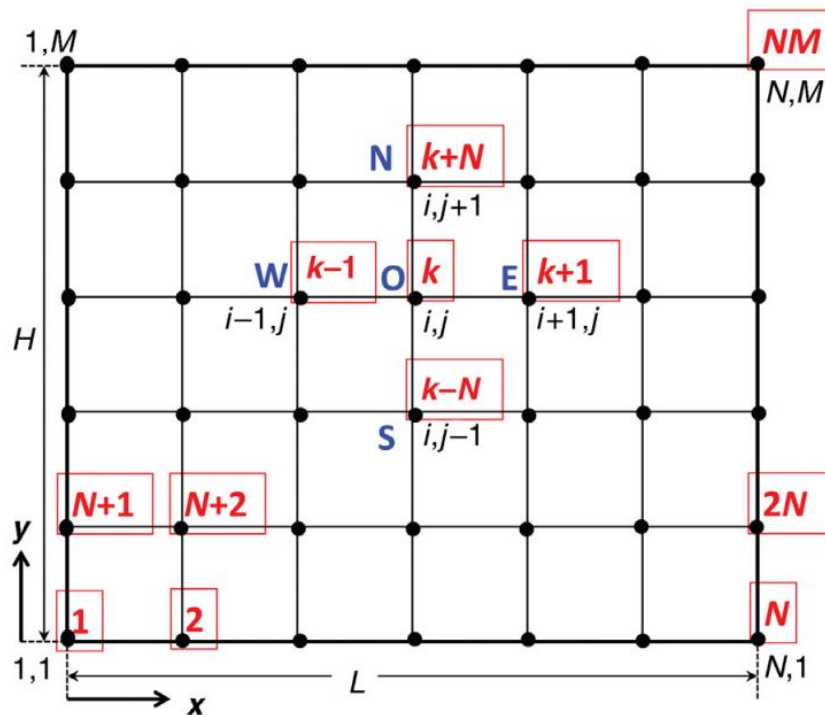
Notons que d'autres paramètres importants peuvent aussi être considérés dans l'étude paramétrique comme le nombre de compressibilité adimensionnel, $\Lambda = \frac{6\mu_a \Omega \left(\frac{R}{c}\right)^2}{p_a}$, qui est proportionnel à la vitesse de rotation du rotor et de la fréquence de perturbation ou d'excitation relative $\gamma = \frac{\omega}{\Omega}$.

IV.2 Solution statique du problème de lubrification direct dans le cas d'une excentricité imposée

Dans le cas d'un palier à gaz poreux lubrifié avec un fluide compressible (gaz) dont le comportement est Newtonien, l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro (III.37) à caractère non linéaire est d'abord écrite sous forme de résidu puis discrétisée par la méthode des différences finies centrées en utilisant deux molécules de calcul : molécule à cinq points et molécule à neuf points. La Figure IV.1 représente les grilles des différences finies bi-indicielle où le nœud du maillage est défini par les deux indices (i, j) et mono-indicielle où le nœud est défini à l'aide d'un seul indice k tel que $k = (j - 1)N + i$. Dans cette relation de conversion, N est le nombre de nœuds du maillage suivant la direction circumférentielle du palier, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \in \{1, 2, \dots, M\}$, et $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ tel que $K = NM$. M étant le nombre de nœuds suivant la direction axiale du palier.



a) Double indexed node numbers



a) Single indexed node numbers : $k = (j - 1)N + i$

Fig. IV.1 2-D orthogonal Cartesian finite difference grid used for spatial discretization of the first order modified Reynolds equation

Sur la base de ce modèle de numérotation, on affecte aux cinq nœuds de la molécule de calcul les indices $k, k-1, k+1, k-N$, et $k+N$ au lieu de (i, j) pour le nœud central \mathbf{O} , $(i-1, j)$ pour le nœud ouest \mathbf{W} , $(i+1, j)$ pour le nœud est \mathbf{E} , $(i, j-1)$ pour le nœud sud \mathbf{S} et $(i, j+1)$ pour le nœud nord \mathbf{N} , respectivement.

Le concept d'utiliser cette formule de conversion permettra de faciliter la génération numérique de la matrice Jacobienne par la méthode des différences finies décentrées (forward differences) dont le terme générique est : $E_{km} = \frac{\partial f_k^{(j)}}{\partial p_m}$ où $m \in \{1, 2, \dots, K\}$.

Pour des raisons de simplicité, nous assumerons que les nœuds sont équidistants suivant les deux directions θ et z tels que $\Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i = \frac{L}{N-1}$ et $\Delta z = z_{j+1} - z_j = \frac{H}{M-1}$ où $L = 2\pi$ et $H = L$ pour le palier développé.

Pour résoudre le problème statique non linéaire, nous adoptons deux schémas de différences finies pour la résolution de l'équation de Reynolds modifiée statique en vue de déterminer le champ de pression statique P_0 . L'équation de Reynolds normalisée (III.37) est réécrite d'abord sous forme de résidu :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{G_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial z} \right) - 2\Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} (P_0 H_0) - 2\beta (P_0^2 - P_s^2) \quad (\text{IV.1})$$

où $G_0 = H_0^3$ et $H_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos\theta$ tel que $0 < \varepsilon_0 < 1$.

Lorsque la distribution de pression statique est trouvée, la fonction résidu f est identiquement nulle. Par conséquent, la fonction résidu doit être discrétisée avec une bonne précision afin d'obtenir une solution numérique suffisamment précise du problème de lubrification aérodynamique direct. A cette fin, les formules de différences finies centrales sont utilisées pour approcher la fonction résidu.

Pour le traitement numérique, on réécrit l'équation (IV.1) sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\Phi \frac{\partial(P_0^2)}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial(P_0^2)}{\partial z} \right) - 2\Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} (P_0 H_0) - 2\beta (P_0^2 - P_s^2) \quad (\text{IV.2})$$

où $\Phi = \frac{G_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}}$ et $\Psi = \frac{G_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}}$

IV.2. 1. Schéma de discrétisation 1 : Utilisation de la molécule de calcul à cinq points

Pour ce schéma figure IV.2, il convient d'écrire l'équation (IV.2) sous la forme suivante :

$$F = \Phi \frac{\partial^2(P_0^2)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial\theta} + \Psi \frac{\partial^2(P_0^2)}{\partial z^2} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial z} - 2\Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} (P_0 H_0) - 2\beta (P_0^2 - P_s^2) \quad (\text{IV.3})$$

En un nœud (i, j) du maillage, l'équation discrétisée associée à l'équation (IV.3) s'écrit :

$$F_{ij} = \Phi_{ij} \frac{\partial^2(P_0^2)}{\partial \theta^2} \Big|_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{ij} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial \theta} \Big|_{ij} + \Psi_{ij} \frac{\partial^2(P_0^2)}{\partial Z^2} \Big|_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \Big|_{ij} \frac{\partial(P_0^2)}{\partial Z} \Big|_{ij} - 2\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 H_0) \Big|_{ij} - 2\beta (P_{0ij}^2 - P_s^2) \quad (\text{IV.4})$$

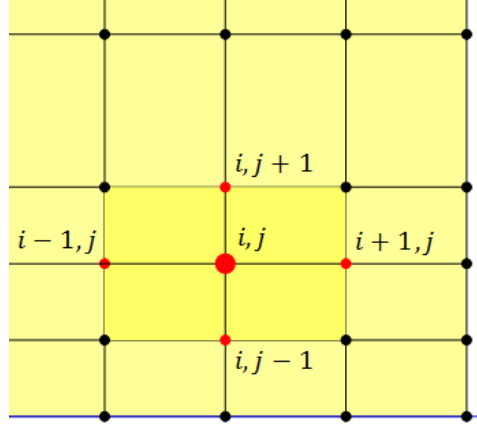


Fig. IV.2 Computational molecule (stencil) used for the discretization of the modified Reynolds equation by central finite difference scheme.

Afin de dériver des formules d'approximation par différences finies aux dérivées premières et secondes intervenant dans l'équation (IV.4), nous utilisons des développements en séries de Taylor. La variable dépendante est une fonction 2D ; c'est-à-dire $P_0 = P_0(\theta, Z)$. Par conséquent, les développements en séries de Taylor doivent être aussi 2D. En développant $S_{0_{i+1,j}} = S_0(\theta_{i+1}, Z_j) = P_0^2(\theta_{i+1}, Z_j)$ au voisinage du point (θ_i, Z_j) , nous obtenons :

$$S_{0_{i+1,j}} = S_{0_{i,j}} + (\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}) \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i,j} + (Z_{i+1,j} - Z_{i,j}) \frac{\partial S_0}{\partial Z} \Big|_{i,j} + \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta^2} \Big|_{i,j} + \frac{(Z_{i+1,j} - Z_{i,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 S_0}{\partial Z^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j})(Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{2!} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta \partial Z} \Big|_{i,j} + \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j})^3}{3!} \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta^3} \Big|_{i,j} + \frac{(Z_{i+1,j} - Z_{i,j})^3}{3!} \frac{\partial^3 S_0}{\partial Z^3} \Big|_{i,j} + \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j})^2 (Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{3!} \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta^2 \partial Z} \Big|_{i,j} + \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j})(Z_{i+1,j} - Z_{i,j})^2}{3!} \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta \partial Z^2} \Big|_{i,j} + \dots \quad (\text{IV.5})$$

L'une des caractéristiques uniques d'une grille cartésienne orthogonale est que $Z_{i+1,j} = Z_{i,j}$. Dans le cas où le pas circonférentiel $\Delta\theta = \theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}$ est supposé constant, l'Eq. (IV.5) se simplifie et se réduit à l'équation (IV.6) :

$$S_{0_{i+1,j}} = S_{0_{i,j}} + \Delta\theta \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta^2} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta^3} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta\theta)^4}{4!} \frac{\partial^4 S_0}{\partial \theta^4} \Big|_{i,j} + \dots \quad (\text{IV.6})$$

Il convient de souligner que la réduction de l'Eq. (IV.5) à l'Eq. (IV.6) n'était possible que si la grille était orthogonale. Pour dériver le schéma de différence centrale, nous développons également $S_{0_{i-1,j}} = P_{0_{i-1,j}}^2 = P_0^2(\theta_{i-1}, Z_j)$ au voisinage du point (θ_i, Z_j) , soit :

$$S_{0_{i-1,j}} = S_{0_{i,j}} - \Delta\theta \left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} - \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta^3} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta\theta)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 S_0}{\partial \theta^4} \right|_{i,j} - \dots \quad (\text{IV.7})$$

En additionnant les équations (IV.6) et (IV.7), on obtient l'approximation de la dérivée partielle seconde $\left. \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}$:

$$\left. \frac{\partial^2 S_0}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} = \frac{S_{0_{i+1,j}} + S_{0_{i-1,j}} - 2S_{0_{i,j}}}{(\Delta\theta)^2} - \frac{(\Delta\theta)^2}{12} \left. \frac{\partial^4 S_0}{\partial \theta^4} \right|_{i,j} + \dots \quad (\text{IV.8})$$

En développant $S_{0_{i,j+1}} = S_0(\theta_i, Z_{j+1}) = P_0^2(\theta_i, Z_{j+1})$ et $S_{0_{i,j-1}} = S_0(\theta_i, Z_{j-1}) = P_0^2(\theta_i, Z_{j-1})$ au voisinage du point (θ_i, Z_j) et en suivant la même procédure, on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 S_0}{\partial Z^2} \right|_{i,j} = \frac{S_{0_{i,j+1}} + S_{0_{i,j-1}} - 2S_{0_{i,j}}}{(\Delta Z)^2} - \frac{(\Delta Z)^2}{12} \left. \frac{\partial^4 S_0}{\partial Z^4} \right|_{i,j} + \dots \quad (\text{IV.9})$$

Il ressort clairement des équations (IV.8) et (IV.9) que les erreurs associées aux approximations par différences finies des dérivées partielles secondes sont du second ordre dans les directions θ et Z .

En soustrayant les équations (IV.6) et (IV.7), on obtient les approximations des dérivées premières :

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{S_{0_{i+1,j}} - S_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} - \frac{(\Delta\theta)^2}{6} \left. \frac{\partial^3 S_0}{\partial \theta^3} \right|_{i,j} - \dots \quad (\text{IV.10})$$

En développant $S_{0_{i,j+1}} = S_0(\theta_i, Z_{j+1})$ et $S_{0_{i,j-1}} = S_0(\theta_i, Z_{j-1})$ au voisinage du point (θ_i, Z_j) et en suivant la même procédure, on obtient :

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial Z} \right|_{i,j} = \frac{S_{0_{i,j+1}} - S_{0_{i,j-1}}}{2\Delta Z} - \frac{(\Delta Z)^2}{6} \left. \frac{\partial^3 S_0}{\partial Z^3} \right|_{i,j} - \dots \quad (\text{IV.11})$$

De même, on peut écrire en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta\theta} ; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right|_{ij} \approx \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Z} ; \quad \left. \frac{\partial (P_0 H_0)}{\partial \theta} \right|_{ij} \approx \frac{P_{0_{i+1,j}} H_{0_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \quad (\text{IV.12})$$

La substitution des équations (IV.8) à (IV.12) dans l'équation (IV.4) après avoir négligé les termes d'ordre supérieur donne :

$$\begin{aligned} F_{ij} = & \Phi_{ij} \left(\frac{S_{0_{i+1,j}} + S_{0_{i-1,j}} - 2S_{0_{i,j}}}{(\Delta\theta)^2} \right) + \left(\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \left(\frac{S_{0_{i+1,j}} - S_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right) + \Psi_{ij} \left(\frac{S_{0_{i,j+1}} + S_{0_{i,j-1}} - 2S_{0_{i,j}}}{(\Delta Z)^2} \right) + \\ & \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Z} \right) \left(\frac{S_{0_{i,j+1}} - S_{0_{i,j-1}}}{2\Delta Z} \right) - 2\Lambda \left(\frac{P_{0_{i+1,j}} H_{0_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right) - 2\beta \left(S_{0_{ij}} - P_s^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

ou encore en utilisant l'indice k tel que $k = 1, 2, \dots, K$ où $K = NM$

$$\begin{aligned}
F_k = & \Phi_k \left(\frac{S_{0k+1} + S_{0k-1} - 2S_{0k}}{(\Delta\theta)^2} \right) + \left(\frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2\Delta\theta} \right) \left(\frac{S_{0k+1} - S_{0k-1}}{2\Delta\theta} \right) + \Psi_k \left(\frac{S_{0k+N} + S_{0k-N} - 2S_{0k}}{(\Delta Z)^2} \right) + \\
& \left(\frac{\Psi_{k+N} - \Psi_{k-N}}{2\Delta Z} \right) \left(\frac{S_{0k+N} - S_{0k-N}}{2\Delta Z} \right) - 2\Lambda \left(\frac{P_{0k+1} H_{0k+1} - P_{0k-1} H_{0k-1}}{2\Delta\theta} \right) - 2\beta (S_{0k} - P_s^2) \quad (IV.13)
\end{aligned}$$

pour les noeuds intérieurs.

Pour les nœuds appartenant aux frontières libres du palier, on a:

$$F_k = P_{0k} - 1 \quad (IV.14)$$

En tout, nous devons résoudre K équations non linéaires.

IV.2. 2. Schéma de discrétisation 2 : Utilisation de la molécule de calcul à neuf points

La molécule de calcul présentée en Figure IV.3 est utilisée pour approcher la fonction résidu F dans le but de générer la matrice Jacobienne. Par conséquent la forme discrète de l'équation (IV.2) s'écrit :

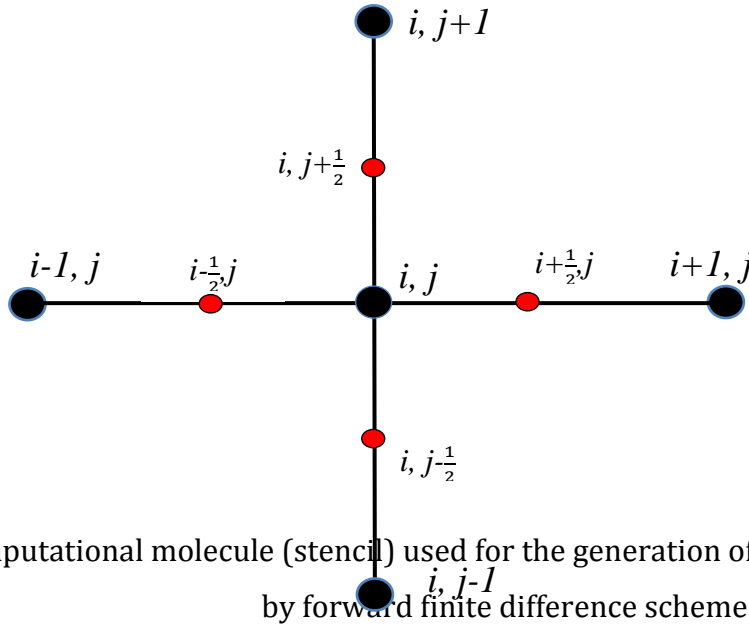


Fig. IV.3 Computational molecule (stencil) used for the generation of the Jacobian matrix coefficients by forward finite difference scheme.

$$\begin{aligned}
F_{ij}^{(j)} = & \left[\frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\theta} \right] + \left[\frac{\Psi_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial S_0}{\partial Z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} - \Psi_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\partial S_0}{\partial Z} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta Z} \right] - 2\Lambda \frac{\partial(P_0 H_0)}{\partial \theta} \Big|_{i,j} - 2\beta (S_{0ij} - P_s^2) \quad (IV.15)
\end{aligned}$$

où les valeurs intermédiaires de Φ et Ψ sont calculées par les relations suivantes :

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j}}{2}; \quad \Psi_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j}}{2}; \quad \Phi_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{2}; \quad \Psi_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{2}$$

et les gradients circonférentiel et axial sont évalués par les formules de différences finies décentrées (forward difference formulas) :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{S_{0i+1,j} - S_{0i,j}}{\Delta \theta}; \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{S_{0i,j} - S_{0i-1,j}}{\Delta \theta}; \frac{\partial S_0}{\partial Z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{S_{0i,j+1} - S_{0i,j}}{\Delta Z}; \frac{\partial S_0}{\partial Z} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \approx \frac{S_{0i,j} - S_{0i,j-1}}{\Delta Z}$$

L'utilisation de l'indice k permet de ré-écrire l'équation (IV.15) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F_k^{(J)} = & \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \left[\left(\frac{\Phi_{k+1} + \Phi_k}{2} \right) (S_{0k+1} - S_{0k}) - \left(\frac{\Phi_{k-1} + \Phi_k}{2} \right) (S_{0k} - S_{0k-1}) \right] + \\ & \frac{1}{(\Delta Z)^2} \left[\left(\frac{\Psi_{k+N} + \Psi_k}{2} \right) (S_{0k+N} - S_{0k}) - \left(\frac{\Psi_{k-N} + \Psi_k}{2} \right) (S_{0k} - S_{0k-N}) \right] - 2\Lambda \left(\frac{P_{0k+1} H_{0k+1} - P_{0k-1} H_{0k-1}}{2\Delta \theta} \right) - \\ & 2\beta (S_{0k} - P_s^2) \end{aligned} \quad (IV.16)$$

où k représente les numéros des noeuds intérieurs.

$$\text{et } F_k^{(J)} = P_{0k} - 1 \quad \text{pour les noeuds appartenant aux bords libres du palier} \quad (IV.17)$$

La méthode itérative de Newton-Raphson amortie est employée pour la résolution des équations non linéaires en P_0 (IV.16) et (IV.17).

$\langle X^{(n)} \rangle = \langle P_{01} : P_{02} : \dots : P_{0k} : \dots : P_{0K} \rangle$ où $K = NM$ et n est le compteur des itérations. En vertu de l'algorithme de Newton-Raphson améliorée, la solution à l'itération $(n + 1)$ s'écrit :

$$\{X^{(n+1)}\} = \{X^{(n)}\} + \omega_{NR} \{\delta X^{(n)}\} \quad (IV.18)$$

où $0 < \omega_{NR} \leq 1$ est le facteur de sous-relaxation et

$$\langle \delta X^{(n)} \rangle = \langle \delta P_{01} : \delta P_{02} : \dots : \delta P_{0k} : \dots : \delta P_{0K} \rangle$$

Le vecteur correction $\{\delta X^{(n)}\}$ est exprimé à l'aide d'un développement en série de Taylor limité à l'ordre un des fonctions $F_k^{(n+1)}$:

$$F_k^{(n+1)} = F_k^{(n)} + \delta P_{0k} \frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial P_{0k}} + \delta P_{0k-1} \frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial P_{0k-1}} + \delta P_{0k+1} \frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial P_{0k+1}} + \delta P_{0k-N} \frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial P_{0k-N}} + \delta P_{0k+N} \frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial P_{0k+N}} = 0 \quad (IV.19)$$

où k représente les noeuds intérieurs; c'est-à-dire : $i = 1, N$ et $j = 2, M - 1$.

La forme matricielle de l'équation (IV.19) est

$$[E^{(n)}] \{ \delta X^{(n)} \} = -\{ F^{(n)} \} \quad (IV.20)$$

où $[E^{(n)}]$ est la matrice Jacobienne de taille $(K \times K)$ ayant la structure suivante :

$$[E^{(n)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1^{(J)}}{\partial P_{01}} & \frac{\partial F_1^{(J)}}{\partial P_{02}} & \dots & \frac{\partial F_1^{(J)}}{\partial P_{0K}} \\ \frac{\partial F_2^{(J)}}{\partial P_{01}} & \frac{\partial F_2^{(J)}}{\partial P_{02}} & \dots & \frac{\partial F_2^{(J)}}{\partial P_{0K}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_K^{(J)}}{\partial P_{01}} & \frac{\partial F_K^{(J)}}{\partial P_{02}} & \dots & \frac{\partial F_K^{(J)}}{\partial P_{0K}} \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

$$\text{et } \langle F^{(n)} \rangle = \langle F_1 : F_2 : \dots : F_K \rangle$$

Les coefficients de la matrice Jacobienne sont évalués par différences finies décentrées :

$$E_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial P_{0j}} \approx \frac{F_i(P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0j} + \Delta, \dots, P_{0K}) - F_i(P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0j}, \dots, P_{0K})}{\Delta} \quad \text{tel que } i, j = 1, K. \quad (\text{IV.22})$$

où $\Delta = 10^{-8}$ pour les calculs effectués en double précision.

Notons que pour les nœuds appartenant aux bords libres du palier (*i. e.*, pour $j = 1$ et $j = M$), nous avons $\frac{\partial F_k^{(j)}}{\partial P_{0k}} = 1$ en vertu de l'équation (IV.17).

Le système d'équations algébriques (IV.20) est résolu pour chaque itération à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss avec pivotation partielle après la décomposition $[L][U]$ de la matrice Jacobienne $[E]$ par l'algorithme de Crout. $[L]$ et $[U]$ sont respectivement des matrices triangulaires inférieure et supérieure.

Le processus de résolution du problème de lubrification direct en régime statique est résumé comme suit :

Step 1:

Select the input parameters of the problem : $\varepsilon_0, \frac{L}{D}, \frac{C}{R}, m'_x, m'_z, n_x, n_z, N, M, \Lambda, \beta, P_S, \omega_{NR}, n_{max}, \varepsilon_{tol}$

Step 2:

Initialize the iteration counter n to zero and set the initial dimensionless pressure $P_{0k}^{(n)}$ at each interior grid point to one $P_{0k}^{(n)} = 1, \forall k \in K$.

Step 3:

Calculate the dimensionless film thickness $H_{0k} = 1 + \varepsilon_0 \cos(\theta_k)$ at each grid node.

Step 4:

Calculate the residual functions $F_k^{(j)}$ and F_k for $k = 1, \dots, K$.

Step 5:

Generate the Jacobian matrix $E_{km} = \partial F_k^{(j)} / \partial P_{0m}$ and solve the linear algebraic system $E_{km} \delta P_{0m} = -F_k$ for δP_{0m} such that $k, m = 1, 2, \dots, K$.

Step 6:

Update the solution according to the Newton-Raphson recurrence formula

$P_{0k}^{(n+1)} = P_{0k}^{(n)} + \omega_{NR} \delta P_{0k}^{(n)}$ where ω_{NR} is an under-relaxation factor which ranges from 0 to 1, and $n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$.

Step 7:

Set all values of normalized steady-state pressure less than one to one.

Step 8:

Check convergence of the Newton-Raphson algorithm: $\sqrt{\sum_{k=1}^K F_k^2} < \varepsilon_{tol}$ where $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$. If the test of convergence is not satisfied, increment the iteration counter n ($n \leftarrow n + 1$), and return to **step 3** for performing another iteration while $n < n_{max}$.

Step 9:

Calculate the circumferential and axial steady-state pressure gradients by numerical differentiations.

Step 10:

Code the bearing active region for which the steady-state pressure is greater than one. This step is necessary in order to define the integration domain of dynamic differential equations.

Step 11:

Calculate the performance characteristics of the porous gas journal bearing and store the obtained numerical results for post-processing.

IV.3 Solution dynamique du problème d'interaction fluide-structure dans le cas d'une excentricité imposée: calcul des coefficients dynamiques et des paramètres de stabilité de Lund

La solution statique du problème de lubrification direct obtenue après convergence de l'algorithme de Newton-Raphson est prise en compte pour calculer les coefficients de raideur et d'amortissement. La figure IV.4 représente le schéma de calcul itératif des paramètres de stabilité de Lund, à savoir : la fréquence critique (whirl frequency) et la masse critique du système. Le processus de calcul se résume comme suit :

Step 1 :

Set an initial value of the frequency ratio (for example, $\gamma = 1$).

Step 2 :

Solve the first order PDEs (III.38) and (III.39) on the film active region to obtain normalized complex dynamic pressures ($Q_\varepsilon(\gamma)$ and $Q_\phi(\gamma)$) using the successive over-relaxations method (S.O.R) (See Appendix A for details).

Step 3 :

Calculate the dynamic coefficients of fluid-film bearing (Eqs III.40 and III.43).

Step 4 :

Compute the stability parameters of the system, γ_c and M_c from equations (III.48) and compare the initially guessed value of γ with the calculated whirl frequency ratio γ_c .

if $\left| \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right| \leq 10^{-4}$ is not satisfied, we set $\gamma \leftarrow \gamma_c$ and return to step 2. A negative value of γ_c^2 means that the operating position defined by polar coordinates (ϵ_0, ϕ_0) is stable.

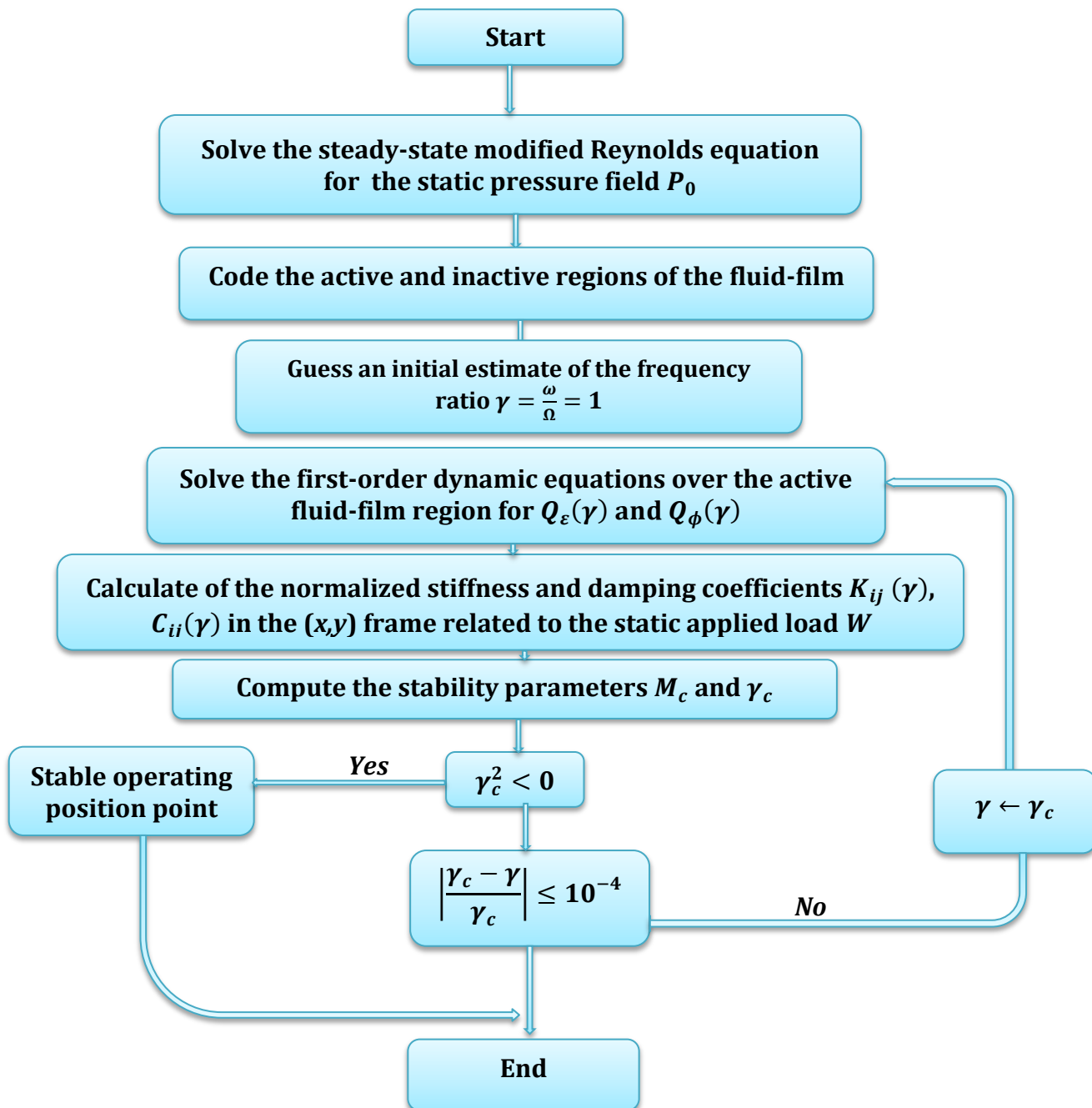


Fig. IV.4 Iterative calculation scheme of the stability parameters according to the Lund's stability criterion.

IV.4 Validation

Pour valider les codes de calcul MS-Fortran développés pour l'étude du comportement dynamique linéaire des paliers à gaz, il est nécessaire de faire une comparaison des résultats obtenus à partir de la présente étude avec ceux disponibles dans la littérature technique [1,2]. Comme il est montré dans la figure IV.5, les profils de pression calculés dans la section médiane du palier à gaz imperméable sont en bonne concordance avec ceux obtenus expérimentalement et théoriquement par Le Lez [1] & Constantinescu [2].

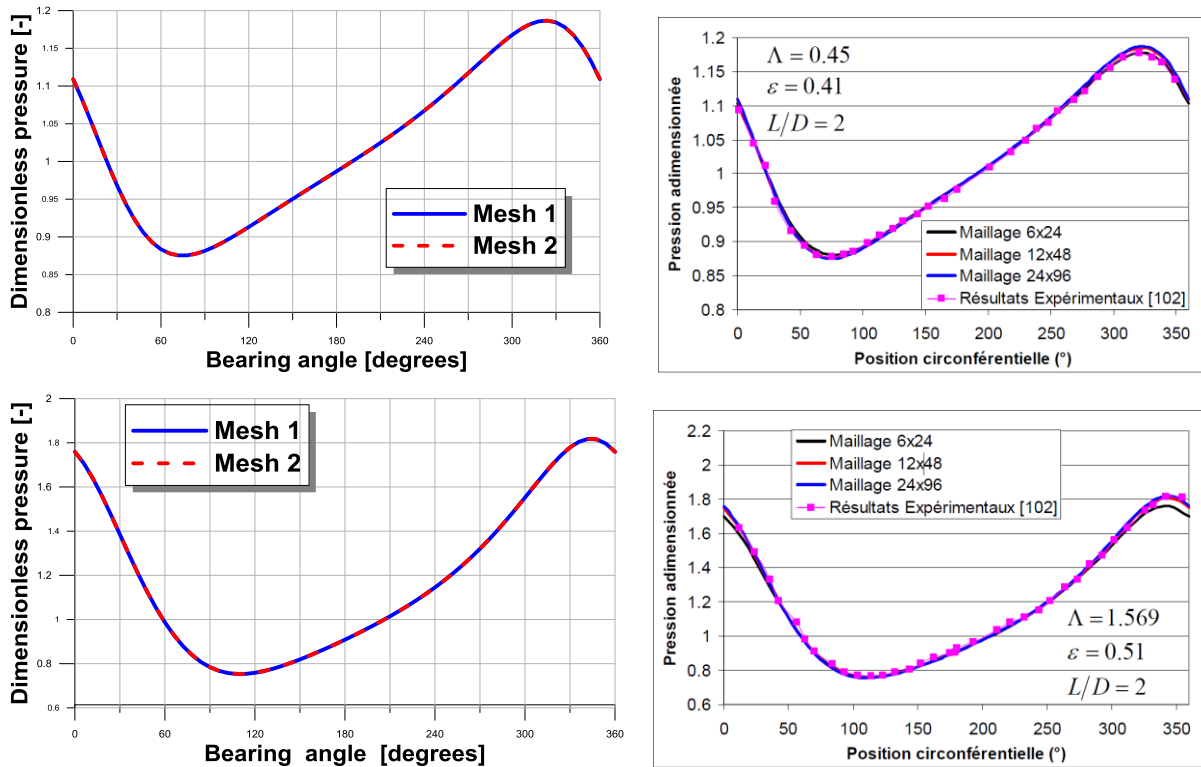


Fig. IV. 5 Comparison of pressure profiles calculated by the developed MS-Fortran code with those published in the technical literature [1, 2].

Le Tableau IV.1 montre également une bonne concordance entre les résultats de la présente étude et ceux publiés plus récemment par Pattnayak en 2020 [3] & Heshmat en 1983 [4]. Cependant, on remarque une existence de certains écarts entre les résultats qui peuvent être attribués d'une part aux méthodes de calcul utilisées et d'autre part aux caractéristiques des maillages par volumes finis et différences finies ainsi qu'aux critères de convergence adoptés par ces auteurs. Les calculs sont effectués avec les données adimensionnelles suivantes : $\beta = P_s = \gamma = 0$; $\Lambda = \frac{L}{D} = 1$ en adoptant un maillage plus fin ; c'est-à-dire : $N=141$ points suivant la direction circumférentielle du palier θ , $M=51$ suivant la direction axiale z . D'autre part, le critère adopté pour la convergence de la méthode itérative de Newton est $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$.

Table IV.1 Comparison of numerical results with prior published data

ε_0	$\phi_0(^{\circ})$	F_0	$P_{0_{max}}$	K_{xx}	K_{xy}	K_{yx}	K_{yy}	Note
0.60	36.3	0.956	1.539	3.305	2.265	0.223	1.673	Present work
	35.9	0.955	1.533	3.308	2.380	0.141	1.951	Pattnayak [3]
	1.11	0.100	0.390	0.090	4.830	58.150	14.250	Relative Discrepancy, %
	35.7	0.951	1.539	3.237	2.345	0.125	1.920	Heshmat [4]
	1.67	0.420	0.000	2.100	3.410	78.40	12.86	Relative Discrepancy, %
24.7	1.922	2.187	9.106	4.034	1.332	3.057	Present work	
0.75	24.5	1.920	2.178	9.191	4.154	1.334	3.335	Pattnayak [3]
	0.810	0.104	0.413	0.924	2.888	0.150	8.290	Relative Discrepancy, %
	24.1	1.894	-	8.981	3.898	1.166	3.416	Heshmat [4]
	2.49	1.480	-	1.390	3.490	14.23	10.51	Relative Discrepancy, %
0.90	12.7	5.16	4.840	46.02	10.36	6.088	6.972	Present work
	12.6	5.203	4.853	46.687	10.389	6.201	7.248	Pattnayak [3]
	0.790	0.820	0.270	1.430	0.280	1.822	3.80	Relative Discrepancy, %
	12.8	5.055	4.850	44.593	10.151	6.024	7.202	Heshmat [4]
	0.781	2.077	0.206	3.200	2.060	1.062	3.193	Relative Discrepancy, %

IV.5 Etude paramétrique

L'étude paramétrique menée dans ce travail permet de mettre en évidence l'influence de certains paramètres de conception clés, à savoir : la pression d'alimentation p_s pour un paramètre de porosité adimensionnel $\beta = \frac{6k_p R^2}{h_p C^3}$ fixé sur les caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier à gaz poreux (PGB) fonctionnant en régime laminaire ou turbulent.

La Figure IV.6 illustre un palier à gaz poreux (PGB) de forme cylindrique dont les données géométriques et physiques sont prises de la référence [5] et reportées dans le Tableau IV.2.

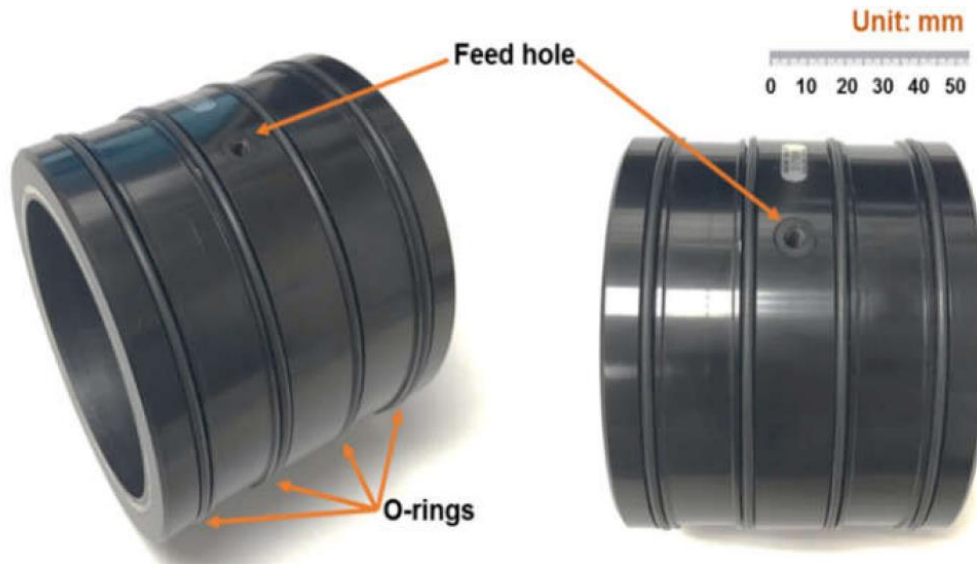


Fig. IV. 6 Photograph of a porous material cylindrical journal bearing (PGB) [5].

Table IV.2: Operating conditions and dimensions of a cylindrical PGB [5]

Geometrical characteristics	
-Bearing length, L	$88.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
-Shaft diameter, $D=2R$	$76.2 \times 10^{-3} \text{ m}$
-Radial clearance, C	$31 \times 10^{-6} \text{ m}$
-Porous layer radial thickness, h_p	$2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
Operating conditions	
-Rotational velocity of rotor, n_j	25 krpm
-Ambient temperature, T_a	293 K
-Exit pressure, p_a	$1 \text{ bar}=10^5 \text{ Pa}$
-Supply pressure, p_s	4 bar
Physical properties	
-Air dynamic viscosity @ (p_s, T_a) , μ_a	$18.3 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$
-Air mass density @ (p_a, T_a) , ρ_a	1.2 kg/m^3
-Carbon-graphite permeability, k_p	$8.2 \times 10^{-16} \text{ m}^2$
-Perfect gas constant, $\mathcal{R} = C_p - C_v$	$287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{J}^{-1}$

IV.5.1 Influence du régime d'écoulement sur les performances statiques et dynamiques du PGB

Les figures (IV.7) à (IV.9) présentent les variations des caractéristiques statiques et dynamiques du palier à gaz poreux (PGB) fonctionnant en régime de lubrification hybride. Les calculs sont effectués pour deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent en utilisant le modèle de turbulence proposé par Constantinescu [6] et le critère de transition du régime d'écoulement laminaire au régime turbulent établi par Frêne [6]. A l'exception du débit massique de fuite, on observe une augmentation de la capacité de charge, du pic de pression, du couple de frottement, et des coefficients dynamiques avec l'excentrication. Les deux théories de la lubrification laminaire et non laminaire donnent les mêmes valeurs de la capacité de charge, le pic de pression, et le couple de frottement sur l'arbre. En revanche, pour une excentricité donnée, la théorie laminaire surestime le débit massique de fuite, les coefficients de raideur direct k_{yy} et croisé k_{xy} , et le coefficient d'amortissement croisé c_{xy} et sous-estime les coefficients de raideur et d'amortissement directs k_{xx} , c_{xx} et c_{yy} , et les coefficients de raideur et d'amortissement croisés k_{yx} et c_{yx} , et ce pour toutes les excentricités simulées. On note par ailleurs qu'un grand écart existe entre les valeurs du coefficient de raideur direct k_{xx} prédites par les deux théories ce qui peut mettre en défaut la théorie laminaire.

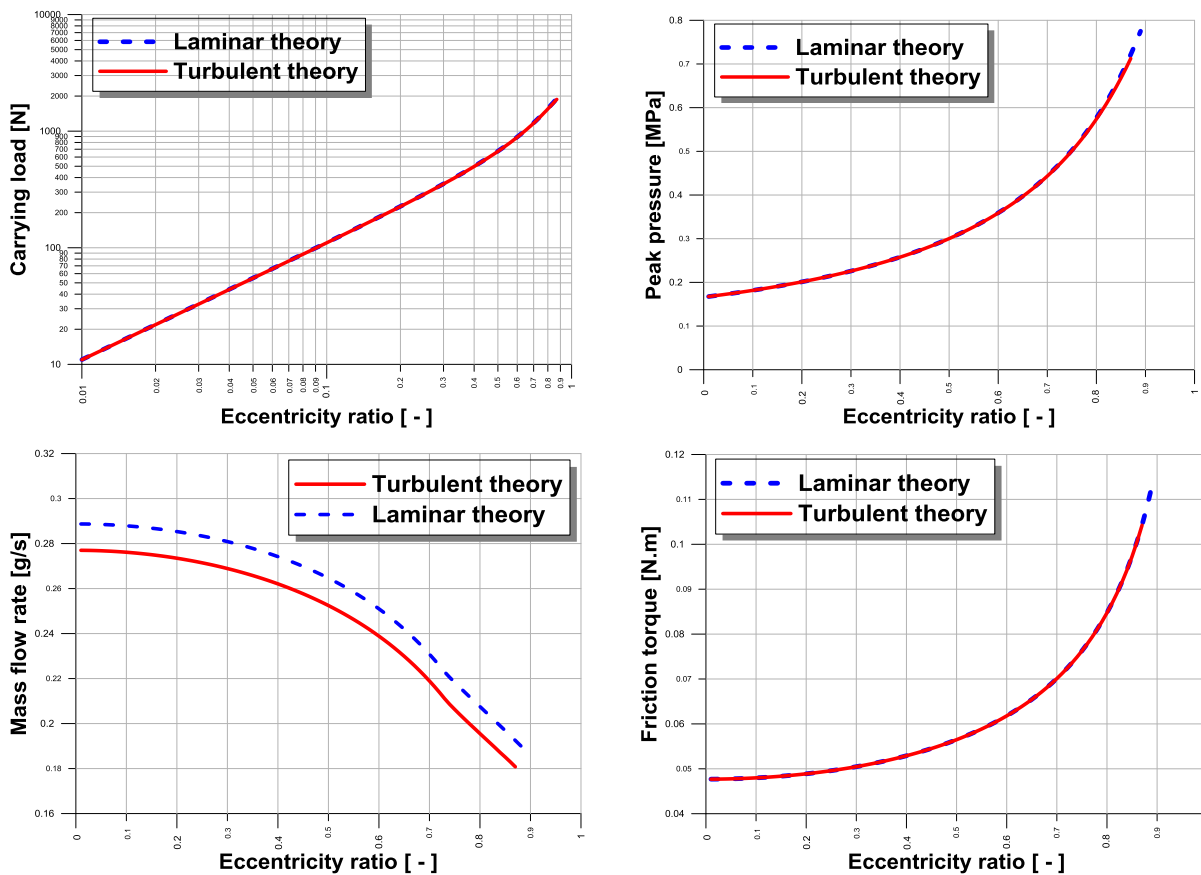


Fig. IV. 7 Steady-state performance characteristics of PGB versus operating eccentricity ratio calculated using both laminar and turbulent theories.

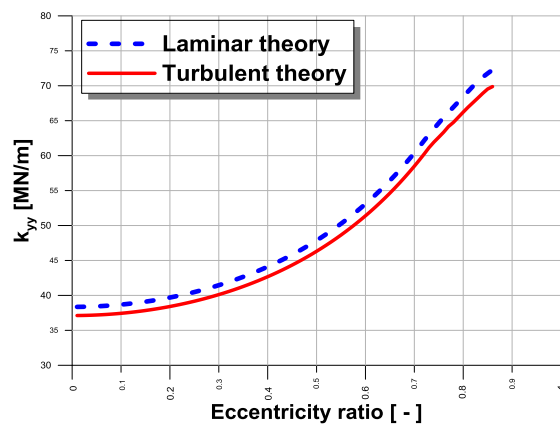
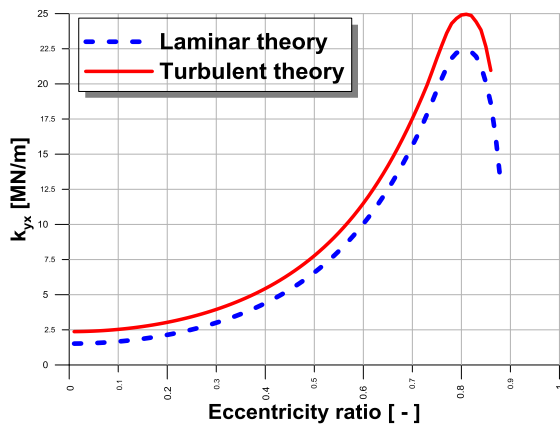
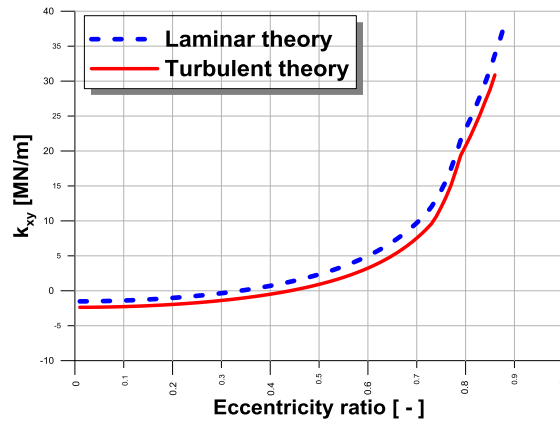
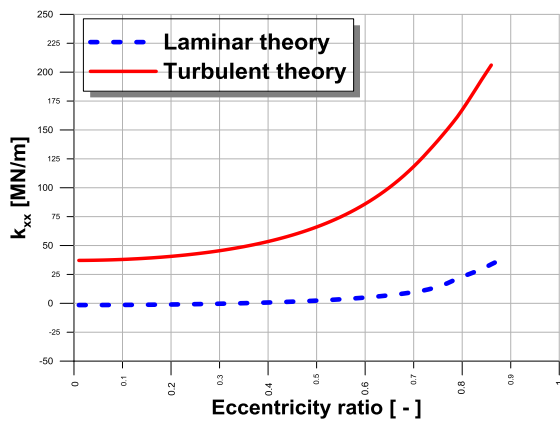


Fig. IV.8 Variations of PGB laminar and turbulent synchronous stiffness coefficients over a range of eccentricity ratios.

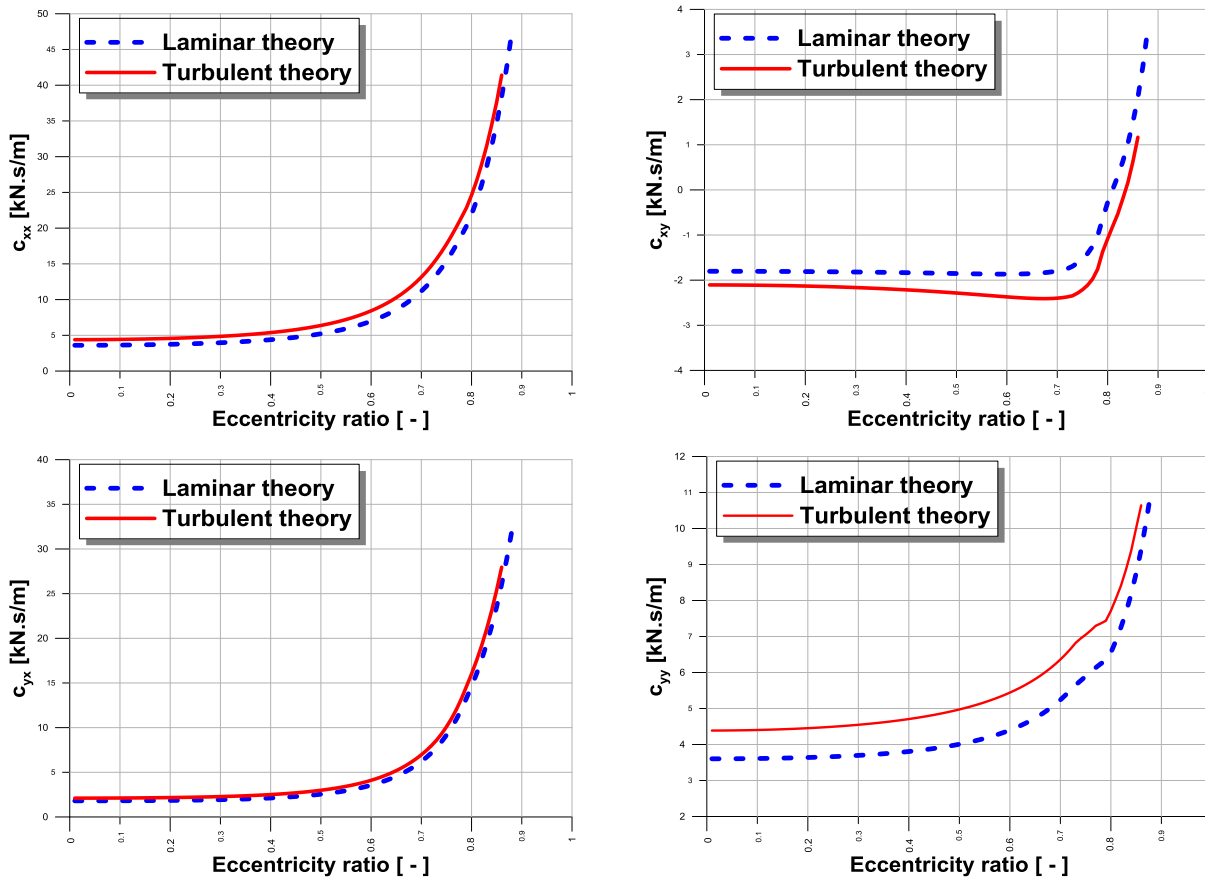


Fig. IV.9 Variations of PGB laminar and turbulent synchronous damping coefficients over a range of eccentricity ratios.

IV.5.2 Influence de la pression d'alimentation sur les performances statiques et dynamiques du PGB

Nous avons utilisé la théorie non laminaire pour comparer le comportement statique et dynamique d'un palier à gaz poreux (PGB) alimenté par un gaz à une pression p_s via une matrice poreuse mince avec celui d'un palier lisse à gaz classique (self-acting bearing) où $k_p = p_s = 0$ dont le champ de pression statique est représenté en figure IV.10. les courbes de niveau indiquées en couleur bleu-vert correspondent à la zone de dépression où la pression absolue qui y règne est inférieure à la pression atmosphérique (suction).

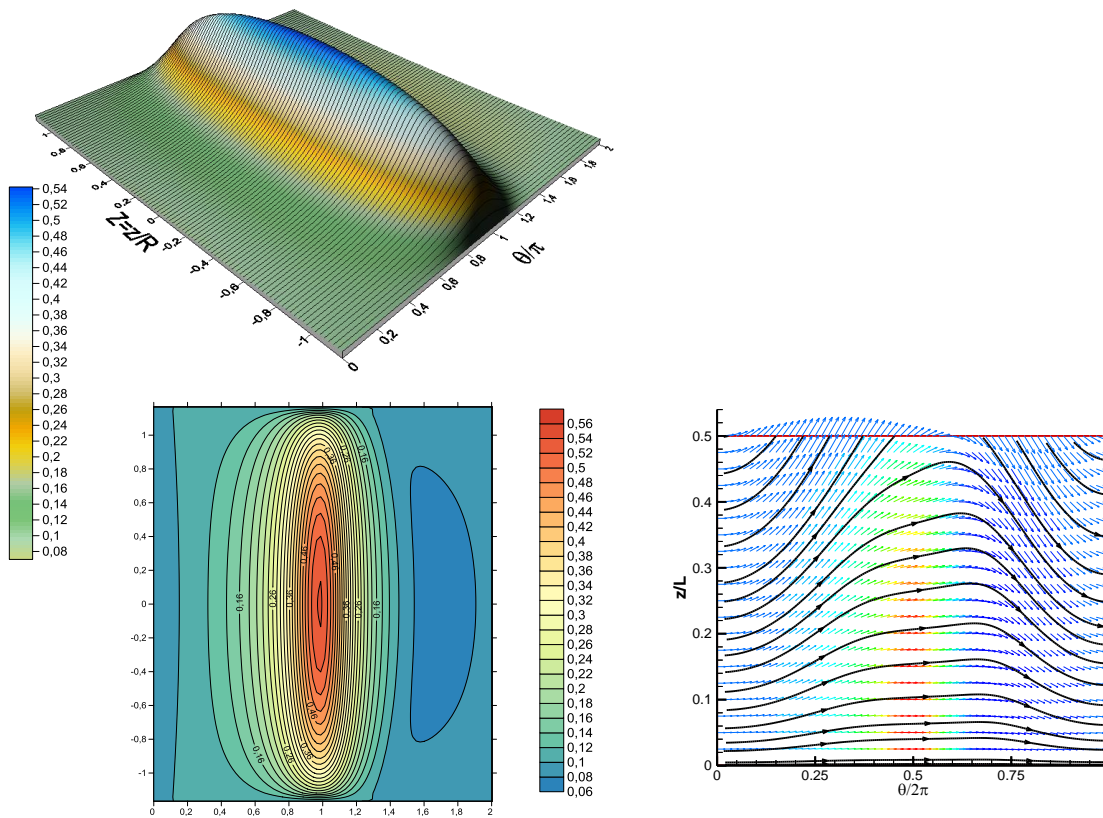


Fig. IV.10 Representation of steady-state pressure field p_0 in [MPa] generated in the aerodynamic journal bearing for $\varepsilon_0 = 0.8$, $\beta = 0.$, and $p_s = 0$.

Les figures (IV.11) à (IV.13) mettent en évidence les effets positifs de la pression d'alimentation p_s sur l'amélioration nette des performances statiques et dynamiques du palier hybride dans lequel des effets aérostatiques sont superposés aux effets aérodynamiques engendrés par la rotation du rotor comparativement au palier lisse classique et ce pour toutes les excentricités de fonctionnement. D'autre part, la pression d'alimentation n'affecte pas de façon significative le couple de frottement sur l'arbre et par conséquent la puissance dissipée du système même aux valeurs élevées de l'excentricité de fonctionnement. Il est à souligner que les résultats du débit massique obtenus reflètent l'exactitude du programme de calcul développé pour la simulation des paliers à gaz classique et hybride.

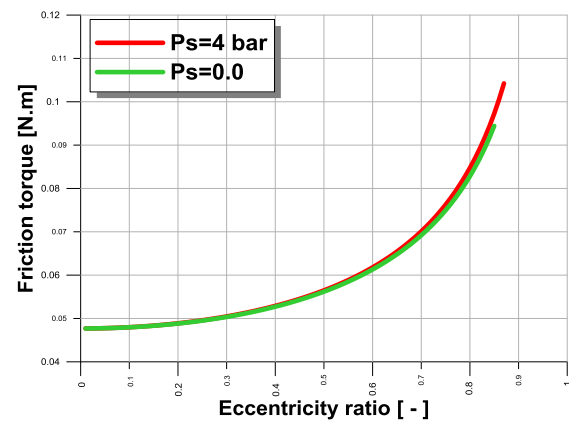
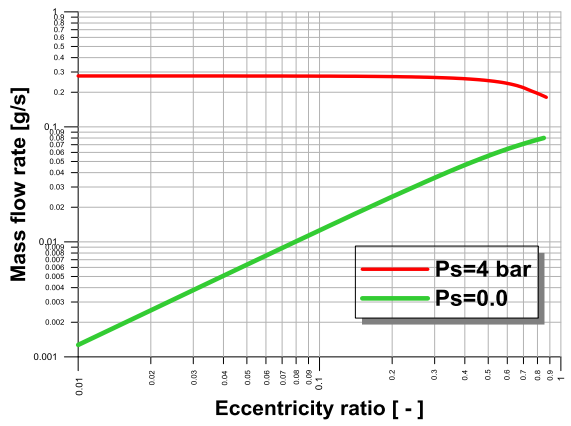
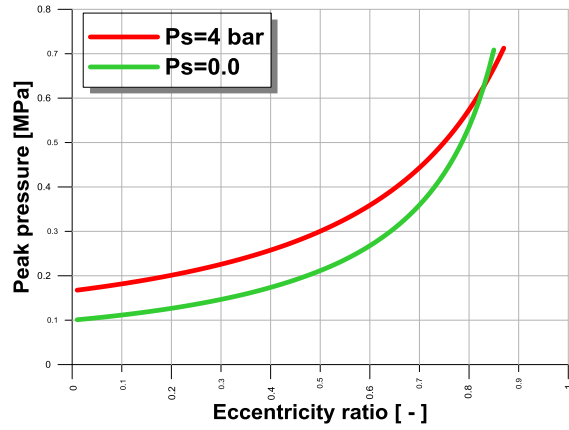
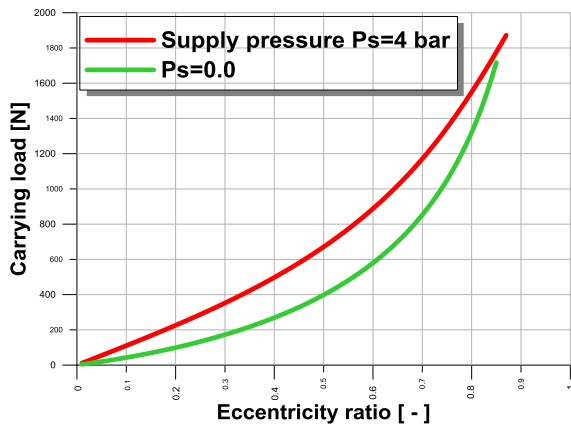


Fig. IV.11 Variations of steady-state performance characteristics as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .

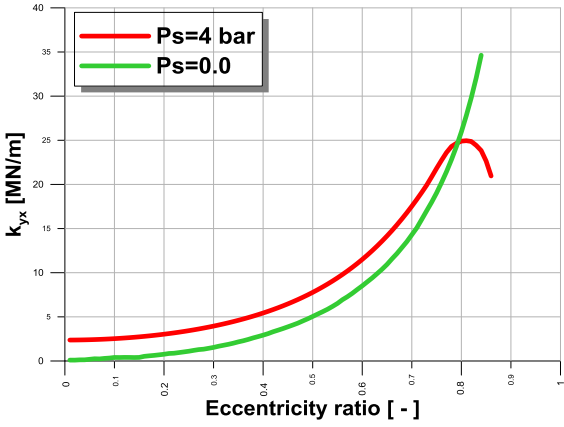
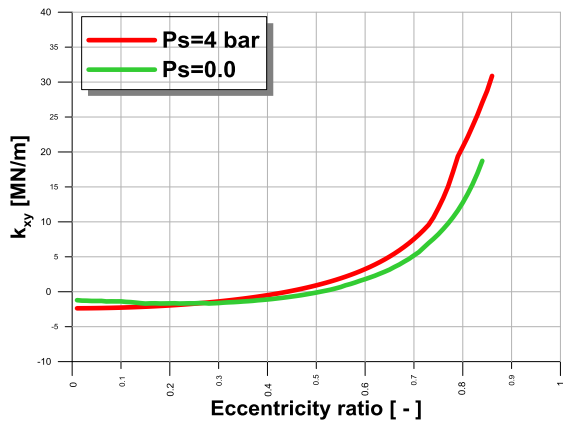
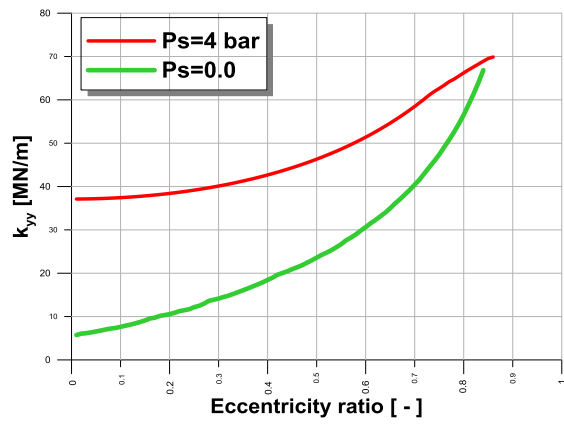
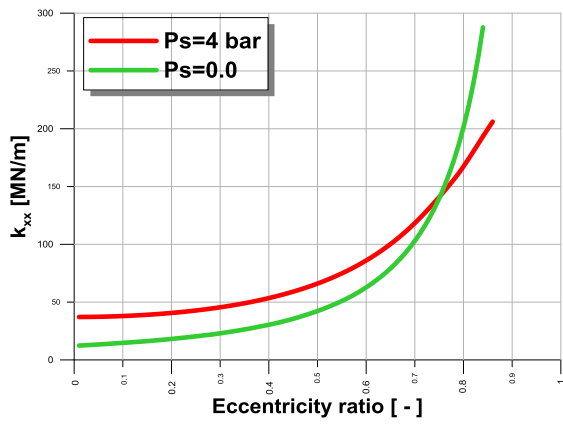


Fig. IV.12 Variations of stiffness dynamic coefficients as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .

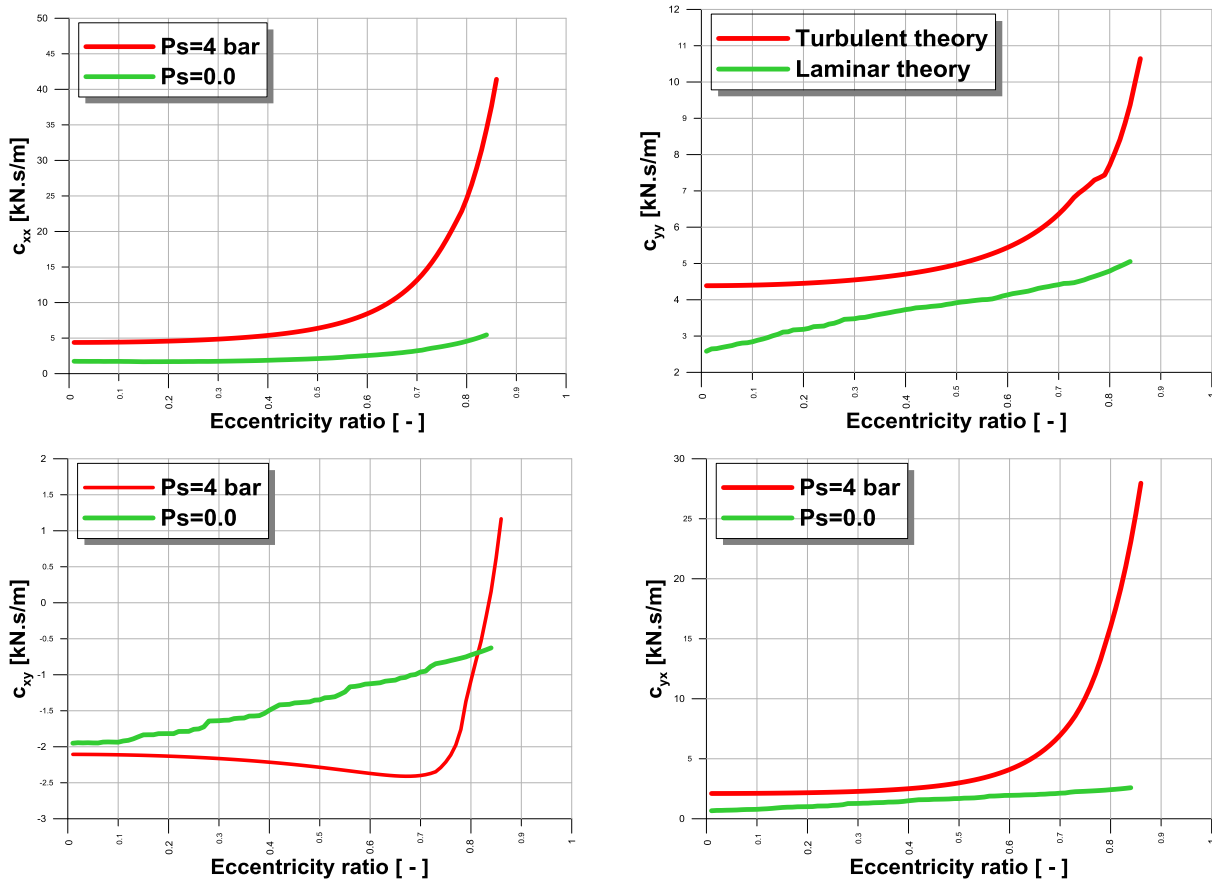


Fig. IV.13 Variations of damping dynamic coefficients as a function of eccentricity ratio for two values of supply pressure p_s .

IV.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté en détails les stratégies numériques de résolution du problème de lubrification poro-aérodynamique direct en régimes statique et dynamique. Le problème de lubrification statique dans le cas d'un palier à gaz hybride est traité à l'aide des méthodes de différences finies et de Newton-Raphson en raison du caractère fortement non linéaire de l'équation de Reynolds stationnaire. En régime dynamique, nous avons adopté la méthode des différences finies pour la discrétisation spatiale des équations dynamiques complexes et la méthode itérative de Gauss-Seidel pour la résolution du système d'équations algébriques résultant en vue de déterminer les pressions dynamiques complexes.

Cette étude a conduit au développement d'un code de simulation des paliers à gaz hybrides qui a fait l'objet de validations avec les données théoriques et expérimentales issues de la littérature technique disponible.

L'étude paramétrique menée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les effets du régime d'écoulement du fluide dans le palier et de la pression d'alimentation extérieure sur le comportement statique et dynamique du système rotor-palier à gaz hybride. Les calculs ont été effectués à excentricité imposée (problème de lubrification direct) pour l'étude de simulation numérique de tel palier. Selon les résultats obtenus, des conclusions peuvent être tirées comme suit :

- la théorie laminaire surestime le débit massique de l'écoulement et ce pour toutes les valeurs de l'excentricité de fonctionnement,
- à l'exception du débit massique, les deux théories laminaire et non laminaire donnent les mêmes valeurs de la capacité de charge, du pic de pression, et du couple de frottement quel que soit l'excentricité de fonctionnement dans le cas où le palier fonctionne en régime de lubrification hybride,
- les valeurs des coefficients dynamiques prédites par les deux théories laminaire et non laminaire sont différentes surtout pour le coefficient de raideur k_{xx} suivant la direction de la charge appliquée,
- la pression d'alimentation permet d'améliorer la capacité de charge du palier hybride par comparaison au palier à gaz classique fonctionnant en régime aérodynamique pur,
- les coefficients dynamiques sont sensiblement affectés par la pression d'alimentation.

Références du chapitre

- [1] S. Le Lez, Caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à feuilles, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2007.
- [2] Constantinescu, V. N., 1969, Gas Lubrication, The American Society of Mechanical Engineers (ASME), New York, p. 460.
- [3] M. R. Pattnayak, R. K. Pandey, J. K. Dutt, Performance behaviours of a self-acting gas journal bearing with a new bore design, Tribology International, 151, 2020.
- [4] H. Heshmat, J. A. Walowit, O. Pinkus, Analysis of Gas-Lubricated Foil Journal Bearings, Journal of Lubrication Technology, 1983, Vol. 105, 647-655.
- [5] Luis San Andrés, Jing Yang, and Andrew Devitt, Porous Gas Journal Bearings: An Exact Solution Revisited and Force Coefficients for Stable Rotordynamic Performance, Applied Sciences MDPI, 2021.
- [6] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet, Lubrification hydrodynamique : Paliers et Butées, Ed. Eyrolles, Collection de la direction des études et recherches d'EdF.

Conclusions générales et perspectives

Les paliers à gaz poreux fonctionnant en régime de lubrification hybride (superposition des effets aérostatiques et aérodynamiques) sont considérés d'excellents organes de guidage en rotation des rotors de machines tournant à des vitesses théoriquement illimitées soumis à des chargements faibles ou médiocres. Le développement d'un modèle de simulation statique et dynamique de tels paliers représente donc un intérêt évident tant d'un point de vue industriel qu'académique. Ce modèle a été développé à partir de la perturbation de l'équation de Reynolds modifiée dérivée pour un écoulement de film relativement mince en régime turbulent et en présence d'un milieu poreux.

La perméabilité du milieu poreux a été introduite dans l'équation de Reynolds à l'aide de l'approximation de Morgan-Cameron dans le cas de matrice poreuse de faible épaisseur ($\frac{h_p}{R} \ll 1$). D'autre part, les conditions de Joseph-Beavers ont été utilisées pour prendre en considération le phénomène de glissement inévitable des particules de fluide survenant à l'interface fluide-matrice poreuse. Le processus de perturbation d'ordre un de l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un fluide compressible en écoulement non laminaire (turbulent) a permis de construire trois équations aux dérivées partielles (EDPs), à savoir : une équation statique non laminaire dont l'inconnue est la pression statique p_0 , et deux équations dynamiques dont les inconnues sont les deux pressions dynamiques complexes $q_\varepsilon = p_\varepsilon + i\omega p_\varepsilon$ et $q_\phi = p_\phi + i\omega p_\phi$.

L'intégration des pressions statique et dynamique a permis de calculer la capacité de charge et les huit coefficients dynamiques du système, à savoir : quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. Ces derniers servent comme des données pour l'analyse de la stabilité et de la réponse dynamique du système rotor-palier.

N'admettant pas de solutions analytiques, ces équations ont été résolues numériquement au moyen des méthodes de différences finies en utilisant deux molécules de calcul à cinq points et à neuf points. Le système d'équations non linéaires résultant de la discrétisation de l'équation statique a été résolu par la méthode itérative puissante de Newton-Raphson amortie et les solutions des systèmes d'équations algébriques linéaires obtenus après discrétisation des équations dynamiques ont été déterminés par itérations à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel. Le code de calcul MS-Fortran développé a fait l'objet de deux validations en confrontant les résultats obtenus avec les données théoriques et expérimentales publiées dans la littérature technique disponible.

Les résultats obtenus à partir de la simulation numérique du palier à gaz hybride ont permis de mettre en évidence les effets non négligeables de la turbulence de l'écoulement sur les performances dynamiques du palier dans la mesure où l'étude bibliographique révèle que de nombreux auteurs négligent ces effets dans leurs travaux de recherche portant sur la modélisation et la simulation numérique des paliers à gaz fonctionnant à des vitesses élevées ce qui pourrait conduire à des analyses complètement erronées.

Les résultats importants trouvés dans le cadre des simulations effectuées peuvent être résumés comme suit :

- la théorie laminaire surestime le débit massique de l'écoulement et ce pour toutes les valeurs de l'excentricité de fonctionnement,
- à l'exception du débit massique, les deux théories laminaire et non laminaire donnent les mêmes valeurs de la capacité de charge, du pic de pression, et du couple de frottement quel que soit l'excentricité de fonctionnement dans le cas où le palier fonctionne en régime de lubrification hybride,
- les valeurs des coefficients dynamiques prédites par les deux théories laminaire et non laminaire sont différentes surtout pour le coefficient de raideur k_{xx} suivant la direction de la charge appliquée,
- la pression d'alimentation permet d'améliorer la capacité de charge du palier hybride par comparaison au palier à gaz classique fonctionnant en régime aérodynamique pur,
- les coefficients dynamiques sont sensiblement affectés par la pression d'alimentation.

Il convient de souligner que beaucoup d'études restent à mener notamment en ce qui concerne les caractérisations statiques et dynamiques de ce type de palier. Malheureusement, la rareté voire la non disponibilité des données expérimentales constitue une entrave au développement des modèles théoriques des paliers à gaz en général et des paliers poreux hybrides en particulier. Pour cela, un banc d'essai devrait être conçu ou acquis en vue de valider les modèles théoriques développés dans le cas des paliers fonctionnant à des vitesses (ou des nombres de compressibilité) très élevées où les forces d'inertie et la turbulence doivent être considérées.

Comme prolongement possible de cette étude, il serait intéressant de mettre au point un modèle dynamique non linéaire dans la mesure où l'approche linéaire qui s'appuie sur l'introduction des coefficients dynamiques s'est avérée insuffisante lorsque les charges dynamiques deviennent trop importantes ou lorsque le palier fonctionne dans une zone instable. L'étude non linéaire consiste à résoudre les équations de la dynamique des rotors couplées à l'équation de Reynolds modifiée par calcul pas à pas dans le temps en utilisant un schéma de calcul approprié tel que le schéma d'Euler modifié ou de Runge-Kutta.

ANNEXE A

Discrétisation par différences finies des équations dynamiques

Les deux équations dynamiques (III.38) et (III.39) dérivées dans le chapitre III peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(3 - n_x) \frac{H_0^2 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} H_\varepsilon \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[(3 - n_z) \frac{H_0^2 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial P_0}{\partial Z} H_\varepsilon \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1 - n_x) \frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} Q_\varepsilon \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[(1 - n_z) \frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial P_0}{\partial Z} Q_\varepsilon \right] - \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 H_\varepsilon + H_0 Q_\varepsilon) - 2\beta P_0 Q_\varepsilon \\ & - 2i\gamma \Lambda (P_0 H_\varepsilon + H_0 Q_\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F_x \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(F_z \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha_x H_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Z} (\alpha_z H_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\beta_x Q_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial Z} (\beta_z Q_\varepsilon) - \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 H_\varepsilon) \\ & - \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 Q_\varepsilon) - 2\beta P_0 Q_\varepsilon - 2i\gamma \Lambda P_0 H_\varepsilon - 2i\gamma \Lambda H_0 Q_\varepsilon = 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } F_x = \frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} ; F_z = \frac{H_0^3 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} ; \alpha_x = (3 - n_x) \frac{H_0^2 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} ; \alpha_z = (3 - n_z) \frac{H_0^2 P_0}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial P_0}{\partial Z} ;$$

$$\beta_x = (1 - n_x) \frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{x_0}} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} ; \beta_z = (1 - n_z) \frac{H_0^3}{\tilde{\mu}_0 K'_{z_0}} \frac{\partial P_0}{\partial Z} .$$

Discrétisation par différences finies (Molécule à 9 points) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F_x \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \right) \Big|_{i,j} & \approx \frac{F_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - F_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta \theta} \\ & = \frac{\left(\frac{F_{x_{i+1,j}} + F_{x_{i,j}}}{2} \right) (Q_{\varepsilon_{i+1,j}} - Q_{\varepsilon_{i,j}}) - \left(\frac{F_{x_{i,j}} + F_{x_{i-1,j}}}{2} \right) (Q_{\varepsilon_{i,j}} - Q_{\varepsilon_{i-1,j}})}{(\Delta \theta)^2} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} \left(F_z \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \right) \Big|_{i,j} & \approx \frac{F_z \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} - F_z \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial Z} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta Z} \\ & = \frac{\left(\frac{F_{z_{i,j+1}} + F_{z_{i,j}}}{2} \right) (Q_{\varepsilon_{i,j+1}} - Q_{\varepsilon_{i,j}}) - \left(\frac{F_{z_{i,j}} + F_{z_{i,j-1}}}{2} \right) (Q_{\varepsilon_{i,j}} - Q_{\varepsilon_{i,j-1}})}{(\Delta Z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha_x H_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \frac{\alpha_{x_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - \alpha_{x_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}; & \frac{\partial}{\partial Z} (\alpha_z H_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \frac{\alpha_{z_{i,j+1}} H_{\varepsilon_{i,j+1}} - \alpha_{z_{i,j-1}} H_{\varepsilon_{i,j-1}}}{2\Delta Z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\beta_x Q_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \frac{\beta_{x_{i+1,j}} Q_{\varepsilon_{i+1,j}} - \beta_{x_{i-1,j}} Q_{\varepsilon_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}; & \frac{\partial}{\partial Z} (\beta_z Q_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \frac{\beta_{z_{i,j+1}} Q_{\varepsilon_{i,j+1}} - \beta_{z_{i,j-1}} Q_{\varepsilon_{i,j-1}}}{2\Delta Z} \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (P_0 H_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \Lambda \left(\frac{P_{0_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right); & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0 Q_\varepsilon) \Big|_{i,j} &\approx \Lambda \left(\frac{H_{0_{i+1,j}} Q_{\varepsilon_{i+1,j}} - H_{0_{i-1,j}} Q_{\varepsilon_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right)\end{aligned}$$

Soit par conséquent :

$$\begin{aligned}-Q_{\varepsilon_{i,j}} &\left\{ \frac{(F_{x_{i+1,j}} + F_{x_{i,j}})}{2(\Delta\theta)^2} + \frac{(F_{x_{i,j}} + F_{x_{i-1,j}})}{2(\Delta\theta)^2} + \frac{(F_{z_{i,j+1}} + F_{z_{i,j}})}{2(\Delta Z)^2} + \frac{(F_{z_{i,j}} + F_{z_{i,j-1}})}{2(\Delta Z)^2} + 2\beta P_{0_{i,j}} + 2i\gamma\Lambda H_{0_{i,j}} \right\} \\ &+ Q_{\varepsilon_{i-1,j}} \left\{ \frac{(F_{x_{i,j}} + F_{x_{i-1,j}})}{2(\Delta\theta)^2} - \frac{\beta_{x_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} + \Lambda \frac{H_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} \right\} \\ &+ Q_{\varepsilon_{i+1,j}} \left\{ \frac{(F_{x_{i+1,j}} + F_{x_{i,j}})}{2(\Delta\theta)^2} - \frac{\beta_{x_{i+1,j}}}{2\Delta\theta} - \Lambda \frac{H_{0_{i+1,j}}}{2\Delta\theta} \right\} + Q_{\varepsilon_{i,j+1}} \left\{ \frac{(F_{z_{i,j+1}} + F_{z_{i,j}})}{2(\Delta Z)^2} + \frac{\beta_{z_{i,j+1}}}{2\Delta Z} \right\} \\ &+ Q_{\varepsilon_{i,j-1}} \left\{ \frac{(F_{z_{i,j}} + F_{z_{i,j-1}})}{2(\Delta Z)^2} - \frac{\beta_{z_{i,j-1}}}{2\Delta Z} \right\} + \frac{(\alpha_{x_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - \alpha_{x_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}})}{2\Delta\theta} \\ &+ \frac{(\alpha_{z_{i,j+1}} H_{\varepsilon_{i,j+1}} - \alpha_{z_{i,j-1}} H_{\varepsilon_{i,j-1}})}{2\Delta Z} - \frac{\Lambda}{2\Delta\theta} (P_{0_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}}) - 2i\gamma\Lambda P_{0_{i,j}} H_{\varepsilon_{i,j}} = 0\end{aligned}$$

$$Q_{\varepsilon_{i,j}} = (a_W Q_{\varepsilon_{i-1,j}} + a_E Q_{\varepsilon_{i+1,j}} + a_N Q_{\varepsilon_{i,j+1}} + a_S Q_{\varepsilon_{i,j-1}} + S_{ij}) / a_P \quad (A1)$$

$$\text{où : } a_P = \frac{(F_{x_{i+1,j}} + F_{x_{i,j}})}{2(\Delta\theta)^2} + \frac{(F_{x_{i,j}} + F_{x_{i-1,j}})}{2(\Delta\theta)^2} + \frac{(F_{z_{i,j+1}} + F_{z_{i,j}})}{2(\Delta Z)^2} + \frac{(F_{z_{i,j}} + F_{z_{i,j-1}})}{2(\Delta Z)^2} + 2\beta P_{0_{i,j}} + 2i\gamma\Lambda H_{0_{i,j}};$$

$$a_W = \frac{F_{x_{i,j}} + F_{x_{i-1,j}}}{2(\Delta\theta)^2} - \frac{\beta_{x_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} + \Lambda \frac{H_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}; \quad a_E = \frac{F_{x_{i,j}} + F_{x_{i+1,j}}}{2(\Delta\theta)^2} + \frac{\beta_{x_{i+1,j}}}{2\Delta\theta} - \Lambda \frac{H_{0_{i+1,j}}}{2\Delta\theta};$$

$$a_N = \frac{F_{z_{i,j+1}} + F_{z_{i,j}}}{2(\Delta Z)^2} + \frac{\beta_{z_{i,j+1}}}{2\Delta Z}; \quad a_S = \frac{F_{z_{i,j-1}} + F_{z_{i,j}}}{2(\Delta Z)^2} - \frac{\beta_{z_{i,j-1}}}{2\Delta Z};$$

$$S_{ij} = \frac{\alpha_{x_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - \alpha_{x_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} + \frac{\alpha_{z_{i,j+1}} H_{\varepsilon_{i,j+1}} - \alpha_{z_{i,j-1}} H_{\varepsilon_{i,j-1}}}{2\Delta Z} - \frac{\Lambda}{2\Delta\theta} (P_{0_{i+1,j}} H_{\varepsilon_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{\varepsilon_{i-1,j}}) -$$

$$2i\gamma\Lambda P_{0_{i,j}} H_{\varepsilon_{i,j}} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

En utilisant le même schéma de discrétisation, on obtient la forme discrétisée de la seconde équation dynamique :

$$Q_{\phi_{i,j}} = (a_W Q_{\phi_{i-1,j}} + a_E Q_{\phi_{i+1,j}} + a_N Q_{\phi_{i,j+1}} + a_S Q_{\phi_{i,j-1}} + S'_{ij}) / a_P \quad (A.2)$$

$$\text{avec } S'_{ij} = \frac{\alpha_{x_{i+1,j}} H_{\phi_{i+1,j}} - \alpha_{x_{i-1,j}} H_{\phi_{i-1,j}}}{2\Delta\theta} + \frac{\alpha_{z_{i,j+1}} H_{\phi_{i,j+1}} - \alpha_{z_{i,j-1}} H_{\phi_{i,j-1}}}{2\Delta Z} - \frac{\Lambda}{2\Delta\theta} (P_{0_{i+1,j}} H_{\phi_{i+1,j}} - P_{0_{i-1,j}} H_{\phi_{i-1,j}}) -$$

$$2i\gamma\Lambda P_{0_{i,j}} H_{\phi_{i,j}} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Les équations (A1) et (A2) sont résolues par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec facteur de sur-relaxation ω_{GS} :

$$Q_{\varepsilon_{ij}}^{(n+1)} = (1 - \omega_{GS})Q_{\varepsilon_{ij}}^{(n+1)} + \omega_{GS} \left(\frac{a_W}{a_P} Q_{\varepsilon_{i-1,j}}^{(n+1)} + \frac{a_E}{a_P} Q_{\varepsilon_{i+1,j}}^{(n)} + \frac{a_N}{a_P} Q_{\varepsilon_{i,j+1}}^{(n)} + \frac{a_S}{a_P} Q_{\varepsilon_{i,j-1}}^{(n+1)} + \frac{S_{ij}}{a_P} \right)$$

$$Q_{\phi_{ij}}^{(n+1)} = (1 - \omega_{GS})Q_{\phi_{ij}}^{(n+1)} + \omega_{GS} \left(\frac{a_W}{a_P} Q_{\phi_{i-1,j}}^{(n+1)} + \frac{a_E}{a_P} Q_{\phi_{i+1,j}}^{(n)} + \frac{a_N}{a_P} Q_{\phi_{i,j+1}}^{(n)} + \frac{a_S}{a_P} Q_{\phi_{i,j-1}}^{(n+1)} + \frac{S'_{ij}}{a_P} \right)$$

(A3)

où $1 \leq \omega_{GS} < 2$