

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**Université 08 Mai 1945 de Guelma**

**Faculté des sciences et de la technologie**

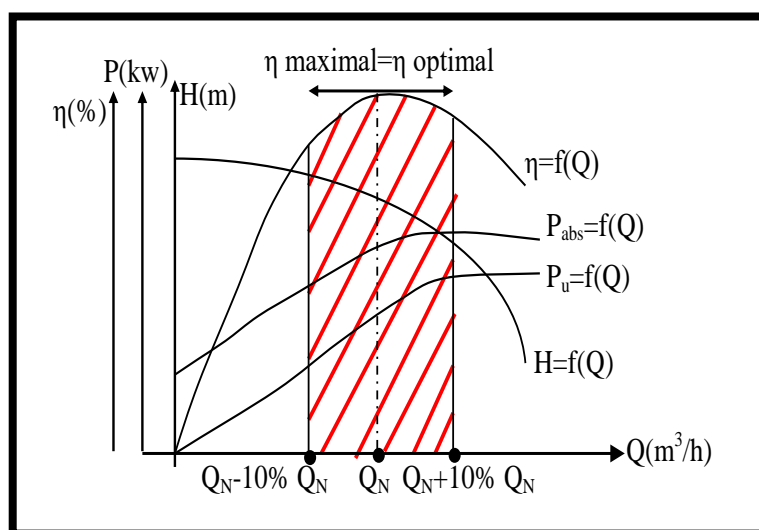
**Département de Génie Civil et d'Hydraulique**



**Pompes et Stations de Pompage**

**Première partie : Cours**

**Fait par : Dr. TOUMI Abdelouaheb**



*Octobre 2022*

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre I : Rappels en mathématique, physique et hydraulique</b>	<b>02</b>
1.1. Introduction	02
1.2. Vecteur	02
1.2.1. Définition d'un vecteur	02
1.2.2. Vecteurs égaux	03
1.2.3. Vecteur nul	03
1.2.4. Vecteurs opposés	03
1.2.5. Vecteurs colinéaires	04
1.2.6. Droites parallèles	04
1.2.7. Points alignés	04
1.2.8. Vecteur et repère	04
1.2.9. Le module d'un vecteur	05
1.2.10. Somme de deux vecteurs	05
1.2.11. Le produit scalaire de deux vecteurs	06
1.2.12. Les cosinus directeurs d'un vecteur	07
1.2.13. Le produit vectoriel de deux vecteurs	08
1.2.14. La résultante de deux vecteurs	10
1.2.15. Théorème de Thalès	12
1.2.16. Le gradient d'un vecteur (fonction vectorielle)	13
1.2.17. La divergence d'un vecteur	14
1.2.18. Rotationnel d'un vecteur	14
1.2.19. Laplacien	14
1.2.19.1. Laplacien d'une fonction scalaire	14
1.2.19.2. Laplacien d'un vecteur	15
1.3. La force liée à un champ potentiel	15
1.4. La quantité de mouvement	15
1.5. Le moment cinétique	16
1.6. Le travail d'une force	17
1.7. La puissance	17
1.8. L'énergie consommée	18
1.9. Le vecteur déplacement	18
1.10. Vitesse de rotation	19
1.11. Accélération	20
1.11.1. L'accélération tangentielle	20
1.11.2. L'accélération normale	20
1.12. Dérivée particulière	21
1.13. Les équations de bases en mécanique des fluides	22
1.13.1. Equation de continuité d'un fluide compressible	22
1.13.1.1. Cas de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans une conduite à section transversale variable (unidimensionnel)	24
1.13.2 Equation d'énergie	25
1.13.2.1 Notions sur l'énergie mécanique	25
1.14. Distribution transversale de la vitesse dans une conduite en charge	28
1.14.1. Régime laminaire	28
1.14.2. Régime turbulent	30
1.15. Formule de calcul du coefficient de Coriolis	33
1.16. Conclusion	35

<b>Chapitre II : Equation fondamentale des machines hydrauliques</b>	<b>36</b>
2.1 Introduction	36
2.2 Définition d'une machine hydraulique (pompe)	36
2.3 Les différents types de pompes	36
2.3.1 Pompes à aubes	36
2.3.1.1. Composants des pompes à aubes	39
2.3.1.1.1. Roue (dite aussi rotor)	39
2.3.1.1.2. Distributeur	40
2.3.1.1.3. Diffuseur (aube ou limaçon)	40
2.3.1.1.4. Volute (colimaçon)	40
2.3.1.1.5. Divergent à la sortie	40
2.3.1.2. Le principe de fonctionnement d'une pompe à aubes	41
2.3.2. Les pompes à tourbillon	41
2.3.3. Les pompes volumétriques	41
2.3.4. Les pompes à jet (hydro-éjecteur)	41
2.3.5. Les pompes à émulsion (air-lift)	41
2.3.6. Les pompes à béliers hydrauliques	41
2.3.7. Les pompes GEPI (Groupe électropompe Immergé)	41
2.3.8. Les pompes noyées à transmission	41
2.4. Classification des pompes à aubes	42
2.4.1. Forme de la roue	42
2.4.2. Forme du corps de pompe	42
2.4.3. Nombre de roues	42
2.4.4. La position de l'axe	42
2.5. Equation fondamentale des machines hydraulique	42
2.5.1 Calcul de la hauteur théorique produite par la pompe	44
2.5.2. Calcul du débit théorique délivré par la pompe	44
2.5.3. Application de l'équation de Bernoulli (d'énergie) aux pompes à aubes	46
2.5.4. Calcul de la hauteur de charge analytique produite par la roue d'une pompe	48
2.5.5. Décomposition de l'équation fondamentale des machines hydrauliques	50
2.6. Rôle des canaux de retour	52
2.7. Conclusion	52
<b>Chapitre III : Construction des courbes caractéristiques des pompes à aubes</b>	<b>53</b>
3.1. Introduction	53
3.2. Courbes caractéristiques théoriques d'une pompe à aubes	53
3.2.1. La hauteur théorique en fonction de débit	53
3.2.2. La puissance théorique en fonction de débit	54
3.2.3. Le rendement analytique en fonction de débit	55
3.3. Courbes caractéristiques réelles (expérimentales) d'une pompe	56
3.3.1. La hauteur d'élévation (H) en fonction du débit (Q)	56
3.3.2. La puissance absorbée en fonction d débit (Q)	57
3.3.3. La puissance utile en fonction du débit (Q)	58
3.3.4. Le rendement en fonction du débit (Q)	58
3.3.5. (N.P.S.H) <sub>r</sub> en fonction de débit (Q)	59
3.3.6 Les courbes caractéristiques et la plage de bon fonctionnement	59
3.4. Conclusion	59

<b>Chapitre IV : Les différents types d'installations &amp; HMT</b>	<b>60</b>
4.1. Introduction	60
4.2. Les appareils de mesures de la pression & du débit	60
4.2.1. Appareils de mesure de la pression	60
4.2.2. Appareil de mesure du débit	61
4.3. Les différents types d'installations	61
4.3.1. Installation en aspiration (dépression)	61
4.3.2. Installation en charge (forcée)	62
4.3.3. Installation en siphon	62
4.4. Détermination de la hauteur manométrique totale	63
4.4.1. Installation en aspiration	63
4.4.2. Installation en charge	66
4.4.3. Installation en siphon	67
4.6. Calcul des puissances	69
4.6.1 Puissance utile	69
4.6.2 Puissance absorbée	69
4.7. Rendement de la pompe	69
4.8. Conclusion	69

<b>Chapitre V : Lois de similitudes des pompes à aubes</b>	<b>70</b>
5.1 Introduction	70
5.2 Les différentes lois de similitude	70
5.2.1 Lois de similitude géométrique	70
5.2.2 Lois de similitude cinématique	70
5.2.3 Lois de similitude dynamique	70
5.3 Vitesse spécifique	74
5.4 Rôles de la vitesse spécifique	75
5.5 Conclusion	75

<b>Chapitre VI : Phénomène de cavitation causes, conséquences et calage</b>	<b>76</b>
6.1 Introduction	76
6.2. Définition et cause de la cavitation	76
6.3. Etude de la cavitation dans les différentes installations des pompes	76
6.3.1 Installation en dépression (aspiration)	76
6.3.2. Installation en charge (forcée)	78
6.3.3. Installation de type siphon	79
6.4. Les valeurs de la pression atmosphérique et les relations de la pression de la vapeur d'eau	79
6.4.1. La pression atmosphérique	79
6.4.1.1. Formule de la pression atmosphérique obtenue de l'équation différentielle	79
6.4.1.2. Modèle d'atmosphère standard avec gradient de température constant	79
6.4.2. La pression de la vapeur du liquide	80
6.5. Vitesse d'aspiration	80
6.6. Perte de charge à l'aspiration	81
6.7. Effets de la cavitation	81
6.7.1. Conséquences de la cavitation	81
6.7.1.1. Érosion de cavitation	81
6.7.1.2. Bruit de cavitation	81
6.7.1.3. Pertes de performances	81

6.7.1.4. Vibrations	82
6.8. Charge nette d'aspiration requise (N.P.S.H) <sub>r</sub>	82
6.9. Condition de non cavitation	84
6.10. Hauteur d'aspiration admissible	84
6.10.1. Installation en aspiration	84
6.10.2. Installation en charge	84
6.11. Calage des pompes	85
6.11.1. Définition du calage d'une pompe	85
6.11.2. Installation en aspiration	85
6.11.3. Installation en charge	85
6.12. Détermination de la zone de cavitation	85
6.13 Point de fonctionnement et débit de cavitation	86
6.14. Conclusion	87

## **Chapitre VII : Modes de réglage de débit des pompes** **88**

7.1. Introduction	88
7.2. Les différents modes de réglage	88
7.2.1 Rognage	88
7.2.2 Réglage qualitatif	91
7.2.2.1 Réduction de la vitesse de rotation	91
7.2.2.2 Augmentation de la vitesse de rotation	92
7.2.3 Réglage quantitatif	92
7.2.3.1 Vannage	92
7.2.3.2 Réduction du temps de pompage	93
7.3. By- pass	94
7.4. Introduction d'air dans la conduite d'aspiration	94
7.5. Changement de la pompe	95
7.6. Conclusion	95

## **Chapitre VIII : Couplage des pompes identiques & non identiques** **96**

8.1 Introduction	96
8.2 Couplage de deux pompes identiques	96
8.2.1 Couplage de deux pompes en série	96
8.2.1 Couplage de trois pompes en série	97
8.2.3 Couplage de deux pompes en parallèle	98
8.2.4 Couplage de trois pompes identiques en parallèle	100
8.3 Couplage de deux pompes non identiques	101
8.3.1 Couplage de deux pompes en série	101
8.3.2 Couplage de trois pompes non identiques en série	103
8.3.3 Couplage de deux pompes non identiques en parallèle	104
8.3.4 Couplage de trois pompes non identiques en parallèle	105
8.4. Détermination du point de fonctionnement	107
8.5 Conclusion	115

<b>Chapitre IX : Equipements et entretien des stations de pompage</b>	
9.1 Introduction	116
9.2. Equipements d'une station de pompage	116
9.2.1. Les équipements en amont des pompes (côté aspiration)	116
9.2.1.1. Une tulipe d'aspiration	116
9.2.1.2. Une crépine	116
9.2.1.3. Clapet de pied crépine	116
9.2.1.4. Les joints	116
9.2.1.5. Les vannes d'aspiration	116
9.2.2. Les équipements en aval des pompes (côté refoulement)	117
9.2.2.1. Divergent	117
9.2.2.2. Clapet	117
9.2.2.3. Robinet vanne	117
9.2.2.4. Collecteur de refoulement	117
9.2.2.5. Le circuit auxiliaire	118
9.2.2.6. Appareils de mesure	118
9.3. Opérations à exécuter avant la mise en marche d'une pompe	118
9.4. Opérations à exécuter lors de la mise en marche	119
9.5. Précautions à prendre au cours de service	119
9.6. Opérations à exécuter lors de l'arrêt de la pompe	119
9.7. Les différentes pannes possibles et leurs remèdes	120
9.8. Conclusion	121
<b>Conclusion générale</b>	<b>122</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>124</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Les pompes et stations de pompage est une partie de l'hydraulique en charge qui s'occupe du refoulement de l'eau d'un endroit à un autre. En effet, l'intervention de la pompe fait transférer l'énergie cinétique créée par roue entraînée par le moteur électrique en énergie de pression, ce qui fait monter l'eau à des cotes plus élevées que celui du lieu de pompage.

Le choix de la pompe est conditionné par plusieurs paramètres qui peuvent être synthétisés en deux principales à savoir le débit à assurer et la charge contre laquelle doit travailler la pompe.

Nous entamerons cet ouvrage par un rappel en mathématique, en physique et en hydraulique afin d'ouvrir la grande porte aux lecteurs pour comprendre les relations utilisées dans la suite du travail.

Nous aborderons, par la suite, une partie sur l'équation fondamentale des machines hydrauliques, dans le chapitre 2 nous essayerons de démontrer toutes les relations théoriques et analytiques en relativité avec l'écoulement dans une machine hydraulique. Puis nous établissons toutes les expressions que peut prendre cette équation fondamentale.

Le troisième chapitre sera consacré à la construction des courbes caractéristiques théoriques, analytiques et pratiques des pompes à aubes d'une part et d'autre part à la construction des courbes de la puissance, du rendement et de l' $(NPSH)_r$  en fonction du débit.

Le quatrième chapitre a pour objet de mettre en exergue les types d'installation des pompes, les hauteurs manométriques totales et les puissances utile et absorbée ainsi que le rendement d'une pompe.

Le cinquième chapitre permettra de mettre à la disposition des lecteurs les lois de similitude géométrique, cinématique et dynamique. Ainsi nous représenterons les relations des rapports des charges, des débits et des puissances entre la roue réelle et la roue modèle. Nous démontrerons, par la suite, la vitesse spécifique et nous décrirons ses rôles.

Le sixième chapitre aura également pour but d'étudier le phénomène de cavitation aux stations de pompage dans les cas installations en aspiration et en charge, tout en détaillant ses causes, ses conséquences et les expressions du  $(NPSH)_d$  ainsi que la condition permettant de l'empêcher de se produire. Par la suite, nous déterminerons la hauteur d'aspiration admissible, les relations des niveaux des axes des pompes et la détermination de la zone de non cavitation.

Le septième chapitre s'étendra aux différents modes de réglage quantitatif et qualitatif du débit des pompes.

Le huitième chapitre examinera le couplage en série et en parallèle des pompes identiques et non identiques ainsi que la détermination du point de fonctionnement d'une station de pompage dans des cas complexe.

Le dernier chapitre se jettera, quant à lui, à la discrétisation des principaux équipements d'une station de pompage et à l'entretien des pompes tout en mettant les opérations à exécuter avant, lors et après la mise en marche d'une pompe et les précautions à prendre lors de la mise en marche ainsi que décrire les pannes possibles, leurs causes et leurs remèdes.



# **CHAPITRE I**

## **Rappels en Mathématique, Physique et Hydraulique**

## 1.1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif de mettre à la portée des étudiants des rappels en mathématique, en physique et en hydraulique. Nous entamerons, la première partie de ce chapitre, par mettre toutes les notions, qu'on est en besoin sur les vecteurs, et comment faire le module et les cosinus directeurs d'un vecteurs ainsi que la résultante, les produits vectoriels et scalaires de deux vecteurs, puis nous éluciderons le théorème de Thalès en donnant son principe et ses configurations possibles. Nous aborderons par la suite, un bref éclaircissement sur le gradient, la divergence, et le rotationnel d'un vecteur d'une part et d'autre part le Laplacien d'une fonction scalaire et d'un vecteur et, enfin, nous donnerons, du point de vue vectoriel, la force liée à un champ potentiel, la quantité de mouvement, le moment cinétique, le travail d'une force, la puissance et l'énergie consommée d'un côté, et, d'un autre côté nous mettrons en exergue le vecteur déplacement, la vitesse de rotation, les accélérations normale et tangentielle et la dérivée particulière.

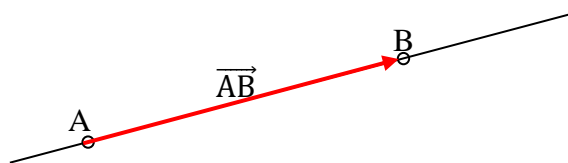
Dans la dernière partie de ce chapitre, nous détaillerons les équations de bases en hydraulique à savoir : les équations de continuité, d'énergie et de la quantité de mouvement, sans oublier de mettre les formules permettant de déduire les vitesses ponctuelles et moyennes dans une conduite en charge aux régimes laminaire et turbulent.

## 1.2. Vecteur

**1.2.1. Définition d'un vecteur :** un vecteur est un être mathématique défini par ses composantes, son module, ses cosinus directeur, sa direction et son sens.

En mathématiques, un **vecteur** est un objet généralisant plusieurs notions provenant de la géométrie (couples de points, translations, etc.), de l'algèbre (solution d'un système d'équations à plusieurs inconnues).

En physique, les vecteurs sont grandement utilisés, ils permettent de modéliser des grandeurs comme une force, une vitesse, une accélération, une quantité de mouvement ou certains champs (électrique, magnétique, gravitationnel...). Une grandeur vectorielle s'oppose à une grandeur scalaire : la grandeur scalaire a uniquement une valeur mais pas de direction ou de sens.



**Fig. 1.1 : Représentation d'un vecteur dans le plan**

Le vecteur  $\vec{AB}$  est constitué de trois données :

- Une longueur AB ou  $\|\vec{AB}\|$  qui est la distance entre A et B qu'on l'appelle module.
- Une direction représentée par la droite passant par A et B.
- Un sens de A vers B.

Si un vecteur est noté avec deux points  $\overrightarrow{AB}$ , alors on nomme origine du vecteur le point de départ et extrémité du vecteur celui d'arrivée. Lorsqu'on connaît l'origine d'un vecteur et son extrémité, on nomme celui-ci à l'aide des deux points. Lorsqu'on ne connaît pas l'origine et l'extrémité, alors on utilise une lettre minuscule  $\vec{u}$ .

### 1.2.2. Vecteurs égaux

Deux vecteur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égaux (et on écrit :  $\vec{u} = \vec{v}$ ) si et seulement si :

- Ils ont la même longueur :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
- Ils ont la même direction : Les droites portant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont parallèles ou confondues.
- Ils ont le même sens : Le sens des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est identique.

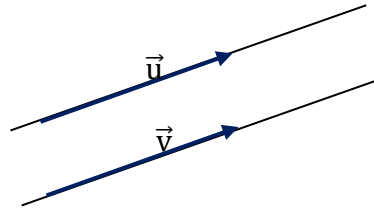


Fig.1.2 : Représentation dans le plan de deux vecteurs égaux

### 1.2.3. Vecteur nul

On nomme vecteur nul et on note  $\vec{0}$  le vecteur qui représente un déplacement nul de longueur 0.

### 1.2.4. Vecteurs opposés

On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont opposés si et seulement si ils ont :

- La même longueur.
- La même direction.
- Des sens contraires.

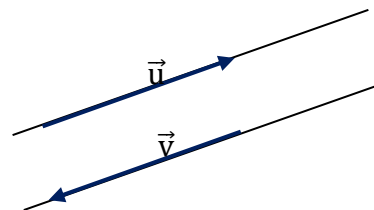


Fig.1.3 : Représentation dans le plan de deux vecteurs opposés

Soit  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur, on note  $\overrightarrow{BA} = (-\overrightarrow{AB})$  le vecteur opposé à  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ le vecteur nul.}$$

1.2.5. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ .

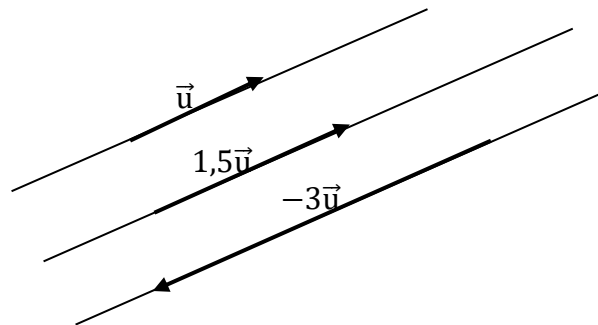


Fig.1.4 : Représentation dans le plan des vecteurs colinéaires

1.2.6. Droites parallèles

Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires alors  $(AB) \parallel (CD)$

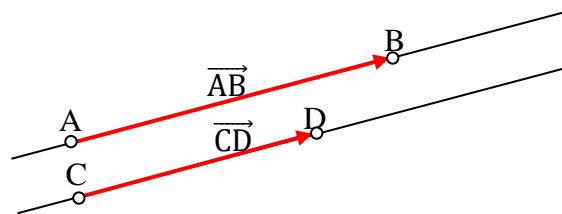


Fig.1.5 : Schéma dans le plan des droites parallèles

1.2.7. Points alignés

Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés.

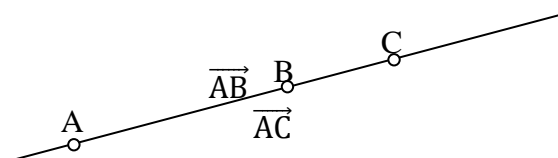


Fig.1.6 : Schéma représentatif dans le plan des points alignés

1.2.8. Vecteur et repère

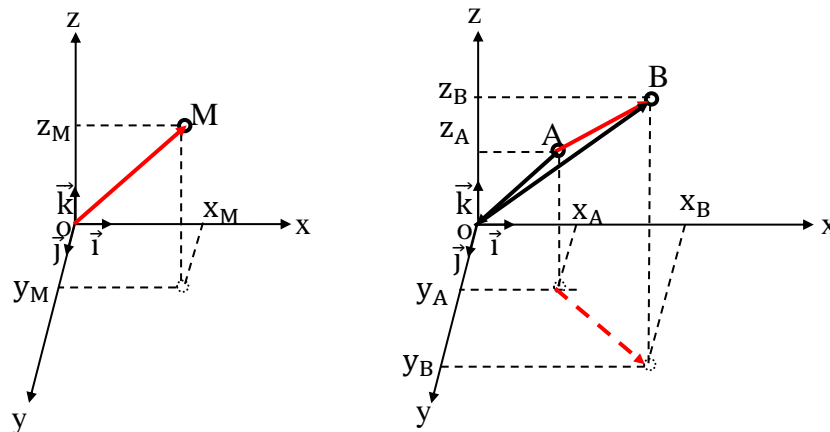
Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Si M de coordonnées  $(x_M, y_M, z_M)$  est un point du repère

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  alors le vecteur  $\overrightarrow{OM} = (x_M - x_O)\vec{i} + (y_M - y_O)\vec{j} + (z_M - z_O)\vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} = (x_M - 0)\vec{i} + (y_M - 0)\vec{j} + (z_M - 0)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} \quad (1.1)$$

On note A  $(x_A, y_A, z_A)$  et B  $(x_B, y_B, z_B)$  deux points de ce repère.



**Fig.1.7 : Représentation d'un point et d'un vecteur dans l'espace et leurs projections sur le plan**

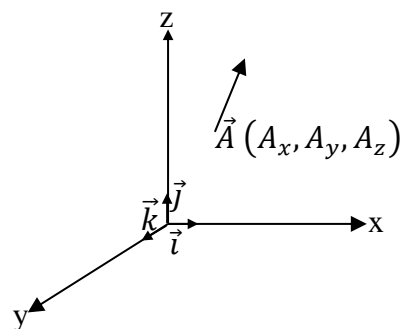
Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont données par la formule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \\ \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$  (1.2)

**1.2.9. Le module d'un vecteur**

Le module d'un vecteur  $\vec{A}$  de composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  défini dans un référentiel cartésien  $(ox, oy, oz)$  (repère à trois dimensions orthonormées) est un nombre réel sa valeur est donnée par :



**Fig.1.8 : Représentation d'un vecteur dans l'espace**

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.3)$$

**1.2.10. Somme de deux vecteurs**

Pour additionner deux vecteurs, on déplace le second (un vecteur n'ayant pas d'emplacement précis) pour que son origine soit à l'extrémité du premier vecteur. On forme ainsi un

parallélogramme. Si on veut additionner les deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$ , on trace un vecteur  $\vec{BM}$  égal à  $\vec{CD}$  en partant de B. On obtient donc le vecteur  $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{CD}$ .

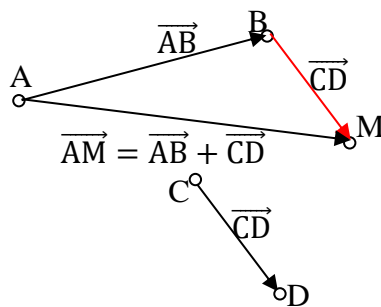


Fig.1.9 : Somme de deux vecteurs dans le plan

Pour tous points A, B et C :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  (1.4)

Il faut savoir utiliser cette relation dans les deux sens. Cette dernière relation s'appelle relation de **Chasles**.

Pour deux vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  issus d'un même point, la somme des deux vecteurs  $\vec{AC} + \vec{AB}$  par le parallélogramme suivant.

$\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{CB}$  ;  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$  ;  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  ; ;  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ .

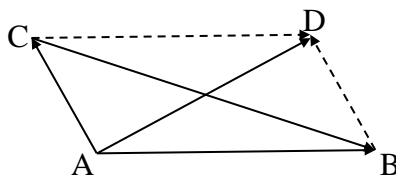


Fig.1.10 : Somme de deux vecteurs partant du même point

**1.2.11. Le produit scalaire de deux vecteurs**

Soient les deux vecteurs  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  et  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$  le produit scalaire de ces deux vecteurs est un nombre réel donné par :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + A_y B_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + A_z B_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \cdot \vec{k})) \quad (1.5)$$

Les composantes des vecteurs unités  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1)

Les axes sont orthonormés et par conséquent le produit scalaire de deux vecteurs orthonormés est nul.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos(\vec{i} \wedge \vec{j}) \quad (1.6)$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) = 90^\circ; \cos(\vec{i} \wedge \vec{j}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \cos(\vec{i} \wedge \vec{j}) = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \cos(\vec{j} \wedge \vec{k}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \cdot \vec{k})) \quad (1.10)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs en parallèle est donné par :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos(\vec{i} \wedge \vec{i}) = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \quad (1.11)$$

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) = 0^\circ \Rightarrow \cos(\vec{i} \wedge \vec{i}) = 1 \quad (1.12)$$

$$\|\vec{i}\| = \sqrt{i_x^2 + i_y^2 + i_z^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\|\vec{j}\| = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos(\vec{i} \wedge \vec{i}) = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot 1 = 1 \quad (1.13)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos(\vec{j} \wedge \vec{j}) = \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot 1 = 1 \quad (1.14)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \cos(\vec{k} \wedge \vec{k}) = \|\vec{k}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot 1 = 1 \quad (1.15)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \quad (1.16)$$

Le produit scalaire est donné également par l'expression :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (1.17)$$

### 1.2.12. Les cosinus directeurs d'un vecteur

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles compris entre le vecteur  $\vec{A}$  et les axes (ox, oy et oz) successivement, on utilise le produit scalaire de  $\vec{A} \cdot \vec{i}$  par deux expressions différentes on obtient :

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{i}) = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos\alpha = \|\vec{A}\| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = A_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) = A_x$$

$$\|\vec{A}\| \cdot \cos\alpha = A_x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{A_x}{\|\vec{A}\|} \quad (1.18)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{j} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{j}) = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos\beta = \|\vec{A}\| \cdot \cos\beta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{j} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (\vec{0i} + \vec{j} + 0\vec{k}) = A_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) = A_y$$

$$\|\vec{A}\| \cdot \cos\beta = A_y \Rightarrow \cos\beta = \frac{A_y}{\|\vec{A}\|} \quad (1.19)$$

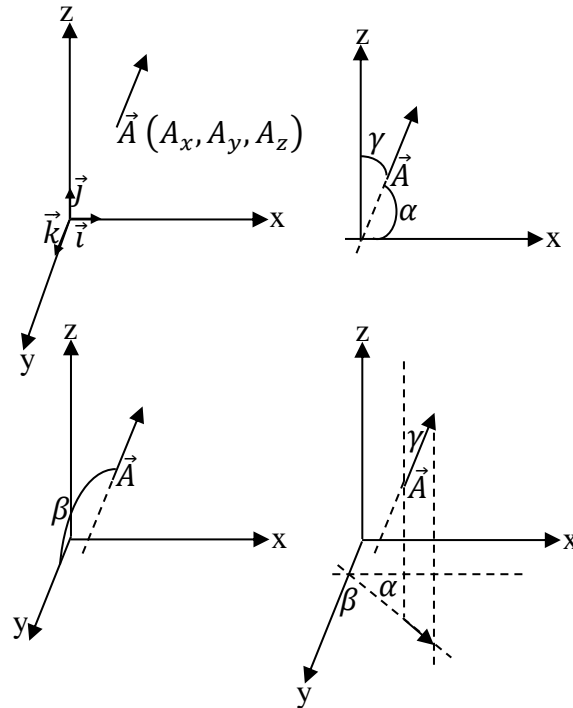


Fig.1.11 : Représentation spatiale des cosinus directeur d'un vecteur

$$\vec{A} \cdot \vec{k} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{k}) = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \cos\gamma = \|\vec{A}\| \cdot \cos\gamma$$

$$\vec{A} \cdot \vec{k} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (\vec{0i} + 0\vec{j} + \vec{k}) = A_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = A_z$$

$$\|\vec{A}\| \cdot \cos\gamma = A_z \Rightarrow \cos\gamma = \frac{A_z}{\|\vec{A}\|} \quad (1.20)$$

Cos( $\alpha$ ), cos( $\beta$ ) et cos( $\gamma$ ) s'appellent les cosinus directeurs du vecteur  $\vec{A}$ .

### 1.2.13. Le produit vectoriel de deux vecteurs

Soient les deux vecteurs  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  et  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$  le produit vectoriel de ces deux vecteurs est un vecteur donné par :

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & (A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) + A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \times \vec{k}) \\ & + A_z B_x (\vec{k} \times \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \times \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \times \vec{k})) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs en parallèle est égal à zéro.

$$(\vec{i} \times \vec{i}) = \vec{0} ; \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} ; \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \quad (1.22)$$



$$\vec{i} \times \vec{j} = (1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) \times (0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = ((i_y j_z - i_z j_y)\vec{i} + (i_z j_x - i_x j_z)\vec{j} + (i_x j_y - i_y j_x)\vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = ((0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (1 - 0)\vec{k}) = \vec{k} \quad (1.23)$$

Ce dernier résultat peut être obtenu en utilisant le déterminant suivant :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{k}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = (1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) \times (0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = ((i_y k_z - i_z k_y)\vec{i} + (i_z k_x - i_x k_z)\vec{j} + (i_x k_y - i_y k_x)\vec{k})$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = ((0)\vec{i} + (-1)\vec{j} + (0)\vec{k}) = -\vec{j} \quad (1.24)$$

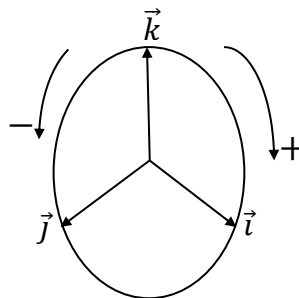
Ou par le déterminant :

$$\vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{j} \quad (1.25)$$

On fait de la même chose pour les produits vectoriels  $\vec{j} \times \vec{i}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k}$ ,  $\vec{k} \times \vec{i}$  et  $\vec{k} \times \vec{j}$ .

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

On peut également utiliser le cercle (sous la forme de l’insigne de Mercedes) suivant pour obtenir rapidement le produit vectoriel des vecteurs de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Prendre la direction des aiguilles d’une montre comme sens positive. Seulement mettre + ou - après le vecteur de base suivant.



**Fig. 1.12 : Cercle du produit vectoriel des vecteurs unités**

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_x (\vec{0}) + A_x B_y (\vec{k}) + A_x B_z (-\vec{j}) + A_y B_x (-\vec{k}) + A_y B_y (\vec{0}) + A_y B_z (\vec{i}) + A_z B_x (\vec{j}) + A_z B_y (-\vec{i}) + A_z B_z (\vec{0}))$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y (\vec{k}) + A_x B_z (-\vec{j}) + A_y B_x (-\vec{k}) + A_y B_z (\vec{i}) + A_z B_x (\vec{j}) + A_z B_y (-\vec{i}))$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = ((A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}) \quad (1.26)$$

Le résultat précédent peut être obtenu en se basant sur le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (1.25')$$

### 1.2.14. La résultante de deux vecteurs

Soient les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ayant les composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  et  $(B_x, B_y, B_z)$  la représentation géométrique dans le plan (ox,oy) donne la forme géométrique représentée dans la figure ci-après.

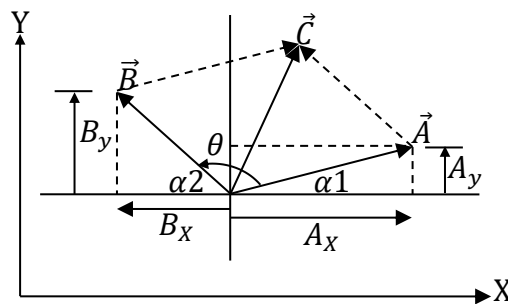


Fig. 1.13 : Décomposition et résultante de deux vecteurs dans le plan (o,x,y)

Les deux vecteurs forment entre eux un angle  $\theta$ .

Le vecteur résultant de la somme des deux est

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Le module de  $\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\|$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2} \quad (1.26)$$

Dans le plan (ox, oy), on néglige la troisième composante et le module de la résultante devient :

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad (1.26')$$

La projection du vecteur  $\vec{A}$  sur les axes ox et oy donne successivement  $A_x$  et  $A_y$ , nous avons démontré précédemment que  $A_x = \|\vec{A}\| \cdot \cos \alpha_1$  (1.27) et  $A_y = \|\vec{A}\| \cdot \cos \beta_1$  (1.27')

Sachant que  $\cos\alpha_1$  et  $\cos\beta_1$  sont les cosinus directeur de  $\vec{A}$  par rapport aux axes (ox et oy).

Alors que la projection du vecteur  $\vec{B}$  sur les axes ox et oy donne successivement  $B_x$  et  $B_y$ , nous avons démontré précédemment que  $B_x = \|\vec{B}\| \cdot \cos\alpha_2$  et  $B_y = \|\vec{B}\| \cdot \cos\beta_2$

Sachant que  $\cos\alpha_2$  et  $\cos\beta_2$  sont les cosinus directeur du vecteur  $\vec{B}$  par rapport aux axes (ox et oy).

- a) Si les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles successivement aux axes ox et oy, l'angle  $\beta_1=90^\circ$  d'où  $\cos(90^\circ)=0 \Rightarrow A_y=0$  et l'angle  $\alpha_2=90^\circ$  d'où  $\cos(90^\circ)=0 \Rightarrow B_x=0$ , le module du vecteur  $\vec{C}$  est :

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(A_x + 0)^2 + (0 + B_y)^2}$$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(A_x)^2 + (B_y)^2} \quad (1.28)$$

Cette dernière expression s'appelle le Théorème de Pythagore.

- b) Si le vecteur  $\vec{A}$  est parallèle à l'axe ox et le vecteur  $\vec{B}$  fait un angle  $\alpha_2 \neq 90^\circ$  avec l'axe oy,

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (B_y)^2} \quad (1.29)$$

$$B_x = \|\vec{B}\| \cdot \cos\alpha_2 \quad (1.29')$$

$$B_y = \|\vec{B}\| \cdot \cos\beta_2 \quad (1.29'')$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \quad (1.29''')$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\alpha_2 + \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha_2 = \sin\alpha_2$$

$$B_y = \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha_2 \quad (1.30)$$

Dans ce cas-là, on peut écrire  $\alpha_2 = \pi - \theta$

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \theta) = \cos\pi \cos\theta + \sin\pi \sin\theta = -\cos\theta$$

$$D'où B_x = -\|\vec{B}\| \cdot \cos\theta$$

$$\sin\alpha_2 = \sin(\pi - \theta) = \sin\pi \cos\theta - \sin\theta \cos\pi = \sin\theta$$

$$B_y = \|\vec{B}\| \cdot \sin\theta \quad (1.31)$$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\| \cdot \cos\theta)^2 + (\|\vec{B}\| \cdot \sin\theta)^2}$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 - 2\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos\theta + \|\vec{B}\|^2 (\cos\theta)^2 + \|\vec{B}\|^2 \cdot (\sin\theta)^2}$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta}$$

$$\|\vec{C}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta \quad (1.32)$$

### 1.2.15. Théorème de Thalès

Thalès est un mathématicien grec qui aurait vécu au sixième cycle avant Jésus christ. Nous ne le connaissons qu'à travers les écrits de Sophocle, de Poppus et d'autres. On peut lui attribuer les quatre résultats mathématiques suivants :

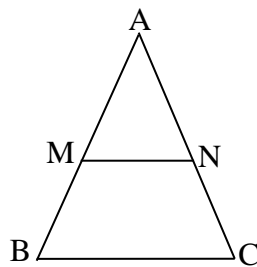
1. Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.
2. Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de la même mesure.
3. Le diamètre d'un cercle coupe ce même cercle en deux parties de même aire.
4. Si un triangle est inscrit dans un cercle tel que l'un de ces côtés soit le diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle.

### Principe du théorème de Thalès

ABC un triangle avec M un point de (AB) et N un point de (AC).

Si (BC) et (MN) sont parallèles alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$  sachant que A, M et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C.

\* dans le cas où M est le milieu de [AB] et N et le milieu de [AC] on se retrouve dans la configuration de la réciproque du théorème de la droite du milieu.



On peut utiliser le théorème de Thalès dans les trois configurations suivantes :

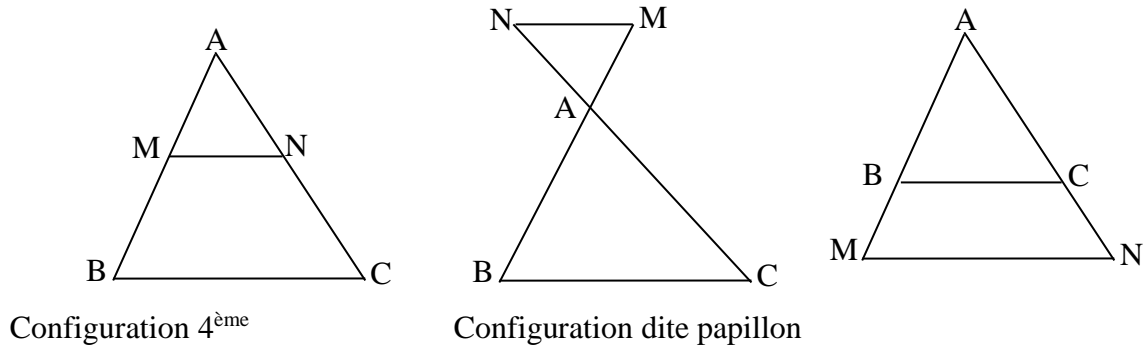


Fig. 1.14 : Configurations du théorème de Thalès

**1.2.16. Le gradient d'un vecteur (fonction vectorielle)**

Etant donné une fonction vectorielle  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  fonction des coordonnées du point P, le passage au point P' voisin de P de composantes P'(x<sub>1</sub>+dx<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>+dx<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>+dx<sub>3</sub>) fait varier le vecteur  $\vec{u}$  au 2<sup>ème</sup> ordre près :

$$d\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \quad (1.33)$$

Si  $\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix}$  les composantes du vecteur  $d\vec{u}$ , il est possible d'écrire matriciellement :

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

Soit de forme plus compactée  $d\vec{u} = [\overrightarrow{\text{grad } u}] d\vec{p}$                       (1.34')

Les vecteurs  $d\vec{u}$  et  $d\vec{p}$  étant indépendants de la base, la matrice  $[\overrightarrow{\text{grad } u}]$  est celle d'un tenseur d'ordre 2 tel que :

$$[\overrightarrow{\text{grad } u}] = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = [u_{i,j}] \quad (1.35)$$

i=1, 2, 3 ; j= 1, 2, 3.

### 1.2.17. La divergence d'un vecteur

Par définition la divergence d'un vecteur  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  est la quantité scalaire notée  $\text{div}\vec{u} = u_{i,i} = \text{trac}(\overline{\text{grad}}\vec{u})$  (1.36)

$$(i.e : \text{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.37) \rightarrow \text{contraction de l'indice muet.}$$

Divergence de  $\vec{u} \rightarrow$  contraction du tenseur  $(\overline{\text{grad}}\vec{u})$ .

$$\text{div}\vec{u} = \vec{e}_i \cdot \vec{u}_{,i} \quad (1.38)$$

$$\text{Opté } \text{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{div}\vec{u} + \text{div}\vec{v} \quad (1.39)$$

### 1.2.18. Rotationnel d'un vecteur

Un  $\overline{\text{grad}}\vec{u}$  est un tenseur d'ordre 1, on peut le décomposer en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique soit  $\overline{G} = \overline{\text{grad}}\vec{u}$  la décomposition de  $\overline{G}$  donne.

$$\overline{G} = \frac{1}{2}(G_{i,j} + G_{j,i}) + \frac{1}{2}(G_{i,j} - G_{j,i}) \quad (1.40)$$

$$S_{i,j} = \frac{1}{2}(G_{i,j} + G_{j,i}) \quad (1.40') \text{ et } AS_{i,j} = \frac{1}{2}(G_{i,j} - G_{j,i}) \quad (1.40'')$$

Intéressons-nous à la partie antisymétrique qu'on le nomme  $R_{i,j}$ .

$$R_{i,j} = \frac{1}{2}(G_{i,j} - G_{j,i}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$i=1,2,3$$

$$j=1,2,3$$

Par définition on appelle rotationnel du vecteur  $\vec{u}$  le double de pseudo vecteur adjoint du tenseur antisymétrique  $R_{i,j}$ .

$$\text{Rot}\vec{u} = 2 \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} R_{k,j} \right) = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (1.42)$$

### 1.2.19. Laplacien

#### 1.2.19.1. Laplacien d'une fonction scalaire

Considérons une fonction scalaire  $\emptyset(x_1, x_2, x_3)$  le Laplacien de cette fonction scalaire que l'on note (nabla de  $\emptyset$ )  $\Delta\emptyset$  est définie par la divergence du vecteur  $\overline{\text{grad}}\emptyset$ .

$$\Delta\emptyset = \text{div}\overline{\text{grad}}\emptyset \quad (1.43)$$

$$\Delta\emptyset = \emptyset_{,ii} = \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x_3^2} \quad (1.43')$$

### 1.2.19.2. Laplacien d'un vecteur

Soit  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$  une fonction vectorielle de coordonnées  $x_i$ , le Laplacien de  $\vec{u}$  que l'on note

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_{,ij} \quad (1.44)$$

$$\Delta \vec{u}_i = \vec{u}_{i,jj} \quad (1.44')$$

$$\Delta \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \Delta u_1 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = \Delta u_2 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \Delta u_3 \end{bmatrix} \quad (1.44'')$$

$$\Delta \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) \quad (1.44''')$$

### 1.3. La force liée à un champ potentiel

La force liée au champ potentiel (comme le champ de la gravité)  $\emptyset$ , dans un repère euclidien  $(ox, oy, oz)$ , et qui influe sur n'importe quel corps soumis à ce champ est donnée par :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} \emptyset \quad (1.45)$$

$$\vec{F} = - \frac{\partial \emptyset}{\partial X} \vec{i} - \frac{\partial \emptyset}{\partial Y} \vec{j} - \frac{\partial \emptyset}{\partial Z} \vec{k} \quad (1.45')$$

### 1.4. La quantité de mouvement

En appliquant le principe de la dynamique sur le centre d'inertie d'un corps de masse,  $m$ , en déplacement sous un vecteur vitesse  $\vec{V}$  on obtient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{\gamma} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La variation de la quantité de mouvement durant un temps,  $dt$ , est égale à la somme des forces extérieures.

$$d\vec{P} = d(m\vec{V}) \quad (1.46)$$

Si la masse,  $m$ , est constante

$$d\vec{P} = m d\vec{V}$$

$$\int d\vec{P} = m \int d\vec{V} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{V} \quad (1.46')$$

$P$  : la quantité du mouvement du centre de gravité du poids

$m$  et  $V$  sont successivement la masse et la vitesse du corps en déplacement.

1.5. Le moment cinétique

Le moment cinétique est le produit vectoriel du vecteur déplacement par le vecteur de la quantité de mouvement.

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \times \vec{V} \quad (1.47)$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \times m\vec{V} = m(\overrightarrow{OM} \times \vec{V}) \quad (1.47')$$

On nomme  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

Les composantes dans les 3 directions des vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{V}$  sont respectivement  $(r_x, r_y, r_z)$  et  $(V_x, V_y, V_z)$

$$\vec{r} \times \vec{V} = ((r_y V_z - r_z V_y)\vec{i} + (r_z V_x - r_x V_z)\vec{j} + (r_x V_y - r_y V_x)\vec{k})$$

$$\vec{C} = m((r_y V_z - r_z V_y)\vec{i} + (r_z V_x - r_x V_z)\vec{j} + (r_x V_y - r_y V_x)\vec{k})$$

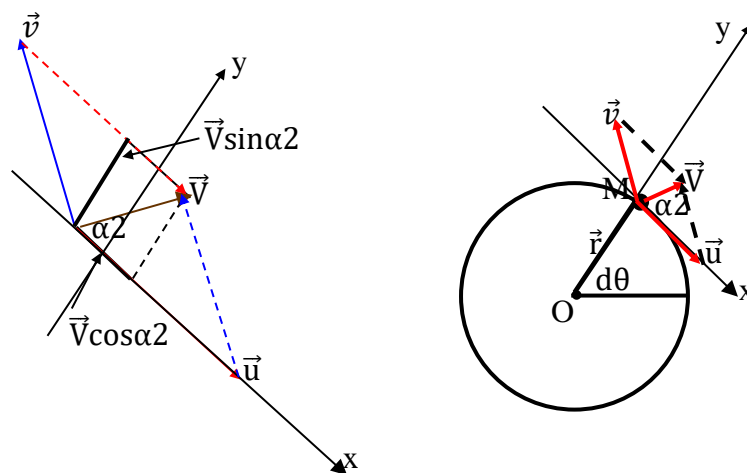


Fig.1.15 : Décomposition des vitesses d'un corps en mouvement rotationnelle

Le moment cinétique, par rapport à l'axe O, du corps de masse m se trouvant à une distance OM du centre de l'axe O et qui tourne autour de O à une vitesse  $\vec{V}$  est

$$\vec{C} = m((r_y V_z - r_z V_y)\vec{i} + (r_z V_x - r_x V_z)\vec{j} + (r_x V_y - r_y V_x)\vec{k}) \quad (1.48)$$

Notre domaine se limite seulement au plan (o,x,y), donc les composantes de la troisième direction seront négligées  $V_z = 0$  et  $r_z=0$ .

$$\vec{C} = m((r_y x 0 - 0 x V_y)\vec{i} + (0 x V_x - r_x x 0)\vec{j} + (r_x V_y - r_y V_x)\vec{k})$$

$$\vec{C} = m(r_x V_y - r_y V_x)\vec{k} \quad (1.48')$$



$V_x = V \cos \alpha_2$ ,  $V_y = V \sin \alpha_2$ ,  $r_x = 0$  et  $r_y = r$

$$\vec{C} = m(0 \times V_y - r \cdot V \cos \alpha_2) \vec{k} \Rightarrow \vec{C} = -m \cdot r \cdot V \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{k} \quad (1.48')$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{(-m \cdot r \cdot V \cdot \cos \alpha_2)^2} = m \cdot r \cdot V \cdot \cos \alpha_2$$

Le moment cinétique d'une masse  $dm$  est :

$$C = \|\vec{C}\| = dm \cdot r \cdot V \cdot \cos \alpha_2 \quad (1.49)$$

### 1.6. Le travail d'une force

Le travail est le produit scalaire de la force par le vecteur déplacement  $\vec{dl}$ , son unité est le Joule sachant que le Joule, en système international, est ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ).

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (1.50)$$

Pour qu'une machine puisse fonctionner, il faut lui fournir le travail  $W_{\text{fourni}}$ . La machine effectue sur un corps le travail  $W_{\text{utile}}$  qui est en pratique inférieur au travail fourni. En général, la partie du travail fourni transformé par un système en travail utile est donnée par le rendement du système.

Le rendement  $\eta$  d'un système est égal au rapport du travail utile  $W_{\text{utile}}$  effectué par ce système et du travail  $W_{\text{fourni}}$  nécessaire à son fonctionnement :

$$\eta = \frac{W_{\text{utile}}}{W_{\text{fourni}}} \quad (1.51)$$

Le rendement est un nombre sans unité exprimé le plus souvent en %.

### 1.7. La puissance

La puissance correspond à l'énergie échangée (reçue ou donnée) pendant une seconde.

La puissance mécanique d'une force est l'énergie que l'on peut acquérir ou perdre avec cette force sur un temps donné.

En physique, la **puissance** reflète la vitesse à laquelle un travail est fourni. C'est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. C'est donc une grandeur scalaire. La puissance correspond donc à un débit d'énergie : si deux systèmes de puissances différentes fournissent le même travail (la même énergie), le plus puissant des deux est celui qui est le plus rapide.

Dans le système international d'unités, une puissance s'exprime en watts, en joules par seconde, ou en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ . Une unité ancienne était le cheval-vapeur, où la capacité de traction d'une machine à vapeur était comparée à celle d'un cheval de trait.

La puissance  $P$  d'une force est le quotient du travail  $W$  effectué par cette force par le temps  $t$  nécessaire :  $P = \frac{W}{t}$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\int \vec{F} \cdot d\vec{l}}{t} = \frac{\int m \cdot \vec{\gamma} \cdot d\vec{l}}{t} \quad (1.52)$$

Pour un mouvement vertical montant ou  $\gamma=g$  et la distance verticale parcourue  $L=H$ , la puissance peut s'écrire :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\int \vec{F} \cdot d\vec{l}}{t} = \frac{\int m \cdot \vec{\gamma} \cdot d\vec{l}}{t} = \frac{m \cdot g \cdot H}{t} = \frac{\rho \cdot V_{\text{volume}} \cdot g \cdot H}{t} = \rho \cdot g \cdot \frac{V_{\text{volume}}}{t} \cdot H = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H \quad (1.53)$$

L'unité de puissance est le watt (W) :  $1W = 1 J/s$ .

La puissance représente le travail que peut effectuer une force par unité de temps. Lorsqu'un travail de 1 J est réalisé en 1 s, la puissance est 1W.

Le rendement d'un système fonctionnant en régime continu est le plus souvent exprimé en fonction des puissances fournies et utiles. À partir de :

$$\eta = \frac{W_{\text{utile}}}{W_{\text{fourni}}} = \frac{W_{\text{utile}}/t}{W_{\text{fourni}}/t} \quad (1.54)$$

On obtient :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}} \quad (1.55)$$

### 1.8. L'énergie consommée

L'énergie consommée en électricité est le produit scalaire de la puissance par le temps.

$$E = P \cdot t \quad (1.56)$$

Son unité est le watt heure (Wh).

### 1.9. Le vecteur déplacement

Le vecteur déplacement d'un corps le long d'un parcours curviligne peut s'exprimer en fonction du rayon de la courbure et de l'angle que fait le corps lors de son déplacement d'une position à une autre par l'expression :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{r} \cdot d\theta \quad (1.57)$$

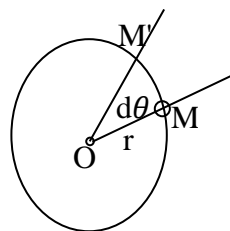


Fig.1.16 : Schéma d'un vecteur déplacement en mouvement rotationnel

En un temps  $dt$  le corps passe du point M au point M', parcourant une distance  $dx$ , sous l'action d'un vecteur vitesse  $\vec{V}$ .

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{\vec{r} \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow V = \|\vec{V}\| = \frac{\|\vec{r}\| \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow V = \frac{r \cdot d\theta}{dt} \quad (1.58)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V} \Rightarrow d\vec{x} = \vec{V}dt \Rightarrow \|d\vec{x}\| = \|\vec{V}\|dt \Rightarrow \int dx = V \int dt \Rightarrow X = V \cdot t$$

$$\|\vec{V}\| = \frac{\|\vec{r}\| \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow r \cdot d\theta = Vdt \Rightarrow d\theta = \frac{V}{r} dt$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{t_1}^{t_2} \frac{V}{r} dt \Rightarrow (\theta_2 - \theta_1) = \frac{V}{r} (t_2 - t_1)$$

Posons  $\theta = (\theta_2 - \theta_1)$  et  $t = (t_2 - t_1)$  on obtient :

$$\theta = \frac{V}{r} t \quad (1.59)$$

### 1.10. Vitesse de rotation

Lors de son mouvement circulaire et en laps de temps,  $dt$ , le corps de masse,  $m$ , fait un angle  $d\theta$  avec sa position initiale.

La variation de l'angle  $d\theta$  par rapport au temps  $dt$  donne la vitesse de rotation.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.60)$$

Lorsque le corps fait un angle  $\theta$  à partir de son état initial durant un temps  $dt$  et si la vitesse de rotation du corps est constante au cours du temps ( $\omega = \text{constante}$ ), on peut obtenir l'angle de rotation en intégrant l'expression précédente :

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt \Rightarrow (\theta_2 - \theta_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

Posons  $\theta = (\theta_2 - \theta_1)$  et  $t = (t_2 - t_1)$  on obtient la formule la plus simple:

$$\theta = \omega t \quad (1.61)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{V}{r} t = \omega t \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$$

La vitesse angulaire de rotation c'est le rapport entre la vitesse linéaire, de déplacement d'un corps, et le rayon de courbure du parcours. Elle est également calculée en fonction du nombre de tours à la seconde par la relation suivante :

$$\omega = 2\pi n \quad (1.62)$$

### 1.11. Accélération

L'accélération est définie comme étant la dérivée première de la vitesse ou la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2 \overline{MM'}}{dt^2} \quad (1.63)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1.63')$$

#### 1.11.1. L'accélération tangentielle

L'accélération tangentielle,  $\vec{\gamma}_T$ , est la dérivée première du module de la vitesse par rapport au temps. Posons  $V = \|\vec{V}\|$

$$\vec{\gamma}_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad (1.64)$$

$$\frac{dV^2}{dt} = 2V \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2V} \frac{dV^2}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_T = \frac{1}{2V} \frac{dV^2}{dt} \quad (1.64')$$

#### 1.11.2. L'accélération normale

Le vecteur accélération normale  $\vec{\gamma}_N$  est défini comme étant la différence entre l'accélération et l'accélération tangentielle.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N \Rightarrow \vec{\gamma}_N = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_T \quad (1.65)$$

Pour un mouvement circulaire à vitesse constante ( $V=\text{constante}$ ) l'accélération tangentielle est nulle ( $\vec{\gamma}_T = \vec{0}$ ) d'où l'accélération normale est égale à l'accélération totale.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \quad (1.66)$$

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \quad (1.67)$$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, on cherche les composantes du point M c'est-à-dire les composantes du vecteur position  $\overline{OM}$  en fonction de la vitesse de rotation  $\omega$ .

$$x(t) = r \cdot \cos(\theta) = r \cdot \cos(\omega t) \quad (1.67')$$

$$y(t) = r \cdot \sin(\theta) = r \cdot \sin(\omega t) \quad (1.67'')$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad (1.68)$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \quad (1.68')$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (1.68'')$$

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t))^2 + (r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t))^2} = \omega \cdot r$$

$$\vec{\gamma}_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} \quad (1.67)$$

$$\gamma_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \quad (1.69')$$

$$\gamma_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (1.69'')$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \sqrt{(-r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t))^2 + (-r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t))^2}$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = r \cdot \omega^2$$

$$\omega = \frac{V}{r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{V^2}{r^2} \quad (1.70)$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \|\vec{\gamma}_N\| = r \cdot \frac{V^2}{r^2} = \frac{V^2}{r} \Rightarrow \gamma_N = \frac{V^2}{r} \quad (1.71)$$

L'accélération d'un corps, tournant autour d'un axe O à une vitesse constante a un module constant et sa direction est dirigée vers le centre O.

### 1.12. Dérivée particulière

Soit  $\emptyset(x,y,z,t)$  l'expression d'une grandeur physique (vitesse par exemple) en fonction des variables d'Euler, si on fixe les variables spatiales  $x,y,z$  et on suit les variations de  $\emptyset$  en fonction du temps  $t$  en un point géométrique déterminé durant le mouvement de la particule P, les coordonnées  $x,y$ , et  $z$  deviennent des fonctions du temps, on a souvent à évaluer la dérivée par rapport au temps de  $\emptyset$ , quand  $\emptyset$  est considérée attachée à P, la dérivation s'effectuera durant le mouvement de P on appelle cette dérivée. Dérivée particulière (matérielle ou totale).

$$\frac{D\emptyset}{Dt} = \frac{d\emptyset}{dt} = \emptyset \cdot \quad (1.72)$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (1.72')$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + u_z \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad (1.72'')$$

Où  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$  : la dérivée locale (partielle)

$$\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = u_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + u_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.72''')$$

La dérivée convective.

Exemple : les composantes de l'accélération en un point P sont :

$$\gamma_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Où  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  : L'accélération locale et  $\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  est l'accélération convective : c'est le taux de variation de la vitesse dû au déplacement.

### 1.13. Les équations de bases en mécanique des fluides

#### 1.13.1. Equation de continuité d'un fluide compressible

Soient les composantes de la vitesse dans les directions x, y et z respectivement u, v et w. considérons l'écoulement à travers un parallélépipède dont les dimensions sont dx, dy et dz. La masse de fluide traversant une face quelconque de ce volume par unité temps (débit massique) est égale au produit de la masse spécifique du fluide par la surface de la section droite de la face, par la composante de la vitesse normale à la face, soit dans la direction x,  $Q_{ex} = \rho u(dydz)$ .

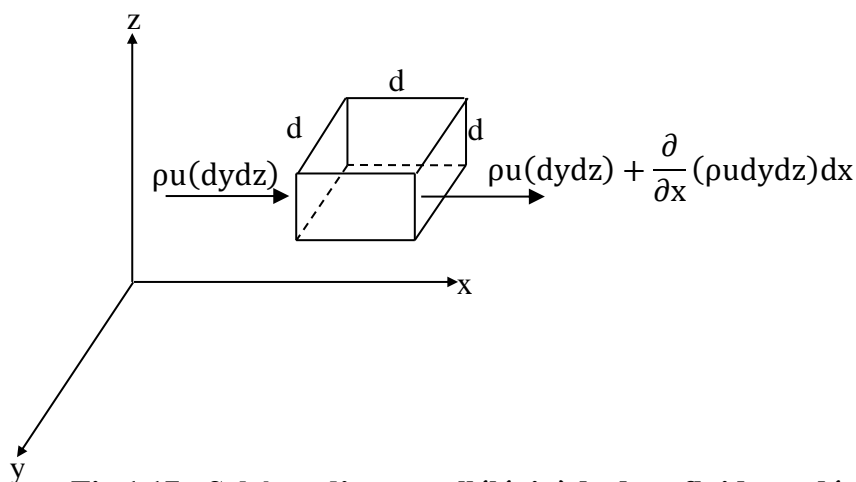


Fig.1.17 : Schéma d'un parallélépipède dans fluide en déplacement

Le débit massique entrant à travers la première face dans la direction x est :  $\rho u(dydz)$

Le débit massique sortant à travers la deuxième face, après qu'il parcouru une dimension  $dx$ , dans la direction  $x$  est :  $Q_{sx} = \rho u(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dydz)dx$

La variation du débit massique dans la direction  $x$ , est égale à la différence entre les débits massiques entrant et sortant.

$$Q_{ex} - Q_{sx} = \rho u(dydz) - \left( \rho u(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dydz)dx \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u dydz)dx$$

On obtient par la même méthodologie la variation de la masse dans la direction  $y$  et  $z$

Dans la direction  $y$

$$Q_{ey} - Q_{sy} = \rho v(dxdz) - \left( \rho v(dxdz) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dxdz)dy \right) = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v dxdz)dy$$

Dans la direction  $z$

$$Q_{ez} - Q_{sz} = \rho w(dxdy) - \left( \rho w(dxdy) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dxdy)dz \right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w dxdy)dz$$

La variation totale du débit massique entre l'entrée et la sortie est égale à la somme des trois variations des débits massiques.

$$Q_e - Q_s = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u dydz)dx - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dxdz)dy - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dxdy)dz$$

$$Q_e - Q_s = -\left( \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) dx dy dz$$

Le taux de variation par rapport au temps de la masse à l'intérieur du parallélépipède est

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz) \text{ ou } \frac{\partial \rho}{\partial t}(dx dy dz)$$

Où  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  est le taux de variation de la densité à l'intérieur du parallélépipède par rapport au temps.

La variation totale des débits massiques dans les trois directions est identique au taux de variation de la densité par rapport au temps.

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t}(dx dy dz)$$

L'équation de continuité pour l'écoulement non permanent à trois dimensions, d'un fluide incompressible est :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.73)$$

Pour l'écoulement permanent, les propriétés du fluide ne varient pas avec le temps, soit  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , et l'équation de continuité prend l'expression :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = 0 \quad (1.73')$$

Pour l'écoulement permanent isovolume ( $\rho = \text{constante}$ ) l'équation de continuité à trois dimensions s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad (1.73'')$$

Au cas, où  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , l'écoulement permanent est à deux directions et l'équation de continuité devient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.73''')$$

Au cas, où  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , l'écoulement permanent est à une direction et l'équation de continuité prend l'expression :  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Cette dernière expression représente l'écoulement uniforme.

### 1.13.1.1. Cas de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans une conduite à section transversale variable (unidimensionnel)

Pour un écoulement non permanent d'un fluide compressible, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

$Q_e - Q_s = 0$  ce qui conduit à écrire :

Lorsque l'écoulement est permanent  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ce qui ramène l'équation de continuité à

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.74)$$

Lorsque le fluide est incompressible ou bien isovolume ( $\rho = \text{constante}$ ) l'équation de la continuité devient :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad (1.75)$$

Le débit volumique est conservé entre l'entrée et la sortie et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_e = Q_s$$

Pour une conduite composée de n tronçons installés en série et de diamètres différents l'équation de continuité s'écrit :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = \dots Q_n$$

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 = V_3 S_3 = V_4 S_4 = V_5 S_5 = \dots V_n S_n \quad (1.76)$$

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, \dots, V_n$  se sont les vitesses moyennes dans la direction de l'écoulement.

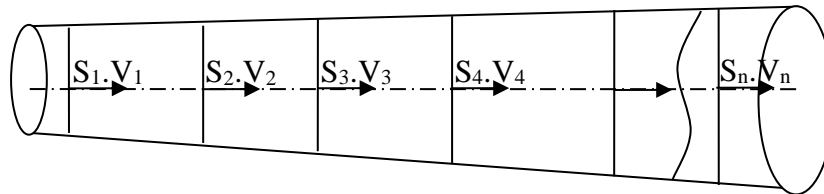


Fig.1.17 : Schéma d'un écoulement dans une conduite à section transversale variable

### 1.13.2 Equation d'énergie

#### 1.13.2.1 Notions sur l'énergie mécanique

##### a) Energie mécanique d'un corps solide

L'énergie mécanique est définie comme étant la somme de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

$$E_m = E_p + E_c \quad (1.77)$$

L'énergie potentielle d'un corps par rapport à un plan horizontal de référence est égale à son poids multiplié par la différence de niveau entre le centre de gravité du corps et le plan horizontal de référence qu'on l'appelle z.

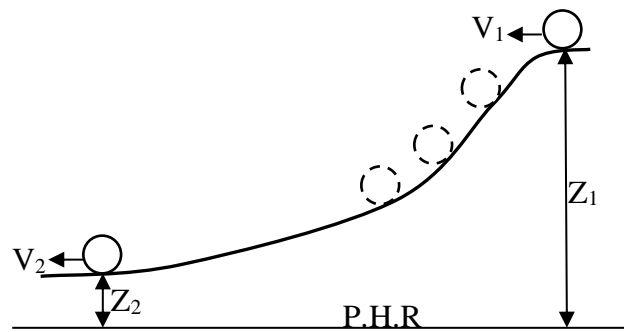
$$E_p = m \cdot g \cdot z \quad (1.78)$$

Où m est la masse du corps en kg et g est l'accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ).

L'énergie cinétique d'un corps est définie comme la masse de ce dernier multipliée par la moitié du carré de la vitesse moyenne de son déplacement.

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

$$E_m = m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} m V^2 \quad (1.79)$$



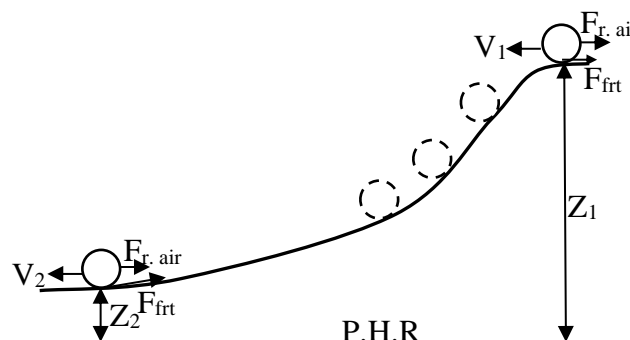
**Fig.1.18 : Schéma d'un corps solide en déplacement**

L'énergie mécanique est conservée lors du déplacement d'un corps d'un endroit à un autre lorsque la différence entre les deux énergies mécaniques est nulle, c'est-à-dire  $\Delta E_m = E_{m1} - E_{m2} = 0$ .

$$\Delta E_m = E_{m1} - E_{m2} = \left( m \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} m V_1^2 \right) - \left( m \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} m V_2^2 \right) = 0 \quad (1.80)$$

Dans le cas contraire, l'énergie mécanique est considérée non conservée et on assiste à des pertes d'énergie. Ces pertes sont dues aux forces de frottement et à la force de résistance de l'air.

$$\Delta E_m = E_{m1} - E_{m2} \neq 0$$



**Fig.1.19 : Forces agissantes sur un corps solide en déplacement**

**b) Energie d'un fluide**

Lors du déplacement d'un fluide, une autre énergie peut entrer en jeu, il s'agit de l'énergie de pression. L'énergie totale devient :

$$E_t = E_p + E_{pression} + E_c = m \cdot g \cdot z + p_{abs} \cdot V_{vol} + \frac{1}{2} m V^2 \quad (1.81)$$

Pour transformer l'énergie en colonne de fluide (m.c.f) on divise l'énergie par le poids.

$$\text{Poids} = m \cdot g = \rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g \quad (1.82)$$

Avec  $V_{\text{vol}}$  est le volume du liquide agissant sur la surface de la section transversale.

$\rho$  : la masse spécifique du fluide ( $\text{kg/m}^3$ )

L'unité de l'énergie est le joule ( $\text{N}\cdot\text{m}=\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$ ) et celle du poids est ( $\text{N}=\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ )

L'énergie totale en un point d'une section transversale traversée par un fluide peut s'écrire sous la forme suivante:

$$H = \frac{E_t}{\rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g} = \frac{E_p + E_{\text{pression}} + E_c}{\rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g} = \frac{m \cdot g \cdot z + p_{\text{abs}} \cdot V_{\text{vol}} + \frac{1}{2} m V^2}{\rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g}$$

$$H = \frac{\rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g \cdot z + p_{\text{abs}} \cdot V_{\text{vol}} + \frac{1}{2} \rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot V^2}{\rho \cdot V_{\text{vol}} \cdot g}$$

$$H = z + \frac{p_{\text{abs}}}{\rho \cdot g} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \quad (1.83)$$

Où  $z$  est la différence de niveau entre le point choisi et le plan horizontal de référence ;

$p_{\text{abs}}$  : la pression absolue en ce point ;

$V$  : la vitesse d'écoulement en ce point ;

$H$  : s'appelle la charge hydraulique totale en ce point.

Lors du déplacement d'un fluide réel dans une conduite, entre deux sections 1 et 2, des pertes d'énergie par frottement peuvent apparaître.

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

La différence entre la charge hydraulique à la première section 1,  $H_1$  et celle à la section 2,  $H_2$ , donne la perte de charge linéaire entre les deux sections.

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \right) \quad (1.84)$$

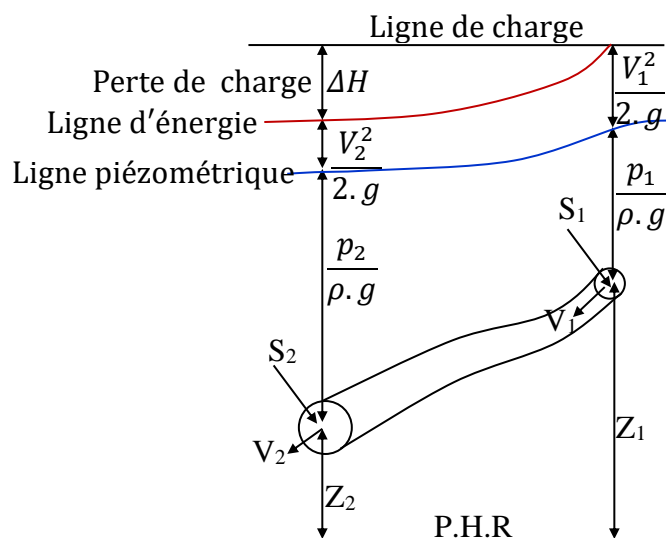


Fig.1.20 : Energie totale d'un fluide en déplacement

La perte de charge linéaire est estimée théoriquement, et pour la première fois, par la formule de Weisbach donnée par la relation :

$$\Delta H = \frac{\xi L}{R_H} \frac{V^2}{2g} \quad (1.85)$$

Alors que Darcy, et pour les conduites à section transversale circulaire a donné la relation :

$$\Delta H = \frac{\lambda L}{d} \frac{V^2}{2g} \quad (1.85')$$

Cette dernière relation prend le nom de Darcy Weisbach

Où  $\lambda$  s'appelle le coefficient de Darcy ou de frottement.

### 1.14. Distribution transversale de la vitesse dans une conduite en charge

La répartition de la vitesse dans une conduite en charge (sous pression) dépend du régime d'écoulement du fluide s'écoulant dans cette dernière. Ce qui donne l'impression que l'expression de la vitesse ponctuelle est étroitement liée au régime d'écoulement qui règne à l'intérieure de la conduite. Devant cette situation l'étude de la répartition ponctuelle de la vitesse régime par régime s'avère un pas en amont pour bien déterminer leurs vraies relations. Les écoulements des fluides dans les conduites en charge engendrent deux régimes d'écoulement à savoir : le laminaire et le turbulent.

#### 1.14.1. Régime laminaire

Le régime laminaire est très important dans l'industrie, par contre dans l'hydraulique on ne le retrouve jamais. Le régime laminaire est établi pour des nombres de Reynolds inférieurs à 2320 en pratique il prend 2300.

##### a) Loi de la vitesse ponctuelle en régime laminaire

Pour avoir une idée sur la répartition ponctuelle de la vitesse en régime laminaire, nous allons dessiner un schéma représentatif d'un corps libre dans une conduite en ce régime. Nous allons représenter, par la suite, toutes les forces possibles agissantes sur ce corps fluide en écoulement permanent. Ces forces sont représentées par le poids du corps fluide, les forces de pression hydrostatique et les forces de frottement dues à la résistance visqueuse.

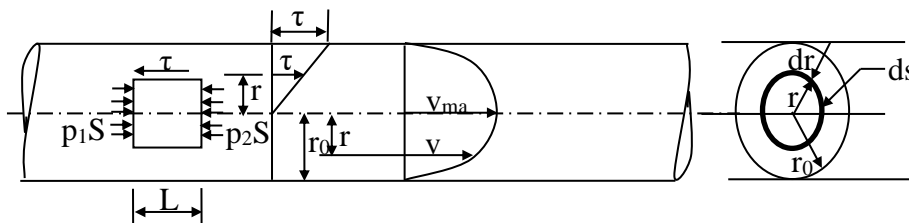


Fig.1.21 : Schéma représentatif des différentes forces agissantes sur un élément de fluide

En écoulement permanent, chaque particule du corps fluide se déplace vers la droite perpendiculaire à la direction de l'écoulement sans accélération puisque  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ , ce qui permet d'écrire  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ . La projection dans le sens du mouvement de toutes les forces donne :

$$p_1(\pi r^2) - p_2(\pi r^2) - \tau(2\pi r L) = 0$$

$$\rho g H_1 (\pi r^2) - \rho g H_2 (\pi r^2) - \tau (2\pi r L) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\rho g r (H_1 - H_2)}{2L}$$

$$\Delta H = H_1 - H_2 \Rightarrow \tau = \frac{\rho g r \Delta H}{2L} \quad (1.86)$$

Pour l'écoulement laminaire, la contrainte tangentielle visqueuse est donnée par l'expression :

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \quad (1.87)$$

Égalant les deux relations de la contrainte tangentielle, nous aurons :

$$-\mu \frac{dv}{dr} = \frac{\rho g r \Delta H}{2L} \Rightarrow -dv = \frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} r dr \Rightarrow -\int dv = \frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} \int_0^r r dr$$

$$-v = \frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} \frac{r^2}{2} + c$$

$$\text{Si } r = r_0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow c = -\frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} \frac{r_0^2}{2}$$

$$-v = \frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} \frac{r^2}{2} - \frac{\rho g \Delta H}{2\mu L} \frac{r_0^2}{2} \Rightarrow v = \frac{\rho g \Delta H}{4\mu L} (r_0^2 - r^2) \quad (1.88)$$

La vitesse est maximale :

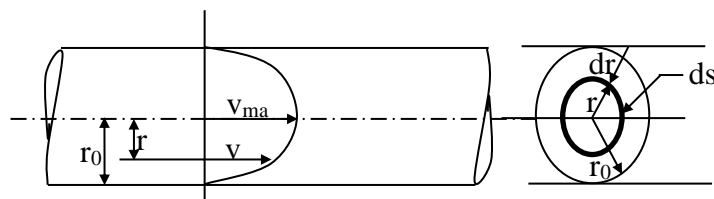
$$\text{si } r = 0 \Rightarrow v_{\max} = \frac{\rho g \Delta H}{4\mu L} r_0^2$$

On peut écrire, l'expression, de la vitesse ponctuelle sous la forme suivante :

$$v = v_{\max} (r_0^2 - r^2) / r_0^2 \quad (1.89)$$

### b) Formule de la vitesse moyenne en régime laminaire

En régime permanent, Prenons une conduite à section transversale circulaire de rayon  $r_0$ , comme il est indiqué dans la figure 00.



**Fig. 1.22 : Distribution de la vitesse dans une conduite circulaire en régime laminaire**

La vitesse moyenne est donnée par l'expression tirée de l'équation de continuité,

$$V_m = \frac{Q}{S} = \frac{\int_0^{r_0} v \cdot ds}{S}$$

$$ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$S = \pi \cdot r_0^2$$

$$V_m = \frac{Q}{S} = \frac{\int_0^{r_0} v \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\pi \cdot r_0^2} = \frac{\int_0^{r_0} \frac{v_{max}}{r_0^2} (r_0^2 - r^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\pi \cdot r_0^2}$$

$$V_m = \frac{\int_0^{r_0} 2 \cdot v_{max} \cdot (r_0^2 \cdot r - r^3) \cdot dr}{r_0^4} = \frac{2 \cdot v_{max}}{r_0^4} \int_0^{r_0} (r_0^2 \cdot r - r^3) \cdot dr$$

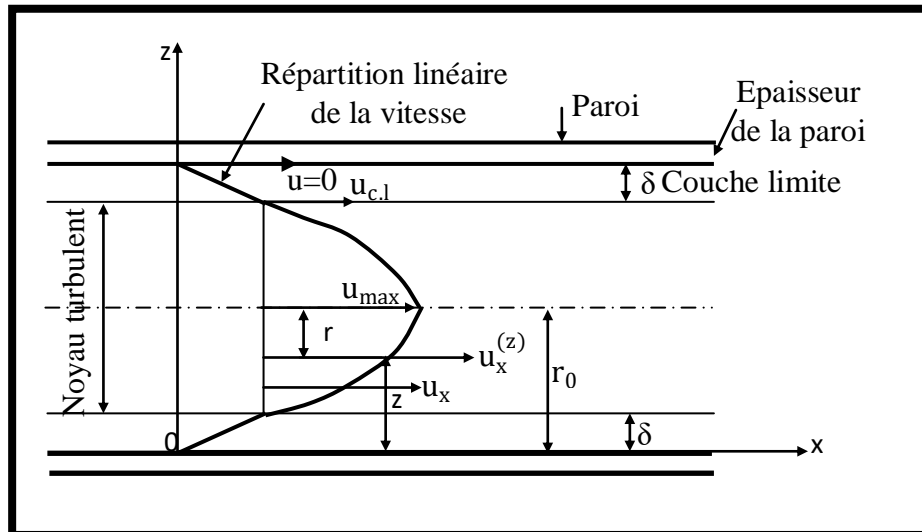
$$V_m = \frac{2 \cdot v_{max}}{r_0^4} \left[ \left( r_0^2 \cdot \frac{r^2}{2} \right) - \left( \frac{r^4}{4} \right) \right]_0^{r_0} = \frac{2 \cdot v_{max}}{r_0^4} \left[ \left( \frac{r_0^4}{2} \right) - \left( \frac{r_0^4}{4} \right) \right]$$

$$V_m = \frac{2 \cdot v_{max}}{r_0^4} \left[ \left( \frac{r_0^4}{4} \right) \right] = V_m = \frac{v_{max}}{2} \quad (1.90)$$

**1.14.2. Régime turbulent**

Le régime turbulent est établi pour des nombres de Reynolds supérieurs à 4000. La grandeur de ce nombre adimensionnel génère le phénomène de turbulence à l'intérieur de la conduite ce qui compromet la répartition parabolique de la vitesse ponctuelle établi en régime laminaire. La forme de la nouvelle distribution de la vitesse ponctuelle de la paroi jusqu'au milieu de la conduite peut être représentée par le schéma 1.23.

Les vitesses aux parois sont nulles et augmentent vers le centre. Au niveau de la couche laminaire ou la couche limite le régime est laminaire et par conséquent la répartition de la vitesse est parabolique.



**Fig.1.23 : Répartition de la vitesse dans une conduite circulaire en régime turbulent**

**a) Loi de la vitesse ponctuelle en régime turbulent**

D'après la loi de Newton :

$$\bar{\tau} = f\left(\frac{d\bar{u}_x}{dz}\right) \quad (1.91)$$

$$\bar{u}_x = f(z) \quad (1.92)$$

En régime turbulent  $\bar{\tau} = \rho \overline{u'_x u'_z}$  (1.91) avec  $u'_x$  et  $u'_z$  dépendent du gradient des vitesses  $\frac{d\bar{u}_x}{dz}$ . On suppose comme hypothèse que :

$$u'_x = K_1 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \quad (1.94)$$

Et

$$u'_z = K_2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \quad (1.95)$$

$$\bar{\tau} = \rho K_1 K_2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2 \quad (1.96)$$

$$K_1 K_2 = l^2 \text{ (dimension linéaire)}$$

$$\bar{\tau} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2 \quad (1.97)$$

Cette dernière expression s'appelle formule de Prandtl.

La dimension linéaire  $l$  s'appelle la longueur de mélange qui est la distance parcourue par une particule de vitesse initiale  $u_x$  pour acquérir une vitesse  $u_x^{(z)}$ .

La tension tangentielle calculée par la formule de Prandtl ne dépend pas de la viscosité mais dans les conditions réelles pour une distribution uniforme de la vitesse dans une section transversale il y a apparition de la tension tangentielle visqueuse comme dans le cas du mouvement laminaire et enfin de compte la tension tangentielle s'écrit :

$$\bar{\tau} = \tau_{\text{viscosité}} + \tau_{\text{turbulence}} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dz} + \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2$$

$$\bar{\tau} = \left( \mu + \rho l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \frac{d\bar{u}_x}{dz} \quad (1.98)$$

$$\mu' = \left( \mu + \rho l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \quad (1.99)$$

$$\mu : \mu_{\text{viscosité}} \text{ et } \rho l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dz} : \tau_{\text{turbulence}}$$

Avec  $\mu'$  s'appelle la viscosité de l'écoulement turbulent.

$$\bar{\tau} = (\tau_{\text{viscosité}} + \tau_{\text{turbulence}}) \frac{d\bar{u}_x}{dz}$$

Cette dernière expression s'appelle la formule de Boussinesque donnée en 1870.

Dans la zone noyau  $Re \gg Re_{cr}$  ainsi que  $\mu_{\text{turbulence}} \gg \mu_{\text{viscosité}}$  par contre dans la couche laminaire  $\mu_{\text{viscosité}} \gg \mu_{\text{turbulence}}$

Dans le noyau  $\mu_{\text{viscosité}}$  est négligeable alors :

$$\bar{\tau} = \mu_{\text{turbulence}} \frac{d\bar{u}_x}{dz}$$

Si  $Re \gg Re_{cr}$  la viscosité dynamique  $\mu_{\text{visqueuse}} = 0$

$$\bar{\tau} = \mu_{\text{turbulence}} \frac{d\bar{u}_x}{dz} = \rho l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dz} \frac{d\bar{u}_x}{dz} \Rightarrow d\bar{u}_x = \sqrt{\frac{\bar{\tau}}{\rho l}} dz$$

$$\bar{\tau} = \tau_0 \text{ initiale et } l = \kappa \cdot z \text{ où } \kappa : \text{ une constante universelle}$$

$$\tau_0 = \rho g R_H l$$

Nikuradsé pose ( $\kappa$ )  $\kappa=0,4$

$$d\bar{u}_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\kappa z} dz$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\kappa} = \text{constante } \bar{u}_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\kappa} \ln(z) + C$$

$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  ( $\frac{m}{s}$ ) la vitesse de frottement,  $u_f$ , ou la vitesse dynamique

$$u_f = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho g R_H I}{\rho}} = \sqrt{g R_H I} \quad (1.100)$$

$$\bar{u}_x = \frac{u_f}{\kappa} \ln(z) + C$$

Pour  $z = r_0 \Rightarrow \bar{u}_x = u_{\max} \Rightarrow u_{\max} = \frac{u_f}{\kappa} \ln(r_0) + C \Rightarrow C = u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln(r_0)$

alors  $\bar{u}_x = \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{r_0}\right) + u_{\max} \Rightarrow \bar{u}_x = u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{r_0}{z}\right)$

$$\bar{u}_x = u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{r_0}{z}\right) \quad (1.101)$$

Cette relation est valable pour  $\delta \leq z \leq r_0$

Dans la couche limite  $\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dz} = \rho \nu \frac{d\bar{u}_x}{dz} \Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}_x}{dz} = u_f^2$

$$\frac{d\bar{u}_x}{dz} = \frac{U_{C.L} - 0}{\delta} \Rightarrow u_f^2 = \nu \frac{U_{C.L}}{\delta} \Rightarrow \frac{u_f \delta}{\nu} = \frac{U_{C.L}}{u_f} \quad (1.102)$$

$$\frac{u_f \delta}{\nu} = N = 11,6 \text{ coefficient expérimental}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{11,6\nu}{u_f} = \frac{11,6\nu}{\sqrt{g R_H I}}$$

$$\frac{U_{C.L}}{u_f} = 11,6$$

$\delta$  diminue avec l'augmentation de la pente hydraulique et puisque le nombre de Reynolds dans ce cas augmente on peut dire que  $\delta$  diminue avec l'augmentation de  $Re$ .

### b) Calcul du débit en régime turbulent

Le calcul du débit en régime turbulent est basé sur l'intégration de surface de l'expression de la vitesse ponctuelle à la surface élémentaire d'un élément fluide entraîné par cette vitesse.

$$Q = \int_s \bar{u}_x ds$$

$$\bar{u}_x = u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{r_0}{z}\right) = u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{r_0}{r_0 - r}\right) \quad ds = 2\pi r dr$$

$$Q = \int_s \bar{u}_x ds = \int_0^{r_0} \left[ u_{\max} - \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{r_0}{r_0 - r}\right) \right] 2\pi r dr = \left[ u_{\max} - \frac{3u_f}{2\kappa} \right] \pi r_0^2$$

$$Q = \left[ u_{\max} - \frac{3u_f}{2\kappa} \right] \pi r_0^2 \quad (1.103)$$



## c) Calcul de la vitesse moyenne en régime turbulent

La vitesse moyenne en régime turbulent est déduite de l'équation de continuité  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$  et par conséquent  $Q_e - Q_s = 0$  ce qui permet d'écrire  $Q = V \cdot S$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{\left[ u_{\max} - \frac{3}{2} \frac{u_f}{\kappa} \right] \pi r_0^2}{\pi r_0^2} = \left[ u_{\max} - \frac{3}{2} \frac{u_f}{\kappa} \right]$$

$$V = \left[ u_{\max} - \frac{3}{2} \frac{u_f}{\kappa} \right] \quad (1.104)$$

On pose

$$\frac{3}{2\kappa} = D$$

$$V = u_{\max} - D u_f \Rightarrow D = \frac{u_{\max} - V}{u_f}$$

D : s'appelle la vitesse déficitaire.

Si on prend  $\kappa=0,4$  de Nikuradzé on obtient :  $D = \frac{3}{2 \cdot 0,4} \approx 3,75$

Plusieurs expériences ont montré que  $\kappa$  est compris entre  $0,3 \div 0,45$  et D est compris entre  $3,3 \div 4$ .

## 1.15. Formule de calcul du coefficient de Coriolis

L'énergie cinétique vraie d'une particule est  $\frac{1}{2} dM v^2$ , et par conséquent l'énergie cinétique totale du fluide circulant est :

$$E_C = \frac{1}{2} \int dM v^2 = \frac{1}{2} \int \rho(dQ) v^2$$

$$dQ = v \cdot ds$$

$$E_C = \frac{\rho}{2} \int v \cdot ds \cdot v^2 = \frac{\rho}{2} \int v^3 ds$$

L'énergie cinétique calculée au moyen de la vitesse moyenne en une section droite est  $\frac{1}{2} M V_m^2$

$$M = \rho \cdot Q$$

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \cdot Q \cdot V_m^2$$

$$Q = V_m \cdot S$$

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \cdot V_m \cdot S \cdot V_m^2 = \frac{\rho}{2} \cdot S \cdot V_m^3$$

Appliquant le coefficient de correction  $\alpha$  à cette énergie et égalant à celle vraie, nous obtenons :

$$\alpha \cdot \frac{\rho}{2} \cdot s \cdot V_m^3 = \frac{\rho}{2} \int v^3 ds \Rightarrow \alpha = \frac{1}{s} \int \left( \frac{v}{V_m} \right)^3 ds \quad (1.105)$$

**a) Détermination du coefficient de Coriolis en régime laminaire**

Le coefficient de Coriolis  $\alpha$ , pour un écoulement laminaire, est donné par l'expression :

$$\alpha = \frac{1}{S} \int_0^{r_0} \left( \frac{v}{V_m} \right) ds = \frac{1}{\pi \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} \left( \frac{v_{\max} \cdot (r_0^2 - r^2) / r_0^2}{\frac{v_{\max}}{2}} \right)^3 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\alpha = \frac{16 \cdot \pi}{\pi \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} \left( \frac{(r_0^2 - r^2)}{r_0^2} \right)^3 \cdot r \cdot dr = \frac{16}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left( \frac{(r_0^2 - r^2)}{r_0^2} \right)^3 \cdot r \cdot dr$$

$$\alpha = \frac{16}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{(r_0^6 - 2r_0^4 r^2 + r_0^2 r^4 - r_0^4 r^2 + 2r_0^2 r^4 - r^6)}{r_0^6} r dr$$

$$\alpha = \frac{16}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{(r_0^6 - 3r_0^4 r^2 + 3r_0^2 r^4 - r^6)}{r_0^6} r dr$$

$$\alpha = \frac{16}{r_0^8} \int_0^{r_0} (r_0^6 r - 3r_0^4 r^3 + 3r_0^2 r^5 - r^7) dr$$

$$\alpha = \frac{16}{r_0^8} \left( r_0^6 \frac{r^2}{2} - \frac{3}{4} r_0^4 r^4 + \frac{3}{6} r_0^2 r^6 - \frac{r^8}{8} \right)_0^{r_0}$$

$$\alpha = \frac{16}{r_0^8} \left( \frac{r_0^8}{2} - \frac{3}{4} r_0^8 + \frac{3}{6} r_0^8 - \frac{r_0^8}{8} \right)$$

$$\alpha = \frac{16r_0^8}{r_0^8} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right) = 16 \left( \frac{1}{8} \right) = 2$$

Pour un écoulement laminaire  $\alpha=2$

**b) Coefficient de Coriolis en écoulement uniforme**

Pour un écoulement où la distribution de la vitesse est uniforme c'est-à-dire  $v=V_m$  le coefficient de Coriolis s'écrit :

$$\alpha = \frac{1}{s} \int ds = 1$$

**c) Coefficient de Coriolis en écoulement turbulent**

Pour un écoulement turbulent  $\alpha=1,02 \div 1,15$ .

Dans la plupart des calculs en hydraulique, on prend  $\alpha=1$ , sans que le résultat soit entaché d'une erreur grave, puisque la hauteur de la vitesse n'est en général qu'une petite fraction de la charge totale.

**1.16. Conclusion**

Tous les paramètres qu'on est en besoin, dans ce domaine, sont les résultats soit d'un produit scalaire ou vectoriel de deux ou trois vecteurs.

La bonne compréhension, des règles trigonométriques et leurs relations avec les paramètres physiques qu'on est en besoin dans les prochains chapitres, permet d'entamer aisément à divulguer en douceur les détails de ce module.

## **CHAPITRE II**

### **Equation fondamentale des machines hydrauliques**

## 2.1 Introduction

Nous examinerons dans ce chapitre l'écoulement d'un fluide dans une machine hydraulique mais avant de mettre en évidence l'équation générale d'une machine, le passage par la discrétisation des types de pompes s'avère d'une importance primordiale pour bien enchaîner, comprendre et détailler ce qui reste de ce travail. Nous consacrons la partie suivante aux composants, à la classification et au principe de fonctionnement des pompes à aubes et nous terminerons aux calculs des charges d'élévation théorique et analytique, du débit théorique délivré par la pompe ainsi que les démonstrations des différentes formes que peuvent prendre ces expressions et enfin nous allons jeter un aperçu sur le rôle des canaux de retour.

## 2.2 Définition d'une machine hydraulique (pompe)

Une pompe est un dispositif permettant d'aspirer et de refouler un fluide d'un endroit à un autre.

## 2.3 Les différents types de pompes

Il existe plusieurs types de pompes, elles sont classées selon le type de pompage (pompage d'eau souterraine ou de surface). Les plus universellement utilisées sont les pompes à aubes. En fonction de leur construction et de leur principe de fonctionnement on distingue les types suivants :

### 2.3.1 Pompes à aubes

Les pompes à aubes peuvent être subdivisées en trois types selon la disposition de l'axe par rapport au plan d'eau.

a) Les pompes à axe horizontal par rapport au plan d'eau comme les pompes axiales.

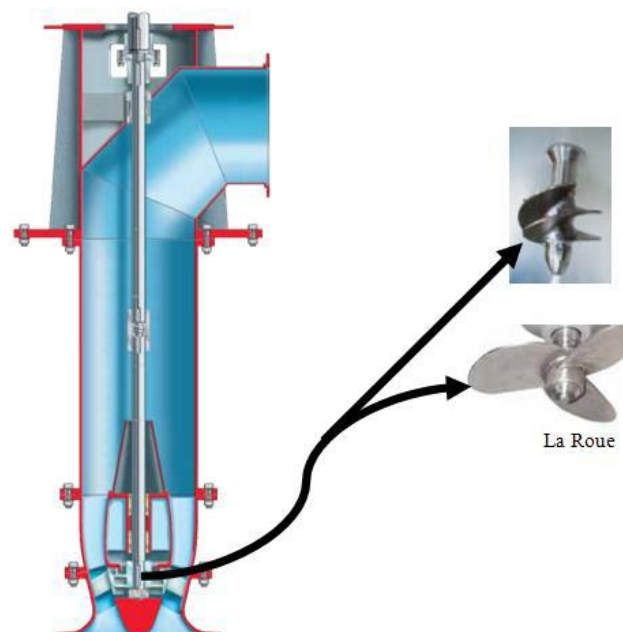


Fig.2.1 : Schéma descriptif d'une pompe axiale

b) Les pompes à axe vertical par rapport au plan d'eau comme celles centrifuges radiales.

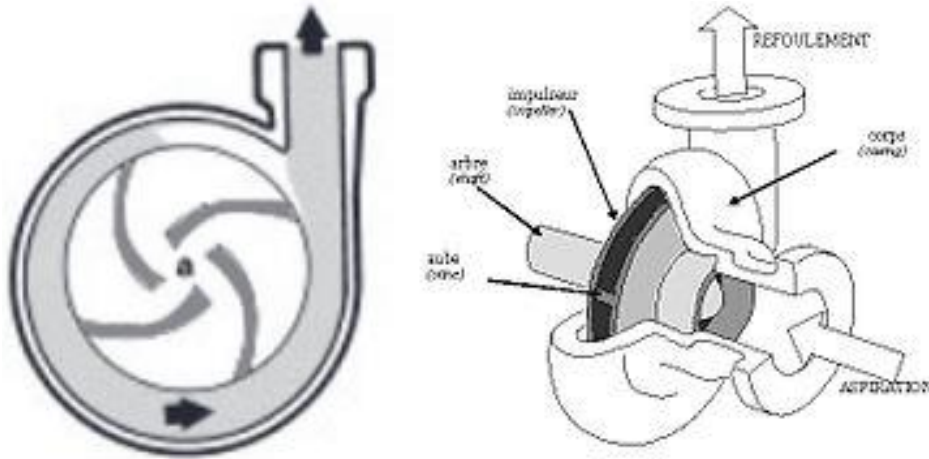


Fig. 2.2 : Coupe transversale d'une pompe centrifuge radiale

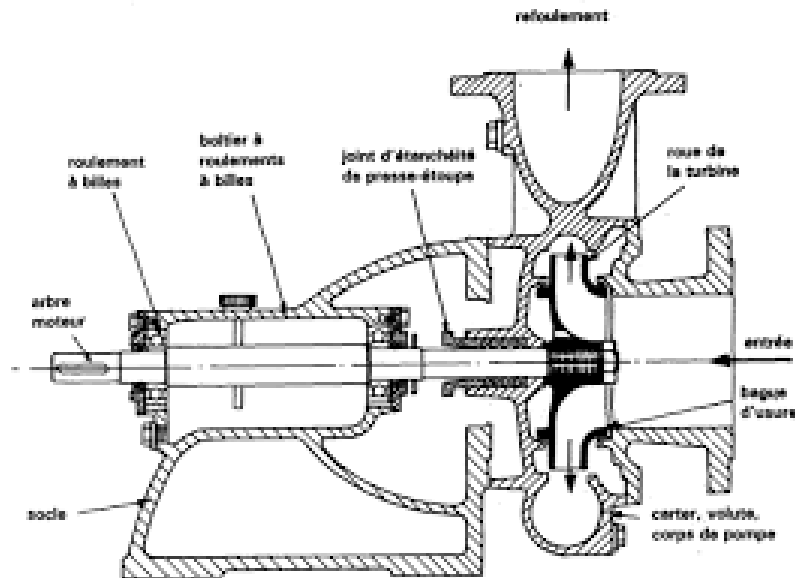


Fig. 2.3: Coupe longitudinale d'une pompe centrifuge radiale

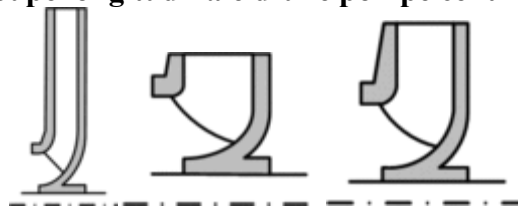


Fig. 2.4 : Coupe représentant les aubes d'une pompe centrifuge

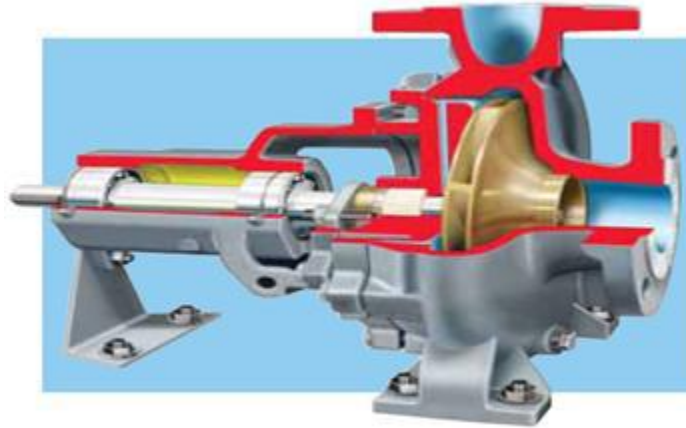


Fig.2.5 : Coupe longitudinale d'une pompe centrifuge

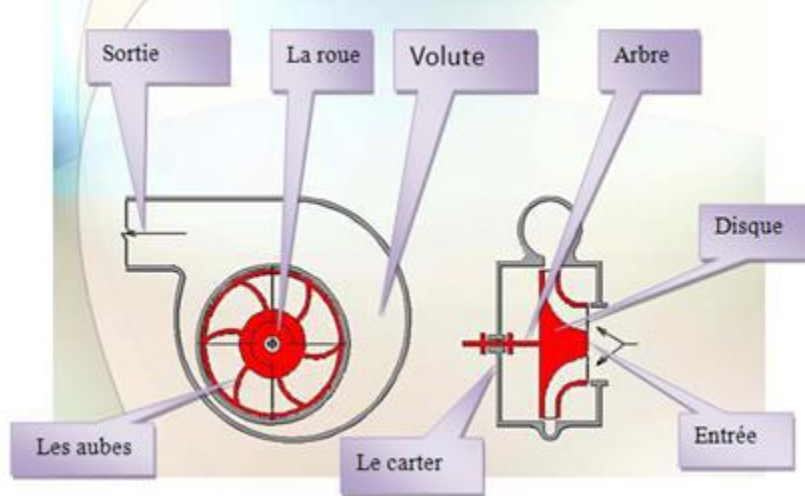


Fig.2.6: Représentation des composants d'une pompe centrifuge

c) Les pompes à axe oblique par rapport au plan d'eau comme celles semi axiales (hélicocentrifèdes).



Fig. 2.7 : Coupe des aubes d'une pompe semi axiale



Fig.2.7 : Coupe longitudinale d'une pompe semi- axiale

Le principe de fonctionnement de ces pompes est basé sur l'interaction de forces entre les aubes de la roue et le courant d'eau qu'il est contourne.

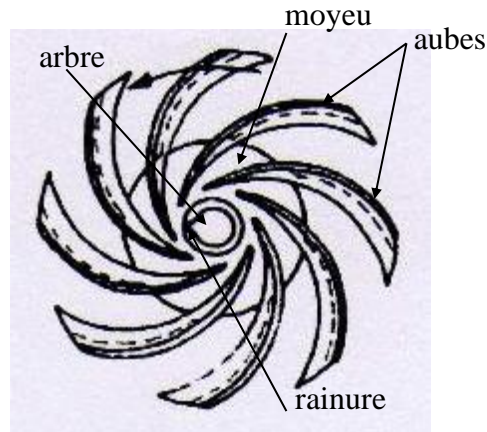
### 2.3.1.1. Composants des pompes à aubes

#### 1.3.1.1.1. Roue (dite aussi rotor)

Les roues des pompes à aubes sont les pièces maitresses qui déterminent leurs caractéristiques. En pratique hydrotechnique on peut avoir trois types de roues à aubes.

#### a) Roues ouvertes

On ne peut trouver ce type de roue que dans les pompes axiales. La figure 2.00 représente une roue ouverte.

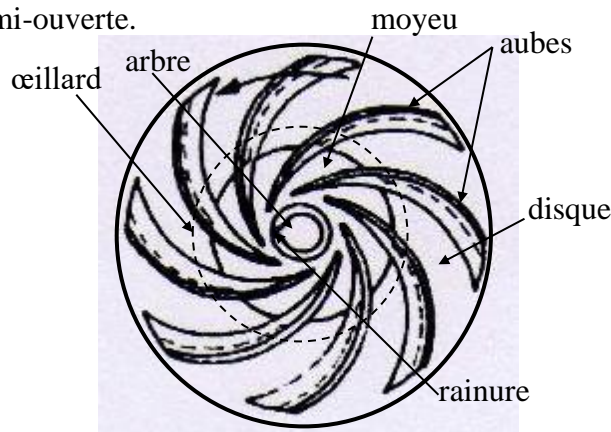


**Fig.2.8 : Roue ouverte**

Le rendement de ces roues est faible par rapport aux autres roues puisque elles permettent à des pertes par retour d'eau, mais elles sont moins couteuses.

#### b) Roues semi-ouvertes

Ce type de roues est trouvé généralement dans les pompes semi axiale axiales. La figure 2.00 représente une roue semi-ouverte.

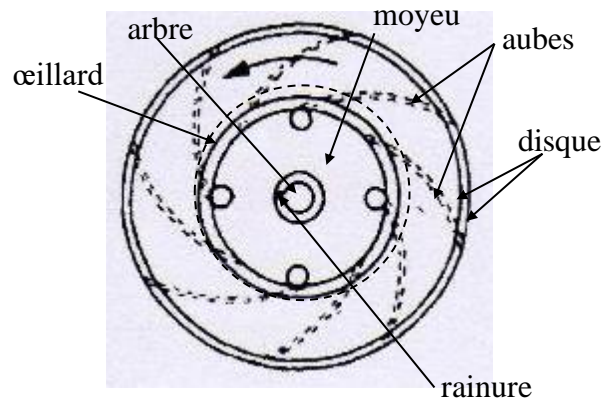


**Fig.2.9 : Roue semi-ouverte**



**c) Roues fermées**

Ce type de roues est utilisé aux pompes semi- axiale et centrifuges radiales.



**Fig.2.10 : Roue fermée**

Pour différencier la roue fermée d'une pompe semi axiale de celle centrifuge radiale, on mesure l'angle que font les aubages (aubes) à la sortie de la roue.

**2.3.1.1.2. Distributeur**

Le distributeur est une sorte de tubulure profilée qui sert à conduire les filets fluides, à l'entrée de la roue, avec une vitesse et une direction convenables. Généralement il est constitué d'un cône convergent permettant une meilleure disposition des filets fluides en améliorant le parallélisme et l'égalité des vitesses et il est précédé à l'amont par la conduite d'aspiration.

**2.3.1.1.3. Diffuseur (aube ou limaçon)**

Avec ou sans aubages, cet organe permet de transformer une partie de l'énergie cinétique due à la vitesse et d'orienter correctement le fluide à la sortie de la roue pour son entrée dans la volute ou dans le distributeur de l'étage suivant en cas d'une pompe multicellulaires.

**2.3.1.1.4. Volute (colimaçon)**

Une volute est un entonnoir incurvé qui augmente dans la taille permet le ramassage du liquide à la sortie de la roue et l'orientation vers la sortie. À mesure que sa taille augmente, elle contribue à transformer une partie de l'énergie cinétique en énergie de pression. [2]

Lorsque la volute ou colimaçon ne permettrait pas une transformation suffisante de l'énergie cinétique en énergie potentielle. On aura intérêt à prévoir entre la roue et la volute proprement dite un diffuseur à ailettes fixes, dont les espaces entre ailettes constituent des divergents élémentaires [4].

**2.3.1.1.5. Divergent à la sortie**

Le diffuseur est un cône divergent, il permet de transformer une fraction de l'énergie cinétique du fluide en énergie potentielle et la liaison de la pompe à la conduite de refoulement.

### 2.3.1.2. Le principe de fonctionnement d'une pompe à aubes

Sous l'effet de la rotation de la roue, le liquide emmagasiné entre les aubes du rotor est projeté de la région axiale à la périphérie à cause de la force d'inertie centrifuge, de ce fait une dépression est créée à l'entrée de la pompe, provoquant l'aspiration du liquide, par suite, un écoulement continu de la veine liquide laquelle est recueillie par la volute ou par le diffuseur et dirigée dans la conduite de refoulement [5], Dans la volute, l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle et on dispose, ainsi à l'orifice de refoulement un débit sous une certaine pression qui se traduit par une hauteur manométrique de refoulement [4].

### 2.3.2 Les pompes à tourbillon

Elles sont des pompes dans lesquelles l'énergie est transmise de la roue au liquide sous l'effet de l'action des forces centrifuges. C'est le même principe de fonctionnement que les pompes centrifuges radiales la seule différence de ces pompes consiste en des canaux spéciaux dont lesquels est utilisé l'effet de tourbillon pour augmenter l'énergie hydraulique des fluides.

### 2.3.3 Les pompes volumétriques

Le principe de fonctionnement de ces pompes consiste en un déplacement périodique d'un volume déterminé du liquide de la cavité d'aspiration vers la cavité de refoulement. Parmi les pompes volumétriques on peut citer les suivantes:

a) Les pompes à piston

- à simple effet elle est composée d'un seul piston.
- à double effets elle est composée de deux pistons.
- à multiples effets elle composée de plusieurs pistons.

b) Les pompes plongeurs : comme les compresseurs.

c) Les pompes à engrenage : comme les pompes à huiles dans une voiture.

d) Les pompes à vis : le culasse à huile.

e) Les pompes à palettes ou à ailettes.

### 2.3.4 Les pompes à jet (hydro-éjecteur)

L'énergie du liquide, de la vapeur ou du gaz est utilisée pour refouler un fluide.

### 2.3.5 Les pompes à émulsion (air-lift)

Dans ce genre de pompes on pompe de l'air comprimé pour faire élever un liquide, c'est à dire que l'énergie de l'air comprimé est utilisée pour élever un liquide.

### 2.3.6 Les pompes à béliers hydrauliques

L'énergie du coup de bélier est utilisée pour élever un fluide.

### 2.3.7 Les pompes GEPI (Groupe électropompe Immergé)

C'est une pompe multicellulaire à axe vertical mais elle immergée. Leur principe de fonctionnement consiste à un passage du liquide d'une cellule à une cellule plus haut. Plus le nombre de cellule est grand plus la charge délivrée est importante.

### 2.3.8 Les pompes noyées à transmission

Ce genre de pompes est installé dans les puits où la profondeur  $H < (50-60)$  m mais le moteur se trouve en surface.

**2.4. Classification des pompes à aubes**

Les pompes à aubes sont classées suivant la forme de la roue, la forme du corps de la pompe, le nombre des roues et la position de l'axe de la pompe.

**2.4.1. Forme de la roue**

Il existe essentiellement trois types de pompes :

- a- Les pompes centrifuges proprement dite, ou à écoulement radial ;
- b - Pompes hélico centrifuges ;
- c - Pompes à écoulement axial.

**2.4.2. Forme du corps de pompe**

Ils existent essentiellement les types de pompes suivants :

- a - Pompes à volute ou colimaçon

Corps de pompe dessiné de façon à maintenir les vitesses égales autour de la roue et à réduire la vitesse de l'eau dans le passage à la section de sortie.

- b - Pompes à diffuseur circulaire ou du type turbine

Corps de pompe à section constante et concentrique à la roue, qui dans ce cas est entourée d'aubes fixes qui dirigent l'écoulement et réduisent la vitesse de l'eau, ainsi transformant l'énergie cinétique en énergie de pression.

**2.4.3. Nombre de roues**

On peut diviser les pompes en deux catégories :

- a- Pompes à un seul étage, (pompes monocellulaires) : comme il est indiqué à la (Figure 2.5). Quand la pompe ne comporte qu'une seule cellule, elle est dite monocellulaire. Elle se compose d'une roue et d'une volute ou corps de pompe, qui joue le rôle du diffuseur de la pompe. On peut atteindre des pressions de 1,5 à 8 bars (soit 15 à 80 m d'eau) [5]

- b - Pompes multicellulaires :

Elles sont utilisées lorsque la pression exigée au refoulement est importante, donc il serait théoriquement possible d'utiliser une pompe équipée d'une roue de grand diamètre, mais il est en général très rentable d'utiliser des pompes multicellulaires (plusieurs étages) constituées de pompes monocellulaires montées en série sur un même arbre de commande. On peut atteindre des pressions très importantes de 8 à 30 bars (soit 80 à 300 m d'eau).

**2.4.4. La position de l'axe**

Les pompes sont classées en pompes à axe horizontal, à axe vertical et à axe incliné.

- a - Pompes à axe horizontal.

Cette disposition est la plus classique, elle est adoptée généralement pour les pompes de surface. L'entretien et le démontage de la pompe sont simplifiés.

- b - Pompes à axe vertical :

Ces pompes verticales sont submergées ou immergées, elles sont spécialement conçues pour l'équipement des puits profonds [6].

**2.5. Equation fondamentale des machines hydraulique**

Le principe de fonctionnement d'une pompe est le suivant : supposons que la pompe est pleine d'eau, sous l'effet de la rotation de la roue entraînée par le moteur électrique, l'eau qui arrive dans la région axiale qu'on l'appelle Ouïe ou Œillard est projetée au périphérique et de ce fait il y a une création de dépression ce qui provoque un appel des veines liquides

suivantes et par suite un écoulement continu de la veine liquide, cette dernière est recueillie par la volute ( le diffuseur) à l'entrée de la conduite de refoulement.

L'eau pénétrant au niveau du cercle  $r_1$  dans les canaux incurvés formés par l'élément tournant (la roue) et les quittant au niveau du cercle de rayon  $r_2$ , nous désignons successivement à l'entrée et à la sortie de l'aubage  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses relatives de l'eau par rapport à l'aubage (vitesses de glissement de l'eau sur les aubes), les vitesses circonférentielles (linéaires)  $u_1$  et  $u_2$  et les vitesses absolues de l'eau  $V_1$  et  $V_2$ .

Nous allons essayer de démontrer que l'énergie transmise à l'eau, grâce à la rotation de la roue, a fait augmenter à la fois la pression et la vitesse de l'eau. Dans ce cas l'application, au mouvement absolu de l'eau entre les aubages, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de la pompe entre deux instants  $t$  et  $t+\Delta t$  permet d'écrire.

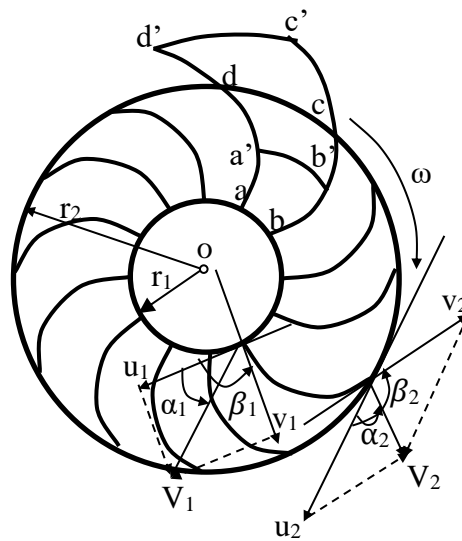


Fig. 2.11 : Epures de vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue d'une pompe à aubes

A l'instant  $t$ , la masse d'eau contenue entre deux aubages occupe un espace limité par la section  $abcd$  et, à l'instant  $(t+\Delta t)$  cette masse d'eau se déplace et occupe un espace limité par la section  $a'b'c'd'$ . Exprimons la variation de la quantité de mouvement entre ces deux périodes.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d(m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1)}{dt}$$

La projection des vitesses  $V_1$  et  $V_2$  sur les axes portant les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  donne :

$$\frac{d(mV_2 \cos(\alpha_2) - mV_1 \cos(\alpha_1))}{dt}$$

Le moment cinétique à l'entrée de la roue est égale au produit vectoriel de la quantité de mouvement par le vecteur déplacement ce qui permet d'écrire :

$$C_1 = m\vec{V}_1 \times \vec{r}_1 = m \cdot r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1 \quad \text{formule déjà démontrée au chapitre I}$$

Alors qu'à la sortie

$$C_2 = m\vec{V}_2 \times \vec{r}_2 = m \cdot r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2$$

La variation du moment cinétique, entre la sortie et l'entrée de la roue, en  $dt$  secondes est égale au moment cinétique des forces extérieures par rapport à l'axe de la pompe alors ce dernier n'est autre que le couple du moteur électrique  $C$ , ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d(m \cdot r_2 \cdot V_2 \cos(\alpha_2) - m \cdot r_1 \cdot V_1 \cos(\alpha_1))}{dt} = C$$

Pour une masse d'eau élémentaire,  $dm$ , circulant en  $dt$  seconde, la variation de ce moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{C_2 - C_1}{dt} = C &\Rightarrow \frac{dm \cdot r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - dm \cdot r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1}{dt} = C \\ &\Rightarrow dm \cdot r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - dm \cdot r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1 = C \cdot dt \\ dm(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) &= C \cdot dt \Rightarrow \int dm(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) = \int C \cdot dt \\ M(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) &= C \cdot t \Rightarrow \frac{M}{t}(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) = C \\ \frac{M}{t} &= \rho \frac{V}{t} = \rho Q \\ \mathbf{C} &= \rho Q(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) \quad (2.1) \end{aligned}$$

### 2.5.1 Calcul de la hauteur théorique produite par la pompe

La puissance absorbée est définie comme étant le produit du couple du moteur électrique par la vitesse angulaire  $\omega$ .

$$P_{\text{absorbée}} = C \cdot \omega = \rho Q(r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) \cdot \omega$$

$$P_{\text{absorbée}} = \rho Q(\omega \cdot r_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - \omega \cdot r_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1)$$

Nous avons déjà démontré que :

$$\omega \cdot r_2 = u_2 \text{ et } \omega \cdot r_1 = u_1$$

$$\mathbf{P_{\text{absorbée}} = \rho Q(u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1)} \quad (2.2)$$

Pour une pompe idéale, théoriquement on peut négliger les pertes de charge par choc et par frottement à l'intérieure de la roue. Dans ce cas-là on peut dire que la puissance utile (fournie par la pompe) est égale à la puissance absorbée (fournie à la pompe).

La puissance utile est donnée par l'expression :

$$\mathbf{P_{\text{utile}} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{\text{théorique}} \text{ voir } \phi I} \quad (2.3)$$

Pour un rendement de la pompe ( $\eta$ )  $\eta=100\%$  nous aurons :

$$P_{\text{absorbée}} = P_{\text{utile}} \Rightarrow \rho Q(u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{\text{théorique}}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1)} \quad (2.4)$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation fondamentale des machines hydrauliques ou équation d'Euler.

### 2.5.2. Calcul du débit théorique délivré par la pompe

Le débit donné par la pompe peut s'écrit sous l'expression les plus usuellement utilisé en écoulement permanent :

$$\mathbf{Q = V \cdot S}$$

$V=V_{2r}$  et  $S=\pi D_2 b_2$

$b_2$  : l'espace entre les deux flasques ou bien épaisseur de l'aubage.

$D_2$  : diamètre extérieur de la roue

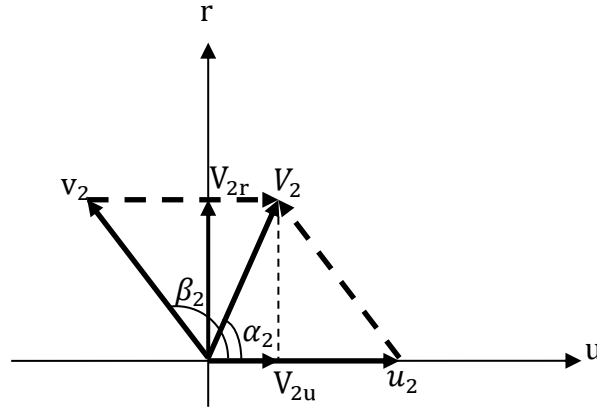


Fig. 2.12: Triangle de vitesses à la sortie de la roue d'une pompe

$$\operatorname{tg}(\pi - \beta_2) = \frac{V_{2r}}{u_2 - V_{2u}} \Rightarrow V_{2r} = (u_2 - V_{2u}) \operatorname{tg}(\pi - \beta_2) = (u_2 - V_2 \cos(\alpha_2)) \operatorname{tg}(\pi - \beta_2)$$

$$V_{2r} = -(u_2 - V_2 \cos(\alpha_2)) \operatorname{tg}(\beta_2)$$

Pour les pompes à aubes où l'écoulement à l'entrée des aubes est radial, la hauteur théorique produite prend l'expression réduite suivante :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha_2}{g} \Rightarrow V_2 \cdot \cos \alpha_2 = \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2}$$

Remplaçons cette dernière expression dans l'expression de  $V_{2r}$  nous aurons :

$$V_{2r} = -\left(u_2 - \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2}\right) \operatorname{tg}(\beta_2)$$

$$Q = V_{2r} \cdot S = -\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) \left(u_2 - \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2}\right) = -\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) u_2 \left(1 - \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2^2}\right)$$

$$Q = -\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) u_2 \left(1 - \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2^2}\right) \quad (2.5)$$

Cette dernière expression permet d'écrire une relation fortement représentative entre H et Q

$$\left(1 - \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2^2}\right) = \frac{1}{-\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) u_2} Q \Rightarrow \frac{g \cdot H_{\text{théorique}}}{u_2^2} = 1 + \frac{1}{\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) u_2} Q$$

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \operatorname{tg}(\beta_2) g} Q \quad (2.6)$$

Cette dernière équation est de la forme  $H=AQ+B$  qui est linéaire.

Pour  $Q = 0 \Rightarrow H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g}$  ce qu'on appelle le point de barbotage

pour  $H_{\text{théorique}} = 0 \Rightarrow Q = -\pi D_2 b_2 u_2 \operatorname{tg}(\beta_2)$

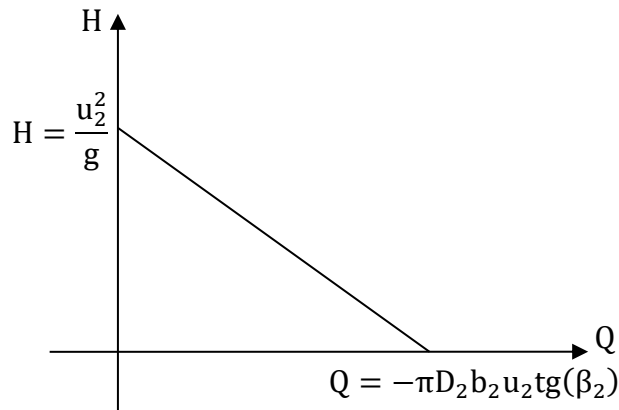


Fig.2.13 : Schéma explicatif de la hauteur d'élévation théorique en fonction du débit

**2.5.3. Application de l'équation de Bernoulli (d'énergie) aux pompes à aubes**

La hauteur d'élévation réelle d'une pompe à aubes est définie comme étant la différence de charge hydraulique totale entre la sortie et l'entrée de la roue. L'application de l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la roue d'une pompe à aubes permet d'écrire :

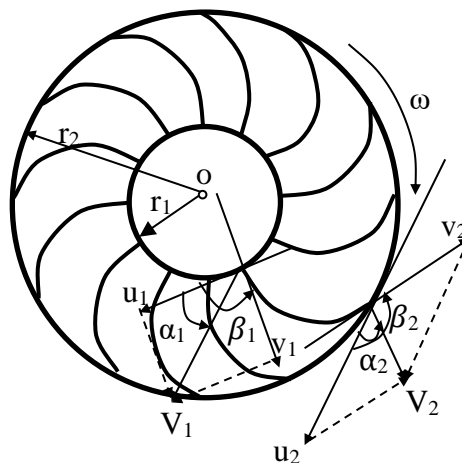
$$H_R = H_S - H_e \Rightarrow \left( Z_S + \frac{p_S}{\rho g} + \frac{V_S^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) = (Z_S - Z_e) + \left( \frac{p_S}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_S^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g} \right)$$

La hauteur d'élévation théorique d'une pompe à aubes est donnée aussi par l'expression suivante :

$$H_T = \frac{1}{g} (u_2 V_2 \cos(\alpha_2) - u_1 V_1 \cos(\alpha_1))$$

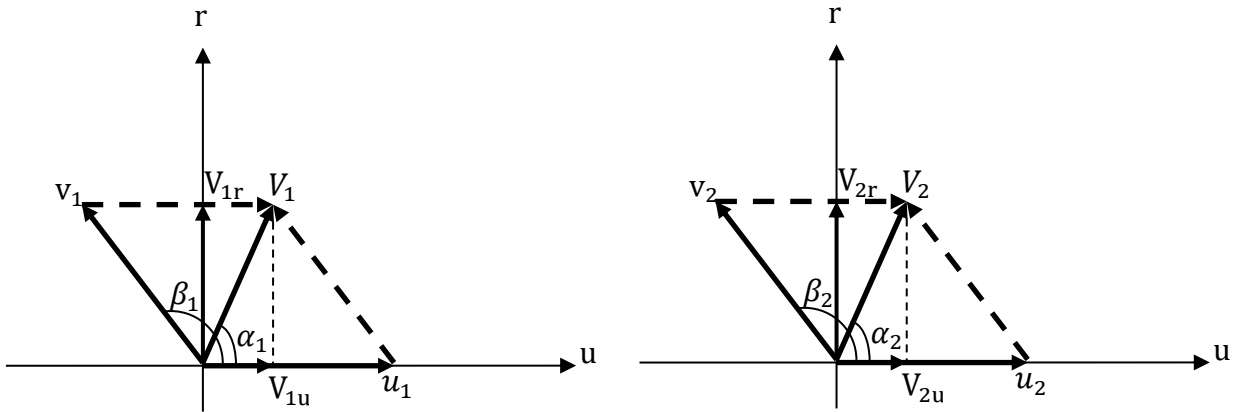
Alors que la hauteur d'élévation réelle,  $H_R$ , est égale à la hauteur d'élévation théorique retranchée de la perte de charge générée entre l'entrée et la sortie de la roue.

$$H_R = H_T - \Delta H_{s,e} \Rightarrow (Z_S - Z_e) + \left( \frac{p_S}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_S^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g} \right) = H_T - \Delta H_{s,e}$$



Posons la vitesse absolue à la sortie est égale à  $V_2$  ( $V_s=V_2$ ) et la vitesse absolue à l'entrée est égale à  $V_1$  ( $V_e=V_1$ ) nous aurons :

$$(Z_2 - Z_1) + \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) = H_T - \Delta H_{1,2}$$



**Fig. 2.14 : Triangles de vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue d'une pompe à aubes**

La vitesse absolue à l'entrée de la roue peut être exprimée par l'expression suivante :

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1\cos\beta_1$$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{V_{1u}}{V_1} \Rightarrow V_{1u} = V_1 \cos(\alpha_1)$$

$$\cos(\pi - \beta_1) = \frac{u_1 - V_{1u}}{v_1} \text{ et } \cos(\pi - \beta_1) = -\cos(\beta_1) \Rightarrow -\cos(\beta_1) = \frac{u_1 - V_{1u}}{v_1}$$

$$\Rightarrow V_{1u} = u_1 + v_1 \cos(\beta_1)$$

Ces deux dernières expressions de  $V_{1u}$  permettent d'écrire :

$$V_1 \cos(\alpha_1) = u_1 + v_1 \cos(\beta_1)$$

Nous pouvons aussi écrire la vitesse absolue à la sortie comme suit :

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2$$

Et de la même manière nous aurons :

$$V_2 \cos(\alpha_2) = u_2 + v_2 \cos(\beta_2)$$

$$(Z_2 - Z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \Delta H_{1,2} - H_T = 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}\right) + \Delta H_{1,2} - H_T$$

$$\left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1u_1\cos\beta_1}{2g}\right) = \left(Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2}{2g}\right) + \Delta H_{1,2} - H_T$$

La hauteur d'élévation théorique peut s'écrire comme suit :



$$H_T = \frac{1}{g}(u_2 V_2 \cos(\alpha_2) - u_1 V_1 \cos(\alpha_1)) = \frac{1}{g}(u_2(u_2 + v_2 \cos(\beta_2)) - u_1(u_1 + v_1 \cos(\beta_1)))$$

$$H_T = \left( \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2 v_2 \cos(\beta_2)}{g} \right) - \left( \frac{u_1^2}{g} + \frac{u_1 v_1 \cos(\beta_1)}{g} \right)$$

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1 u_1 \cos \beta_1}{2g} \right) - \Delta H_{1,2} = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2 u_2 \cos \beta_2}{2g} \right) - H_T$$

Remplaçons par l'expression de la hauteur d'élévation théorique  $H_T$  dans l'expression précédente, nous aurons :

$$\begin{aligned} & \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2 + v_1^2 + 2v_1 u_1 \cos \beta_1}{2g} \right) - \Delta H_{1,2} - \left( \frac{u_1^2}{g} + \frac{u_1 v_1 \cos(\beta_1)}{g} \right) \\ & = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2v_2 u_2 \cos \beta_2}{2g} \right) - \left( \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2 v_2 \cos(\beta_2)}{g} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme peut être simplifié comme suit :

$$\begin{aligned} & \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{2v_1 u_1 \cos \beta_1}{2g} \right) - \frac{u_1^2}{g} - \frac{u_1 v_1 \cos(\beta_1)}{g} - \Delta H_{1,2} \\ & = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} - \Delta H_{1,2} \end{aligned}$$

Alors que le second terme devient :

$$\left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2v_2 u_2 \cos \beta_2}{2g} \right) - \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 v_2 \cos(\beta_2)}{g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}$$

Donc nous pouvons écrire :

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} \right) - \Delta H_{1,2} = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) \quad (2.7)$$

#### 2.5.4. Calcul de la hauteur de charge analytique produite par la roue d'une pompe

La hauteur de charge théorique délivrée par la pompe est donnée par la relation déjà démontré.

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g}(u_2 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos \alpha_1)$$

Alors que la charge réelle produite par la pompe est inférieure que celle théorique à cause des pertes de charge dues à la roue (glissement de l'eau sur les aubes) et des pertes dues à la sortie.

$$H_{\text{réelle}} = H_{\text{théorique}} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie}$$

$$H_{réelle} = H_{théorique} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{réelle} = \frac{1}{g} (u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

Pour la plupart des pompes à aubes l'écoulement à l'entrée des aubes est considéré comme radial et la valeur du terme  $u_1 V_1 \cos(\alpha_1)$  est nulle puisque  $\alpha_1=90^\circ$  et  $\cos(90)=0$ . L'équation de  $H_{réelle}$  s'écrit alors :

$$H_{réelle} = \frac{u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2}{g} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 \cos(\alpha_2) = u_2 + v_2 \cos(\beta_2)$$

$$H_{réelle} = \frac{u_2 \cdot (u_2 + v_2 \cos(\beta_2))}{g} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2 \cdot v_2 \cos(\beta_2)}{g} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2v_2 u_2 \cos\beta_2 \Rightarrow v_2 u_2 \cos\beta_2 = \frac{V_2^2 - u_2^2 - v_2^2}{2}$$

Introduisons cette dernière dans l'expression de  $H_{réelle}$  nous aurons :

$$H_{réelle} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{V_2^2 - u_2^2 - v_2^2}{2g} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{réelle} = \left( \frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \quad (2.8)$$

Cette dernière expression entraîne le non linéarité de la relation  $H=f(Q)$  et  $H_{réelle}$  prend la relation suivante :

$$H_{réelle} = A Q^2 + B Q + C$$

Avec A, B et C sont des variables réelles.

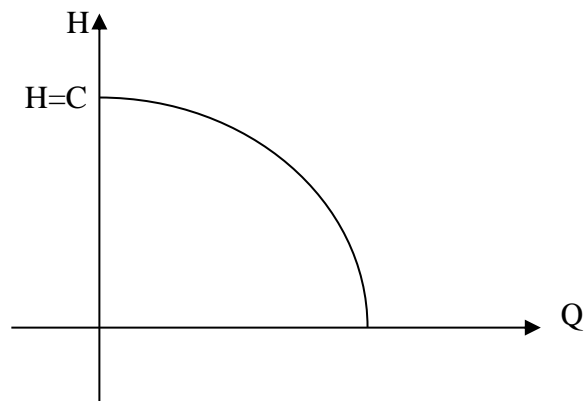


Fig. 2.15 : Courbe caractéristique analytique représentant H en f(Q)

2.5.5. Décomposition de l'équation fondamentale des machines hydrauliques

L'équation donnant la charge hydraulique théorique délivrée par la pompe est donnée par l'équation d'Euler.

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g} (u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1)$$

Pour la plupart des pompes à aubes l'écoulement à l'entrée des aubes est radial, ce qui permet d'écrire l'expression de la charge théorique comme suit :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g} u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2$$

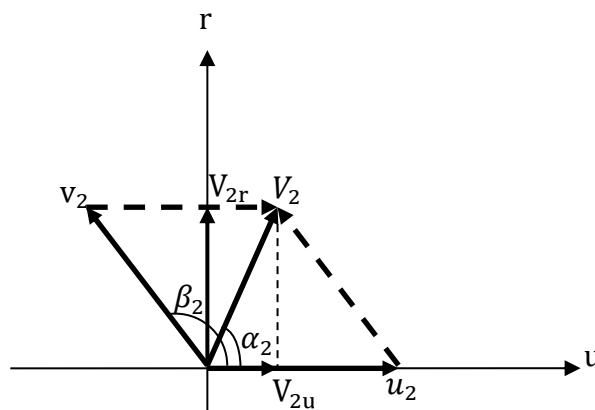


Fig. 2.16 : Epure de vitesse à la sortie de la roue d'une pompe

La vitesse absolue à la sortie de la roue  $V_2$  peut être exprimée en fonction de la vitesse linéaire circonférentielle,  $u_2$ , et la vitesse relative ou de glissement de l'eau sur l'aubage  $v_2$  comme suit :

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2v_2u_2\cos\beta_2$$

Ce qui permet d'écrire :

$$v_2u_2\cos\beta_2 = \frac{(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)}{2}$$

$$V_2 \cos(\alpha_2) = u_2 + v_2 \cos(\beta_2) \Rightarrow v_2 \cos(\beta_2) = V_2 \cos(\alpha_2) - u_2$$

$$(V_2 \cos(\alpha_2) - u_2)u_2 = \frac{(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)}{2} \Rightarrow u_2V_2 \cos(\alpha_2) = \frac{(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)}{2} + u_2^2$$

Remplaçons cette dernière expression dans l'équation d'Euler nous aurons :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{1}{g} u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 = \frac{1}{g} \left( \frac{(V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)}{2} + u_2^2 \right)$$

$$H_{\text{théorique}} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

Si nous ajoutons et retranchons

$$\frac{V_1^2}{2g}$$

Au second terme nous aurons :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

$$H_{\text{theorique}} = \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + \left( \frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) \quad (2.9)$$

$$H_{\text{théorique}} = H_{\text{roue}} + H_{\text{diffuseur}}$$

Le premier terme de cette somme caractérise une augmentation de l'énergie cinétique, par suite d'une augmentation de la vitesse.

Nous allons montrer que le second terme caractérise un accroissement de pression en étendant le théorème de Bernoulli au mouvement relatif de l'eau dans la pompe, alors animée d'un mouvement de rotation.

Appliquons l'équation de Bernoulli, au mouvement relatif de l'eau, de l'entrée de l'œilillard jusqu'à la sortie de la roue.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2 - u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2 - u_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - u_2^2 - v_1^2 + u_1^2}{2g}$$

Pour le cas d'une pompe centrifuge radiale  $\alpha_1=90^\circ$  (écoulement radial à l'entrée de la roue), on utilise la relation de Pythagore.

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - u_2^2 - v_1^2 + u_1^2}{2g} = \frac{v_2^2 - u_2^2 - (V_1^2 + u_1^2) + u_1^2}{2g} = \frac{v_2^2 - u_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2 + V_1^2 - v_2^2}{2g}$$

En conséquence, le deuxième terme de la somme de l'expression de  $H_{\text{théorique}}$  et qui vient d'être ainsi retrouvé, représente bien un accroissement de pression. Mais, si cet accroissement de pression est utilisable immédiatement, il n'en est pas de même de l'augmentation d'énergie cinétique exprimée par le premier terme de la somme et dont la transformation en pression sera effectuée dans le diffuseur.

La roue fait augmenter la vitesse alors que le diffuseur aura pour rôle de transformer en pression une partie de la grande vitesse absolue de l'eau à la sortie de la roue,  $V_2$ . Il suffit de diminuer progressivement  $V_2$  à l'intérieur du diffuseur jusqu'à l'obtention d'une vitesse  $V_1$ . Cette diminution de vitesse doit s'accompagner d'une diminution de pertes de charge jusqu'à la sortie de la roue (perte de charge par frottement), l'écoulement sera dirigé par les aubages et pour que la transformation de l'énergie en pression s'effectue dans les meilleures

conditions, la section de passage entre deux ailettes doit comporter une partie rectiligne divergente avec un angle de divergence compris entre 8° et 10°.

Si  $V_2, V_3, P_2, P_3$  représentent les vitesses et les pressions à l'entrée et à la sortie du diffuseur.

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow \frac{p_3}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g}$$

Cette augmentation de l'énergie cinétique est caractérisée par le rôle du diffuseur.

et, si  $V_3=V_1$  on trouve bien :

$$\frac{p_3}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

Puisque le diffuseur a pour rôle de diminuer la vitesse  $V_3$  à la vitesse  $V_1$

$$H_{\text{theorique}} = \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + \left( \frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

$$H_{\text{théorique}} = H_{\text{roue}} + H_{\text{diffuseur}}$$

## 2.6. Rôle des canaux de retour

Ces canaux ont pour rôle de ramener, à l'entrée de la roue suivante, l'eau avec sa vitesse  $V_1$  qu'elle possède à la sortie du diffuseur. Ils présenteront, en principe une section constante délimitée par des ailettes chargées d'orienter axialement la veine liquide à l'entrée de la cellule suivante. Il en résulte un retournement brutal à 180° de l'écoulement à la sortie du diffuseur avant la pénétration de l'eau dans les canaux de retour.

En vue d'éviter la perte inévitable au cours de ce retournement qu'il s'effectue par un coude sans ailettes, il peut être envisagé un ralentissement progressif de la vitesse grâce à un canal de diffusion continu rassemblant à la fois les aubages du diffuseur et ceux des canaux de retour ; la section de ces derniers n'est plus constante.

## 2.7. Conclusion

L'équation fondamentale des machines hydrauliques a pour objectif de lier tous les paramètres qui peuvent être en jeu pour bien comprendre ce qui se passe du moteur d'entraînement jusqu'à la sortie de la pompe.

L'équation fondamentale donnant la charge d'élévation théorique en fonction du débit a une forme linéaire alors que celle réelle (analytique) sa forme est parabolique.

Les équations fondamentales des pompes à aubes, théorique et analytique, prennent plusieurs expressions. Toutefois, l'utilisation de l'une ou de l'autre dépend des informations disponibles.

Les paramètres physiques en relativité avec notre domaine à savoir le couple, les puissances fournie et utile et la vitesse angulaire en fait l'objet de petites démonstrations afin de faciliter leurs utilisations.

## **CHAPITRE III**

### **Construction des courbes caractéristiques des pompes à aubes**

### 3.1. Introduction

L'obtention des courbes caractéristiques analytiques est basée sur les formules obtenues analytiquement, c'est-à-dire c'est à partir des relations théoriques démontrées mathématiquement que nous pouvons prévoir une idée raffinée sur les courbes pratiques utilisées en domaine hydrotechnique.

Dans une usine, ils construisaient des différentes pompes, par la suite, ils font des essais sur un banc d'essai universel pour construire les courbes caractéristiques pratiques des pompes afin de déterminer leurs zones de bon fonctionnement bien sûr dans les conditions favorables du banc.

### 3.2. Courbes caractéristiques théoriques d'une pompe à aubes

Les courbes principales qui caractérisent une pompe à aubes et qui expriment ses performances sont les suivantes :

-  $H=F(Q)$  ;  $P_{abs}=F(Q)$  ;  $P_{ut}=F(Q)$  ;  $\eta=F(Q)$ .

$H=F(Q)$  exprime les variations des différentes hauteurs de relèvement en fonction du débit. Hors, nous avons vu précédemment que les variations théoriques de  $H$  en fonction de  $Q$  est linéaire.

#### 3.2.1. La hauteur théorique en fonction de débit

La courbe caractéristique théorique donnant  $H$  en fonction de  $Q$  d'une pompe à aubes est donnée par l'expression suivante :

$$H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q \quad (3.1)$$

Cette dernière équation est de la forme  $H=AQ+B$  qui est linéaire.

Pour  $Q = 0 \Rightarrow H_{\text{théorique}} = \frac{u_2^2}{g}$  ce qu'on appelle le point de barbotage  
pour  $H_{\text{théorique}} = 0 \Rightarrow Q = -\pi D_2 b_2 u_2 \text{tg}(\beta_2)$

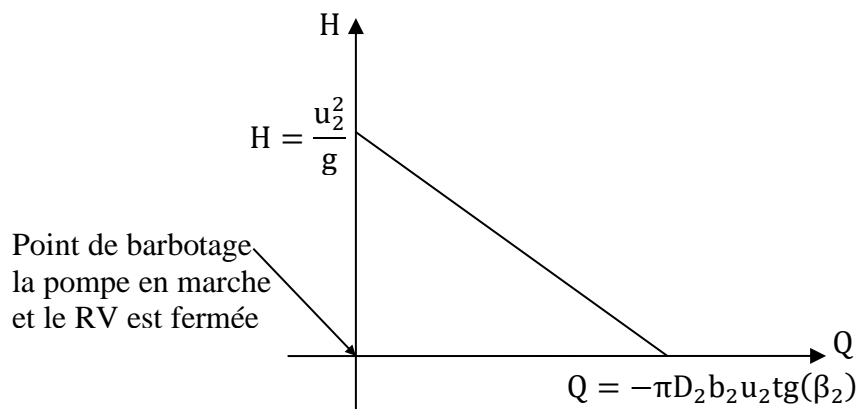


Fig.3.1 : Hauteur d'élévation théorique en fonction du débit

Lorsque on parle ici de  $H_{réelle}$  c'est la hauteur d'élévation obtenue après soustraction des pertes charge théoriques, c'est une hauteur réelle analytique et ce n'est pas celui obtenue expérimentalement.

$$H_{réelle} = H_{théorique} - \text{pertes dues à la roue} - \text{pertes dues à la sortie} \quad (3.2)$$

$$H_{réelle} = H_{théorique} - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.3)$$

$$H_{réelle} = \frac{1}{g} (u_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 - u_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.4)$$

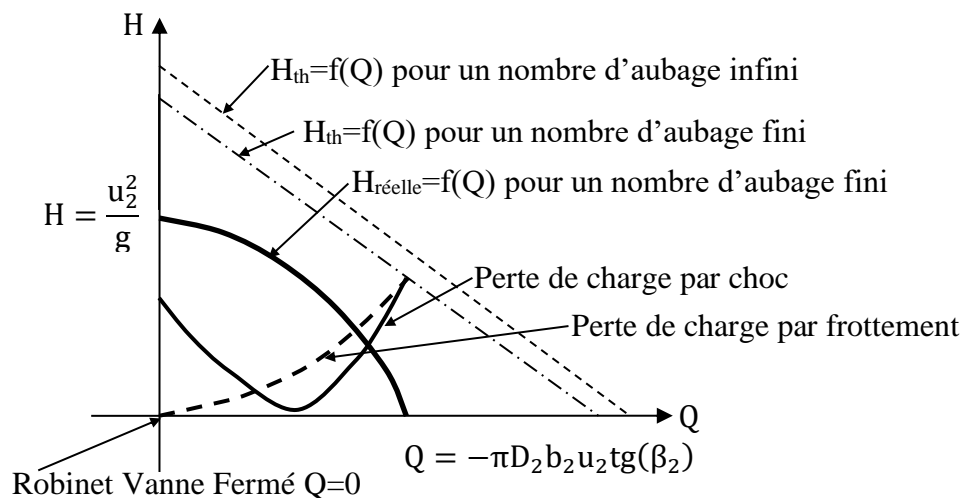
Il existe des pertes par choc et des pertes par frottement.

La courbe caractéristique théorique devient

$$H_{réelle} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.5)$$

$$H_{réelle} = \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q - R_i Q^2 - R_e Q^2 \quad (3.6)$$

Ce qui donne une forme parabolique à la hauteur réelle d'élévation.



**Fig. 3.2 : Représentation des hauteurs d'élévation théoriques et analytique**

### 3.2.2. La puissance théorique en fonction de Q

a) La puissance utile théorique est donnée par l'expression :

$$P_{ut.théorique} = \rho \cdot g \cdot H_{thé.} \cdot Q \quad (3.7)$$

$$P_{ut.théorique} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q \right) Q = \rho \cdot u_2^2 \cdot Q + \frac{\rho \cdot g \cdot u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q^2 \quad (3.8)$$



$$P_{ut.théorique} = A_1 Q^2 + B_1 Q \quad (3.9)$$

**b) La puissance utile réelle (analytique) est donnée par l'expression**

On peut obtenir la puissance utile réelle (analytique) en se basant sur les expressions analytiques entrant dans la composition de sa formule.

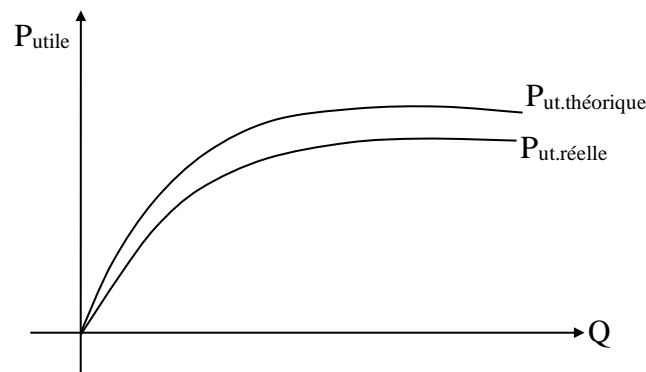
$$P_{ut.réelle} = \rho \cdot g \cdot H_{réelle} \cdot Q \quad (3.10)$$

$$P_{ut.réelle} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{u_2^2}{g} + \frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q - R_i Q^2 - R_e Q^2 \right) Q$$

$$P_{ut.réelle} = \rho \cdot u_2^2 \cdot Q + \frac{\rho \cdot g \cdot u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q^2 - \rho \cdot g \cdot R_i Q^3 - \rho \cdot g \cdot R_e Q^3$$

$$P_{ut.réelle} = -\rho \cdot g \cdot (R_i + R_e) Q^3 + \frac{\rho \cdot g \cdot u_2}{\pi D_2 b_2 \text{tg}(\beta_2) g} Q^2 + \rho \cdot u_2^2 \cdot Q \quad (3.11)$$

$$P_{ut.réelle} = A_2 Q^3 + B_2 Q^2 + C_2 Q \quad (3.12)$$



**Fig. 3.3 : Représentation des puissances utiles théoriques et analytique**

### 3.2.3. Le rendement analytique en fonction de débit

Le rendement analytique d'une pompe est le rapport entre la puissance utile réelle est la puissance utile théorique.

$$\eta_{analytique} = \frac{P_{ut.réelle}}{P_{ut.théorique}} = \frac{A_2 Q^3 + B_2 Q^2 + C_2 Q}{A_1 Q^2 + B_1 Q} = A_3 Q + B_3 \quad (3.13)$$

### 3.3. Courbes caractéristiques réelles (expérimentales) d'une pompe

Les courbes caractéristiques réelles (pratique) ou plus précisément pratiques sont obtenues expérimentalement sur un banc d'essai à l'usine de fabrication de ces pompes. Généralement ces courbes sont données par le constructeur sous formes de catalogues. L'obtention de ces courbes se fait de la manière suivante :

#### a) Mise en marche du banc d'essai

- 1° Mettre à zéro le variateur de vitesse à zéro (0 tours/minutes).
- 2° Fermer complètement le robinet vanne de refoulement et ouvrir le robinet vanne d'aspiration.
- 3° Amorcer la pompe pour faire sortir l'air (purger).
- 4° Afficher la phase électrique principale.
- 5° Mettre le contact. Appuyer sur le bouton de marche en couleur verte.
- 6° Une fois le moteur tourne, vous commencez à ouvrir progressivement le robinet vanne de refoulement tout en augmentant le nombre de tour partiellement.
- 7° Afficher le nombre de tours demandé à l'aide du variateur de vitesse.

#### b) Manipulation

- 1° En faisant varier le débit à l'aide du robinet vanne de refoulement, nous prenons les lectures d'appareils de mesure des côtés aspiration et refoulement.
- 2° A chaque ouverture du robinet vanne, équilibrer le stator du moteur électrique, sinon nous lisons directement la lecture sur couplémètre (N.m).
- 3° Le débit est déterminé également à l'aide d'appareil de mesure du débit (débitmètre).

#### 3.3.1. La hauteur d'élévation (H) en fonction du débit (Q)

La courbe donnant la hauteur d'élévation (pratique) délivrée par la pompe en fonction du débit est parmi les courbes que nous serons en besoin surtout lors de la recherche du point de fonctionnement d'une installation. Toutefois, l'allure de cette courbe se diffère d'un type à l'autre. Lors de la représentation de  $H=F(Q)$  généralement, la charge, H, est en mètre de colonne du liquide et le débit, Q, est-en ( $m^3/h$ ).

#### a) Les pompes centrifuges radiales

Elles se caractérisent par une allure plongeante de courbe  $H=F(Q)$ .

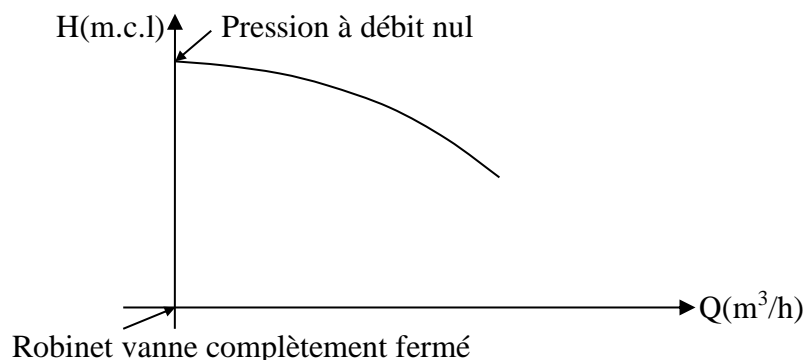


Fig.3.4 : Courbe caractéristique H en f(Q) d'une pompe à aubes centrifuge

### b) Les pompes semi -axiales

Elles se caractérisent par une courbe allongée, comme il est indiqué sur la figure (3.5).

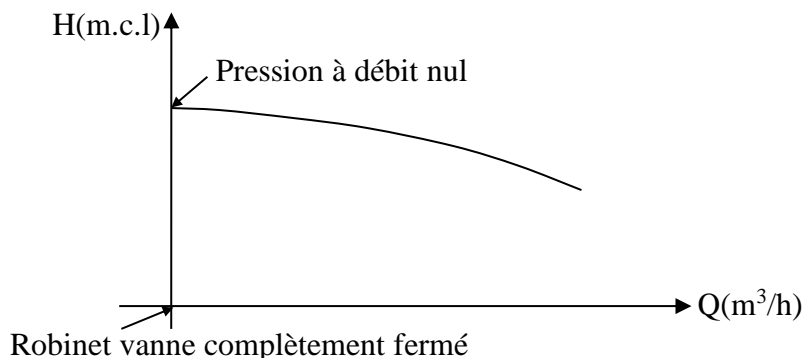


Fig.3.5 : Courbe caractéristique  $H$  en  $f(Q)$  d'une pompe à aubes semi axiale

### c) Les pompes axiales

Elles se caractérisent par une allure tombante de la courbe représentant  $H=F(Q)$ .

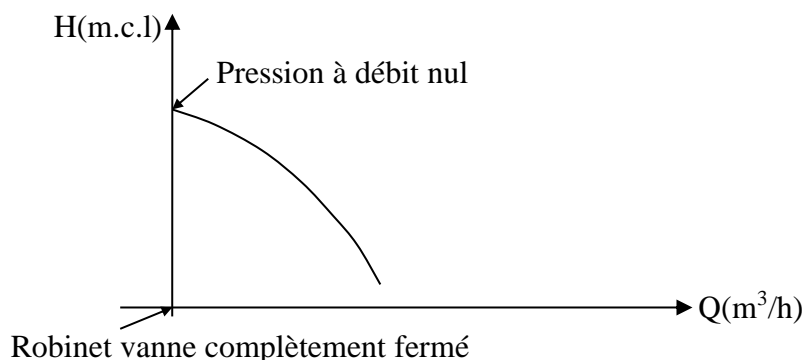


Fig.3.6 : Courbe caractéristique  $H$  en  $f(Q)$  d'une pompe à aubes axiale

### 3.3.2. La puissance absorbée en fonction de débit (Q)

La puissance absorbée réelle d'une pompe à aubes est étroitement liée au couple fourni par le moteur électrique qui l'accouple. En effet, cette puissance (fournie à la pompe) peut être écrite par la relation suivante :

$$P_{\text{absorbée}} = C \cdot \omega \quad (3.14)$$

Où  $\omega$  est la vitesse angulaire du moteur électrique (rad/s).

$C$  : le couple réel fourni par le moteur électrique ( $C=F.l$ ) avec  $l$  le bras de levier.



Fig.3.7: Courbe caractéristique pratique  $P_{\text{absolue}}$  en  $f(Q)$

## CHAPITRE III Construction des courbes caractéristiques des pompes à aubes

La courbe de la puissance absorbée est obtenue en construisant un tableau de données basé sur le couple du moteur électrique et la vitesse de rotation.

C (N.m)	C1	C2	.	.	.	Cn
$\omega$ (rad/s)	$\omega_1$	$\omega_2$	.	.	.	$\omega_n$
P <sub>absorbée</sub> (watts)	P <sub>abs</sub> (1)	P <sub>abs</sub> (2)	.	.	.	P <sub>abs</sub> (n)

### 3.3.3. La puissance utile en fonction du débit (Q)

La puissance utile réelle d'une pompe à aubes est étroitement liée au couple (le débit et la charge) délivrés par la pompe. En effet, cette puissance (fournie par la pompe) en watts peut être exprimée par la relation suivante :

$$P_{\text{utile}} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du liquide ( $\text{kg/m}^3$ ) et  $g$  l'accélération de la pesanteur ( $\text{m/s}^2$ ).

Ce qui donne l'intention, que sa représentation en fonction du débit, est une ligne droite passant par l'origine. Pour tracer sa représentation en fonction du débit, nous utiliserons le tableau ci-après.

Q ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	0	Q1	Q2	.	.	Qn
H(m)	H <sub>max</sub>	H1	H2	.	.	Hn
P <sub>utile</sub> (watts)	0	P <sub>ut</sub> (1)	P <sub>ut</sub> (2)	.	.	P <sub>ut</sub> (n)

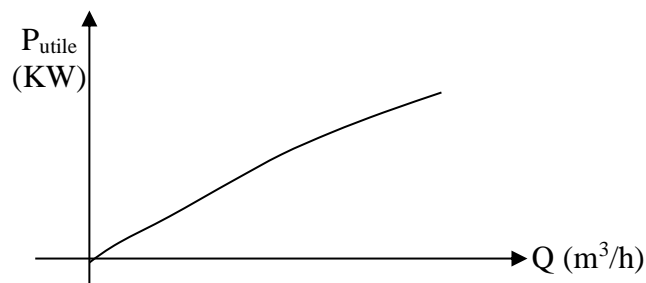


Fig.3.8: Courbe caractéristique pratique  $P_{\text{utile}}$  en  $f(Q)$  d'une pompe

### 3.3.4. Le rendement en fonction du débit (Q)

Le rendement pratique est le rapport entre les puissances utile et absorbée multiplié par 100. Sa représentation en fonction du débit prend la forme suivante.

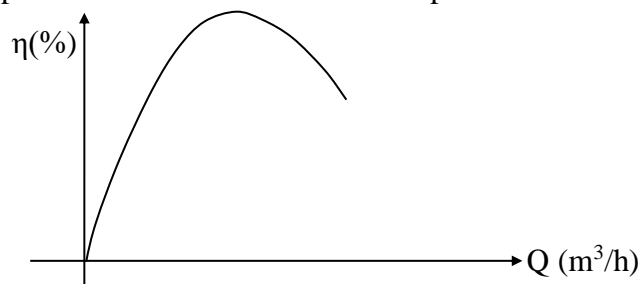


Fig.3.9: Courbe caractéristique pratique  $\eta(\%)$  en  $f(Q)$  d'une pompe

### 3.3.5. (N.P.S.H)<sub>r</sub> en fonction de débit (Q)

La charge nette d'aspiration requise (Net Positive Section Head) pratique est déterminée pratiquement au banc d'essais et peut prendre la forme représentée sur la figure 3.10.

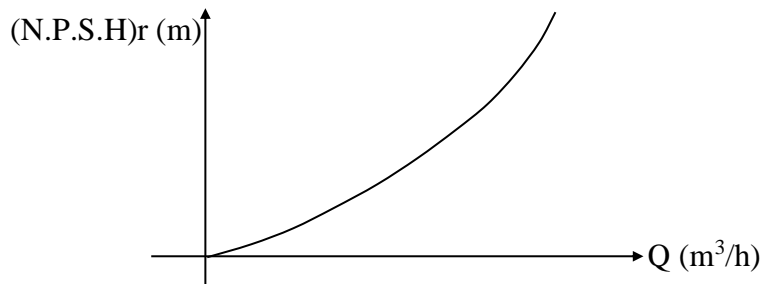


Fig.3.10: Courbe caractéristique pratique (N.P.S.H)<sub>r</sub> en f(Q) d'une pompe

Cette courbe a un grand intérêt pratique lors de l'étude de la cavitation.

### 3.3.6. Les courbes caractéristiques et la plage de bon fonctionnement

Traçons l'ensemble des courbes précédentes dans la même figure, seulement il faut prendre les échelles des ordonnées différentes, nous aurons la figure (3.11).

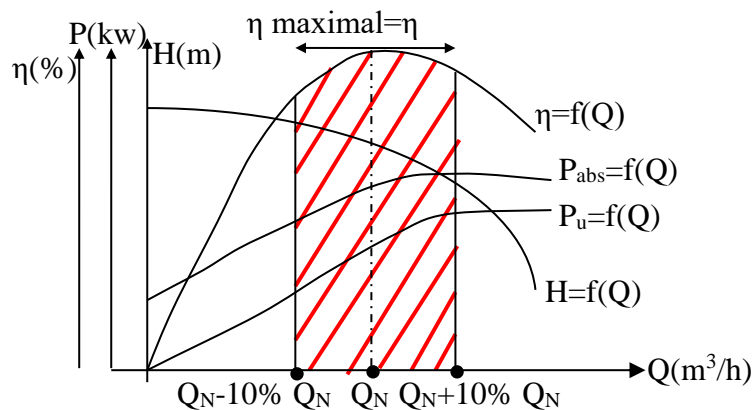


Fig.3.11 : Courbes caractéristiques pratiques d'une pompe à aubes

Le rendement optimal de la pompe est égal au rendement maximum. La projection du rendement maximal sur l'axe du débit donne le débit  $Q_N$  qui correspond au rendement maximum. En retranchant et en rajoutant à ce débit 10% de sa valeur nous obtenons  $Q_1=Q_N-10\%Q_N$  et  $Q_2=Q_N+10\%Q_N$ , puis nous traçons deux lignes parallèles à l'axe des ordonnées et passant par ces deux points, nous aurons l'aire hachurée en rouge. Cette aire s'appelle la zone de bon fonctionnement de la pompe. On dit que la pompe fonctionne dans des meilleures conditions lorsque  $Q_p \in [Q_1, Q_2]$ .

### 3.4. Conclusion

Pour bien choisir la pompe convenablement à notre projet on doit obligatoirement avoir les courbes caractéristiques du constructeur. Ces courbes permettent non seulement de choisir la pompe mais aussi la plage de bon fonctionnement pour que notre pompe fonctionne dans des meilleures conditions.

## **CHAPITRE IV**

### **Les différents types d'installations & hauteur manométrique totale**

### 4.1. Introduction

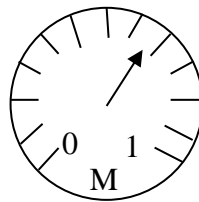
La connaissance des appareils de mesure de la pression et du débit est une condition nécessaire voire même obligatoire, pour bien entamer les études hydrotechniques en relativité avec ces deux paramètres. Nous entamerons ce chapitre par la représentation de certains appareils de mesure de ces deux paramètres. Nous aborderons, par la suite, l'étude des différentes installations des pompes, tout en détaillant les cas existants du point de vue détermination des lectures des appareils, la hauteur manométrique totale pour une installation déjà réalisée et pendant l'étude. Puis nous allons mettre les relations des puissances et du rendement d'une pompe.

### 4.2. Les appareils de mesures de la pression & du débit

#### 4.2.1. Appareils de mesure de la pression

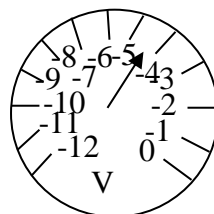
Il existe trois types d'appareils de mesure de la pression qui sont :

- a) **Manomètre** : C'est un appareil de mesure de la pression manométrique c'est-à-dire la pression supérieure à la pression atmosphérique. Il est placé à la fois au refoulement et à l'aspiration pour l'installation en charge et seulement au refoulement pour l'installation en aspiration.



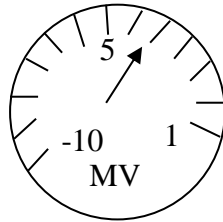
La pression enregistrée au manomètre est une valeur positive qu'on doit la rajouter à la pression atmosphérique pour avoir la pression absolue.

- b) **Vacuomètre** : C'est un appareil qui mesure la pression de vide c'est-à-dire la pression qui est inférieure à la pression atmosphérique. Il est placé à la fois à l'aspiration et au refoulement pour l'installation en siphon et à l'aspiration pour l'installation en dépression.



La pression enregistrée au vacuomètre est une valeur négative qu'on doit la retrancher de la pression atmosphérique.

- c) **Manovacuumètre** : C'est un appareil qui mesure à la fois la pression de vide et la pression manométrique. Il est placé à l'aspiration pour l'installation en aspiration.



Si la pression enregistrée est positive on la rajoute à la pression atmosphérique pour avoir la pression absolue et si elle est négative on la retranche.

### 4.2.2. Appareil de mesure du débit

Le débitmètre est utilisé pour mesurer le volume du liquide qui traverse une section pour un temps égal à l'unité. Parmi les différents types de débitmètres nous citerons :

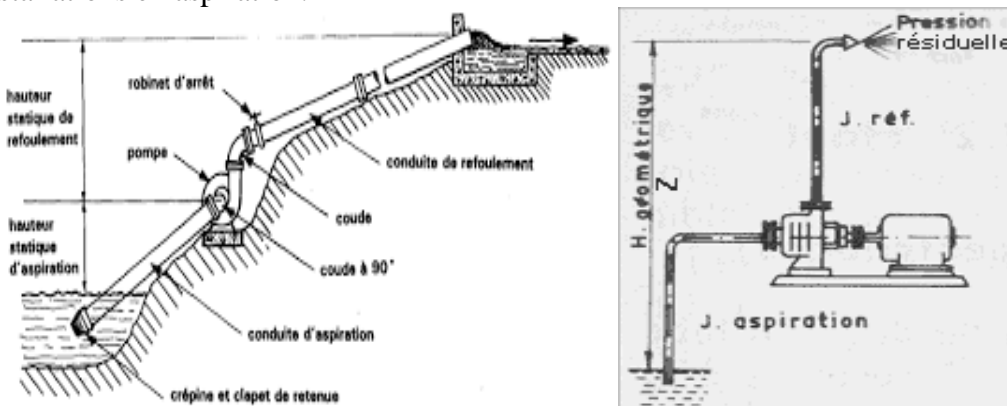
- Débitmètre à diaphragme ; - Débitmètre à ultrason ; - Débitmètre à flotteur
- Débitmètre à Venturi ; - Débitmètre à mercure ; - Débitmètre électronique
- Débitmètre électromagnétique

### 4.3. Les différents types d'installations

En pratique hydrotechnique, il existe trois types d'installation à savoir : installation en aspiration site aussi en dépression, l'installation en charge ou forcée et l'installation en siphon. La détermination de la hauteur d'élévation et la hauteur manométrique totale (H.M.T), de chaque type, dépend des appareils de mesure placés en amont (en avant) et en aval (après) de la pompe et des pertes de charge linéaires et singulières à l'aspiration et au refoulement.

#### 4.3.1. Installation en aspiration (dépression)

L'installation en aspiration est caractérisée par un niveau du réservoir d'aspiration (ou niveau du réservoir inférieur) inférieur au niveau de l'axe de la pompe. La figure 4.1 montre deux installations en aspiration.



**Fig.4.1 : Installation d'une pompe en aspiration à partir d'une rivière**

Pour mettre en évidence tous les paramètres qui peuvent entrer en jeu lors de la réalisation de l'étude et de la gestion d'une station de pompage, on était obligé de donner un schéma détaillé à partir duquel on peut appliquer les équations de base et tirer des informations nécessaires d'une d'installation. La figure 4.2 représente un schéma d'une installation en aspiration sur lequel toutes les informations pour appliquer l'équation d'énergie sont fournies.



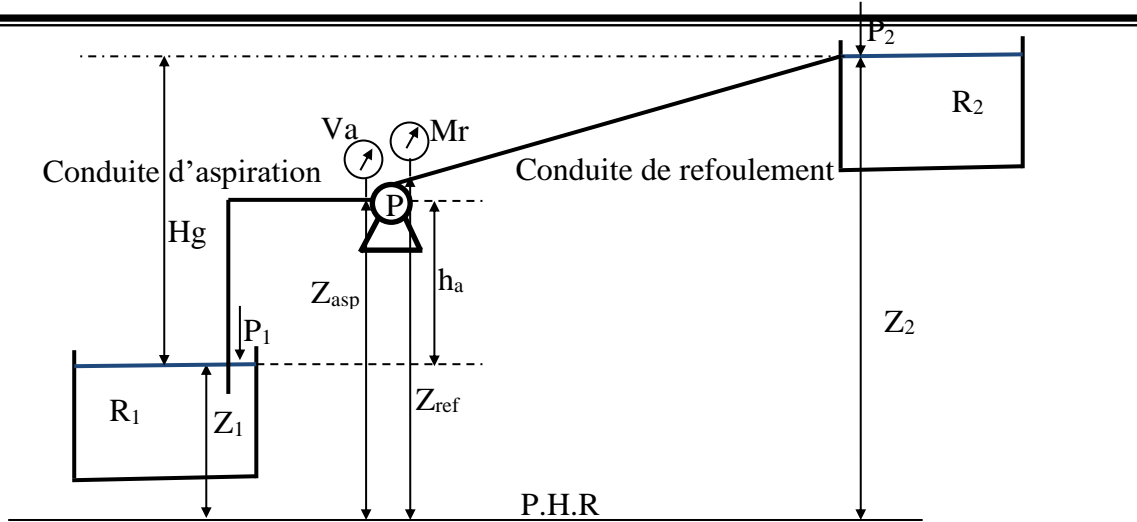


Fig. 4.2 : Installation en aspiration

#### 4.3.2. Installation en charge (forcée)

L'installation en charge (figure 4.3) est caractérisée par un niveau du réservoir d'aspiration (ou réservoir inférieur) supérieur au niveau de l'axe de la pompe.

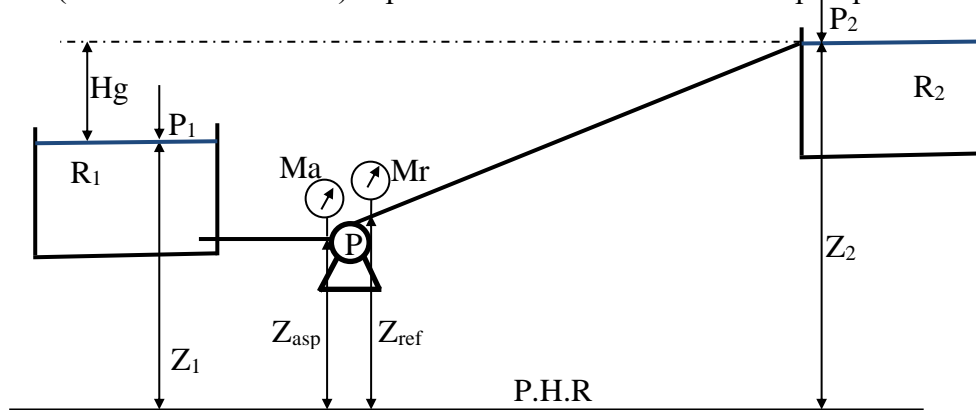


Fig. 4.3 : Installation en charge

#### 4.3.3. Installation en siphon

L'installation en siphon est caractérisée par un niveau de l'axe de la pompe supérieur au niveau du réservoir d'aspiration (ou réservoir inférieur) et du réservoir situé au refoulement généralement appelé réservoir supérieur. Soit l'installation en siphon représentée sur la figure 4.4.

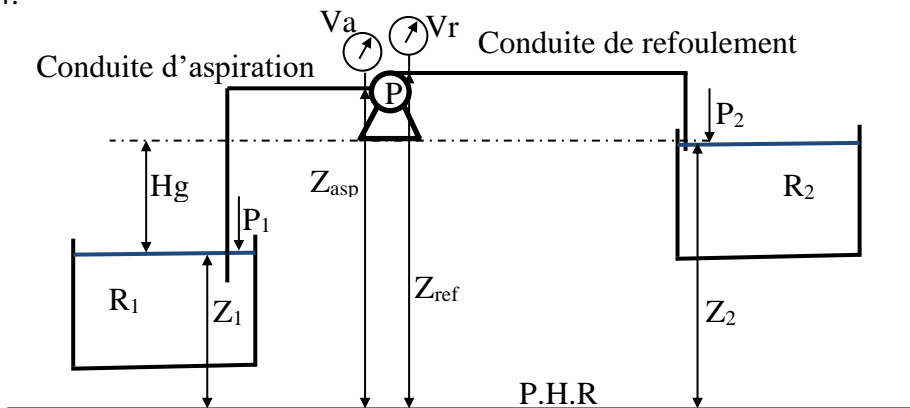


Fig. 4.4 : Installation en siphon

La figure 4.5 représente un schéma général d'installation d'une pompe centrifuge.

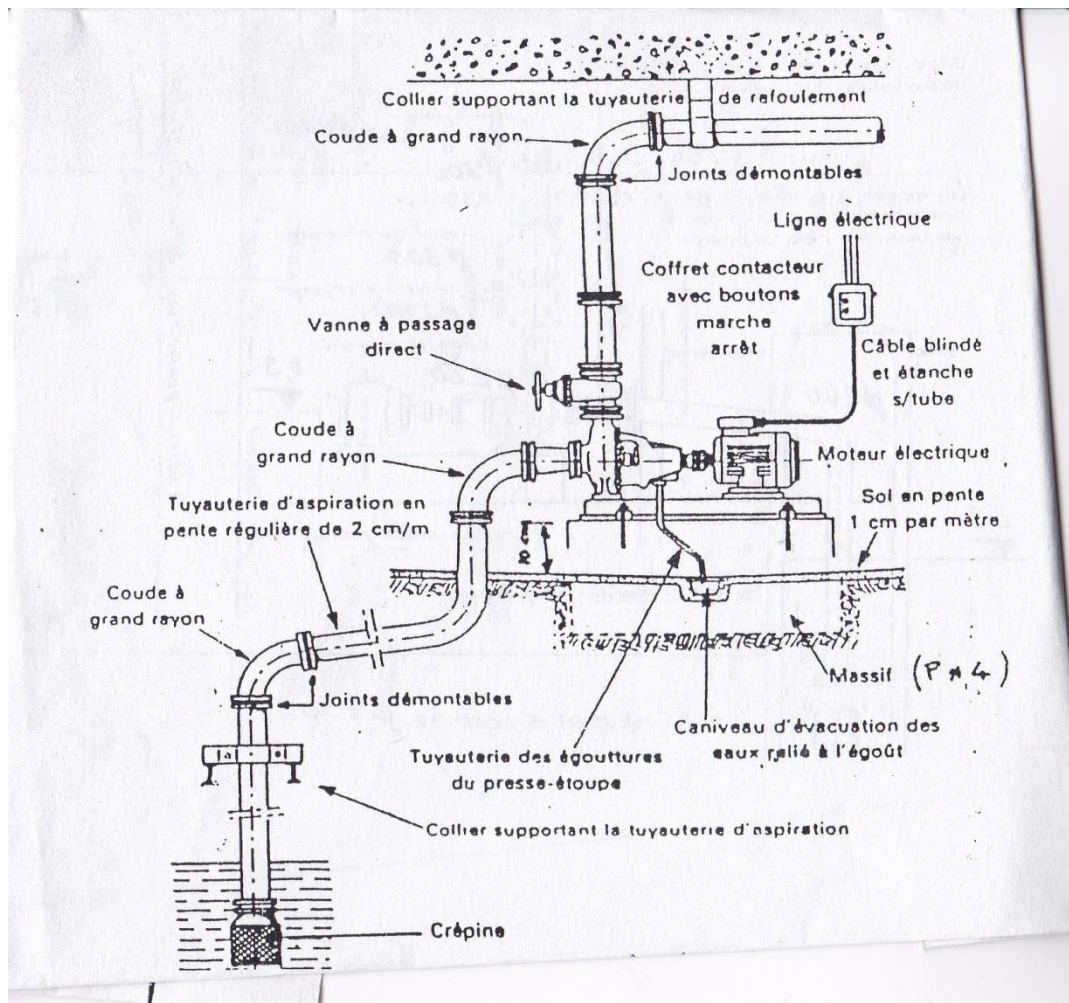


Fig. 4.5 : Règles de détail à suivre dans la réalisation d'une pompe centrifuge

#### 4.4. Détermination de la hauteur manométrique totale

##### 4.4.1. Installation en aspiration

##### a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

En se basant sur le schéma de l'installation en aspiration représenté sur la figure 4.2, appliquons l'équation de Bernoulli entre le point d'entrée d'eau dans la conduite au niveau du réservoir 1 et le point d'entrée d'eau à la pompe nous aurons.

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp}$$

A l'entrée de la pompe nous avons mis un vacuomètre et la pression absolue en ce point devient :

$$\frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}, \frac{V_1^2}{2g} \approx 0 \text{ et } \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_a^2}{2g}$$

Puisque  $V_1$  est très faible (grand réservoir).

$$\left( Z_1 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0 \right) = \left( Z_e + \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp}$$

$$\frac{p_{vac.a}}{\rho g} = \left( Z_e + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} - \left( Z_1 + \frac{p_{atm}}{\rho g} \right) = \left( Z_e - Z_1 + \frac{V_a^2}{2g} + \sum \Delta H_{asp} \right)$$

$$\frac{p_{vac.a}}{\rho g} = (Z_e - Z_1) + \left( \frac{V_a^2}{2g} + \sum \Delta H_{asp} \right)$$

Posons  $(Z_e - Z_1) = h_a$ , nous aurons :

$$\frac{p_{vac.a}}{\rho g} = h_a + \left( \frac{V_a^2}{2g} + \sum \Delta H_{asp} \right) \quad (4.1)$$

Cette dernière expression s'appelle la lecture du vacuomètre d'aspiration.

Où  $h_a$  est la différence entre le niveau du plan d'eau du réservoir d'aspiration et le niveau de l'emplacement de l'appareil de mesure à l'entrée de la pompe

Appliquons l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe et l'entrée du réservoir 2.

$$\left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{ref}$$

Pour une installation en dépression à la sortie de la pompe en place un manomètre et la pression absolue en ce point devient :

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g}, \frac{V_2^2}{2g} \approx 0 \text{ et } \frac{V_s^2}{2g} = \frac{V_r^2}{2g}$$

L'équation précédente de Bernoulli devient :

$$\left( Z_s + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) = \left( Z_2 + \frac{p_{atm}}{\rho g} + 0 \right) + \sum \Delta H_{ref} \Rightarrow \frac{p_{man.r}}{\rho g} = (Z_2 - Z_e) - \frac{V_r^2}{2g} + \sum \Delta H_{ref}$$

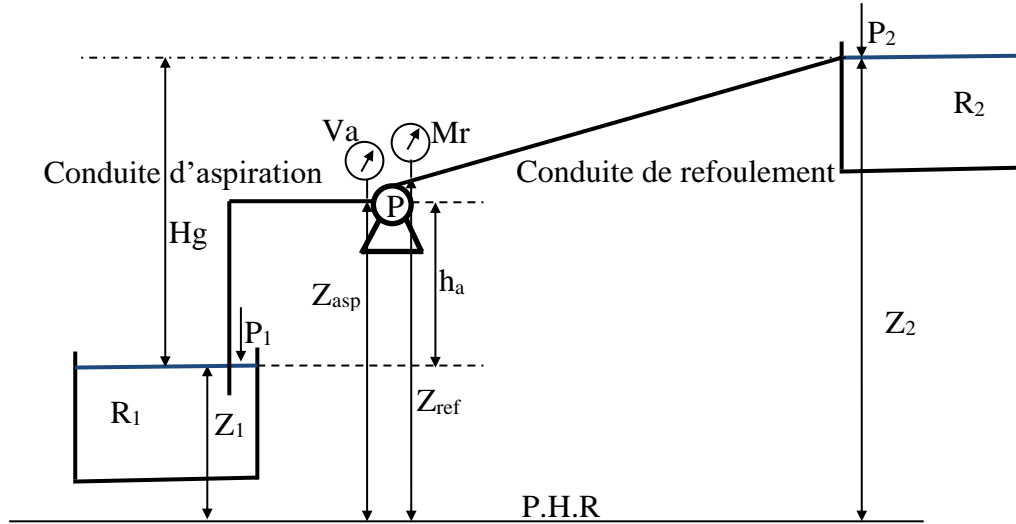
Posons  $(Z_e - Z_1) = h_a$ , nous aurons :

$$\frac{p_{man.r}}{\rho g} = h_r - \frac{V_r^2}{2g} + \sum \Delta H_{ref} \quad (4.2)$$

Cette expression s'appelle la lecture du manomètre de refoulement.

Où  $h_r$  la différence de niveau entre l'appareil de mesure placé à la sortie de la pompe et le niveau du réservoir supérieur.

La hauteur manométrique totale est définie comme étant la différence de charge totale entre la sortie  $H_s$ , et l'entrée,  $H_e$ , de la pompe.



**Fig. 4.6 : Installation en aspiration**

$$HMT = H_s - H_e$$

$$HMT = \left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right)$$

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} \text{ et } \frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g}; \quad \frac{V_s^2}{2g} = \frac{V_r^2}{2g} \text{ et } \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_a^2}{2g} \text{ d'où}$$

$$HMT = \left( Z_s + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} \right)$$

$$HMT = (Z_s - Z_e) + \left( \frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{p_{vac.a}}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g} \right) \quad (4.3)$$

**b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude**

Pour aboutir à la hauteur manométrique totale que doit assurer la pompe, nous appliquons l'équation de Bernoulli, entre le réservoir d'aspiration (réservoir inférieur) et l'entrée de la pompe par la suite entre la sortie de la pompe et le réservoir de refoulement (réservoir supérieur).

$$H_1 = H_e + \sum \Delta H_{asp} \Rightarrow H_e = H_1 - \sum \Delta H_{asp}$$

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} \Rightarrow \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{asp}$$

$$H_s = H_2 + \sum \Delta H_{\text{ref}} \Rightarrow H_s = H_2 + \sum \Delta H_{\text{ref}}$$

$$\left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{\text{ref}}$$

$$\text{HMT} = H_s - H_e$$

$$\text{HMT} = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{\text{ref}} - \left( \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{\text{asp}} \right)$$

$$\text{HMT} = (Z_2 - Z_1) + \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{\text{asp}} + \sum \Delta H_{\text{ref}} \quad (4.4)$$

La hauteur d'élévation est définie par la formule suivante :

$$H = H_g + \sum \Delta H$$

$$H_g = (Z_2 - Z_1) = \nabla \text{RS} - \nabla \text{RI}$$

Nous prenons le niveau de la mer comme référence ou bien par rapport à un repère bien défini. Où  $H_g$  est la hauteur géométrique ou géodésique, et  $\sum \Delta H$  peut s'écrire.

$$\sum \Delta H = \sum \Delta H_{\text{asp}} + \sum \Delta H_{\text{ref}}$$

$$H = H_g + \sum \Delta H_{\text{asp}} + \sum \Delta H_{\text{ref}}$$

$$\text{si } p_2 = p_1 = p_{\text{atm}} \Rightarrow \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) = 0 \text{ et } \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) \approx 0$$

$$\text{HMT} = H_g + \sum \Delta H_{\text{asp}} + \sum \Delta H_{\text{ref}} \quad (4.5)$$

Ce qui permet d'écrire dans ce cas  $\text{HMT}=H$ .

#### 4.4.2. Installation en charge

On doit suivre le même itinéraire comme l'installation en aspiration.

##### a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

La hauteur manométrique totale est définie comme étant la différence de charge totale entre la sortie  $H_s$ , et l'entrée,  $H_e$ , de la pompe.

$$\text{HMT} = H_s - H_e$$

$$\text{HMT} = \left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right)$$

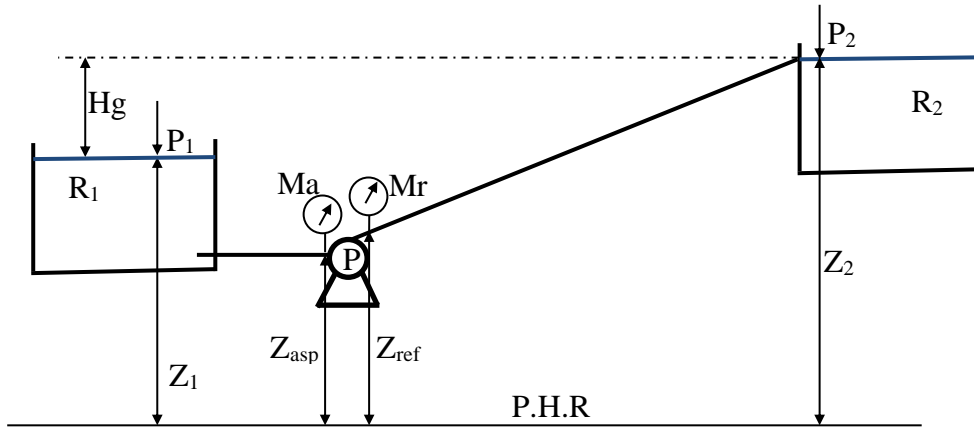


Fig. 4.7 : Installation en charge

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} \text{ et } \frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.a}}{\rho g}; \quad \frac{V_s^2}{2g} = \frac{V_r^2}{2g} \text{ et } \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_a^2}{2g} \text{ d'où}$$

$$HMT = \left( Z_s + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.r}}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p_{man.a}}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} \right)$$

$$HMT = (Z_s - Z_e) + \left( \frac{p_{man.r}}{\rho g} - \frac{p_{man.a}}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g} \right) \quad (4.6)$$

#### b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} \Rightarrow \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{asp}$$

$$\left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{ref}$$

$$HMT = H_s - H_e$$

$$HMT = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{ref} - \left( \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{asp} \right)$$

$$HMT = (Z_2 - Z_1) + \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} + \sum \Delta H_{ref} \quad (4.7)$$

#### 4.4.3. Installation en siphon

La représentation de l'installation en siphon est également nécessaire pour comprendre aisément ce cas.

#### a) Détermination de la hauteur manométrique totale à partir des appareils de mesure

La hauteur manométrique totale est définie comme étant la différence de charge totale entre la sortie  $H_s$ , et l'entrée,  $H_e$ , de la pompe.

$$HMT = H_s - H_e$$

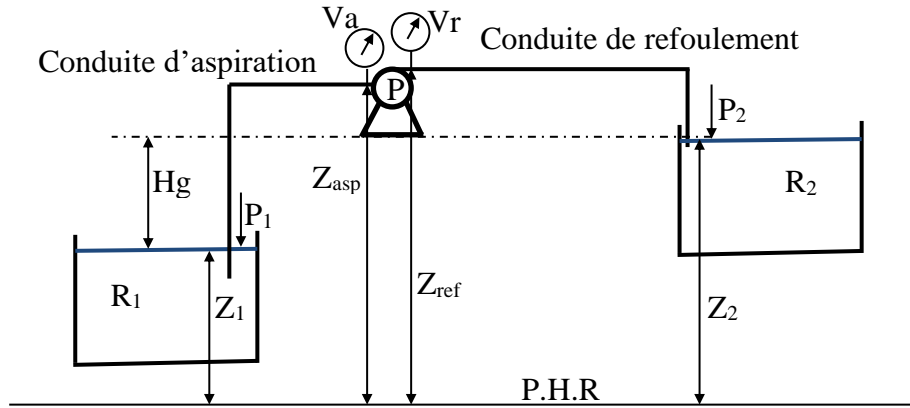


Fig. 4.8 : Installation en siphon

$$HMT = \left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right)$$

$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.r}}{\rho g} \text{ et } \frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g}; \frac{V_s^2}{2g} = \frac{V_r^2}{2g} \text{ et } \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_a^2}{2g} \text{ d'où}$$

$$HMT = \left( Z_s + \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.r}}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_{vac.a}}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} \right)$$

$$HMT = (Z_s - Z_e) + \left( \frac{p_{vac.a}}{\rho g} - \frac{p_{vac.r}}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_r^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g} \right) \quad (4.8)$$

**b) Détermination de la hauteur manométrique totale pendant l'étude**

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} \Rightarrow \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{asp}$$

$$\left( Z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} \right) = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{ref}$$

$$HMT = H_s - H_e$$

$$HMT = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{ref} - \left( \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \sum \Delta H_{asp} \right)$$

$$HMT = (Z_2 - Z_1) + \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) + \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + \sum \Delta H_{asp} + \sum \Delta H_{ref} \quad (4.9)$$

$$\text{si } p_2 = p_1 = p_{\text{atm}} \Rightarrow \left( \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right) = 0, (Z_2 - Z_1) = H_g \text{ et } \left( \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) \approx 0$$

$$\text{HMT} = H_g + \sum \Delta H_{\text{asp}} + \sum \Delta H_{\text{ref}} \quad (4.10)$$

## 4.6. Calcul des puissances

### 4.6.1 Puissance utile

La puissance fournie par la pompe appelée aussi la puissance utile est donnée par l'expression suivante :

$$P_u = \rho \cdot g \cdot H \cdot Q \quad (4.11)$$

### 4.6.2 Puissance absorbée

C'est la puissance fournie par le moteur électrique à la pompe est égale.

$$P_{\text{absorbée}} = C \cdot \omega \quad (4.12)$$

Où C est le couple du moteur électrique (N.m) et  $\omega$  la vitesse angulaire du moteur électrique (radian/seconde).

## 4.7. Rendement de la pompe

Le rendement de la pompe est défini comme étant le rapport de la puissance utile à puissance absorbée.

$$\eta_P = \frac{P_u}{P_{\text{absorbée}}} \cdot 100 \quad (4.13)$$

La pompe fonctionne dans des bonnes conditions pour un rendement maximum ( $\eta_{\text{max}}$ ), alors que la pompe fonctionne normale pour un débit bien déterminé.

## 4.8. Conclusion

La connaissance de l'emplacement de chaque appareil de mesure de la pression, pour les trois installations, et comment transformé leurs lectures en hauteur manométrique totale au niveau des stations de pompage peuvent aider davantage à un contrôle et une gestion raisonnables des stations de pompage.

En somme notre objectif était de démontrer les formules des hauteurs manométriques à partir des lectures des appareils de mesure et lors de l'étude. En effet, ces formules permettent, en premier cas, d'avoir sur place la hauteur de charge fournie par la station de pompage et, en second cas, elles fournissent le point (Q, H) permettant de faire le choix de la pompe.



## **CHAPITRE V**

### **Lois de similitudes des pompes à aubes**

## 5.1 Introduction

Les différentes roues des pompes contigües sont semblables en conformité du principe de similitude mécanique. Pour assurer cette dernière similitude il est indispensable d'assurer la similitude géométrique, cinématiques et dynamique.

## 5.2 Les différentes lois de similitude

### 5.2.1 Lois de similitude géométrique

La similitude géométrique est la proportionnalité des dimensions homologues d'une roue réelle et d'une roue modèle.

$$\frac{(D_1)_I}{(D_1)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} = \frac{(b_1)_I}{(b_1)_{II}} = \frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = \frac{(d_m)_I}{(d_m)_{II}} = \frac{(d_o)_I}{(d_o)_{II}} = \dots = \text{constante} \quad (5.1)$$

$(D1)_I, (D2)_I$  : diamètres successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe réelle.

$(D1)_{II}, (D2)_{II}$  : diamètres successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe modèle.

$(b1)_I, (b2)_I$  : espacement entre les deux flasques (disques) successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe réelle.

$(b1)_{II}, (b2)_{II}$  : espacement entre les deux flasques (disques) successivement à l'entrée et à la sortie de la roue de la pompe modèle.

$(d_m)_I$ : diamètre du moyeu de la roue de la pompe réelle.

$(d_m)_{II}$ : diamètre du moyeu de la roue de la pompe modèle.

$(d_o)_I$ : diamètre de l'ouïe de la roue de la pompe réelle.

$(d_o)_{II}$ : diamètre de l'ouïe de la roue de la pompe modèle.

### 5.2.2 Lois de similitude cinématique

La similitude cinématique est la proportionnalité des paramètres cinétiques homologues d'une roue réelle et d'une roue modèle. Elle signifie aussi la similitude des triangles des vitesses construits pour des points homologues des roues réelle et modèle.

$$\frac{(u_1)_I}{(u_1)_{II}} = \frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(v_1)_I}{(v_1)_{II}} = \frac{(v_2)_I}{(v_2)_{II}} = \frac{(V_{2u})_I}{(V_{2u})_{II}} = \frac{(V_{2r})_I}{(V_{2r})_{II}} = \frac{(V_2)_I}{(V_2)_{II}} = \dots = \text{constante} \quad (5.2)$$

### 5.2.3 Lois de similitude dynamique

La similitude cinématique est la proportionnalité des paramètres dynamiques homologues d'une roue réelle et d'une roue modèle.

Pour assurer la similitude mécanique le nombre de Reynolds du courent liquide qui passe à travers les pompes considérées doit être égaux entre eux. En pratique le mouvement du courent liquide à l'intérieure de la roue passe à un régime où il n' ya pas d'influence du nombre de Reynolds.

Considérons deux pompes semblables, une réelle et une autre modèle. La pompe réelle a comme dimensions  $(D_2)_I, (b_2)_I, (n)_I, Q_I, H_I, P_I$  et la deuxième pompe semblable à la première a également comme dimensions  $(D_2)_{II}, (b_2)_{II}, (n)_{II}, Q_{II}, H_{II}, P_{II}$  construisant les triangles de vitesses à la sortie de la pompe.

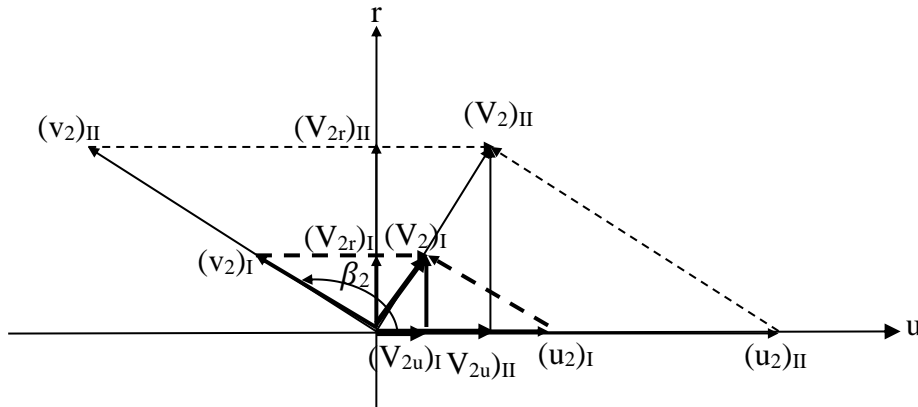


Fig. 5.1 : Epure des vitesses à la sortie des pompes réelle et modèle

**a) Rapport des charges**

Pour les pompes centrifuges radiales la hauteur d'élévation est donnée par l'expression

$$H = \frac{1}{g} u_2 V_2 \cos(\alpha_2) = \frac{1}{g} u_2 V_{2u}$$

Puisque  $V_2 \cos(\alpha_2) = V_{2u}$

$$(H)_I = (\eta_H)_I \cdot (\eta_V)_I \cdot \frac{(u_2)_I (V_{2u})_I}{g}$$

$$(H)_{II} = (\eta_H)_{II} \cdot (\eta_V)_{II} \cdot \frac{(u_2)_{II} (V_{2u})_{II}}{g}$$

Les rendements hydraulique et volumétrique, en pratique, varient très peu avec la variation des dimensions de la roue, ce qui permet d'écrire le rapport  $(H)_I$  sur  $(H)_{II}$  comme suit :

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \frac{(u_2)_I (V_{2u})_I}{(u_2)_{II} (V_{2u})_{II}}$$

De la similitude cinématique on peut extraire :

$$\frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(V_{2u})_I}{(V_{2u})_{II}}$$

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \frac{(u_2)_I^2}{(u_2)_{II}^2}$$

$$u_2 = \omega \frac{D_2}{2} = \frac{2\pi n D_2}{60 \cdot 2}$$

$$(u_2)_I = \frac{2\pi(n)_I (D_2)_I}{60 \cdot 2} \text{ et } (u_2)_{II} = \frac{2\pi(n)_{II} (D_2)_{II}}{60 \cdot 2}$$

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \frac{(u_2)_I^2}{(u_2)_{II}^2} = \frac{\left(\frac{2\pi(n)_I (D_2)_I}{60 \cdot 2}\right)^2}{\left(\frac{2\pi(n)_{II} (D_2)_{II}}{60 \cdot 2}\right)^2}$$

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(n)_I (D_2)_I}{(n)_{II} (D_2)_{II}}\right)^2 \quad (5.3)$$

a) Si le nombre de tours de la pompe réelle est égal au nombre de tours de la pompe modèle  $(n)_I=(n)_{II}$ , dans ce cas le rapport de charges est proportionnelle au carré du rapport des diamètres extérieurs des roues.

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\right)^2 \quad (5.3.1)$$

b) Si on a des pompes identiques réelle et prototype, on peut avoir ceci mais les nombres de tours différents, dans ce cas le rapport de charges est proportionnelle au carré du rapport des vitesses de rotation.

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^2 \quad (5.3.2)$$

### b) Rapport des débits

Le débit d'une pompe à aubes déjà déterminé au second chapitre est donné par l'expression :

$$Q = -\pi D_2 b_2 u_2 \operatorname{tg}(\beta_2) \left(1 - \frac{gH_{th}}{u_2^2}\right)$$

$$Q = V \cdot S = \pi D_2 b_2 V_{2r}$$

Le rapport des débits de la pompe réelle et de celle modèle s'écrit :

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{\pi(D_2)_I (b_2)_I (V_{2r})_I}{\pi(D_2)_{II} (b_2)_{II} (V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I (b_2)_I (V_{2r})_I}{(D_2)_{II} (b_2)_{II} (V_{2r})_{II}}$$

Utilisons les lois de similitudes géométrique et cinématique pour réécrire l'expression du débit :

$$\frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}$$

$$\frac{(V_{2r})_I}{(V_{2r})_{II}} = \frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}}$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{\pi(D_2)_I(b_2)_I(V_{2r})_I}{\pi(D_2)_{II}(b_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} \frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} \cdot \frac{2\pi(n)_I}{60} \frac{(D_2)_I}{2}}{\frac{2\pi(n)_{II}}{60} \frac{(D_2)_{II}}{2}}$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \frac{((D_2)_I)^3}{((D_2)_{II})^3} \quad (5.4)$$

a) Si le nombre de tours de la pompe réelle est égal au nombre de tours de la pompe modèle  $(n)_I=(n)_{II}$ , dans ce cas le rapport de débits est proportionnelle à la puissance troisième du rapport des diamètres extérieurs des roues.

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{((D_2)_I)^3}{((D_2)_{II})^3} \quad (5.4.1)$$

b) Si on a des pompes identiques réelle et prototype  $(D_2)_I=(D_2)_{II}$ , on peut avoir ceci mais les nombres de tours différents, dans ce cas le rapport de débits est proportionnelle au rapport des vitesses de rotation.

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \quad (5.4.2)$$

### c) Rapport des puissances

La puissance fournie par une pompe est donnée par la relation

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

Le rapport des puissances fournies par la pompe réelle et celle modèle s'écrit :

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \frac{\rho \cdot g(Q)_I(H)_I}{\rho \cdot g(Q)_{II}(H)_{II}} = \frac{(Q)_I(H)_I}{(Q)_{II}(H)_{II}} = \left( \frac{(n)_I(D_2)_I}{(n)_{II}(D_2)_{II}} \right)^2 \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \frac{((D_2)_I)^3}{((D_2)_{II})^3} = \left( \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \right)^3 \frac{((D_2)_I)^5}{((D_2)_{II})^5}$$

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \left( \frac{(n)_I}{(n)_{II}} \right)^3 \frac{((D_2)_I)^5}{((D_2)_{II})^5} \quad (5.5)$$

a) Si le nombre de tours de la pompe réelle est égal au nombre de tours de la pompe modèle  $(n)_I=(n)_{II}$ , dans ce cas le rapport de débits est proportionnelle à la puissance cinquième du rapport des diamètres extérieurs des roues.

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \frac{((D_2)_I)^5}{((D_2)_{II})^5} \quad (5.5.1)$$

b) Si on a des pompes identiques réelle et prototype  $(D_2)_I=(D_2)_{II}$ , on peut avoir ceci mais les nombres de tours différents, dans ce cas le rapport de débits est proportionnelle à puissance troisième du rapport des vitesses de rotation.

$$\frac{(P)_I}{(P)_{II}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^3 \quad (5.5.2)$$

### 5.3 Vitesse spécifique

La vitesse spécifique désigné par  $N_s$  est le nombre de tours par minute auquel devrait tourner la roue d'une pompe à aubes qui déborderait un débit de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  à  $1 \text{ m}$  de hauteur (charge), généralement elle est calculée pour un rendement ( $\eta$ ) maximum, donc pour un point correspondant à des valeurs  $Q$  et  $H$  bien définies et les mieux adaptées pour la pompe. En effet, sans cette condition il y aurait une infinité de valeur de  $N_s$ .

$$\frac{(H)_I}{(H)_{II}} = \left(\frac{(n)_I(D_2)_I}{(n)_{II}(D_2)_{II}}\right)^2 \quad (5.3)$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(n)_I ((D_2)_I)^3}{(n)_{II} ((D_2)_{II})^3} \quad (5.4)$$

Essayons d'éliminer dans ce cas là le diamètre, mettons (5.3) à la puissance (3/2) et la diviser sur (5.4) nous aurons.

$$\frac{\left(\frac{(H)_I}{(H)_{II}}\right)^{3/2}}{\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}}} = \frac{\left(\frac{(n)_I(D_2)_I}{(n)_{II}(D_2)_{II}}\right)^3}{\frac{(n)_I ((D_2)_I)^3}{(n)_{II} ((D_2)_{II})^3}} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{(H)_I}{(H)_{II}}\right)^{3/2} \cdot \frac{(Q)_{II}}{(Q)_I} = \left(\frac{(n)_I}{(n)_{II}}\right)^2$$

$$\frac{(n)_I}{(n)_{II}} = \left(\frac{(H)_I}{(H)_{II}}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{(Q)_{II}}{(Q)_I}\right)^{1/2} \text{ d'où } (n)_I \frac{((Q)_I)^{1/2}}{((H)_I)^{3/4}} = (n)_{II} \frac{((Q)_{II})^{1/2}}{((H)_{II})^{3/4}} = \dots = \text{constante}$$

$$N_s = n \cdot \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{H^3}} \quad (5.6)$$

Où  $N_s$  est exprimée en tours/minutes,  $Q$  en ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) et  $H$  en mètre de colonne du liquide.

Le plus souvent la vitesse spécifique,  $N_s$ , est considérée comme un nombre sans dimensions, ce qui n'est pas exacte et parfois elle exprimée en (tours/minutes).

Si la vitesse spécifique justifiée (spécifiée) le type (série) de la pompe dans ce cas elle sans dimensions.

Si à partir de la vitesse spécifique on calcule les performances  $H$  et  $Q$ , on prendra  $N_s$  avec unité (avec dimensions) tours/minutes.

**5.4 Rôles de la vitesse spécifique**

La vitesse spécifique permet :

- \* De spécifier le (choix, type, série, modèle) de la pompe ;
- \* De faire la classification hydraulique des pompes ;
- \* De comparer divers types de roues (fermée, ouverte, semi ouverte) ;
- \* De faire l'étude de grandes pompes en utilisant les modèles réduits ;
- \* De choisir la pompe la plus adaptée pour des conditions bien déterminées.

**Tableau 5.1 : Classification des pompes en fonction de la vitesse spécifique**

Pompe centrifuge radiale			Pompe semi axiale	Pompe axiale
A faible vitesse $N_s \leq 80$	A vitesse normale $N_s = 80 \div 140$	A vitesse rapide $N_s = 140 \div 300$	$N_s = 300 \div 600$	$N_s = 600 \div 1800$
$(D2/Do) \approx 2,5$	$(D2/Do) \approx 2$	$(D2/Do) \approx 1,8 \div 1,4$	$D2/Do \approx 1,2 \div 1,1$	$D2/Do \approx 0,8 \div 0,6$

Si la vitesse spécifique  $N_s$  est grande, la hauteur d'élévation  $H$  est faible et le débit  $Q$  est important la pompe est axiale et la roue est ouverte.

**5.5 Conclusion**

Les trois principales lois de similitude obtenues reliant les paramètres de la roue réelle à celle du modèle ayant des relations directes avec les rapports de leurs vitesses de rotation et de leurs diamètres extérieurs des roues.

L'importance des lois de similitudes apparait nettement surtout lors de l'étude du choix du mode de réglage, du débit de la pompe au point de fonctionnement, le plus adapté et comment faire l'étude sur modèle réduit de grandes pompes.

La vitesse spécifique permet de classier les pompes et de distinguer le type de la roue (fermée, ouverte, semi-ouverte).

## **CHAPITRE VI**

### **Phénomène de cavitation causes, conséquences et calage**



### 6.1 Introduction

L'installation des pompes aux stations de pompage pour aspirer et refouler un liquide demande une certaines attentions pour que les pompes atteignent leurs durées de vie probables. Ces attentions peuvent aller de la protection contre la corrosion jusqu'à la protection de ces pompes contre les phénomènes qui détériorent leurs performances à l'instar du phénomène de cavitation.

La protection des pompes contre ce phénomène nécessite la connaissance de ces causes et ces conséquences ainsi que tous les facteurs entrant à sa reproduction. Nous allons entamer ce volet par l'étude de la cavitation en différents types d'installation en décortiquant le (N.P.S.H)<sub>d</sub>, le (N.P.S.H)<sub>r</sub> et la hauteur d'aspiration admissible. Par la suite, les procédés de bien caler une pompe, en différents types d'installation, sans aucun risque de cavitation seront l'âme de ce volet.

### 6.2. Définition et cause de la cavitation

La cavitation est la perturbation des veines liquides à l'intérieure d'une pompe, c'est-à-dire la formation de cavités ou de poches, bulles de vapeur ou du gaz dissous dans l'eau, dans une masse de liquide en écoulement.

L'aspiration du liquide est effectuée sous l'effet de la différence entre la pression atmosphérique qui agit sur la surface du liquide libre représentée par le réservoir d'aspiration et la pression absolue à l'entrée de la pompe qui est inférieure à la pression atmosphérique.

Dans le cas où la pression à l'entrée de la pompe n'est pas trop faible, la pompe fonctionne normalement mais dans le cas contraire la pression absolue atteint les valeurs minimales et par conséquent la cavitation fait son apparition et se produit une vaporisation du liquide dans les régions de basse pression, généralement dans l'entrée de la roue, au même temps l'air et le gaz dissous dans le liquide peuvent être naturellement libérés.

La diminution de la pression absolue à l'entrée de la pompe au-dessous d'une limite, qu'on appelle la pression de vapeur du liquide, ( $P_{\text{absolue}} \leq p_v$ ) génère la formation de cavités ce qu'on appelle le phénomène de cavitation.

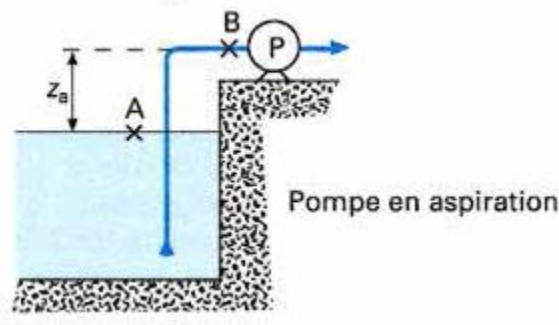
C'est à partir de cette définition qu'on peut démontrer la charge totale nette à l'aspiration disponible de l'installation abrégée en (N.P.S.H)<sub>d</sub> qui vient des mots anglais (Net positive section Head).

### 6.3. Etude de la cavitation dans les différentes installations des pompes

#### 6.3.1 Installation en dépression (aspiration)

Soit l'installation en dépression représentée sur la figure 6.1, Appliquons l'équation de Bernoulli entre le point du niveau minimum (A) du réservoir d'aspiration et le point d'entrée d'eau dans la pompe (B).

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \Delta H_{1,e}$$



**Fig.6.1 : Installation en aspiration**

$\Delta H_{1,e}$  est la somme de toutes les pertes de charge à l'aspiration (singulières et linéaires) donc on peut écrire.

$$\left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( Z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \right) + \Delta H_{\text{aspiration}}$$

On peut tirer la pression à l'entrée de la pompe à partir de cette dernière :

$$\frac{p_e}{\rho g} = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{V_e^2}{2g} \right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

$(N.P.S.H)_d$  est définie comme étant la valeur en mètre de colonne du liquide de la pression absolue à l'entrée de la pompe,  $p_e/\rho g$ , diminuée de la tension du vapeur,  $p_v/\rho g$ , pour la température du liquide à aspirer.

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_e}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$(N.P.S.H)_d = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( Z_e + \frac{V_e^2}{2g} \right) - \Delta H_{\text{aspiration}} - \frac{p_v}{\rho g}$$

$$(N.P.S.H)_d = (Z_1 - Z_e) + \left( \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g} \right) + \left( \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} \right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g}; Z_e - Z_1 = h_a; \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g}; \frac{V_1^2}{2g} \approx 0$$

$$\frac{V_1^2}{2g} \approx 0 \text{ puisque la vitesse de descente du plan d'eau est très faible}$$

Prenons le plan horizontal de références au niveau de l'axe de la pompe et posons les termes suivants, nous aurons :

$$(N. P. S. H)_d = (Z_1 - Z_e) + \left(0 - \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g}\right) + \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

$$(Z_1 - Z_e) = -h_a$$

Avec  $h_a$  la hauteur géométrique (géodésique) d'aspiration qui est la différence entre le niveau de l'axe de la pompe et celui du niveau minimum du plan d'eau dans le réservoir d'aspiration.

$$(N. P. S. H)_d = (-h_a) + \left(0 - \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g}\right) + \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

$$(N. P. S. H)_d = \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}\right) - \left(h_a + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}}\right)$$

$$(N. P. S. H)_d = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}}\right) \quad (6.1)$$

$\frac{p_v}{\rho g} = h_v$  est la hauteur de la tension du liquide

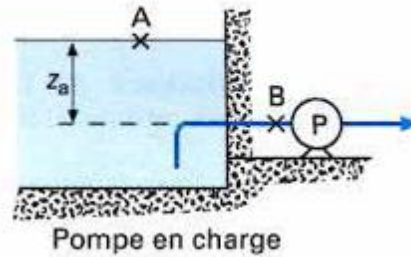
### 6.3.2. Installation en charge (forcée)

Procédons, à la figure 6.2, le même itinéraire de l'installation en aspiration, la charge nette d'aspiration disponible prend l'expression suivante :

$$(N. P. S. H)_d = \frac{p_e}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} \text{ avec } \frac{p_e}{\rho g} = \left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) - \left(Z_e + \frac{V_e^2}{2g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

Pour une installation en charge (forcée), le niveau minimum dans le réservoir d'aspiration est supérieur au niveau de l'axe de la pompe et par conséquent la différence de cotes géométriques entre le réservoir d'aspiration et l'axe de la pompe est positive.

$$Z_1 - Z_e = h_a$$



**Fig.6.2 : Installation en charge**

$$(N. P. S. H)_d = \frac{p_e}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} = \left(Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}\right) - \left(Z_e + \frac{V_e^2}{2g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}} - \frac{p_v}{\rho g}$$

$$(N. P. S. H)_d = (Z_1 - Z_e) + \left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_e^2}{2g}\right) + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

$$(N.P.S.H)_d = (h_a) + \left(0 - \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g}\right) + \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g}\right) - \Delta H_{\text{aspiration}}$$

Ce qui permet d'écrire la hauteur nette d'aspiration sous la forme suivante :

$$(N.P.S.H)_d = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g} - \left(-h_a + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}}\right) \quad (6.2)$$

### 6.3.3. Installation de type siphon

Cette installation a une relation de (NPSH)<sub>d</sub> similaire à celle d'une installation en aspiration.

$$(N.P.S.H)_d = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g} - \left(h_a + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}}\right) \quad (6.3)$$

## 6.4. Les valeurs de la pression atmosphérique et les relations de la pression de la vapeur d'eau

### 6.4.1. La pression atmosphérique

La pression atmosphérique peut être calculée par deux formules qui sont :

#### 6.4.1.1. Formule de la pression atmosphérique obtenue de l'équation différentielle

Elle est donnée en fonction de l'altitude pour une atmosphère isotherme par l'expression :

$$P_{\text{atm}}(Z) = P_0 e^{-\frac{M \cdot g \cdot Z}{R \cdot T}} \quad (6.4)$$

Avec  $P_0$  la pression atmosphérique à côté de la mer ( $P_0=101325$  Pascals)

$M=29,966 \cdot 10^3$  kg/mole ;  $g=9.805$  m/s<sup>2</sup> ;  $R=8,314510$  J/(mole.K) ;  $T=(t^\circ\text{C}+273,15)$ K

C'est une formule qui ne peut être utilisée que pour de petites valeurs de  $z$ .

Pour mieux tenir compte des conditions actuelles, dans le cas où on connaît la pression actuelle  $P_1$  en lieu proche d'altitude  $Z_1$ , on utilise de préférence la formule suivante.

$$P_{\text{atm}}(Z) = P_1 e^{-\frac{M \cdot g \cdot (Z - Z_1)}{R \cdot T}} \quad (6.5)$$

#### 6.4.1.2. Modèle d'atmosphère standard avec gradient de température constant

Ce modèle permet d'avoir la pression atmosphérique en se basant sur la formule du nivellement barométrique donnée par l'expression suivante.

$$P_{\text{atm}}(Z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} Z\right)^{\frac{M \cdot g}{R \cdot a}} \quad (6.6)$$

Avec  $a=6,5 \cdot 10^{-3}$  K/m.

$$T_0 = (t^\circ\text{C} + 273,15)\text{K}$$

Cette formule peut être utilisée, avec prudence, jusque vers environ 12000 mètres d'altitude.

Pour mieux tenir compte des conditions actuelles, dans le cas où on connaît la pression actuelle  $P_1$  en lieu proche d'altitude  $Z_1$ , on utilise de préférence la formule

$$P_{\text{atm}}(Z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} (Z - Z_1)\right)^{\frac{M \cdot g}{R \cdot a}} \quad (6.7)$$

## CHAPITRE VI Phénomène de cavitation causes, conséquences et calage

Le tableau ci-après donne les valeurs de la pression atmosphérique, en pascals, pour plusieurs valeurs de l'altitude.

Tableau (6.1) : Valeurs de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude

Altitude	0	100	200	300	400
-500	107476	106223	104981	103750	102532
0	101325	100130	98946	97773	96612
500	95462	94323	93195	92078	90972
1000	99876	88792	87718	86654	85601
1500	84559	83526	82504	81492	80490
2000	79498	78516	77544	76582	75629

### 6.4.2. La pression de la vapeur du liquide

La tension de vaporisation d'un liquide est étroitement liée à la température. En hydraulique on s'intéresse beaucoup plus à l'eau. Dans le tableau suivant, nous donnons les valeurs de la pression de vapeur en fonction de la température.

Tableau (6.2) : Valeurs de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude

Température (°C)	Pression de vapeur (bar)	Température (°C)	Pression de vapeur (bar)	Température (°C)	Pression de vapeur (bar)
0	0,00610	80	0,4735	210	19,0608
2	0,00872	85	0,5781	220	23,1712
10	0,01228	90	0,7012	229,1	27,4680
15	0,0171	95	0,8455	239,3	33,3540
20	0,0233	100	1,0137	249,3	39,2400
25	0,0317	105	1,2085	260,3	47,0880
30	0,0425	110	1,4330	268,8	53,9550
35	0,0562	120	1,9855	279,7	63,7650
40	0,0738	130	2,7015	289,4	73,5750
45	0,0958	140	3,6135	309,7	98,1000
50	0,1234	150	4,7600	323,3	117,7200
55	0,1572	160	6,1789	329,5	127,5300
60	0,1989	170	7,9180	340,7	147,1500
65	0,2499	180	10,0209	350,9	166,7700
70	0,3115	190	12,5421	360,2	186,3900
75	0,3854	200	15,5332	372,4	215,8200
				374	219,9402

1 bar=10<sup>5</sup> pascals ; 1kgf/cm<sup>2</sup>=98100 pascals ; 1 atmosphère=101325 pascals ;  
1atmosphère=76cm de mercure (Hg) ; 1 atmosphère=10.3287 ≈10,33 m.c.e.

### 6.5. Vitesse d'aspiration

En écoulement permanent (Q= constant) la vitesse moyenne à l'aspiration, V<sub>a</sub>, d'une pompe est donnée par l'expression suivante :

$$V_a = \frac{Q}{S_a} \quad (6.8)$$

Avec S<sub>a</sub> la surface de la section transversale de la conduite d'aspiration en m<sup>2</sup>.

### 6.6. Perte de charge à l'aspiration

$$\Delta H_{\text{aspiration}} = R \cdot Q^2 \quad (6.9)$$

Où R est la résistance totale à l'aspiration  $R=R_S+R_L$

### 6.7. Effets de la cavitation

La cavitation est la vaporisation d'un fluide soumis à une pression inférieure à sa pression de vapeur. Ce phénomène se manifeste par la formation, au sein de l'écoulement, de bulles, poches, tourbillons ou torches de vapeur. Dans les pompes, ces structures de vapeur apparaissent dans les zones de faible pression à l'entrée des aubes de roue et sont transportées dans les zones à plus haute pression. Sous l'action du gradient de pression, elles implosent dès que la pression locale dans l'écoulement redevient supérieure à la pression de vapeur. Ces implosions produisent des microjets et des surpressions (onde de choc) qui peuvent atteindre plusieurs centaines, voire milliers de bar.

#### 6.7.1. Conséquences de la cavitation

##### 6.7.1.1. Érosion de cavitation

Lorsque certaines conditions de fonctionnement de la pompe sont réunies, comme, par exemple :

- marche à régime partiel ;
  - pompage à très grande hauteur [ $H > 100$  m] ;
  - pression de service à l'aspiration faible ;
  - nature du liquide véhiculé et du matériau constitutif de la roue,
- etc. ;

Les implosions répétées des poches de cavitation, qui se produisent près des parois métalliques, altèrent progressivement la structure cristalline dans le cas des alliages métalliques ou les matériaux d'autres natures (plastiques) et peuvent détruire très rapidement les aubes de la roue : c'est le phénomène d'érosion par cavitation. Mais avant d'en arriver à ce cas extrême, qui doit bien entendu être évité, la cavitation peut avoir d'autres conséquences néfastes pour le bon fonctionnement des groupes de pompage.

##### 6.7.1.2. Bruit de cavitation

La première manifestation d'une pompe qui cavite est le bruit, qui révèle la présence de microbulles dans l'écoulement. Ce bruit hydraulique généré par la cavitation excite ensuite les parois de la pompe et des tuyauteries proches de celle-ci. Les tuyauteries, à leur tour, rayonnent ce bruit dans le milieu aérien ambiant. De cette façon, lorsqu'une pompe cavite de manière importante, on enregistre un bruit caractéristique de crépitements et claquements quelquefois assimilé au bruit d'agrégats dans une bétonnière ou de concasseur.

Pour des machines de grande taille ou tournant très vite, le bruit aérien généré par la cavitation peut être gênant pour l'utilisateur ou l'environnement. Cependant, la part du bruit qui incombe directement à la cavitation ne représente qu'une faible partie du bruit rayonné par les pompes.

##### 6.7.1.3. Pertes de performances

Pour des poches de vapeur encore plus développées, les pompes subissent des chutes de leurs performances (hauteur totale d'élévation, rendement, puissance) qui les rendent inutilisables ; ce phénomène est souvent décrit comme la chute de caractéristiques ou improprement comme le (N.P.S.H) requis de la pompe.

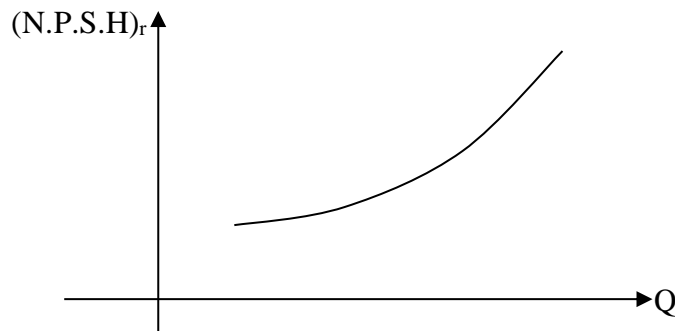
### 6.7.1.4. Vibrations

Lorsque les poches de vapeur à l'entrée de la pompe atteignent une dimension importante vis-à-vis de la taille de la pompe, du niveau de pression ou du (NPSH)<sub>disp</sub> à l'entrée de la roue, une augmentation du niveau vibratoire due à la cavitation peut se rencontrer.

Parfois, on peut également avoir des interactions entre la pompe en régime de cavitation et le circuit sur laquelle elle débite.

### 6.8. Charge nette d'aspiration requise (N.P.S.H)<sub>r</sub>

La charge totale nette à l'aspiration requise est une donnée fournie par le constructeur des pompes, généralement c'est une courbe représentant (N.P.S.H)<sub>r</sub> en fonction du débit, sa représentation approximative pour les pompes centrifuges radiales prend la forme de la figure 6.3.



**Fig.6.3 : Graphique de charge totale nette à l'aspiration requise en fonction du débit**

Cette courbe est obtenue lors des essais de pompage. Lors de ces derniers, la construction des courbes cavitationnelle donne la capacité d'aspiration qui dépend de la nature du liquide et du type de matériau.

La cavitation se produit lorsque la pression absolue du liquide, qui décroît depuis la bride d'aspiration jusqu'à un certain point à l'intérieur de la roue (c'est-à-dire que la pression absolue minimale n'est pas atteinte au point à l'entrée de la pompe mais plus loin à l'intérieur de la pompe) atteint, pour ce point, une valeur minimale correspondant à la pression de vapeur pour la température du liquide pompé.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre un point A à l'entrée de la pompe et un point B à l'intérieur de la pompe nous aurons :

$$\left( Z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} \right) = \left( Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} \right) + \Delta H_{AB}$$

Mettons  $Z_A \approx Z_B$  et supposons que lors de la cavitation la pression au point B atteigne la pression de vapeur  $\frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_v}{\rho g}$  et par conséquent la pression absolue au point A atteigne également  $P'A$ .

$$\begin{aligned} \frac{p_A}{\rho g} &= \frac{p'_A}{\rho g} \\ \left( Z_A + \left( \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{p'_A}{\rho g} \right) + \frac{V_A^2}{2g} \right) &= \left( Z_B + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} \right) + \Delta H_{AB} \\ \frac{p'_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} &= \frac{p_v}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \Rightarrow \frac{p'_A}{\rho g} = \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V_A^2}{2g} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \end{aligned}$$



$$\frac{P'_A}{\rho g} = h_v - R_1 Q^2 + R_2 Q^2 + R_3 Q^2$$

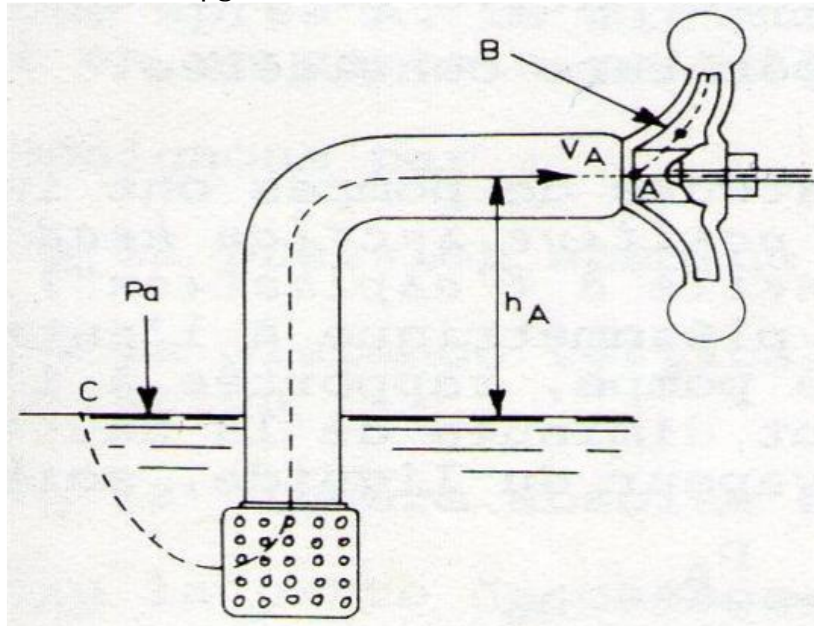


Fig.6.3 : Schéma de l'écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'une pompe

$$\frac{P'_A}{\rho g} = h_v + (R_2 + R_3 - R_1) Q^2$$

Où  $h_v$  la tension de vapeur du liquide.

$$\frac{V_A^2}{2g} = R_1 Q^2; \quad \frac{V_B^2}{2g} = R_2 Q^2; \quad \Delta H_{AB} = R_3 Q^2$$

$$\frac{P'_A}{\rho g} = h_v + R Q^2$$

Par analogie avec la définition de (N.P.S.H) d, le (N.P.S.H) requis, qui se mesure au même point que le (N.P.S.H) disponible c'est-à-dire au niveau de l'axe à l'entrée de la bride d'aspiration, a comme expression :

$$(N.P.S.H)_r = \frac{P'_A}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g} \Rightarrow (N.P.S.H)_r = R Q^2 \quad (6.10)$$

La cavitation apparaît lorsque la pression absolue à la bride d'aspiration est supérieure à la pression de vapeur du liquide d'une valeur valant  $R Q^2$ , R étant un coefficient tenant compte des différences de vitesses et des pertes de charge entre la bride d'aspiration et le point de pression minimale à l'intérieur de la roue pour le pompage d'un débit Q.

Pour que la cavitation n'apparaisse pas, il faut que l'on ait

$$\frac{P_e}{\rho g} > \frac{P'_A}{\rho g} \text{ ou } (N.P.S.H)_d > (N.P.S.H)_r \quad (6.11)$$

La courbe  $P'_A$  en  $f(Q)$  est une équation d'une parabole ne passant pas par l'origine mais elle passe par le point d'ordonnée égal  $h_v$ , cette courbe est la représentation graphique de (N.P.S.H) requis donnée aux catalogues des pompes.



La charge totale nette à l'aspiration requise (N.P.S.H. requis) est indépendante de l'installation de la pompe (hauteur d'aspiration) mais elle dépend uniquement de ce qui se passe entre l'entrée et l'intérieure de la pompe, c'est à dire de la pompe elle-même.

### 6.9. Condition de non cavitation

Pour éviter tous risques de cavitation dans n'importe quel type d'installation au niveau des stations de pompage, il suffit d'avoir la charge nette d'aspiration disponible supérieure à la charge nette d'aspiration requise  $(N.P.S.H)_d \geq (N.P.S.H)_r$ .

Pratiquement pour éviter tous risques de cavitation on prend une certaine marge de sécurité.

$$(N.P.S.H)_d = (N.P.S.H)_r + S \quad (6.12)$$

La valeur de cette marge allant de 0,1 à 0,5 c'est-à-dire  $S=(0,1 \div 0,5)$  m.

- C'est la variation du plan d'eau n'est pas énorme, on prend  $S=0,1$
- C'est la variation de la température n'est pas énorme, on prend  $S=0,1$
- Pour les pompes à doubles flux (pompes volumétriques), on prend  $S=(0,1 \div 0,5)$ .
- Pour une grande variation du plan d'eau, on prend  $S=0,3, 0,4$  et  $0,5$ .
- Pour une grande variation de la température, on prend  $S > 0,1$ .

Pour cela, on doit caler (positionner) notre pompe (nos pompes) correctement par rapport au plan d'eau d'aspiration.

### 6.10. Hauteur d'aspiration admissible

C'est la différence de cotes entre le niveau de l'axe de la pompe et le niveau minimum du plan d'eau du réservoir d'aspiration pour laquelle la pompe ne cavite pas. Donc, il est obligatoire de déterminer sa valeur exactement. Elle liée au du type d'installation réalisée au niveau de la station de pompage (installation en aspiration ou en charge).

#### 6.10.1. Installation en aspiration

La détermination de la hauteur d'aspiration admissible est reliée à l'expression suivante :

$$(N.P.S.H)_d = (N.P.S.H)_r + S$$

Cette dernière permet d'écrire :

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left( h_a^{admissible} + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration} \right) = (N.P.S.H)_r + S$$

Ce qui permet de retrancher  $h_{adm}$ .

$$h_a^{admissible} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V_{aspiration}^2}{2g} - \Delta H_{aspiration} - (N.P.S.H)_r - S \quad (6.13)$$

#### 6.10.2. Installation en charge

Pour une installation en charge nous aurons :

$$\frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left( -h_a^{admissible} + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration} \right) = (N.P.S.H)_r + S$$

$$h_a^{admissible} = \frac{p_v}{\rho g} - \frac{p_{atm}}{\rho g} + \frac{V_{aspiration}^2}{2g} + \Delta H_{aspiration} + (N.P.S.H)_r + S \quad (6.14)$$

### 6.11. Calage des pompes

#### 6.11.1. Définition du calage d'une pompe

Le calage est de bien positionner l'axe de la pompe par rapport au plan d'eau du réservoir d'aspiration sans aucun risque de cavitation.

#### 6.11.2. Installation en aspiration

Le niveau de l'axe de la pompe est égal au niveau minimum du réservoir d'aspiration plus la charge d'aspiration admissible moins une marge de sécurité.

$$\nabla_{\text{axe de la pompe}} = \nabla_{\text{minimum du réservoir}} + h_a^{\text{admissible}} - r \quad (6.15)$$

Avec  $r = (0,1 \div 0,3)$  m

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{axe de la pompe}} = \nabla_{\text{minimum du réservoir}} \\ + \left( \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} - \Delta H_{\text{aspiration}} - (\text{N. P. S. H})_r - S \right) - r \end{aligned} \quad (6.16)$$

#### 6.11.3. Installation en charge

$$\nabla_{\text{axe de la pompe}} = \nabla_{\text{minimum du réservoir}} - h_a^{\text{admissible}} + r \quad (6.17)$$

Où  $r = (0,1 \div 0,3)$  m.

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{axe de la pompe}} = \nabla_{\text{minimum du réservoir}} - \left( \frac{p_v}{\rho g} - \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}} + (\text{N. P. S. H})_r + S \right) \\ + r \end{aligned} \quad (6.18)$$

### 6.12. Détermination de la zone de cavitation

La détermination de la zone de cavitation s'avère d'une très grande importance pour éviter que le point de fonctionnement de notre système soit en dehors de cette zone. Donc le retraçage de la courbe  $(\text{N.P.S.H})_r$  en fonction du débit ainsi que  $(\text{NPSH})_d$  pour les mêmes valeurs du débit permettent d'avoir deux courbes qui se croisent.

A partir du point d'intersection de ces deux courbes, on trace une ligne verticale parallèle à l'axe des ordonnées, la zone se trouvant à droite de cette ligne s'appelle la zone de cavitation et cette à gauche la zone de non cavitation.

La charge nette d'aspiration admissible pour les trois types d'installation peut s'écrire comme suit :

$$(\text{N. P. S. H})_d = A + R \cdot Q^2 \quad (6.19)$$

Puisque

$$\begin{aligned} (\text{N. P. S. H})_d = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - \left( h_a + \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} + \Delta H_{\text{aspiration}} \right) \\ (\text{N. P. S. H})_d = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - h_a - \frac{V_{\text{aspiration}}^2}{2g} - \Delta H_{\text{aspiration}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ecrivons cette relation en fonction du débit, nous aurons :

$$(N.P.S.H)_d = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - h_a - \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi d_a^2}{4}\right)^2} - \left( \frac{8\lambda_a L_a}{g\pi^2 d_a^5} + \sum \xi_{ia} \frac{8}{g\pi^2 d_a^4} \right) \cdot Q^2 \quad (6.21)$$

$$(N.P.S.H)_d = A + R \cdot Q^2$$

Ce qui donne une forme parabolique, lors de la représentation en fonction du débit, à la charge nette d'aspiration disponible.

$$\text{avec } A = \frac{p_{atm}}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} - h_a \text{ et } R = - \left( \frac{8}{g\pi^2 d_a^4} + \frac{8\lambda_a L_a}{g\pi^2 d_a^5} + \sum \xi_{ia} \frac{8}{g\pi^2 d_a^4} \right)$$

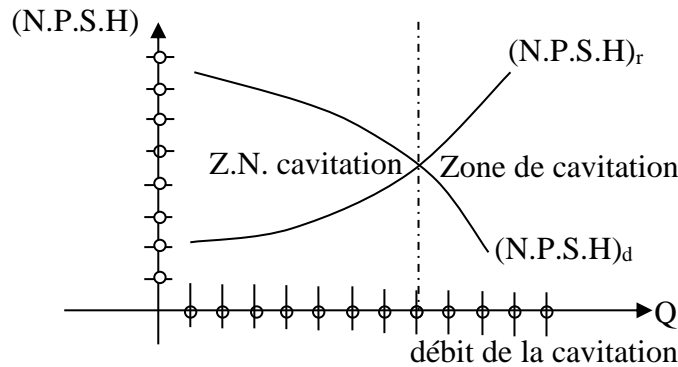
Où  $\lambda_a$  : le coefficient de frottement ou de Darcy ;

$L_a$  : la longueur d'aspiration ;

$d_a$  : diamètre de la conduite d'aspiration ;

$\sum \xi_{ia}$  : la somme des coefficients des pertes de charge singulières à l'aspiration.

Le débit de cavitation en projetant le point d'intersection des courbes  $(NPSH)_r=f(Q)$  et  $(NPSH)_d=f(Q)$  sur l'axe des abscisses (ou du débit).



**Fig.6.4 : Graphique du couple  $(N.P.S.H)_d$  et  $(N.P.S.H)_r$  requise en fonction du débit**

Il faut que  $(N.P.S.H)_d$  soit  $>$   $(N.P.S.H)_r$  de quelques centimètres pour rester dans la bonne plage de fonctionnement (pour avoir un rendement optimal) tout en restant dans la zone de non cavitation.

### 6.13 Point de fonctionnement et débit de cavitation

La détermination du point de fonctionnement s'avère d'une très grande utilité, en effet, la projection du point de fonctionnement sur la courbe représentant  $(NPSH)_r$  en fonction du débit permet d'avoir la valeur de  $(NPSH)_r$  de notre système de pompage. Il faudrait avoir cette valeur en dessous de  $(NPSH)_d$  de l'installation. Le point de fonctionnement également doit tomber dans la plage de bon fonctionnement de la pompe pour avoir un rendement optimal. Le débit du point de fonctionnement doit être inférieur au débit de cavitation pour être également à la plage de bon fonctionnement.

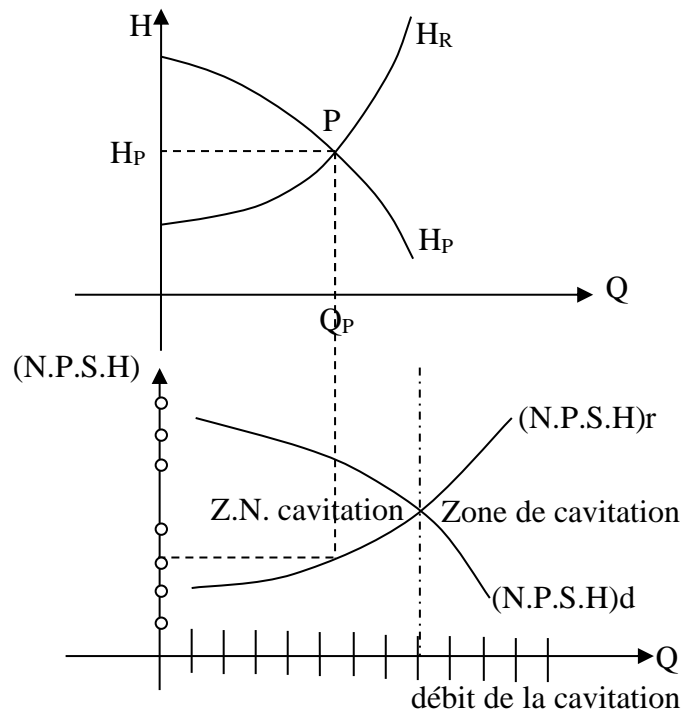


Fig. 6.5 : Point de fonctionnement et débit de cavitation

#### 6.14. Conclusion

Bien caler une pompe est l'objectif de ce chapitre, en effet, le calage permet de faire fonctionner la pompe sans aucun risque de cavitation ce qui permettait de l'exploiter selon la durée probable déjà projetée qui dépend parfois de la durée du projet. Toutefois, le calage demande la connaissance du type d'installation, le calcul de la charge d'aspiration admissible correspondante, d'avoir la courbe du couple ( $(N.P.S.H)_d$  et  $(N.P.S.H)_r$ ) en fonction du débit et enfin il faudrait que notre point de fonctionnement tombe dans la zone de non cavitation.

## **CHAPITRE VII**

# **Modes de réglage de débit des pompes (Solutions et Techniques)**

### 7.1. Introduction

Lorsque le débit de la pompe au point de fonctionnement  $Q_p$ , est différent de celui demandé par le réseau  $Q_d$ , et surtout lorsque cette différence dépasse un seuil limite, le recours aux modes de réglage devient une condition sine qua none pour apporter le débit demandé par le réseau au débit pompé et inversement.

La technique d'augmenter ou de réduire les caractéristiques de la pompe (hauteur, débit) impose de varier la puissance du moteur d'entraînement, d'appliquer la technique de vannage, réduire le temps de pompage, le rognage et d'autres.

Le choix de l'un ou de l'autre mode de réglage dépend de l'étude de la solution la plus adéquate techniquement et économiquement sauf pour des cas circonstanciels.

Dans ce chapitre, nous allons mettre en exergue les différents modes de réglage du débit de la pompe en détaillant le domaine et les conditions d'application de chacun parmi eux.

### 7.2. Les différents modes de réglage

En pratique, il existe trois modes de réglage: réglage quantitatif, qualitatif et le rognage.

#### 7.2.1 Rognage

Le rognage est une technique pratique utilisée pour minimiser le débit délivré par la pompe afin de l'égaliser à celui demandé par le réseau.

Le rognage est la diminution, de quelques millimètres, du diamètre extérieur de la roue de la pompe,  $D_2$ , en gardant la même vitesse de rotation de la roue ( $n=$ constante) et la même distance entre les deux flasques ( $b_2=$  constante).

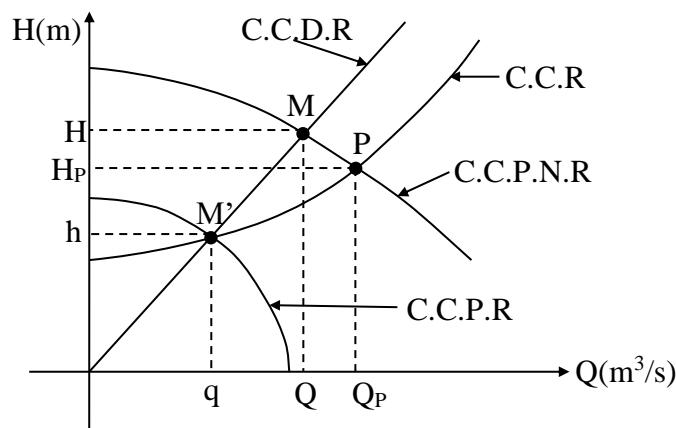


Fig. 7.1 : Représentation graphique de la droite de rognage.

Traçons la courbe caractéristique de la pompe à roue rognée (C.C.P.R) en se basant sur la première loi de similitude.

$$\frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{D_{21}}{D_{22}} \right)^2 = \left( \frac{D_{21}}{D_{22}} \right)^2 \Rightarrow H_2 = \left( \frac{D_{22}}{D_{21}} \right)^2 H_1 \quad (7.1)$$

Prenons plusieurs valeurs de  $H_1$  pour avoir celles de  $H_2$ , du fait, qu'il ya une diminution du diamètre extérieur de la roue. Nous aurons sûrement, d'après l'expression précédente, une diminution de la hauteur de la charge délivrée par la pompe.

De la seconde loi de similitude, nous pouvons établir le rapport des débits.

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{\pi(D_2)_I(b_2)_I(V_{2r})_I}{\pi(D_2)_{II}(b_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I(b_2)_I(V_{2r})_I}{(D_2)_{II}(b_2)_{II}(V_{2r})_{II}} \quad (7.2)$$

$(b_2)_I$  étant la distance entre les deux flasques à la sortie de la roue. Elle est pratiquement constante si  $(b_2)_I$  ne varie pas le long du centre au rayon extérieur de la roue pour des rognages inférieur à 15 %, ce qui permet d'écrire la relation suivante:

$$\frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}} = 1 \quad (7.3)$$

$$\frac{(Q)_I}{(Q)_{II}} = \frac{(D_2)_I(V_{2r})_I}{(D_2)_{II}(V_{2r})_{II}} = \frac{(D_2)_I(u_2)_I}{(D_2)_{II}(u_2)_{II}} = \frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}} \cdot \frac{2\pi(n)_I \frac{(D_2)_I}{2}}{2\pi(n)_{II} \frac{(D_2)_{II}}{2}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{(D_2)_I}{(D_2)_{II}}\right)^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \quad (7.4)$$

D'une manière générale, nous extrairons  $H_2$  en  $F(Q_2)$  en se basant sur ces deux lois de similitude.

$$\frac{H_I}{H_{II}} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \text{ et } \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} \Rightarrow H_2 = \frac{H_1}{Q_1} Q_2 \quad (7.5)$$

Posons  $\frac{H_1}{Q_1} = A$ , nous aurons  $H_2 = A \cdot Q_2$  ou d'une manière générale  $H = A \cdot Q$  (7.6)

Cette dernière est une droite passant par l'origine appelée droite de rognage.

$M(Q,H)$  est le point d'intersection de la droite de rognage et la courbe caractéristique de la pompe avant le rognage.

$M'(q,h)$  est le point d'intersection de la droite de rognage et la nouvelle courbe caractéristique de la pompe après rognage de la roue. Le point  $M(Q,H)$  est homologue à  $M'(q,h)$ .

Appliquant le théorème de Thalès nous obtenons :

$$\frac{H}{h} = \frac{Q}{q} \Rightarrow H = \frac{h}{q} Q \Rightarrow H = aQ$$

Cette dernière s'appelle l'équation de la droite de rognage.

Posons  $D_{21}=D$  et  $D_{22}=d$  nous aurons :

$$\frac{Q}{q} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \Rightarrow d = D \cdot \sqrt{\frac{q}{Q}} \quad (7.7)$$

Où  $d$  est le diamètre de la roue après rognage (roue rognée).

**a) Coefficient de rognage**

Le coefficient de rognage,  $m$ , est le rapport des diamètres après et avant le rognage.

$$m = \left(\frac{d}{D}\right) \quad (7.8)$$

Il est également le rapport de la racine carrée du débit demandé au débit calculé pour  $h=H_c$  c'est-à-dire au point d'intersection de la droite de rognage avec la courbe caractéristique de la conduite.

$$m = \sqrt{(q/Q)} \quad (7.8')$$

**b) Rendement de rognage**

Le rendement du rognage est déterminé en fonction du coefficient de rognage par l'expression suivante:

$$R = (1 - m) \cdot 100 \quad (7.9)$$

Si le rendement du rognage est inférieur à 15 %, nous pouvons accepter ce mode de réglage et dans le cas contraire, nous dirons que ce mode n'est pas efficace, et par conséquent nous serons obligés d'opter pour un autre (une solution) mode de réglage.

**c) Rendement de rognage et vitesse spécifique**

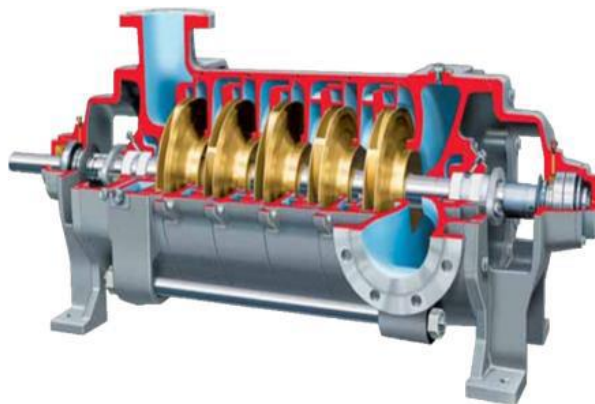
Des essais ont été réalisés pour déterminer le taux maximal de rognage en fonction de la vitesse spécifique.

$N_s = 60 \div 120$  le rendement de rognage  $R = 15 \div 20\%$

$N_s = 150 \div 200$  le rendement de rognage  $R = 10 \div 15\%$

$N_s = 200 \div 300$  le rendement de rognage  $R = 5 \div 10\%$

NB : Le rognage est déconseillé pour les pompes monocellulaires à axe vertical et horizontal.



**Fig.7.2** : Coupe longitudinale d'une pompe monocellulaire à axe horizontal



### 7.2.2 Réglage qualitatif

Ce type de réglage intervient dans le cas où le débit appelé par le réseau est supérieur ou inférieur à celui garanti par la pompe au point de fonctionnement.

Ce mode de réglage consiste à diminuer ou à augmenter la vitesse de rotation de la roue. A cet effet, l'accouplement à la pompe d'un moteur électrique asynchrone c'est-à-dire à vitesse variable s'avère une nécessité absolue.

Ce mode de réglage reste fiable pour les deux cas, mais il peut entraîner une réduction de la durée de vie de la pompe et du moteur électrique.

#### 7.2.2.1 Réduction de la vitesse de rotation

Ce mode réglage est basé sur la réduction de la vitesse de rotation de la roue entraînée par le moteur électrique en gardant le même diamètre extérieur de la roue. Afin d'avoir un débit de la pompe au point de fonctionnement très proche du débit demandé par le réseau sans modifier le bon fonctionnement. Ce réglage du débit de la pompe est appliqué lorsque le débit du réseau est inférieur au débit de la pompe ( $Q_d < Q_P$ ).

##### a) Courbe de proportionnalité

La courbe de proportionnalité d'un réglage qualitatif est obtenue en utilisant les deux premières lois de similitude.

$$\frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{D_{21}}{D_{22}} \right)^2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \left( \frac{D_{21}}{D_{22}} \right)^3 = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \left( \frac{Q_1}{Q_2} \right)^2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \frac{H_1}{H_2}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{Q_1}{Q_2} \right)^2 \Rightarrow H_2 = \frac{H_1}{Q_1^2} Q_2^2 \quad (7.10)$$

Après posons  $H_1/Q_1^2 = A$ , on peut écrire la dernière relation sous la forme suivante :

$$H = A Q^2 \quad (7.11)$$

C'est une équation d'une parabole.

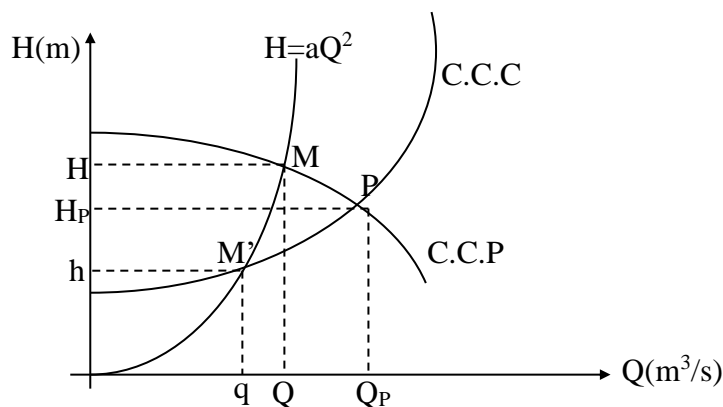


Fig.7.3 : Réglage qualitatif cas où  $Q_d < Q_P$

$M(Q,H)$  est le point d'intersection de la courbe de proportionnalité,  $H=AQ^2$ , et la courbe caractéristique de la pompe, ce point est homologue au point  $M'(Q,H)$ .

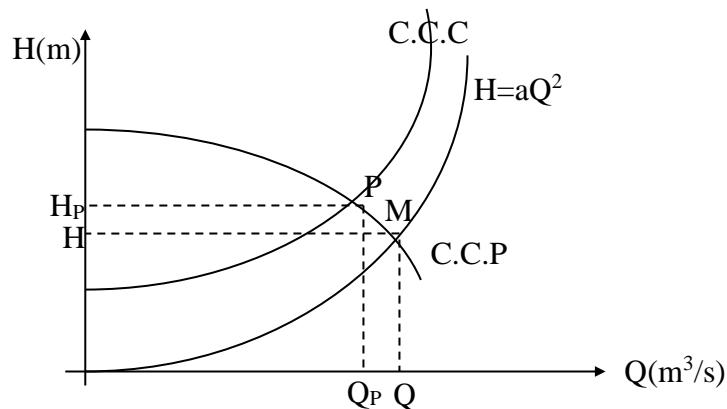
Pour obtenir la vitesse de rotation réduite, nous suivrons

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{D_{21}}{D_{22}}\right)^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{H}{h} = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \Rightarrow n = N \cdot \sqrt{\frac{h}{H}} \quad (7.12)$$

Cette dernière est la nouvelle vitesse de rotation pour laquelle devrait tourner la roue pour avoir un débit de la pompe au point de fonctionnement égal à celui appelé par le réseau.

### 7.2.2.2 Augmentation de la vitesse de rotation

Lorsque le débit appelé est supérieur au débit de la pompe au point de fonctionnement ( $Q_d > Q_p$ ), l'augmentation de la vitesse de rotation de la roue, dans la mesure du possible, s'avère parmi les solutions à n'est pas écartée. En effet, cette augmentation entraîne une élévation du débit pompé. Toutefois, il faut assurer que cet accroissement de la vitesse de rotation doit maintenir le fonctionnement de la pompe dans des meilleures conditions.



**Fig.7.4 : Réglage qualitatif cas où  $Q_d > Q_p$**

La nouvelle vitesse de rotation s'obtient comme suit :

$$\frac{H_p}{H} = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \Rightarrow n = N \cdot \sqrt{\frac{H}{H_p}} \quad (7.12. bis)$$

### 7.2.3 Réglage quantitatif

Le réglage quantitatif conduit directement aux deux modes les plus couramment pratiqués qui sont le vannage et la réduction du temps de pompage du fait que ces deux techniques sont faciles à pratiquer.

7.2.3.1 Vannage

Le vannage est une technique beaucoup plus pratique qui consiste à la fermeture progressive de la vanne et donc l'ajout d'une perte de charge singulière qui relèvera la courbe caractéristique du réseau, ce qui portera le débit du point de fonctionnement au débit demandé par le réseau.

$$\sum \Delta H = \sum \Delta H + \sum \Delta H_{sv} \quad (7.13)$$

$$H_C = H_g + \sum \Delta H + \sum \Delta H_{sv} \quad (7.14)$$

Avec  $\sum \Delta H_{sv}$  est la perte de charge créée par la technique du vannage.

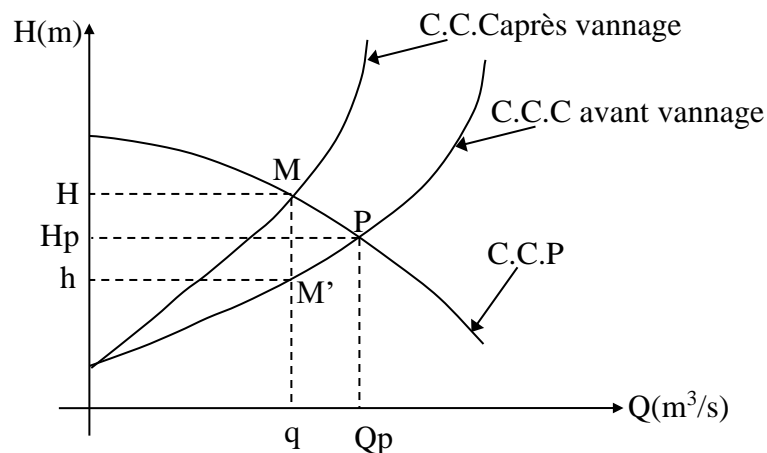


Fig.7.5 : Réglage quantitatif cas du vannage

$$H_C = H_g + R \cdot Q^2 + \xi_v \cdot Q^2 \quad (7.15)$$

Le vannage est la solution la plus pratique (facile) mais la plus mauvaise, car elle nécessite un investissement supplémentaire qui nécessite l'utilisation d'une pompe qui fournit un grand débit seulement pour assurer un débit inférieur.

7.2.3.2 Réduction du temps de pompage

La réduction du temps de pompage est aussi l'un des modes de réglage du débit d'une pompe pour avoir un débit plus proche de celui appelé par le réseau, c'est-à-dire au lieu de pomper durant, par exemple, vingt-quatre heures, on pompe la même quantité (le même volume) durant des temps moins, par exemple seize heure, dix-huit et vingt heure.

Cette technique est valable seulement lorsque le débit demandé est inférieur à celui délivré par la pompe.

On suppose qu'on a un moteur électrique de vitesse constante et que le mode de réglage par vannage est déconseillé et que notre station de pompage refoule vers un réservoir. On peut apporter une autre solution qui est la durée de pompage sera réduite pour le point de fonctionnement A.

Multiplions le débit au point de fonctionnement par le temps d'une heure, nous aurons le volume horaire refoulé par la pompe. Par la suite, en utilisant la règle du trois pour déduire le temps total de pompage du volume journalier appelé (demandé) par les consommateurs.

$Q_p \cdot 3600 \Rightarrow V(m^3) \rightarrow 1$  heure

$Q_d \cdot 24 \cdot 3600 \rightarrow t$  (heures)

$$t(\text{heures}) = \frac{V_j}{Q_p \cdot 3600} = \frac{Q_d \cdot 24 \cdot 3600}{Q_p \cdot 3600} \quad (7.16)$$

### Exemple

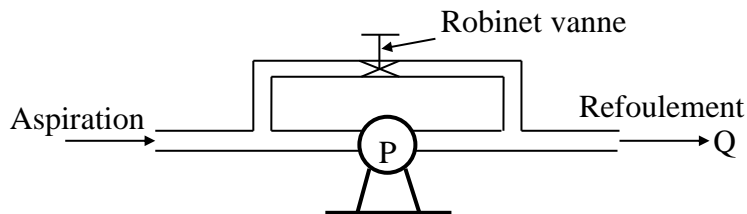
Calculer le temps de pompage réduit sachant que le débit journalier refoulé est de  $9000 \text{ m}^3$  et la pompe au point de fonctionnement refoule un débit de  $145 \text{ l/s}$ .  
 $Q_p = 0,145 \text{ m}^3/\text{s}$  lui correspond un volume horaire de  $0,145 \cdot 3600 = 522 \text{ m}^3$ .

$$t = \frac{9000}{522} = 17 \text{ heures } 14 \text{ minutes } 29 \text{ secondes}$$

Le temps de pompage réduit est de 17 heures 14 minutes et 29 secondes.

### 7.3. By- pass

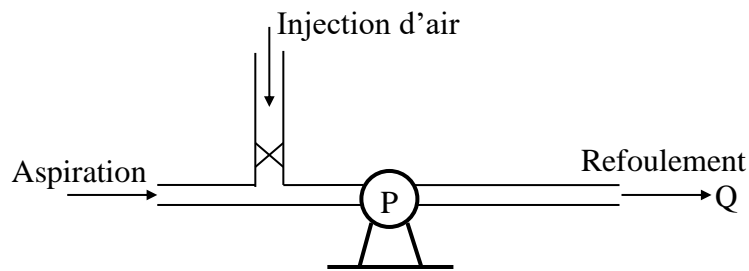
Il est utilisé dans le cas des pompes à grand débit. Cette technique permettant de réduire le débit pompé.



**Fig.7.6** : Réglage de débit par By-pass dans une station de pompage

### 7.4. Introduction d'air dans la conduite d'aspiration

Technique basée sur l'injection de l'air à l'aspiration pour minimiser le débit d'eau assuré par la pompe, mais elle est rarement utilisée. Elle ne concerne que les pompes volumétriques à grand débit et elle déconseillée du fait qu'elle permet l'entrée d'air dans les singularités comme les coins.



**Fig.7.7 : Réglage de débit d'une pompe par injection d'air**

### **7.5. Changement de la pompe**

C'est l'un parmi tous les modes n'est pas faisable pour régler le débit, on doit refaire le choix de la pompe.

### **7.6. Conclusion**

Les modes de réglages du débit aux stations de pompage sont des techniques permettent, dans la mesure du possible, d'apporter le débit de la pompe au point de fonctionnement au débit demandé par le réseau. Toutefois, cet objectif ne sera pas assuré du premier mode choisi, il faudra chercher la solution la plus efficace tout en gardant le fonctionnement de la pompe dans les meilleures conditions.

## **CHAPITRE VIII**

### **Couplage des pompes identiques & non identiques**

## 8.1 Introduction

Dans certaines stations de pompage, le couplage de deux pompes ou plus en parallèle ou en série s'avère parmi les solutions à adopter, à causes dans certaines situations des conditions du marché, afin d'assurer le débit demandé par le réseau ou la hauteur d'élévation nécessaire pour assurer la pression suffisante en certains points ou les deux à la fois.

Quelles seraient les nouvelles performances de ce couplage et les règles à suivre pour l'obtention des courbes résultantes, en cas des pompes identiques ou non identiques, sont nos cibles à travers ce travail afin de donner une vision claire, précise et raffinée sur le couplage des pompes pour participer à la bonne compréhension comment doit faire la gestion d'une station de pompage à pompes accouplées.

## 8.2 Couplage de deux pompes identiques

### 8.2.1 Couplage de deux pompes en série

Pour avoir la courbe résultante de  $H$  en  $f(Q)$  de deux pompes identiques accouplées en série, on doit disposer de la courbe d'une seule pompe ou de son équation et par la suite réaliser la composition. La figure 8.1 représente deux pompes placées en série.

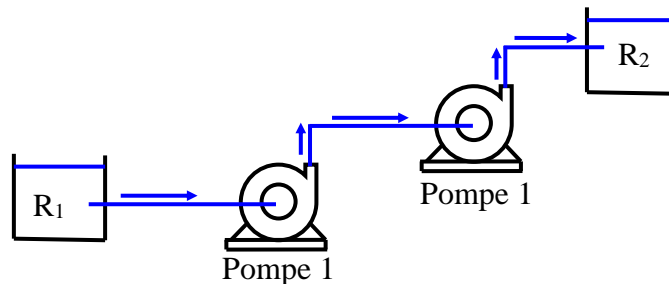


Fig. 8.1 : Schéma de deux pompes placées en série

Il existe deux manières pour réaliser le couplage des pompes, une analytique basée sur les équations des performances et une autre graphique.

#### a) Résultante analytique

L'expression donnant la charge,  $H$ , en fonction du débit,  $Q$ , peut s'écrire comme suit :

$$H_{p1} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p2} = AQ^2 + BQ + C$$

Si les deux pompes sont identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est similaire à celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = 2AQ^2 + 2BQ + 2C = 2H_{p1} = 2H_{p2} \quad (8.1)$$

Le couplage de deux pompes identiques en série permet d'augmenter la hauteur d'élévation deux fois.

## b) Résultante graphique

L'obtention de la résultante se fait de la manière suivante : Prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge initiale, par la suite raccorder les point entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de deux pompes identiques accouplées en série.

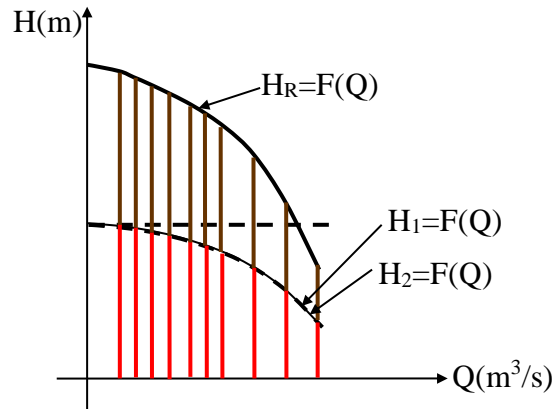


Fig. 8.2 : Courbe résultante de deux pompes identiques accouplées en série

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par deux pompes placées en série soit supérieure à la hauteur d'élévation assurée par une pompe pour tomber dans la plage de bon fonctionnement.

## 8.2.1 Couplage de trois pompes en série

La figure (8.3) donne un schéma simple de trois pompes identiques placées en série.

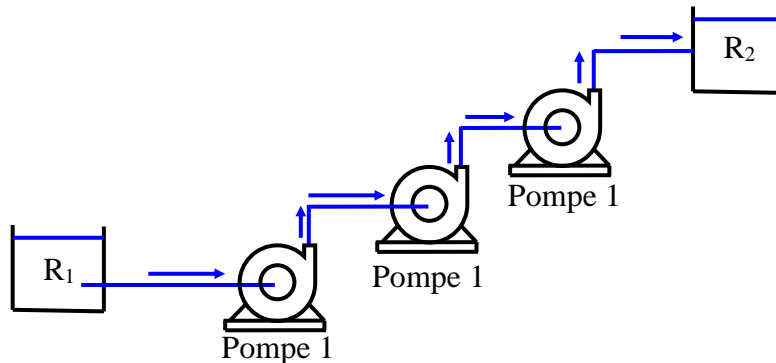


Fig. 8.3 : Schéma de trois pompes identiques placées en série

## a) Résultante analytique

Les expressions des courbes caractéristiques des trois pompes s'écrivent :

$$H_{p1} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p2} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p3} = AQ^2 + BQ + C$$

Si les trois pompes sont identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est similaire aux deux autres, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

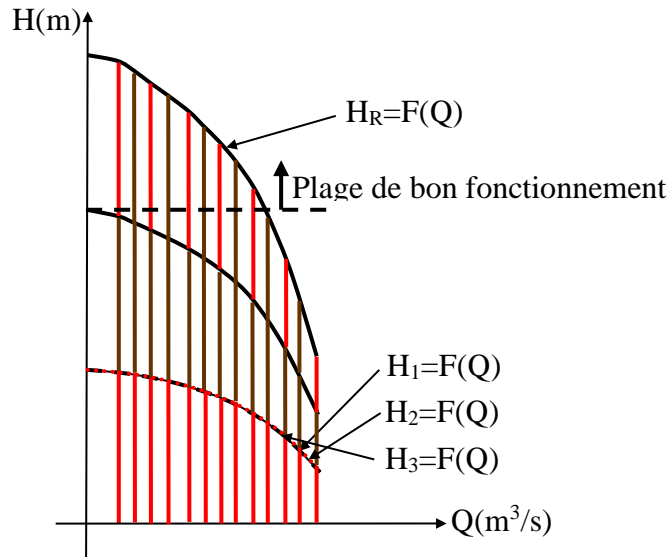


$$H_R = 3AQ^2 + 3BQ + 3C = 3H_{p1} = 3H_{p2} = 3H_{p3} \quad (8.2)$$

Le couplage de trois pompes identiques en série permet d'agrandir la hauteur d'élévation trois fois.

**b) Résultante graphique**

Prenons un nombre important de points à l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante, rajouter deux fois, en chaque point, cette valeur à la charge initiale, par la suite raccorder les point entre eux.

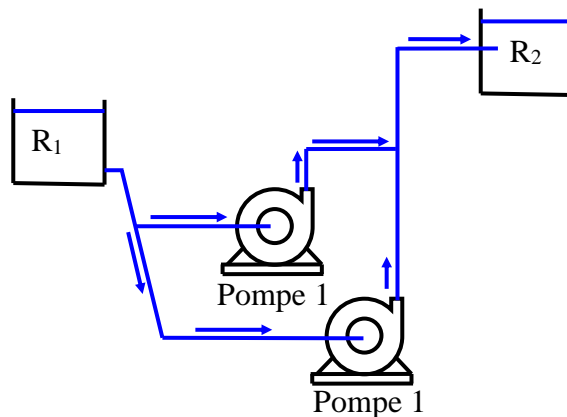


**Fig. 8.4 : Courbe résultante de trois pompes identiques accouplées en série**

Il faut assurer que la charge assurée par trois pompes associées soit supérieure à la charge assurée par deux pompes pour rester dans la plage de bon fonctionnement.

**8.2.3 Couplage de deux pompes en parallèle**

Le schéma de la figure 8.5 représente deux pompes identiques placées en parallèle et refoulant dans le même réservoir.



**Fig. 8.5 : Couplage de deux pompes identiques en parallèle**

Pour obtenir la courbe résultante représentant la charge,  $H$ , en fonction du débit,  $Q$ , nous devons utiliser les méthodes analytique ou graphique. La première est utilisée dans le cas où on dispose de l'équation analytique représentant la charge,  $H$ , en fonction du débit,  $Q$ , alors que la deuxième méthode est basée sur les courbes caractéristiques fournies par le constructeur des pompes.

### a) Résultante analytique

$$H_{p1} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p2} = AQ^2 + BQ + C$$

Si les deux pompes sont identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est similaire à celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique, sur l'axe des abscisses ayant l'expression suivante.

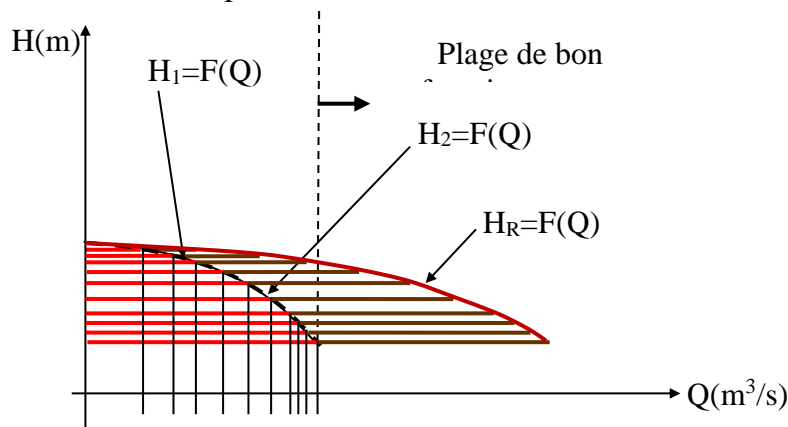
$$H_R = H_{p1} = H_{p2} \Rightarrow AQ^2 + BQ + C = A_R(2Q)^2 + B_R(2Q) + C_R = 4A_RQ^2 + 2B_RQ + C_R$$

$$H_R = 4A_RQ^2 + 2B_RQ + C_R \quad (8.3)$$

Le couplage de deux pompes identiques en parallèle permet d'augmenter le débit deux fois que celui assuré par une seule pompe.

### b) Résultante graphique

La résultante représentant  $H$  en  $f(Q)$ , pour deux pompes identiques placées en parallèle, est obtenue en prenant un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter, en chaque point, cette valeur au débit initial, par la suite raccorder les points entre eux.



**Fig. 8.6 : Courbe résultante de deux pompes identiques accouplées en parallèle**

Il faut assurer que le débit assuré par les deux pompes accouplées en parallèle soit supérieur au débit assuré par une seule pompe pour rester dans la marge de bon fonctionnement.

### 8.2.4 Couplage de trois pompes identiques en parallèle

La figure 8.7 montre trois pompes identiques placées en parallèle et refoulant dans le même réservoir. La charge résultante  $H_R$  en fonction du débit  $Q_R$  est obtenue par les deux méthodes suivantes :

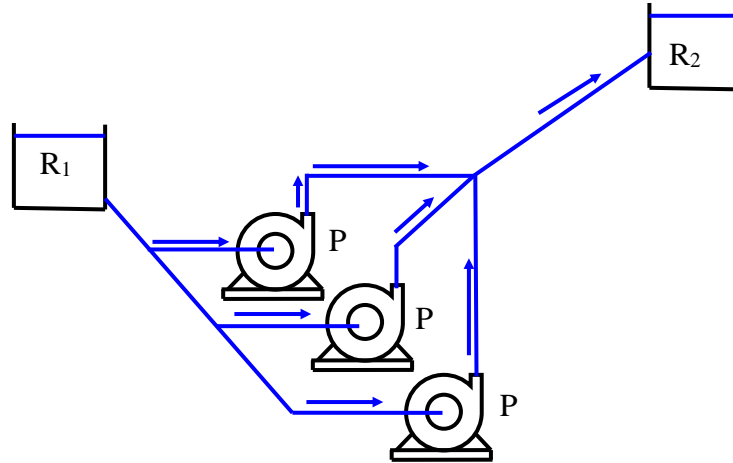


Fig. 8.7 : Couplage de trois pompes identiques en parallèle

#### a) Résultante analytique

Les expressions des courbes caractéristiques donnant la hauteur de pression en fonction du débit des trois pompes s'écrivent :

$$H_{p1} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p2} = AQ^2 + BQ + C$$

$$H_{p3} = AQ^2 + BQ + C$$

Si les trois pompes sont identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est similaire à celle des deux autres, ce qui donne une résultante analytique, sur l'axe des abscisses ayant l'expression suivante.

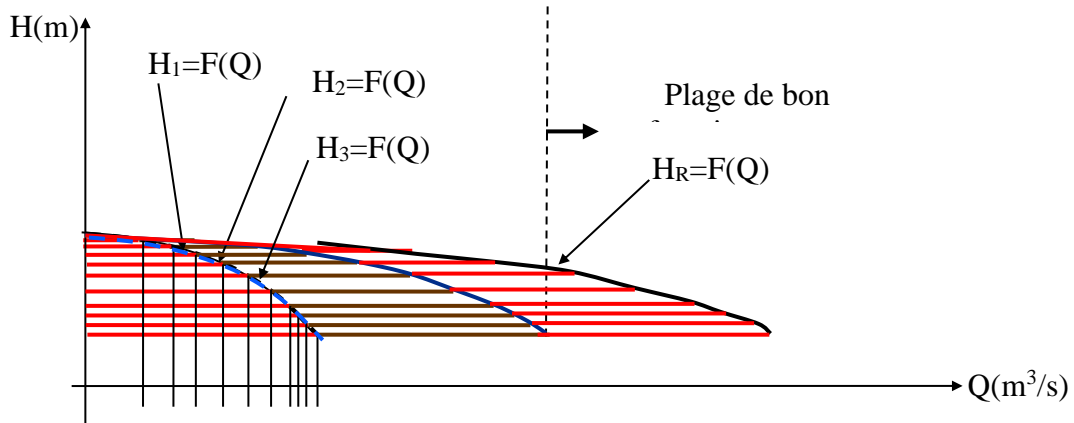
$$H_R = H_{p1} = H_{p2} = H_{p3} \Rightarrow AQ^2 + BQ + C = A_R(3Q)^2 + B_R(3Q) + C_R = 9A_RQ^2 + 3B_RQ + C_R$$

$$H_R = 9A_RQ^2 + 3B_RQ + C_R \quad (8.4)$$

Le couplage de trois pompes identiques en parallèle permet d'augmenter le débit trois fois que celui assuré par une seule pompe.

**b) Résultante graphique**

Pour obtenir la résultante de trois pompes placées en parallèle, on suit l'itinéraire suivant : Prenons un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter deux fois, en chaque point, cette valeur au débit initial, par la suite raccorder les point finaux entre eux.



**Fig. 8.8 : Courbe résultante de trois pompes identiques couplées en parallèle**

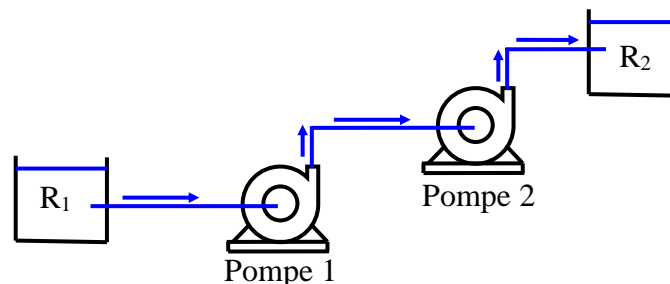
Il faut assurer que le débit assuré par trois pompes accouplées soit supérieur au débit assuré par deux pompes pour tomber dans la marge de bon fonctionnement.

**8.3 Coulage de deux pompes non identiques**

**8.3.1 Couplage de deux pompes en série**

La figure 8.9 représente deux pompes non identiques placées en série refoulant dans le même réservoir. Les méthodes analytique et graphique permettent d'aboutir à la courbe résultante H en fonction de Q.

**a) Résultante analytique**



**Fig. 8.9 : Schéma de deux pompes non identiques placées en série**

$$H_{p1} = A_1 Q^2 + B_1 Q + C_1$$

$$H_{p2} = A_2 Q^2 + B_2 Q + C_2$$

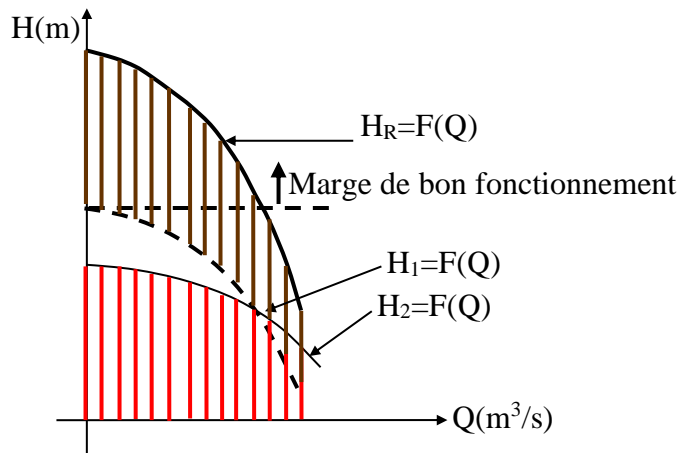
Si les deux pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente de celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} = (A_1 + A_2)Q^2 + (B_1 + B_2)Q + (C_1 + C_2) \quad (8.5)$$

Le couplage de deux pompes non identiques en série permet d'augmenter la hauteur d'élévation d'une valeur égale à la somme des hauteurs des deux pompes.

**b) Résultante graphique**

L'obtention de la résultante de H en fonction de Q se fait de la manière suivante : Prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante pour l'une des pompes, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge de la deuxième pompe, par la suite raccorder les point entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de deux pompes non identiques accouplées en série.



**Fig. 8.10 : Courbe résultante de deux pompes non identiques accouplées en série**

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par les deux pompes accouplées soit supérieure à la plus grande charge assurée par l'une des pompes pour tomber dans la marge de bon fonctionnement.

### 8.3.2 Couplage de trois pompes non identiques en série

La figure 8.11 donne un schéma de trois pompes non identiques accouplées en série.

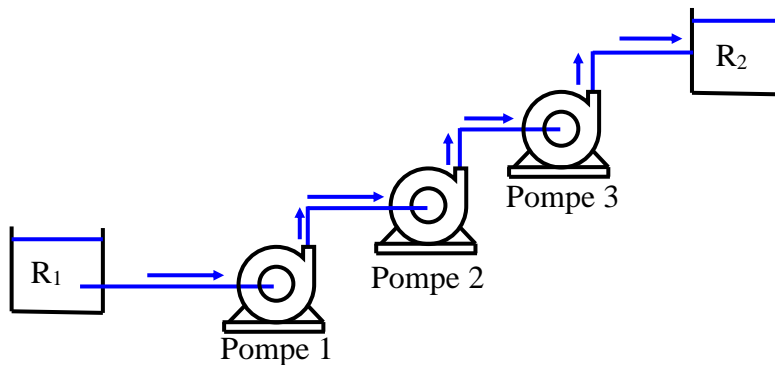


Fig. 8.11 : Schéma de trois pompes non identiques placées en série

#### a) Résultante analytique

$$H_{p1} = A_1 Q^2 + B_1 Q + C_1$$

$$H_{p2} = A_2 Q^2 + B_2 Q + C_2$$

$$H_{p3} = A_3 Q^2 + B_3 Q + C_3$$

Si les trois pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente des deux autres, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} = (A_1 + A_2 + A_3)Q^2 + (B_1 + B_2 + B_3)Q + (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$H_R = H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} \quad (8.6)$$

Le couplage de trois pompes non identiques en série permet d'agrandir la hauteur d'élévation à une cote est égale à la somme des trois hauteurs.

#### b) Résultante graphique

L'obtention de la résultante de H en fonction de Q se fait de la manière suivante : en premier lieu, prenons un nombre important de points sur l'axe des abscisses, puis mesurer à chaque point la hauteur de charge correspondante pour l'une des pompes, rajouter, en chaque point, cette valeur à la charge de la deuxième pompe, on aura une résultante pour les deux premières pompes, mesurer aux mêmes points la charge de la troisième pompe, puis rajouter cette charge en chaque point à celle de la résultante précédemment obtenue, par la suite raccorder les points entre eux. La courbe obtenue s'appelle la résultante de trois pompes non identiques accouplées en série.

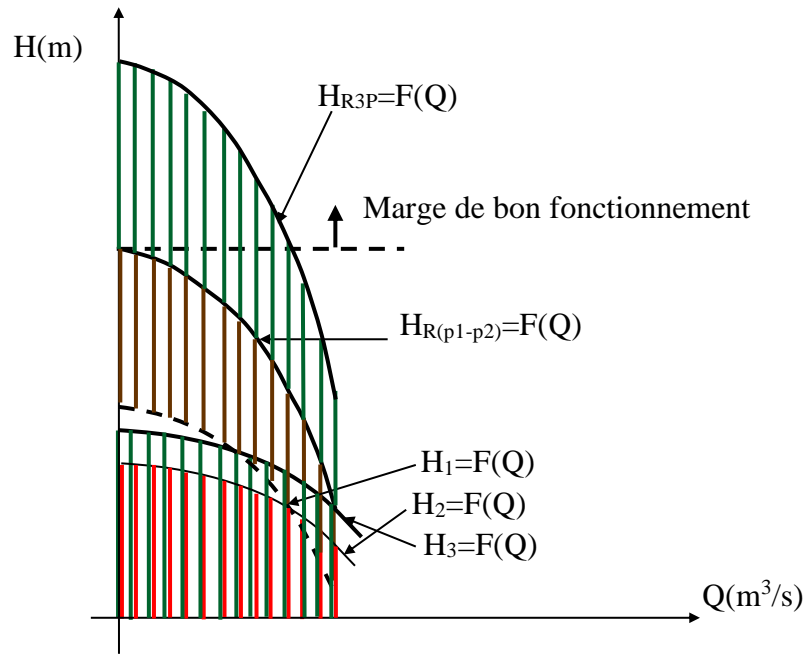


Fig. 8.12 : Courbe résultante de trois pompes non identiques accouplées en série

Il faut assurer que la hauteur d'élévation assurée par les trois pompes accouplées en série soit supérieure à la plus grande charge assurée par le couplage de deux pompes pour tomber dans la marge de bon fonctionnement.

### 8.3.3 Couplage de deux pompes non identiques en parallèle

Soient deux pompes non identiques, ayant la même cote, accouplées en parallèle et refoulant dans le même réservoir comme il est indiqué sur la figure 8.13. La résultante de la charge, H, en fonction du débit, Q, des deux pompes peut être obtenue analytiquement ou graphiquement.

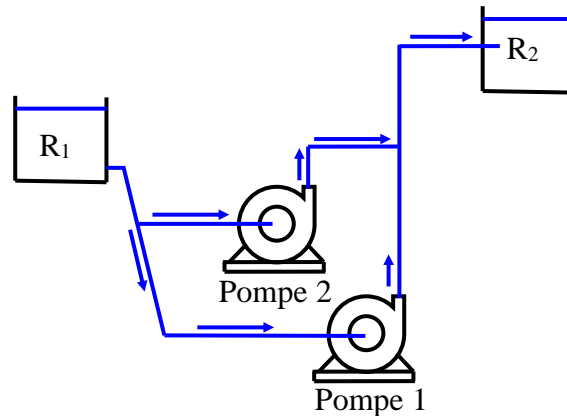


Fig. 8.13 : Schéma de deux pompes non identiques placées en parallèle

#### a) Résultante analytique

$$H_{p1} = A_1 Q_1^2 + B_1 Q_1 + C_1$$

$$H_{p2} = A_2 Q_2^2 + B_2 Q_2 + C_2$$

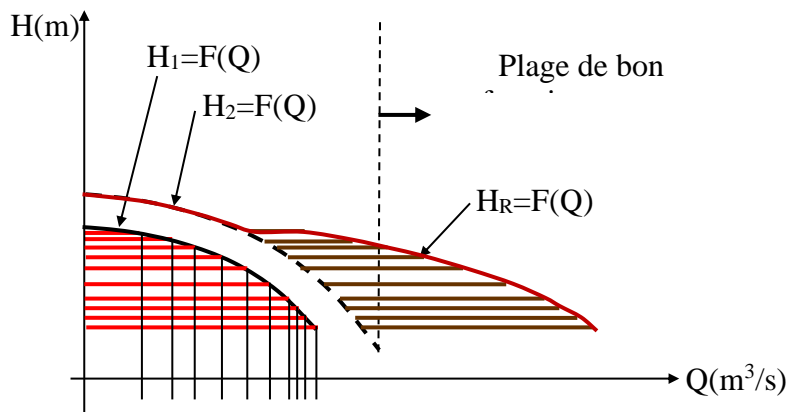
Si les deux pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente de celle de la deuxième, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
 H_R = H_{p1} = H_{p2} &\Rightarrow A(Q_1^2 + Q_2^2) + B(Q_1 + Q_2) + C = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1 \\
 &= A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2 \\
 H_R &= A(Q_1^2 + Q_2^2) + B(Q_1 + Q_2) + C \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

Le couplage de deux pompes non identiques en parallèle permet d'augmenter le débit d'une valeur égale à la somme des débits fournis par les deux pompes.

**b) Résultante graphique**

La résultante représentant H en f(Q), pour deux pompes non identiques placées en parallèle, est obtenue en prenant un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter, en chaque point, cette valeur au débit de la seconde pompe, par la suite raccorder les point entre eux. Le schéma 8.14 élucide clairement les étapes à suivre pour arriver à la résultante.



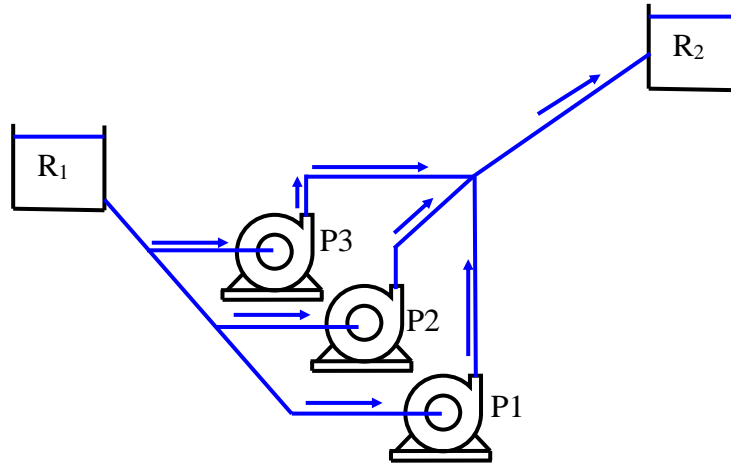
**Fig. 8.14 : Courbe résultante de deux pompes non identiques accouplées en parallèle**

Il faut assurer que le débit assuré par les deux pompes accouplées en parallèle soit supérieur au maximum du débit assuré par l'une des pompes pour rester dans la marge de bon fonctionnement.

**8.3.4. Couplage de trois pompes non identiques en parallèle**

La figure 8.15 représente trois pompes non identiques, ayant la même cote, placées en parallèle et refoulant dans le même réservoir. La résultante de ce système peut être obtenue soit par la méthode analytique soit par celle graphique.





**Fig. 8.15 : Schéma de trois pompes non identiques placées en parallèle**

$$H_{p1} = A_1 Q_1^2 + B_1 Q_1 + C_1$$

$$H_{p2} = A_2 Q_2^2 + B_2 Q_2 + C_2$$

$$H_{p3} = A_3 Q_3^2 + B_3 Q_3 + C_3$$

Si les trois pompes ne sont pas identiques, la courbe caractéristique de la première pompe est différente des deux autres, ce qui donne une résultante analytique ayant l'expression suivante.

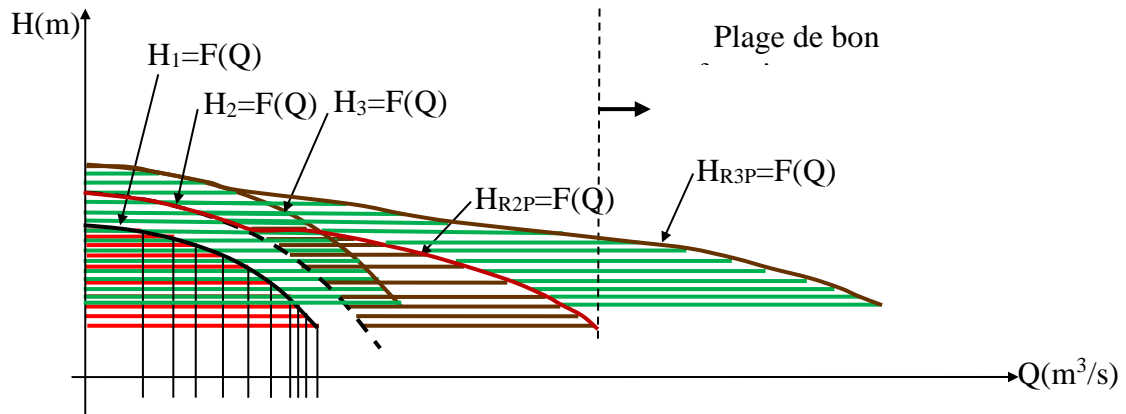
$$\begin{aligned} H_R = H_{p1} = H_{p2} = H_{p3} &\Rightarrow A(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + B(Q_1 + Q_2 + Q_3) + C = A_1 Q_1^2 + B_1 Q_1 + C_1 \\ &= A_2 Q_2^2 + B_2 Q_2 + C_2 = A_3 Q_3^2 + B_3 Q_3 + C_3 \end{aligned}$$

$$H_R = A(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + B(Q_1 + Q_2 + Q_3) + C \quad (8.8)$$

Le couplage de trois pompes non identiques en parallèle permet d'augmenter le débit d'une valeur égale à la somme des débits fournis par les trois pompes.

### b) Résultante graphique

Pour obtenir la résultante de trois pompes non identiques placées en parallèle, on suit l'itinéraire suivant : Prenons un nombre important de points sur l'axe des ordonnées, puis mesurer à chaque point la valeur du débit correspondante, rajouter cette valeur, en chaque point, à la valeur du débit de l'une parmi les deux pompes restantes, puis mesurer aux mêmes points les valeurs du débit pour la troisième pompe et les rajouter à la résultante obtenue entre les deux premières pompes, par la suite raccorder les points finaux entre eux. La figure 8.16 montre les étapes à suivre pour aboutir à la résultante de 3 pompes en parallèle.



**Fig. 8.16 : Courbe résultante de trois pompes non identiques couplées en parallèle**

Il faut assurer que le débit assuré par trois pompes accouplées soit supérieur au débit assuré par deux pompes pour tomber dans la plage de bon fonctionnement.

**8.4. Détermination du point de fonctionnement**

Le point de fonctionnement est déterminé à l'aide de deux courbes, la courbe caractéristique de la pompe choisie et la courbe caractéristique du réseau. En effet, le point d'intersection de ces deux courbes donne le point de fonctionnement du système réseau-pompe, mais la question qui se pose comment obtenir ces deux courbes.

Le traçage des deux courbes caractéristique de la pompe, en se basant du la courbe expérimentale fournie par le constructeur, et du réseau doit être guidé par étapes suivantes :

1° A partir de la courbe caractéristique fournie par le constructeur des pompes, prenons sur l'axe des abscisses plusieurs valeurs (au moins dix) du débit puis monter verticalement pour lire, en chaque point, les valeurs de la charge correspondantes.

2° Pour les mêmes valeurs du débit déjà obtenues, calculer en tous les points les valeurs de la hauteur d'élévation à l'aide de la formule suivante :

$$H_R = H_g + \sum \Delta H$$

$$\sum \Delta H = \sum \Delta H_{\text{aspiration}} + \sum \Delta H_{\text{refoulement}} + = R_{\text{aspiration}} Q^2 + R_{\text{refoulement}} Q^2 = RQ^2$$

$$H_R = H_g + RQ^2 \quad (8.9)$$

avec

$$R = \frac{8\lambda L}{\pi^2 \cdot g \cdot d^5} \quad (8.10)$$

Où le coefficient de frottement  $\lambda$  est calculé par l'une des formules suivantes :

a) Formule de Swamee (1993)

$$\lambda = \left\{ \left( \frac{64}{Re} \right)^8 + 9,5 \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) - \left( \frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0,125} \quad (8.11)$$

b) Formule de Nikuradzé

$$\lambda = (1,14 - 0,86 \ln \left( \frac{\varepsilon}{d} \right))^{-2} \quad (8.12)$$

c) Formule de Colebrook-White(1938) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon}{3,71d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (8.13)$$

d) Formule de ACHOUR.B (2007)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{4,5}{Re} \log \frac{Re}{6,97} \right] \quad (8.14)$$

e) Formule de Shifrinson

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\varepsilon}{d} \right)^{0,25} \quad (8.15)$$

f) Formule de Prandtl-Nikuradzé

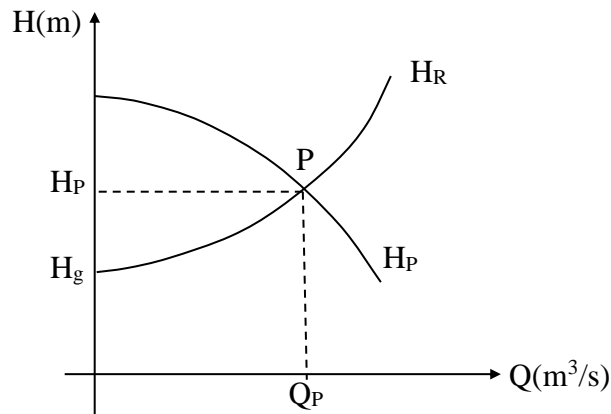
$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \lg \frac{3,71d}{\varepsilon} \right)^2} \quad (8.16)$$

Sachant que Re est le nombre de Reynolds, ε et d sont successivement la rugosité absolue (hauteur des aspérités) et le diamètre intérieur de la conduite.

3° Dresser le tableau suivant.

N°	Q	H <sub>p</sub>	H <sub>g</sub>	ΣΔH	H <sub>R</sub>
1	0	Val max	H <sub>g</sub>	0	H <sub>g</sub>
2	Q1	H <sub>p1</sub>	H <sub>g</sub>	ΣΔH1	H <sub>g</sub> + ΣΔH1
3	Q2	H <sub>p2</sub>	H <sub>g</sub>	ΣΔH2	H <sub>g</sub> + ΣΔH2
4	Q3	H <sub>p3</sub>	H <sub>g</sub>	ΣΔH3	H <sub>g</sub> + ΣΔH3
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	Qn	H <sub>pn</sub>	H <sub>g</sub>	ΣΔHn	H <sub>g</sub> + ΣΔHn

4° T tracer les deux courbes caractéristique de la pompe, HP, et du réseau, HR, en fonction de Q.



**Fig.8.17 : Schéma du point de fonctionnement d'un système pompe-réseau**

5° Le point d'intersection des deux courbes obtenues est appelé le point de fonctionnement qui est défini par un débit  $Q_A$  et une charge  $H_A$ . Ce point doit également se caractériser par un rendement optimal (maximum).

**a) Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques placées en parallèle et refoulant dans le même réseau**

Pour obtenir le point de fonctionnement de deux pompes placées en parallèle, on doit tout d'abord réaliser les résultantes représentant  $H_{2p}$  et  $H_R$  en fonction du débit. Le point d'intersection de ces nouvelles courbes donne le point de fonctionnement du système. La figure 8.18 représente la méthode graphique pour aboutir au point de fonctionnement.

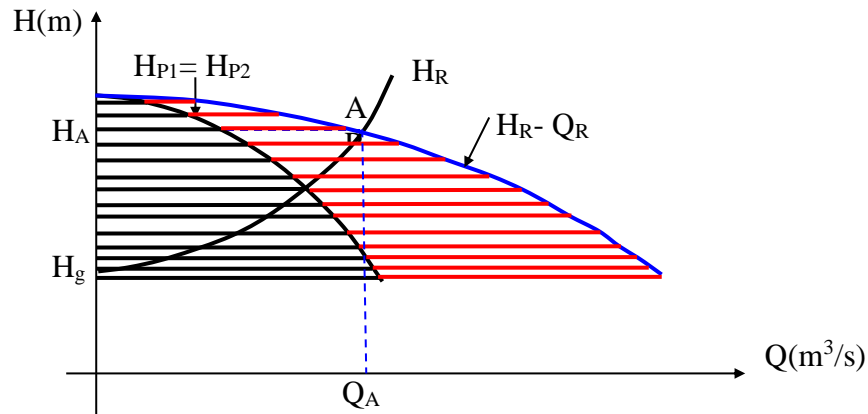
En pratique hydrotechnique, on peut avoir 1, 2, 3, ..., n pompes identiques en parallèle refoulant dans un seul réseau et pour déterminer leur point de fonctionnement. On peut écrire la perte de charge, pour une seule pompe refoulant un débit  $Q$ , sous la forme suivante :

$$\Delta H = RQ^2$$

Pour 2 pompes identiques placées en parallèle  $Q=2Q \Rightarrow \Delta H = R(2Q)^2 = 4R Q^2 = 4\Delta H$

Pour 3 pompes identiques placées en parallèle  $Q=3Q \Rightarrow \Delta H = R(3Q)^2 = 9R Q^2 = 9\Delta H$

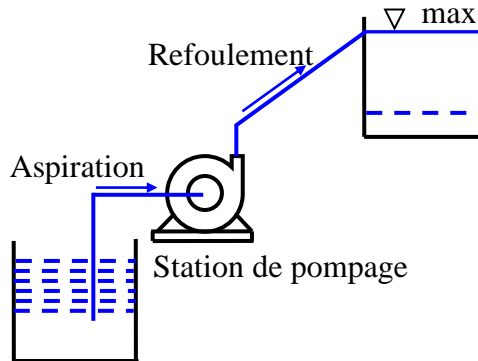
Pour 4 pompes identiques placées en parallèle  $Q=4Q \Rightarrow \Delta H = R(4Q)^2 = 16R Q^2 = 16\Delta H$



**Fig. 8.18 : Point de fonctionnement de deux pompes identiques refoulant dans le même réseau**

**b) Point de fonctionnement d’une station de pompage installée en aspiration et dont le plan d’eau est variable.**

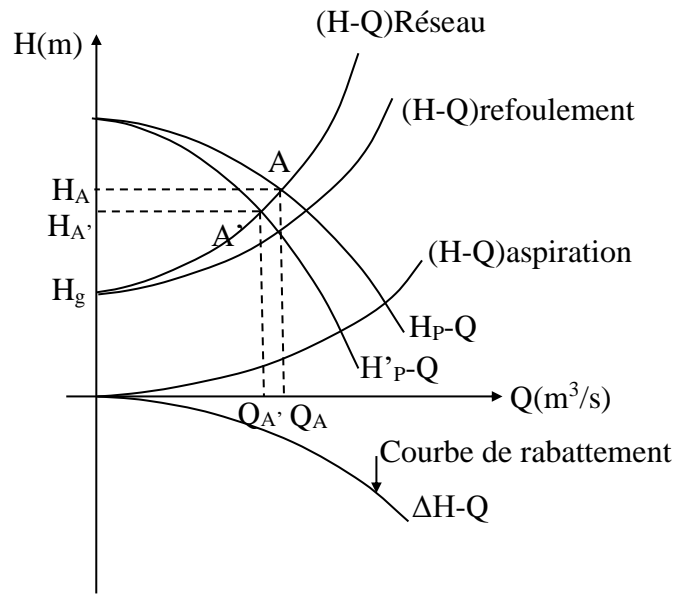
La figure 8.19 montre le cas d’une pompe qui aspire de l’eau à partir d’un plan d’eau à niveau variable.



**Fig.8.19 : Schéma d’une pompe installée en aspiration et dont le plan d’eau est variable**

Dans le cas de ce type d’installation, on doit tracer les courbes caractéristiques de l’aspiration et de refoulement et par la suite réaliser la résultante des deux.

Lorsque le plan d’eau à l’aspiration est variable, nous serons obligés de tracer la courbe de rabattement représentée par  $\Delta H$  en fonction du débit  $Q$ .

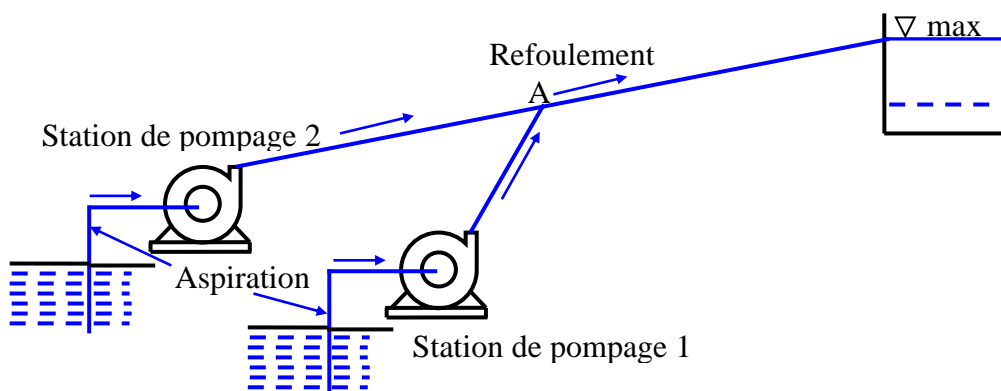


**Fig.8.20 : Point de fonctionnement d'une pompe installée en aspiration et dont le plan d'eau est variable**

Retranchons les valeurs de rabattement de la courbe caractéristique de la pompe, nous aurons une nouvelle courbe ( $H'_{P-Q}$ ), l'intersection de cette dernière avec la courbe caractéristique du réseau donne le point de fonctionnement du système.

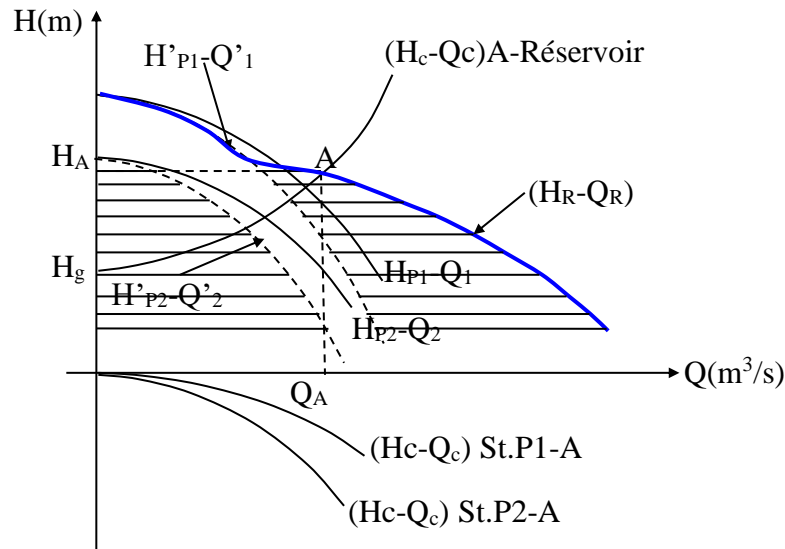
**c) Point de fonctionnement de deux stations de pompage éloignées l'une de l'autre et refoulant vers le même réservoir.**

Dans la vie pratique, il existe des cas où le réservoir est alimenté à partir de 2 stations de pompage c'est le cas du schéma 8.20. Quel est dans ce cas, le point de fonctionnement du système.



**Fig.8.20 : Schéma de deux stations de pompage refoulant dans le même réservoir**

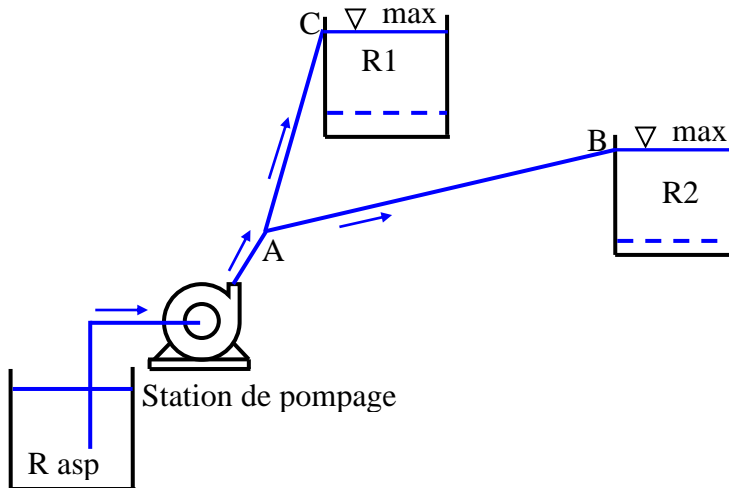
Le point de fonctionnement dans ce cas, nous conduirons à réaliser toutes les courbes caractéristiques, cotés aspiration et refoulement à part et communs à part, nécessaires représentant  $H_{ST.P1}$ ,  $H_{ST.P2}$ ,  $H_{R1\text{aspiration}}$ ,  $H_{R2\text{aspiration}}$ ,  $H_{R1\text{refoulement}}$ ,  $H_{R2\text{refoulement}}$ ,  $H_R$  commun en fonction du débit,  $Q$ .



**Fig.8.21 : Point de fonctionnement de deux stations de pompage distinctes refoulant l'eau vers le même réservoir**

**d) Point de fonctionnement d'une station de pompage refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés l'un de l'autre et de cotes différentes.**

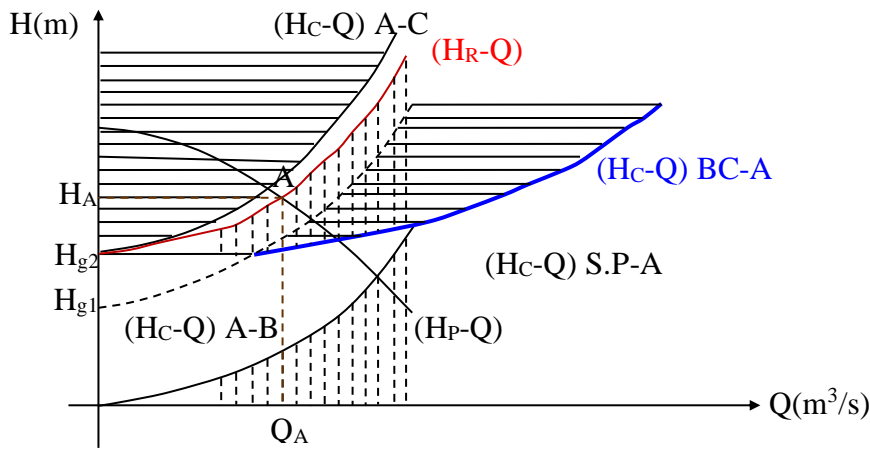
Dans plusieurs situations, la station de pompage alimente deux réservoirs éloignés et de cotes différentes, comment obtenir dans ce cas le point de fonctionnement du système.



**Fig.8.22 : Schéma d'une station de pompage refoulant vers deux réservoirs**

Pour aboutir au point de fonctionnement du système, on doit passer par le traçage des caractéristiques qu'on est en besoin.

En plus de la caractéristique de la pompe, nous serons obligés de tracer, en fonction du débit, les courbes caractéristiques  $(H_c-Q)$  station de pompage-point A,  $(H_c-Q)$  point A-réservoir B et  $(H_c-Q)$  point A-réservoir C.

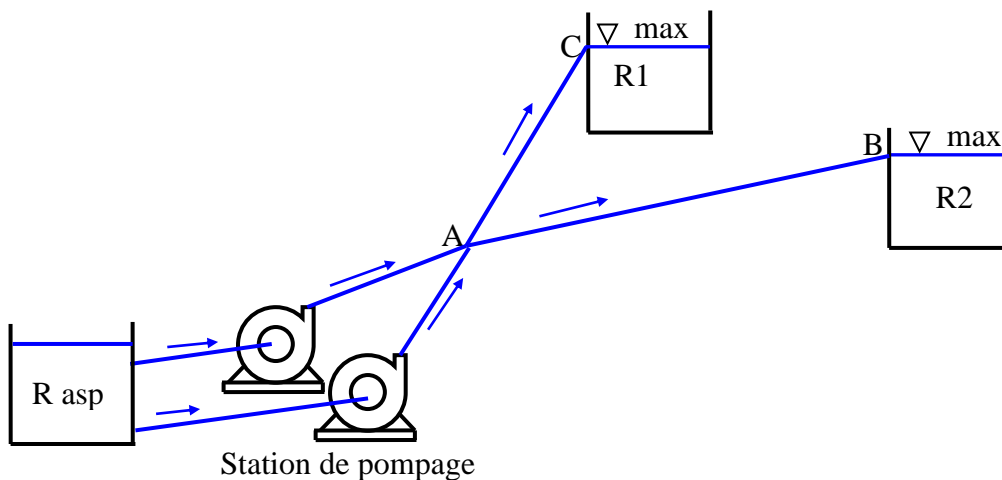


**Fig.8.23 : Point de fonctionnement d'une station de pompage refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cotes différentes**

Par la suite, il faut obtenir la résultante de la courbe représentant les caractéristiques de la conduite en fonction  $Q$  des tronçons AB et AC. Rajouter la courbe caractéristique du tronçon situé entre la station de pompage et le point A, nous obtenons la courbe caractéristique du réseau. L'intersection entre la dernière caractéristique et celle de la pompe est le point de fonctionnement du système.

**e) Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés l'un de l'autre et de cotes du plan d'eau différentes.**

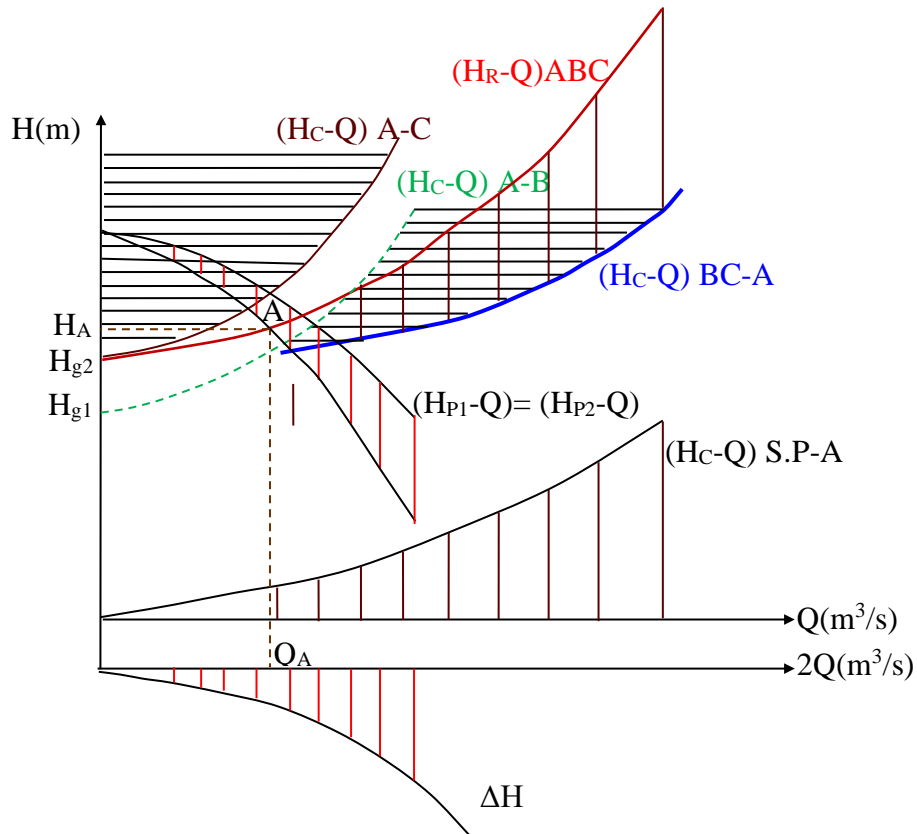
Soit le schéma illustré par la figure (8.24) représentant deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cote du plan d'eau différentes, il demandé de déterminer le point de fonctionnement de ce système.



**Fig.8.24 : Schéma de deux pompes identiques refoulant vers deux réservoirs éloignés et de cotes du plan d'eau différentes**



Pour arriver à déterminer le point de fonctionnement de ce type d'installation, on doit passer par le traçage de toutes les courbes caractéristiques de ce montage.



**Fig.8.25 : Point de fonctionnement d'une station de pompage composée de deux pompes identiques refoulant l'eau vers deux réservoirs éloignés et de cotes différentes**

Traçons les courbes caractéristiques des tronçons Station de pompage-A, AB et AC en fonction du débit par la suite, obtenons la résultante BC-A. Puis traçons la résultante de  $H_{BC-A}$  avec la caractéristique  $H_{SP-A}$  qui donne  $H_{ABC}$  en fonction du débit (courbe en rouge).

Traçons la courbe caractéristique de la pompe en fonction de  $Q$  puis tracer la courbe de la perte de charge pour un débit égal à deux fois le débit d'une seule pompe ( $Q=2Q$ ). Retrançons en plusieurs points la perte de charge de la courbe caractéristique de la conduite (les bâtons verticaux en rouge), nous obtenons la courbe résultante  $(H_R, Q_R)$ .

Le point d'intersection entre les courbes  $(H_R, Q_R)$  et  $(H_{ABC}, Q)$  donne le point de fonctionnement A caractérisé par  $(H_A, Q_A)$ .

### 8.5 Conclusion

L'accouplement des pompes se fait généralement de deux manières, la première en série, c'est pour augmenter la charge, et l'on rencontre pratiquement dans les pompes multicellulaires, les stations de reprise, alimentation des hautes constructions comme les grattes ciel et la deuxième en parallèle, il sert à augmenter le débit, et l'on rencontre, en pratique, dans les stations de pompage d'alimentation en eau potable.

La détermination du point de fonctionnement d'une station de pompage qui refoule l'eau vers deux ou trois réservoirs, éloignés les uns de l'autres et situés à des cotes différentes, doit subir à d'autres considérations.

Le refoulement dans un réseau à partir d'un réservoir d'aspiration (installation en aspiration) où le plan d'eau est différentiel, donne d'autres astuces pour obtenir le point de fonctionnement du système, ce qui s'avère également un autre cas à divulguer.

La détermination du point de fonctionnement de deux pompes éloignées refoulant dans le même réseau peut conduire à entrer profondément dans des trucs ayant une forte relativité en pratique hydrotechnique.

Le couplage de deux pompes refoulant vers deux réservoirs éloignés et de cotes du plan différentes permet de comprendre que la détermination du point de fonctionnement d'un système complexe de pompage n'est pas assez facile comme un système simple. Il demande aux concepteurs des stations de pompage de bien penser, aux autres paramètres entrant en jeu, avant de mettre la conception finale d'une station de pompage.

# **CHAPITRE IX**

## **Equipements et entretien des stations de pompage**

**9.1. Introduction**

Après avoir présenté huit chapitres sur les pompes, leurs choix, installations, dimensionnement, couplage on est obligé de mettre un autre chapitre permettant de donner les équipements existant aux stations de pompage ainsi que les directives à entreprendre lors de l'exploitation d'une station de pompage.

A cet effet, nous allons mettre à la portée des lecteurs les opérations à exécuter avant et lors de la mise en marche d'une pompe et également les précautions à prendre au cours du service et l'opération à exécuter lors de l'arrêt d'une pompe.

Les différentes pannes d'une pompe et leurs remèdes seront également notre cible dans ce travail ainsi que leurs influences sur les performances de la pompe. Enfin les rôles de la vitesse spécifique seront parmi les objectifs de ce chapitre.

**9.2. Equipements d'une station de pompage**

Les principaux équipements dans une station de pompage se subdivisent en deux types qui sont les équipements hydromécaniques et les équipements hydro-énergétiques.

**9.2.1. Les équipements en amont des pompes (côté aspiration)**

Ils dépendent du type d'installation est ce que c'est les pompes sont installées en charge (forcée) ou en aspiration (dépression).

Selon les différents types d'installations on cite les équipements suivants :

Les équipements en amont (coté aspiration) : supposons que l'aspiration se fait à partir d'une bache d'aspiration directement, une conduite immergée dans la bache d'aspiration, selon le type d'aspiration on peut avoir :

**9.2.1.1. Une tulipe d'aspiration****9.2.1.2. Une crépine****9.2.1.3. Clapet de pied crépine**

- A) Au niveau de la bache on a des grilles qui servent à éviter l'entrée des corps solides, il existe des grilles fixes à barreaux dont le nettoyage est assurée soit manuelle soit automatique.
- B) Une grille tournante à toile métallique disposée en bande ou en tombeur dont le nettoyage s'effectue par lavage de la toile ou bien par des pompes à jet d'eau sous pression.

**9.2.1.4. Les joints**

Si l'installation de pompage est de type en aspiration de préférence on utilise les joints soudés, les joints à emboitement et les à manchon fileté.

On peut citer les joints suivants :

- \* Joints à manchon fileté
- \*Joints brides de raccordement
- \*Joints perplexes
- \*Joints viking Johnson

**9.2.1.5. Les vannes d'aspiration**

On utilise des vannes opercules (pour arrêter l'eau) ou des vannes pneumatiques.

**9.2.2. Les équipements en aval des pompes (côté refoulement)**

Les joints de raccordement peuvent être comme suit :

- \* Bride de raccordement
- \* Filetage
- \* Soudure

Les différents joints : Giboult, Johnson, spite, fillasse, viking

La conduite de refoulement sera raccordée à la pompe de manière à ne transmettre aucun effort parasite à la pompe (vibration).

**9.2.2.1. Divergent**

La vitesse de l'eau dans le divergent peut être de 3 à 7 m/s c'est pour cette raison on place un divergent pour la diminuer pour la maintenir de (1,2 ÷ 1,5) m/s

**9.2.2.2. Clapet**

Il existe différents types de clapets de refoulement, l'emplacement d'un clapet joue un double rôle.

- Protection de la pompe
- Maintenir la conduite en charge pour faciliter le refoulement de la pompe c'est-à-dire moins de consommation d'énergie (échauffement du moteur amoindrit)

Ces appareils ont des inconvénients

- Produire un coup de clapet lors de la fermeture brusque due à l'arrêt de la pompe.
- Placer dans le sens de l'écoulement.

Des améliorations ont été adoptées au niveau de ces clapets.

- a) Les clapets hydro-stops à caoutchouc.
- b) Les clapets à battants multiples pour diminuer le temps de fermeture.
- c) Les clapet à course limitée (à opercule) ou (à ressort)
- d) Les clapets à corps en forme de tuyère avec soupape à ressort donnant des pertes de charge réduite et assurant la fermeture avant le reflux (retour) de l'eau.

**9.2.2.3. Robinet vanne**

Il à plusieurs rôles parmi eux on peut citer ce qui suit :

- a) Isoler la pompe lors des entretiens ou bien le démontage.
- b) Le réglage du débit.
- c) lors de la mise en marche de la pompe et même à l'arrêt on ferme le robinet vanne surtout pour les pompes centrifuges radiales.

Les vannes utilisées en pratiques sont :

- Vanne à opercule
- Vanne papillon
- Vanne ronde
- Vanne méplate

Leurs commande pourra se faire soit manuellement soit automatiquement soit pneumatiques.

#### **9.2.2.4. Collecteur de refoulement**

La vitesse dans le collecteur de refoulement peut être comprise entre 1,3 et 1,5 m/s et comporte plusieurs accessoires à savoir :

- a) Les venteuses
- b) Les coudes
- c) Vannes de vidange
- d) Vannes de sectionnement
- e) Reniflards
- f) Réducteurs de pression.

#### **9.2.2.5. Le circuit auxiliaire**

- a) Pompe à vide : d'amorçage
- b) Pompe à drainage
- c) Compresseur (réservoir d'air anti bélier)
- d) Ventilation
- e) Pompe à incendie, bouche d'incendie
- f) Pont roulant, palan

#### **9.2.2.6. Appareils de mesure**

- a) Un débitmètre
  - \* À mercure
  - \* Électromagnétique
  - \* Diaphragme
  - \* Volumétrique
  - \* Walkman
  - \* Ultrason
- b) Manomètre (généralement placé au refoulement), vacuomètre (placé en installation en aspiration), mano-vacuomètre (placé en installation de type siphon).
- c) Prise d'échantillon (pour savoir la qualité de l'eau).
- d) Prise de dosage
- e) Pompe de Javellisation (type Japy).
- f) à l'extérieure de la station de pompage on trouve un réservoir anti bélier, un compresseur.
- g) Transformateur électrique, protection cathodique, groupe électrogène, la température dans le palier doit être inférieure à 70°C.

### **9.3. Opérations à exécuter avant la mise en marche d'une pompe**

1. Vérifier le système de graissage (palier, arbre)
2. S'assurer du bon fonctionnement des vannes et des robinets (robinets dans le système de refroidissement).
3. Vérifier à la main la rotation du rotor normalement l'arbre doit tourner facilement sans freinage excessif au niveau du presse-étoupe.
4. Vérifier le réglage du presse-étoupe.

**9.4. Opérations à exécuter lors de la mise en marche**

1. Fermer entièrement la vanne de refoulement pour les pompes centrifuges
2. Amorcer la pompe, si l'installation est en charge ouvrir le robinet vanne d'aspiration si elle est en aspiration l'amorçage de la pompe soit par une pompe d'amorçage soit par la méthode traductionnelle.
3. Mettre en marche le moteur électrique, dès que le moteur atteint son régime normal, ouvrir les vannes et robinets de refoulement progressivement.
4. Ouvrir les robinets des presse-étoupe, palier, roulement
  - \* Ouvrir les robinets des appareils de mesure (de pression)
  - \* Réglage du débit demandé.

**9.5. Précautions à prendre au cours de service**

1. Température du palier < 60 à 70°C.
2. Le niveau de l'huile dans le carter.
3. Vérifier le débit de fuites à mince filet ou goutte à goutte.
4. Régler une deuxième fois le débit pour fixer la pression.
5. S'assurer que la pompe ne refoule pas de l'eau sableuse, qui est un cas très fréquent au niveau des pompes immergées (forage étroit, tubage mal calé par rapport à la crépine.

**9.6. Opérations à exécuter lors de l'arrêt de la pompe**

- Fermeture partiellement du robinet vanne
- Fermer le robinet au niveau du vacuo-mètre pour une installation en aspiration.
- Arrêt le moteur électrique.
- Fermer le robinet du manomètre, du presse-étoupe, du système de refroidissement (palier) pour éviter l'entrée d'air afin d'éviter la corrosion.
- \* Lors d'un arrêt de longue durée.
- Vidanger la pompe de l'huile s'il y a de l'huile.
- Vidanger complètement la pompe (le système de refroidissement, palier, moteur, roulement)
- Faire sortir la bague et les tresse de coton du presse-étoupe.

**9.7. Les différentes pannes possibles et leurs remèdes**

Le tableau suivant mis en évidence les pannes possibles dans une station de pompage et leurs remèdes.

Problème	Causes	Remèdes (dépannage)
1. La pompe n'aspire pas	a) Pompe male amorcée b) entrée d'air (fuites, mauvaise étanchéité, presse étoupe) c) Clapet de pied (crépine ne fonctionne pas) d) Le vacuomètre indique une forte dépression e) Les aiguilles des manomètre et vacuomètre oscillent fortement	a) Vérifier l'amorçage (lire sur les appareils) b) Vérifier les entrées d'air (presse-étoupe, les joints)  c) Vérifier le calage
2. La pompe fonctionne, elle aspire et refoule et les appareils de mesure donnent des lectures mais il n'est y a pas de sortie d'eau au côté refoulement.	a) Résistance très forte dans la conduite de refoulement. b) Le moteur tour dans le sens inverse.	a) Vérifier la résistance * résistance hydraulique - choix du diamètre de refoulement - soit la pompe est male choisie. * Résistance mécanique - Vérifier les fils électriques (changement de phase).
3. Le débit de la pompe baisse progressivement au-dessous de la valeur appelée.	a) Diminution du nombre de tour. b) Le patinage possible dans le couroi de transmission. c) Entrée d'air dans la conduite d'aspiration ou dans le corps de la pompe.	a) Vérifier le réseau électrique b) Vérifier la conduite de refoulement c) changer la garniture du presse-étoupe.
4. Pompe absorbe une puissance très élevée	a) Augmentation du nombre de tour du moteur électrique. b) Le débit est très important c) le presse-étoupe très serré. d) Les paliers sont males graisser.	a) Vérifier le moteur au système de refroidissement.  b) diminuer le débit (fermer le côté refoulement progressivement) c) Desserrage du presse-étoupe. d) Graisser les roulements (qualité de graissage)
5. La pompe est bruyante (la pompe souffle)	a) Elle aspire de l'air (cavitation) b) La résistance en aspiration est importante. c) La pompe est malle calée (aspiration importante). d) Vérifier la formation des bulles d'air. e) La température du liquide a augmentée.	a) Vérifier le système d'amorçage. b) Vérifier les entrées d'air à l'aspiration (cassure, fuites, joints de dilatation). c) Mettre à l'aspiration un convergent dont la génératrice supérieure est horizontale. d) Vérifier la hauteur d'aspiration admissible.
6. Les paliers de la pompe surchauffés	a) Graisse b) Mauvais équilibrage de l'axe pompe-moteur. c) Le moteur électrique est très puissant, c'est-à-dire le nombre de tour est très important par rapport à celle de la pompe.	a) Changer de l'huile ou bien ajouter de l'huile. b) Rééquilibrage (ajuster) l'arbre de la pompe et l'arbre du moteur.
7. Le moteur électrique surchauffe	a) Un mauvais système de refroidissement. b) Tension important – nombre de tour important. c) Enclenchement et déclenchement. d) Une masse électrique	a) Vérifier le système de refroidissement (ventilation). b) Vérifier la tension.



**9.8. Conclusion**

Après la réalisation d'une station de pompage et pour l'exploiter convenablement et augmenter sa durée de vie, il faut tenir compte de toutes les opérations à exécuter avant et lors de sa mise en marche. Cependant, il existe également des précautions à entreprendre au sérieux le plus possible lors du service. Toutefois, lors de l'arrêt de la pompe temporaire ou de longue durée il faut suivre les opérations qu'il faut pour éviter tous les dommages inopinés.

Avant d'entamer comment résoudre une panne d'une pompe, il faut tout d'abord chercher sa ou ses cause(s) afin de porter les remèdes les plus adéquats.

# **CONCLUSION GENERALE**

### Conclusion générale

Les stations de pompage peuvent aider à exploiter les ressources profondes et lointaines de plus elles ont un rôle primordial pour développer certains domaines.

Mettre un support consistant de cours, en pompes et stations de pompage, à la disposition des étudiants s'avère d'une très grande importance, vu le manque qu'il connu ce domaine, mais aussi sur son utilité pratique qui est d'importance primordiale pour certaines disciplines à l'instar du dessalement des eaux de mer, de l'hydraulique en charge, des stations de relevage des eaux, de l'exploitation des forages etc.

Dans le souci de rendre ce domaine simple et aisé dix chapitres ont été proposés, nous avons commencé par deux chapitres ayant une forte liaison avec les cours de base en mathématique, en physique et en hydraulique. Ces deux chapitres permettaient de créer une homogénéité et une concordance avec ces cours en donnant une originalité aux relations utilisées dans les chapitres suivants.

La construction des courbes caractéristiques des pompes nous permet de constater trois types à savoir les courbes théoriques, analytiques et pratiques et une étude de délimitation de la plage de bon fonctionnement d'une pompe. Les résultats obtenus montrent qu'en pratique il n'existe pas mieux que les courbes caractéristiques pratiques du fait qu'elles reflètent la réalité du banc d'essai de l'usine de fabrication des pompes.

Dans le but de décortiquer les différents types d'installations des pompes, nous avons fourni un chapitre dans lequel nous avons démontré toutes les relations des trois installations possibles à savoir les installations en charge, en aspiration et en siphon ainsi que tous les appareils de mesure surtout du débit et de la pression qu'on peut rencontrer au niveau de ces installations.

Pour mettre en évidence les lois de similitude et la vitesse spécifique, trois lois ont été ciblées, il s'agit des lois de similitude géométrique, cinématique et dynamique. Par la suite les rapports de la charge, du débit et de la puissance entre les roues réelle et modèle et enfin nous avons terminé par la vitesse spécifique et ses rôles.

Dans le but d'examiner le phénomène de cavitation et ses répercussions néfastes sur la pompe en particulier et le système installé en général, on a procédé à :

La description du phénomène en mettant en évidence ses causes et ses conséquences et la condition principale à respecter pour empêcher ce phénomène de se produire.

La démonstration de toutes les formules, et pour les différentes installations cas au cas, comme  $(NPSH)_d$ ,  $h_{adm}$ ,  $(NPSH)_r$ , la pression atmosphérique,  $P_{atm}$ , la tension de vapeur du liquide,  $h_v$ , etc. qui pèsent lors de l'application de la condition de non de cavitation.

La détermination de la zone de cavitation, le calage de la pompe et la détermination du point de fonctionnement qui doit délimiter hors de la zone de cavitation.

## CONCLUSION GENERALE

---

L'absence d'une pompe qui ne répond pas en terme surtout de débit aux exigences de la demande nous a conduit à mettre en exergue les modes de réglage à savoir le rognage, le vannage, la réduction du temps de pompage, l'augmentation ou la diminution de la vitesse de rotation, le by-pass, l'introduction d'air dans la conduite d'aspiration et quand t-est-ce que on applique l'un ou l'autre moyens de réglage.

À propos de la nécessité pratique et technico-économique d'accoupler les pompes soit en série soit en parallèle, nous avons révélé comment se faisait ce couplage pour deux ou trois pompes identiques ou non identiques ayant le même point de départ ou non. Puis, nous avons mis en détaille comment déterminer les points de fonctionnement de certains systèmes d'adduction complexes, car ces derniers permettaient d'avoir une large visibilité et bonne technicité sur certains paramètres qu'engendre le couplage des pompes.

Dans un contexte de franchise et de clarté, les principaux équipements en amont et en aval d'une station de pompage ont été également nos objectifs afin de les discrétiser, de donner à chacun son emplacement et ses rôles.

Après la réalisation d'une station de pompage, nous avons achevé cet ouvrage par une représentation des opérations à exécuter avant et lors de la mise en marche ainsi que les opérations à exécuter lors de l'arrêt d'une pompe. Enfin, les problèmes rencontrés aux stations de pompage, ses causes et ses remèdes ont été les parfums par lesquels nous avons clore ce travail.

# **Références bibliographiques**

## Références bibliographiques

---

### Références bibliographiques

- [1] DUPONT A. (1979), Hydraulique urbaine, Ouvrages de transport, d'élévation et de distribution des eaux, Tome II, Edition Eyrolles, 384 pages.
- [2] Anne Zimmer, Daniel Fernex, Antoine Griere, TP n°2, étude préliminaire des pompes centrifuges.
- [3] CARLIER.M, GARNIER.B, (1982), Les stations de pompage d'eau, Edition Eyrolles. Paris.
- [4] DALI Rachid, (2013) « étude d'un écoulement dans une conduite d'aspiration d'une pompe centrifuge », mémoire de projet de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de master en hydraulique, université Aboubekr BELKAID Tlemcen, Algérie, 83 pages.
- [5] JEAN LAPRAY .F, (2002), « Technique de l'ingénieur », machine hydraulique et thermique. Edition PYC. France.
- [6] LE LEC P. (1966), Transport des fluides pompes», Université de Nancy .36p.
- [7] LENCASTRE, A. (1996), Hydraulique générale, Ed. EYROLLES. Paris.
- [8] KREMENETSKI N., SCHTERENLIHT D., ALYCHEV V., YAKOVLEVA L. (1984). Hydraulique, Édition MIR. Moscou, 325 pages.
- [9] OBATON Vincent, (2008), Les vecteurs, lycée Stendhal de Grenoble, France.
- [10] PD Smith, Basic Hydraulics, 156 pages.
- [11] RANALD V.GILES. (1984), Mécaniques des fluides et hydraulique, cours et problèmes Série Schaum, 475 pages.
- [12] TOUMI Abdelouaheb, (1997-1999) « Cahier de pompes et stations de pompage » enseignant Pr. K.K.Omar. ENSH, Algérie.