

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

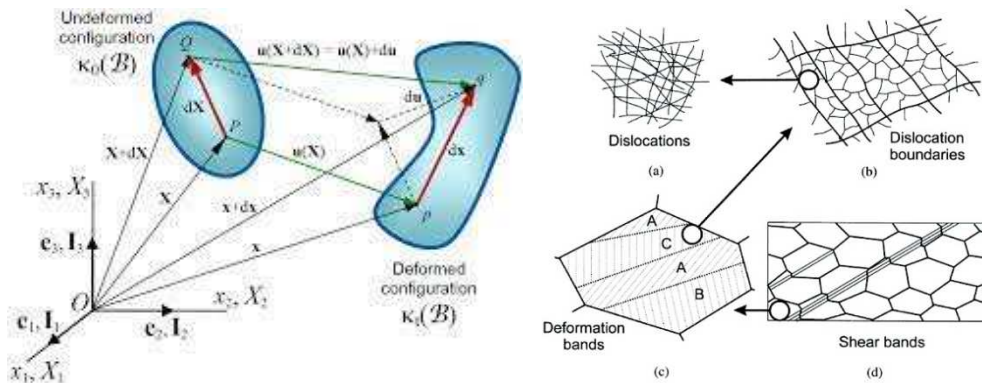


Université 08 Mai 1945 de Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Cours de mécanique des solides déformables



Destiné aux étudiants en Master I Géotechnique

Elaboré par : Dr LAFIFI Brahim

Avant propos

Le comportement mécanique des matériaux est un domaine d'étude crucial dans la science des matériaux. La compréhension de la manière dont les matériaux réagissent aux contraintes et aux déformations est essentielle pour la conception et l'utilisation efficaces des matériaux dans une variété d'applications.

Ce cours est destiné aux étudiants intéressés par la science des matériaux et la mécanique des solides. Les lecteurs doivent avoir une compréhension de base de la physique et des mathématiques pour suivre le contenu.

Ce cours vise à fournir aux étudiants une compréhension approfondie des mécanismes physiques de déformation et de rupture des matériaux, ainsi que des outils pour caractériser expérimentalement ces phénomènes. Les connaissances acquises dans ce cours serviront de base pour des études plus avancées dans le domaine des matériaux et aideront les étudiants à comprendre et à résoudre des problèmes complexes liés à la conception et à l'ingénierie des matériaux. Le cours est structuré en quatre chapitres qui abordent successivement les mécanismes physiques, la classification et les essais mécaniques, l'élasticité et la viscoélasticité, ainsi que la plasticité et la viscoplasticité.

Nous espérons que ce cours fournira une compréhension approfondie des mécanismes physiques de déformation et de rupture, ainsi qu'un aperçu des techniques expérimentales utilisées pour caractériser les matériaux.

Le chapitre I se concentre sur les métaux et alliages, en examinant les éléments de cristallographie, les défauts cristallins, les mécanismes physiques de déformation et les mécanismes de rupture. Les notions d'amorphe et cristallin, ainsi que différentes échelles de défauts (ponctuels, linéaires, de surfaces et à trois dimensions) sont abordées. Ce chapitre traite également des déformations élastiques et permanentes, ainsi que des ruptures fragiles et ductiles.

Le chapitre II aborde la classification rhéologique et la caractérisation expérimentale des matériaux. Les différentes classes de comportement rhéologique des solides sont présentées, ainsi que les principes d'essais mécaniques et les différents types d'essais (traction, écrouissage, fluage, relaxation, triaxialité, flexion et cycliques). Enfin, ce chapitre traite des modèles analogiques pour représenter les comportements réels, notamment les fluides visqueux, les solides élastiques, plastiques et viscoplastiques.

Le chapitre III étudie l'élasticité et la viscoélasticité des matériaux. Les rappels mathématiques sur les tenseurs, les équations du mouvement et de l'équilibre statique, ainsi que les contraintes principales et les plans principaux sont présentés. Les formulations en déplacements et en contraintes sont abordées, ainsi que les effets

thermiques. La viscoélasticité linéaire et les modèles viscoélastiques (Kelvin, Maxwell, Poynting et Zener) sont également étudiés.

Enfin, le chapitre IV traite de la plasticité et de la viscoplasticité des matériaux. Les différentes classes de comportement, les choix des lois de comportement et les modèles plastiques sont présentés. Les formulations élastoplastiques, les critères de plasticité (Rankine, Tresca, Von Mises et Mohr Coulomb) et les lois d'écoulement associées et non associées sont examinées. La viscoplasticité et les modèles rhéologiques correspondants sont également abordés.

Table des matières

Avant propos

Liste des figures.....	V
Liste des tableaux.....	VIII

CHAPITRE I : Mécanismes physiques de déformation et de rupture.

I.1 Métaux et alliages.....	1
I.1.1. Eléments de cristallographie.....	1
I.1.1.1. Atomes.....	1
I.1.1.2 Amorphe et cristallin.....	1
I.1.1.3 Les cristaux.....	1
I.1.2 Défauts cristallins	2
I.1.2.1 Défauts ponctuels.....	3
I.1.2.2 Défauts linéaires.....	4
I.1.2.3 Défauts de surfaces.....	7
I.1.2.4 Défauts à trois dimensions.....	9
I.2 Mécanisme physique de déformation.....	9
I.2.1. Déformation élastique	9
I.2.2. Déformation permanente	10
I.2.3. Déformation des polycristaux	10
I.3 Mécanisme de rupture.....	12
I.3.1. Rupture fragile.....	12
I.3.2. Rupture ductile.....	12

CHAPITRE II : Classification rhéologique et caractérisation expérimentale.

II.1 Identification et classement rhéologiques des solides.....	14
II.2 Les grands principes d'essai mécaniques.	15
II.2.1 Essais caractéristiques.....	15
II.2.1.1 L'essai de traction.....	16
II.2.1.3 L'essai de fluage.....	23

II.2.1.4 L'essai de relaxation.....	24
II.2.1.5 L'essai de triaxialité.....	25
II.2.1.6 L'essai de flexion.....	25
II.2.1.7 Les essais cycliques.....	26
II.3 Schéma des comportements réels à partir de modèles analogiques.	27
II.3.1 Modèles analogiques.....	27
II.3.1.1 Fluides visqueux.....	28
II.3.1.2 Solides élastiques.....	29
II.3.1.2 Solides viscoélastiques.....	30
II.3.1.3 Solides plastiques.....	31
II.3.1.4 Solides viscoplastiques.....	34

CHAPITRE III : Elasticité et viscoélasticité

I. Elasticité.....	36
I.1. Rappel mathématique.....	36
I.1.1 Calcul indiciel.....	36
I.1.2	
Règles.....	36
I.1.3 Symbole de Kronecker.....	37
I.1.4 Algèbre des tenseurs cartésiens.....	38
I.1.5 Equations du mouvement.....	40
I.1.6 Equilibre statique.....	40
I.1.7 Contraintes principales et plans principaux.....	40
I.1.8 Equation caractéristique et directions principales.....	42
I.1.9 Tenseurs déviateur et sphérique.....	42
I.2 Domaine de validité et d'emploi de l'élasticité.....	43
I.3 Bilan des inconnues des équations de l'élasticité.....	44
I.4 Formulation en déplacements (cas tridimensionnel).....	45
I.4.1 Equation de Navier	45
I.4.2 Matériau isotrope.....	45
I.5 Formulation en contraintes (cas tridimensionnel).....	46

I.5.1 Matériau isotrope.....	46
I.6 Elasticité plane isotrope.....	46
I.6.1 Etat plan de contrainte.....	46
I.6.2 Etat plan de déformation.....	48
I.7 Bilan des deux états plans.....	49
I.8 Action thermique (cas plan).....	50
II. Viscoélasticité.....	51
II.1 Viscoélasticité linéaire.....	51
II.1.1 Principe de superposition de Boltzmann.....	51
II.1.2 Fonctions de fluage et de relaxation.....	52
II.1.3 Lois héréditaires de Volterra.....	53
II.2 Modélisation en viscoélastiques.....	54
II.2.1 Transformée de Laplace-Carson.....	54
II.3 Modèles viscoélastiques.....	55
II.3.1 Modèle de Kelvin et Maxwell.....	55
II.3.2 Modèle de Poynting et Zener.....	57
II.3.3 Autres modèles simples.....	59
II.4 Loi de comportement.....	59
II.4.1 Viscoélasticité isotrope.....	60
II.5 Classification des comportements.....	61
CHAPITRE IV : Plasticité et viscoplasticité	
I. Plasticité.....	63
I.1. Introduction.....	63
I.2 Les grandes classes de comportement.....	63
I.3 Choix des lois de comportement.....	64
I.3.1 Comportements viscoélastiques.....	64
I.3.2 Comportements rigides-parfaitement plastiques.....	64
I.3.3 Comportements plastiques.....	65
I.3.4 Comportements viscoplastiques.....	65

I.4 Modèles plastiques.....	66
I.4.1 Modèle élastique parfaitement plastique.....	66
I.5 Formulation des lois élastoplastiques.....	67
I.5.1 Principe de partition des déformations élastiques et plastiques.....	68
I.5.2 Définition de la surface de charge.....	68
I.5.3 Lois d'écoulement associées.....	69
I.5.4 Lois d'écoulement non associées.....	70
I.5.5 Paramètres d'écrouissage.....	71
I.6 Exemples de critères de plasticité.....	73
I.6.1 Critère de Rankine.....	73
I.6.2 Critère de Tresca.....	74
I.6.3 Critère de Von Mises.....	75
I.6.4 Critère de Mohr Coulomb.....	76
II. Viscoplasticité.....	78
II.1 Introduction.....	78
II.2 Décomposition de la déformation.....	78
II.3 Lois d'écoulement.....	79
II.4 Formulation des lois viscoplastiques.....	79
II.4.1 Ecriture générale.....	79
II.5 Viscoplasticité uniaxiale.....	80
II.5.1 Exemple de modèle rhéologique.....	80
II.5.2 Quelques modèles classiques en viscoplasticité.....	83
Bibliographie.....	85

Liste des figures

CHAPITRE I : Mécanismes physiques de déformation et de rupture.

Figure 1.1: Structure cristalline et structure amorphe.....	1
Figure 1.2: Structure d'un métal poly cristallin.....	2
Figure 1.3: Défaut ponctuel type lacunes.....	3
Figure 1.4: Défaut ponctuel type atome interstitiel.....	4
Figure 1.5: Défaut ponctuel type insertion ou substitution.....	4
Figure 1.6: Dislocation type coin.....	5
Figure 1.7: Dislocation type vis.....	6
Figure 1.8: Dislocation mixte.....	7
Figure 1.9: Joint de grain.....	8
Figure 1.10: Plans de maclage.....	8
Figure 1.11: Déformation d'un polycristal.....	10

CHAPITRE II : Classification rhéologique et caractérisation expérimentale.

Figure 2.1 : Eprouvettes de traction à section circulaire et plate.....	13
Figure 2.2 : Photo des Mors utilisés lors de l'essai de traction.....	14
Figure 2.3 : Dispositif expérimental de l'essai de traction.....	15
Figure 2.4 : Jauges de déformation.....	15
Figure 2.5 : Courbe typique pour un matériau fragile.....	16
Figure 2.6 : Courbe typique pour un matériau ductile.....	16
Figure 2.7 : Courbe typique pour un comportement élastique non linéaire.....	17
Figure 2.8 : Courbe contrainte-déformation typique jusqu'à la rupture.....	18
Figure 2.9 : Méthode de détermination de la limite élastique conventionnelle.....	19
Figure 2.10 : Détermination de la résistance à la traction.....	19
Figure 2.11 : Détermination de la résistance à la rupture.....	20
Figure 2.16 : Courbes type en contrainte et déformation en fonction du temps d'un essai de fluage.....	21

Figure 2.17 : Courbes type en déformation et en contrainte en fonction du temps d'un essai de relaxation.....	22
Figure 2.18 : Essai de flexion 3 points.....	22
Figure 2.19 : Essai de flexion 4 points.....	23
Figure 2.20 : Essai de traction compression cyclique sur un acier mi-dur.....	23
Figure 2.21 : Evolution de ε en fonction du temps.	25
Figure 2.22 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique.....	26
Figure 2.23 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement viscoélastique.....	27
Figure 2.24 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement rigide parfaitement plastique.....	28
Figure 2.25 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique parfaitement plastique.....	29
Figure 2.26 : Modèle rhéologique de Saint-Venant.	29
Figure 2.27 : Modèle rhéologique de Prager.	29
Figure 2.28 : Modèle rhéologique élastoplastique parfait.	30
Figure 2.29 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastoplastique écrouissable.	30
Figure 2.30 : Modèle rhéologique élastoplastique écrouissable.	31
Figure 2.31 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement parfaitement viscoplastique.	31
Figure 2.32 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique parfaitement viscoplastique.	32
Figure 2.33 : Modèle rhéologique de Bingham-Norton.	32

CHAPITRE III : Elasticité et viscoélasticité

Figure 3.I.1 : Repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en notation indicielle.....	33
Figure 3.I.2 : Tétraèdre élémentaire de Cauchy.....	38
Figure 3.I.3 : Partie libre A_t et partie appuyée A_u de la surface A	42
Figure 3.I.4 : Etats plans de contrainte : a) pièce percée d'un trou ; b) paroi porteuse sous charge (q) et pesanteur (ρg)	43
Figure 3.I.5 : Etats plans de déformation (vue en coupe ; solide admis très long selon z) ; a) tunnel ; b) barrage.....	45

Figure 3.II.1 : Réponse typique en déformation et en contrainte pour la viscosité linéaire.....	49
Figure 3.II.2 : Courbe typique d'un essai de fluage pour un échelon de contrainte unitaire.....	50
Figure 3.II.3 : Courbe typique d'un essai de relaxation pour une déformation unitaire.	50
Figure 3.II.4 : Modèle de Kelvin et Maxwell.	53
Figure 3.II.5 : Modèle de Poynting.	54
Figure 3.II.6 : Comportement en fluage et relaxation pour le modèle de Poynting.....	56
 CHAPITRE IV : Plasticité et viscoplasticité	
Figure 4.I.1 : Eléments mécaniques élémentaires.....	60
Figure 4.I.2 : Modèle élasto-plastique.....	63
Figure 4.I.3 : Diagramme contrainte-déformation (σ, ε), (a) acier à palier ; (b) alliage d'aluminium.....	64
Figure. I.4 : Modèle élastique parfaitement plastique.....	64
Figure 4.I.5 : Évolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage.....	66
Figure 4.I.6 : Surface de charge et potentiel plastique dans le plan des contraintes.....	67
Figure 4.I.7 : Diagrammes traditionnels de Mohr a) Loi associée $\psi = \varphi'$ b) Loi non associée $\psi < \varphi'$	67
Figure 4.I.8 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction-compression simple.....	68
Figure 4.I.9 : Représentation de l'écrouissage cinématique en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \varepsilon_{axiale}$ en traction-compression simple.....	69
Figure 4.I.10 : Critère de Rankine.....	70
Figure 4.I.11 : Critère de Tresca.....	71
Figure 4.I.12 : Critère de Von Mises : a. Dans le repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ b. En projection selon l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	72
Figure 4.I.13 : Critère de Mohr-Coulomb.	73
Figure 4.II.1 : Modèle de Bingham généralisé.	76
Figure 4.II.2 : Fluage avec le modèle de Bingham.	78
Figure 4.II.3 : Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée.	78

Liste des tableaux

CHAPITRE II : Classification rhéologique et caractérisation expérimentale.

Tableau 2.1: Ordre de grandeur des éléments de volume représentatifs.....11

Chapitre I

Mécanismes physiques de déformation et de rupture

I.1 Métaux et alliages

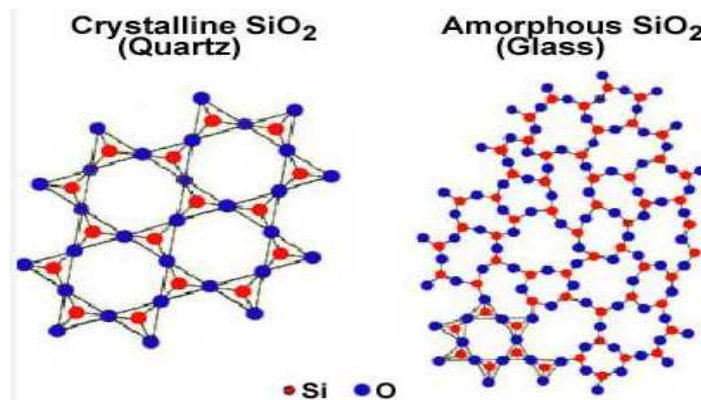
I.1.1 Eléments de cristallographie

I.1.1.1 Atomes

Les métaux et les alliages sont constitués d'un assemblage d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques qui naissent entre les électrons des atomes voisins.

I.1.1.2 Amorphe et cristallin

Les atomes peuvent s'organiser de manière aléatoire, formant une structure amorphe. Les verres et de nombreux polymères sont amorphes. Ils peuvent également s'organiser de manière régulière, formant une structure cristalline.



ex. SiO₂ cristallin: quartz

ex. SiO₂ vitreux: verre

Figure 1.1: Structure cristalline et structure amorphe.

Les mêmes atomes peuvent adopter l'une ou l'autre structure en fonction de la vitesse de refroidissement. Un refroidissement rapide peut conduire à une structure amorphe, tandis qu'un refroidissement plus lent peut permettre la formation d'une structure cristalline.

I.1.1.3 Les cristaux

a. La structure cristalline

Dans un cristal, les atomes sont rangés de manière ordonnée. Il existe un motif élémentaire qui se répète à l'infini, appelé maille cristalline. Il existe une grande variété de cristaux, qui sont répertoriés selon leur structure cristalline par la cristallographie.

Les positions relatives des atomes dans un cristal sont déterminées par les orientations de leurs liaisons (covalentes ou ioniques) et par leur géométrie dans l'espace. Cependant, contrairement aux liaisons covalentes et ioniques, les liaisons métalliques ne sont pas orientées.

b. Mono et poly cristaux

Les métaux sont généralement des polycristaux dont la taille dépend du processus de fabrication et des traitements thermiques. On peut observer les grains (cristaux individuels) à l'aide de procédés optiques tels que la microscopie optique. La taille typique des grains est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres (μm) à quelques millimètres (mm).

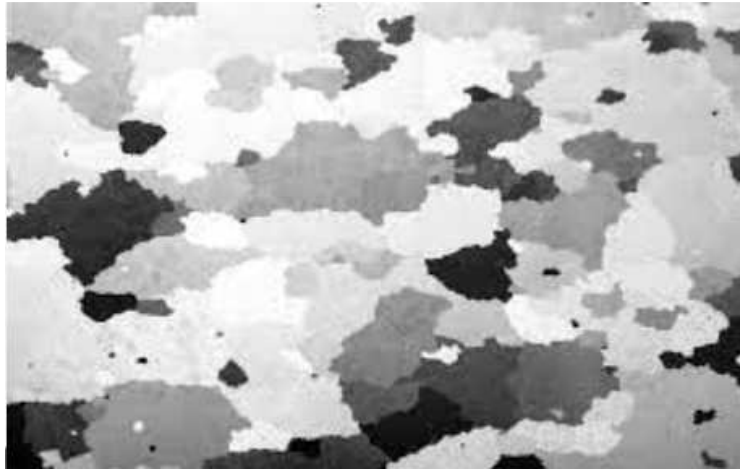


Figure 1.2: Structure d'un métal poly cristallin.

Aujourd'hui, il est possible de créer des monocristaux métalliques, qui ne comportent qu'un seul grain dont les directions atomiques sont contrôlées. Cependant, cette technologie est encore principalement réservée aux applications militaires et aéronautiques.

La plupart des structures cristallines métalliques correspond à l'un des trois systèmes suivants:

- le cristal cubique centré (C.C);
- le cristal cubique à faces centrées (C.F.C);
- le cristal hexagonal compact (H.C).

I.1.2 Défauts cristallins

Le schéma du cristal parfait tel qu'il vient d'être décrit ne peut rendre compte que des déformations élastiques et de la rupture dite fragile, dans laquelle la décohésion intervient sans déformation macroscopique appréciable. Cependant, dans la réalité, les déformations plastiques et la rupture ductile ne s'expliquent que par la présence de défauts qui perturbent le réseau cristallin, notamment les dislocations, les vacances, les lacunes et les impuretés. Ces défauts permettent aux atomes de se déplacer de manière permanente dans le cristal et de causer des déformations plastiques et des fractures ductiles. Les défauts dans les cristaux peuvent être classés en fonction de leur dimension spatiale :

- Les défauts ponctuels, qui ont une dimension de 0, tels que les lacunes, les atomes interstitiels, les impuretés, les atomes étrangers, etc.
- Les défauts linéaires, qui ont une dimension de 1, tels que les dislocations, les joints de grains, les macles, etc.
- Les défauts surfaciques, qui ont une dimension de 2, tels que les joints de grains, les surfaces libres, les interfaces, etc.
- Les défauts volumiques, qui ont une dimension de 3, tels que les pores, les inclusions, les défauts d'empilement, etc.

1.1.2.1 Défauts ponctuels (dimension 0)

Les défauts ponctuels regroupent les perturbations du réseau à l'échelle atomique :

- Les lacunes, qui sont des espaces vides dans lesquels un ou plusieurs atomes manquent dans le réseau cristallin.
- Les atomes auto-interstitiels, qui sont des atomes supplémentaires insérés dans l'interstice entre les atomes du réseau cristallin, créant ainsi un défaut ponctuel.
- Les impuretés dans les solides, qui sont des atomes étrangers incorporés dans le réseau cristallin, perturbant ainsi la structure cristalline.

a. Les lacunes : c'est le défaut ponctuel le plus simple, la lacune, correspond à l'absence d'un atome dans la structure atomique :

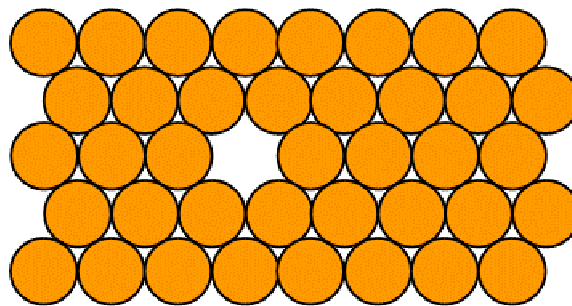


Figure 1.3: Défaut ponctuel type lacunes.

La pratique révèle qu'il est impossible de produire un cristal exempt de lacunes, car tous les solides cristallins comportent dans leur réseau des lacunes. Les lacunes jouent un rôle important dans la diffusion à l'état solide, car elles facilitent le déplacement des atomes sur de longues distances en fournissant des sites vacants pour que les atomes puissent se déplacer. En outre, les lacunes peuvent également jouer un rôle dans la déformation plastique et la corrosion des matériaux.

b. Atomes interstitiels

Un atome auto-interstitiel est un atome qui occupe un site interstitiel, c'est-à-dire un petit espace vide entre deux atomes du réseau cristallin. La conséquence de la présence de cet atome est que le réseau cristallin peut subir une distorsion, car l'atome occupant

l'interstice occupe un espace bien plus grand que celui proposé par l'interstice. Cette distorsion peut affecter les propriétés physiques et mécaniques du matériau, telles que la résistance, la ductilité et la conductivité.

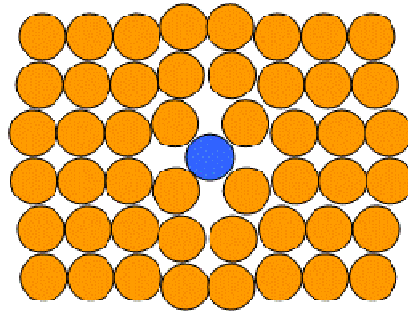


Figure 1.4: Défaut ponctuel type atome interstitiel.

La formation de ce défaut est assez faible à causes des fortes énergies mises en jeux.

c. Impuretés dans les solides

Tous les solides contiennent des traces d'impuretés, qui peuvent générer des défauts dans le réseau cristallin. Les deux types de défauts causés par ces impuretés sont :

- Les défauts d'insertion, dans lesquels les atomes étrangers s'insèrent dans l'interstice du réseau cristallin, créant ainsi un défaut ponctuel.
- Les défauts de substitution, dans lesquels les atomes étrangers remplacent un ou plusieurs atomes du réseau cristallin, créant ainsi un défaut ponctuel. Ces défauts peuvent perturber la structure cristalline du matériau et affecter ses propriétés physiques et mécaniques.

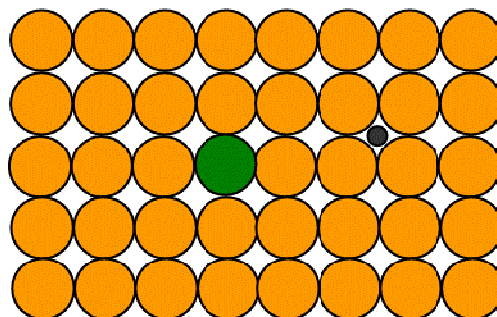


Figure 1.5: Défaut ponctuel type insertion ou substitution.

1.1.2.2 Défauts linéaires (dimension 1)

Les défauts linéaires dans les cristaux sont appelés des dislocations, qui correspondent à un mauvais alignement des plans atomiques dans le réseau cristallin. On distingue deux types de dislocations :

- Les dislocations de coin, également appelées dislocations de bord ou dislocations de type I, correspondent à une ligne de défaut où une demi-maille supplémentaire est introduite dans le réseau cristallin.
- Les dislocations de vis, également appelées dislocations en spirale ou dislocations de type II, correspondent à une ligne de défaut où les plans atomiques sont légèrement décalés les uns par rapport aux autres.

Les dislocations sont responsables de la déformation plastique des métaux et des alliages, car elles permettent le glissement des plans atomiques les uns par rapport aux autres.

a. Dislocation-coin

- Il s'agit d'un défaut centré autour d'une ligne le long de laquelle se termine un demi-plan atomique supplémentaire dans le réseau cristallin.

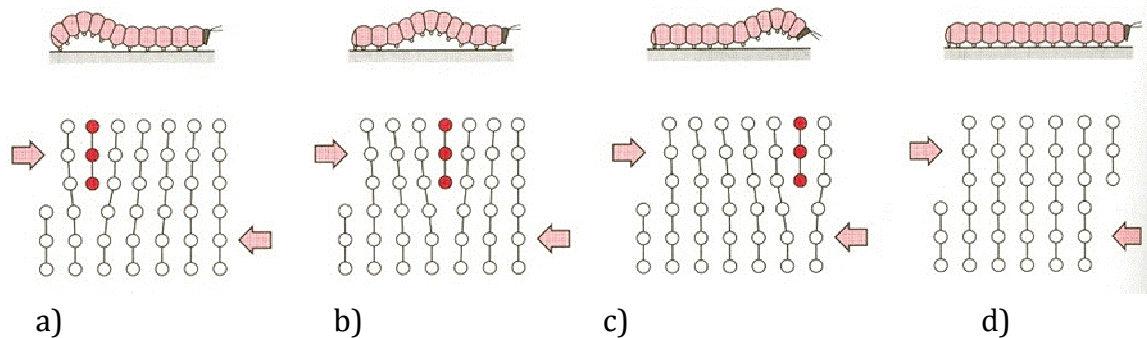


Figure 1.6: Dislocation type coin.

Une dislocation de coin va se déplacer lorsqu'une contrainte de cisaillement est appliquée dans une direction perpendiculaire à sa ligne de dislocation. Lorsque la contrainte de cisaillement est appliquée, le plan de la dislocation (plan A) se déplace vers la droite et pousse sur les demi-plans voisins (B, C et D). Lorsque la contrainte de cisaillement atteint une certaine valeur, les liaisons inter-atomiques du plan se rompent le long du plan de cisaillement et créent un nouveau demi-plan (plan B) qui est exempt de dislocation. Ce processus se reproduit pour les plans C et D, créant ainsi une marche de glissement à la surface du matériau. Le déplacement d'une dislocation est similaire au mouvement d'une chenille ou d'un tapis roulant.

Les dislocations sont essentielles pour la déformation plastique des métaux, car elles permettent le glissement des plans atomiques les uns par rapport aux autres. Cependant, les dislocations peuvent également affecter les propriétés mécaniques et la durée de vie des matériaux.

b. Dislocation-vis

Une dislocation-vis traduit un défaut linéaire qui résulte du cisaillement du cristal

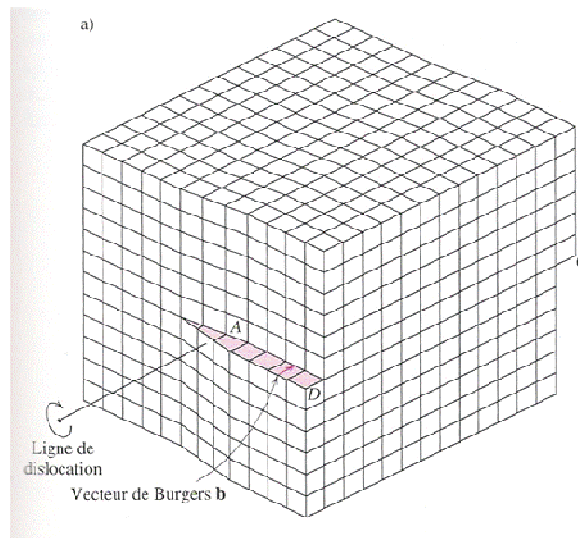


Figure 1.7: Dislocation type vis.

Lorsqu'une contrainte de cisaillement est appliquée sur un cristal, la partie supérieure du réseau peut subir un déplacement dans une direction d'une distance équivalente à la distance entre deux atomes, tandis que la partie inférieure reste fixe. Cela entraîne une déformation linéaire et la formation d'une ligne de dislocation, qui est matérialisée par le segment AB. La ligne de dislocation sépare le cristal en deux parties, l'une avec un demi-plan atomique supplémentaire (à gauche de la ligne) et l'autre avec un demi-plan atomique manquant (à droite de la ligne).

Le mouvement des dislocations est un processus important pour la déformation plastique des métaux, car il permet aux plans atomiques de glisser les uns par rapport aux autres et d'absorber l'énergie de déformation. Cependant, les dislocations peuvent également affecter les propriétés mécaniques des matériaux et leur durée de vie.

Lorsqu'une dislocation se déplace à travers un monocristal, cela entraîne l'apparition d'une "marche" en surface et d'un décalage des deux parties du cristal. L'ensemble de ces décalages génère la déformation plastique observable à l'échelle macroscopique. Les dislocations de vis créent des plans atomiques décalés qui décrivent une rampe hélicoïdale, d'où leur nom.

Le mouvement des dislocations est un processus important pour la déformation plastique des métaux, car il permet aux plans atomiques de glisser les uns par rapport aux autres et d'absorber l'énergie de déformation. Cependant, les dislocations peuvent également affecter les propriétés mécaniques des matériaux et leur durée de vie.

Dislocation mixte

- o En réalité, les dislocations que l'on rencontre sont rarement parfaites : coins ou vis mais plutôt mixtes.

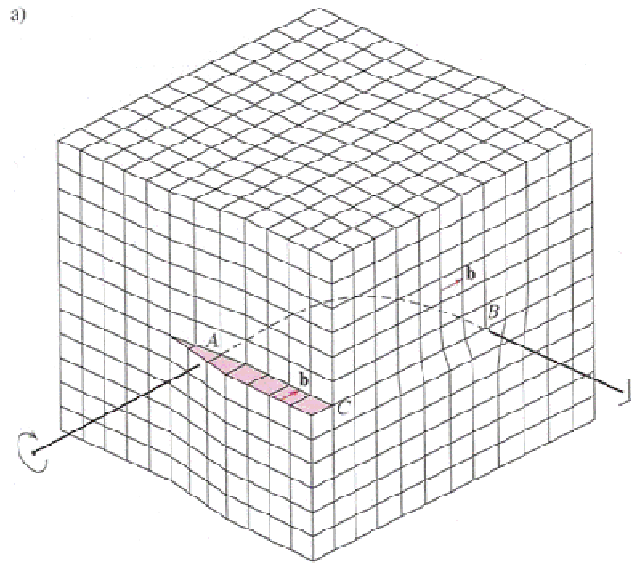


Figure 1.8: Dislocation mixte.

Il est possible que différents types de dislocations coexistent dans un cristal. Au point A, la dislocation est exclusivement de type dislocation de vis, tandis qu'au point B, elle est exclusivement de type dislocation de coin. Cela peut être dû aux conditions de croissance du cristal, aux contraintes appliquées ou à d'autres facteurs qui influencent la formation et la propagation des dislocations.

1.1.2.3 Défauts de surfaces (dimension 2)

- Dans les défauts de surfaces on va retrouver :

- ❖ les joints de grains;
- ❖ les plans de maillage;

a. Joints de grains

Les matériaux sont généralement constitués d'un ensemble de grains, qui sont des régions du matériau ayant une orientation cristallographique spécifique, et de joints de grains, qui sont les régions situées entre les grains. Les joints de grains sont essentiels pour assurer la cohésion du solide, car ils peuvent empêcher la propagation des dislocations et d'autres défauts.

La taille des joints de grains est de l'ordre de quelques distances interatomiques, ce qui signifie qu'ils peuvent avoir une largeur de seulement quelques nanomètres. Un joint de grain est une région où l'orientation cristallographique d'un grain diffère de celle du grain adjacent voisin. En fonction de l'angle de désorientation entre les grains, on peut parler de joints de grains à faible angularité (jusqu'à quelques degrés) ou à forte angularité (plusieurs dizaines de degrés ou plus).

La structure et les propriétés des joints de grains peuvent avoir un impact significatif sur les propriétés globales du matériau, telles que la résistance, la ductilité, la conductivité et la résistance à la corrosion.

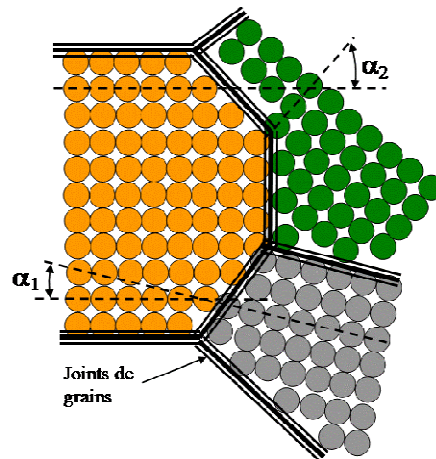


Figure 1.9: Joint de grain.

b. Plans de maclage

Dans un réseau cristallin, on parle de plan de maclage lorsqu'une symétrie de miroir bien précise est présente. Un plan de maclage est un plan de symétrie qui sépare le cristal en deux parties de structure identique, mais inversées par rapport à ce plan. Chaque atome situé d'un côté du plan de maclage occupe une position correspondant à l'image spéculaire d'un atome situé de l'autre côté du plan.

Les plans de maclage peuvent être créés par divers mécanismes, tels que la déformation plastique, les chocs, les variations de température, ou encore la croissance de cristaux en conditions particulières. Les plans de maclage peuvent avoir des effets importants sur les propriétés physiques et mécaniques des matériaux, car ils peuvent affecter la résistance, la ductilité et la conductivité électrique et thermique.

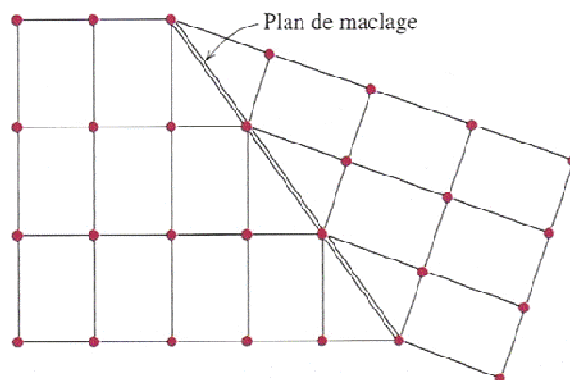


Figure 1.10: Plans de maclage.

1.1.2.4 Défauts à trois dimensions

Les défauts à trois dimensions sont des défauts de grande taille qui peuvent être présents dans les matériaux. On trouve notamment :

- Les pores : ce sont des vides ou des cavités dans le matériau, qui peuvent être créés pendant la fabrication ou la transformation du matériau. Les pores peuvent affecter les propriétés mécaniques et physiques du matériau, notamment la résistance, la ductilité et la conductivité.
- Les fissures : ce sont des discontinuités dans le matériau, qui peuvent être causées par des contraintes externes, des chocs ou des défauts internes. Les fissures peuvent affecter la résistance et la durée de vie du matériau.
- Les inclusions : ce sont des particules étrangères ou des phases secondaires présentes dans le matériau, qui peuvent être introduites pendant la fabrication ou la transformation. Les inclusions peuvent avoir un impact négatif sur les propriétés mécaniques et physiques du matériau, notamment la résistance, la ductilité et la résistance à la corrosion.

Ces défauts à trois dimensions sont souvent liés aux différentes phases du procédé d'élaboration du matériau, tels que la fusion, la coulée, le forgeage ou l'extrusion. Les techniques de fabrication et de traitement peuvent être optimisées pour minimiser la formation de défauts à trois dimensions et améliorer les propriétés des matériaux.

I.2 Mécanisme physique de déformation

I.2.1 Déformation élastique

Les déformations élastiques sont des changements géométriques au niveau atomique qui se produisent dans un matériau en réponse à une sollicitation extérieure. Ces déformations sont principalement réversibles, ce qui signifie que la configuration initiale des atomes est retrouvée après cessation de la sollicitation externe.

Pour équilibrer les sollicitations extérieures, les espaces interatomiques peuvent varier, et les mouvements des dislocations peuvent également intervenir. Les dislocations peuvent glisser le long des plans cristallins, ce qui peut entraîner une variation de la distance entre les atomes. Ces mouvements de dislocation peuvent être réversibles et ne pas entraîner de changements permanents dans la structure cristalline.

Les déformations élastiques sont importantes pour la résistance et la stabilité des matériaux, car elles permettent aux matériaux de récupérer leur forme et leur position initiales après une sollicitation extérieure. Cependant, si la sollicitation dépasse un certain seuil, les déformations élastiques peuvent se transformer en déformations

plastiques, qui sont irréversibles et peuvent entraîner des changements permanents dans la structure cristalline.

I.2.2 Déformations permanentes

Les déformations permanentes, également appelées déformations plastiques ou viscoplastiques, sont des changements géométriques qui se produisent au niveau cristallin en réponse à une sollicitation extérieure. Contrairement aux déformations élastiques, les déformations permanentes sont irréversibles et ne peuvent pas être corrigées en cessant la sollicitation externe.

Les déformations permanentes impliquent des déplacements relatifs d'atomes dans la structure cristalline, qui peuvent être stables après cessation de la sollicitation. Ces déplacements peuvent se produire à l'intérieur des grains du matériau, ou entre les grains lorsqu'il y a une déformation intergranulaire. Les déformations permanentes peuvent également entraîner la formation de dislocations, qui sont des défauts linéaires dans la structure cristalline.

Les déformations permanentes sont importantes pour la déformation plastique des matériaux, car elles permettent aux matériaux de se déformer de manière permanente sans se rompre. Cependant, les déformations permanentes peuvent également affecter les propriétés mécaniques et physiques des matériaux, notamment la résistance, la ductilité et la conductivité.

I.2.3 Déformation des polycristaux

Pour bien comprendre les hypothèses de base sur lesquelles repose la modélisation, examinons de façon schématisée la succession des mécanismes impliqués dans la déformation d'un polycristal soumis à une contrainte extérieure unidimensionnelle croissante puis décroissante.

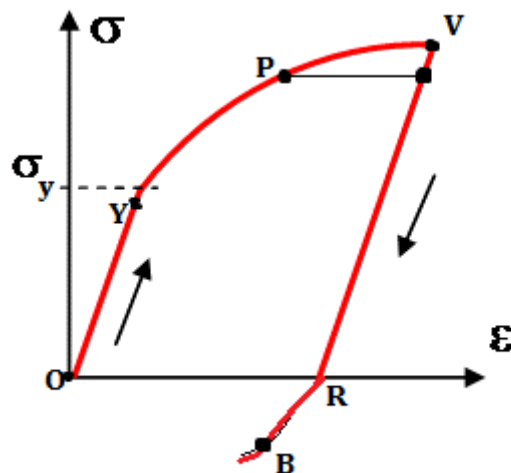


Figure 1.11: Déformation d'un polycristal.

1.2.3.1 Déformation élastique (OY sur la figure 1.11)

Les déformations élastiques sont le résultat de mouvements relatifs réversibles des atomes dans un matériau en réponse à une sollicitation extérieure. Elles sont relativement indépendantes des déformations permanentes, qui sont des changements plastiques irréversibles dans la structure cristalline du matériau.

Les déformations élastiques sont principalement liées à la capacité du matériau à se déformer sous l'effet d'une contrainte externe et à retrouver sa forme et sa position initiales lorsque la contrainte est relâchée. Elles sont réversibles et ne provoquent pas de changements permanents dans la structure cristalline du matériau.

1.2.3.2 Limite d'élasticité (Point Y sur la figure 1.11)

La limite élastique d'un matériau est caractérisée par l'état de contrainte ou de déformation qui engendre les premiers mouvements irréversibles de dislocation. Comme ces mouvements sont souvent difficiles à détecter, on utilise une définition conventionnelle de la limite élastique. La limite d'élasticité conventionnelle Y correspond généralement à une valeur fixée de la déformation permanente, qui est souvent de l'ordre de 0,2% ou 0,5% selon la précision souhaitée.

1.2.3.3 Déformation plastique (YP sur la figure 1.11)

Lorsqu'un matériau est soumis à une contrainte externe, les premiers glissements apparaissent dans les cristaux qui possèdent des plans de glissement où la contrainte tangentielle est maximale. Ces glissements initiaux peuvent initier des réorientations des cristaux avoisinants pour assurer la compatibilité des déformations, mettant ainsi en action d'autres systèmes de glissement. Cette évolution progressive des déformations peut conduire à une déformation macroscopiquement homogène et stable, où chaque état est un état d'équilibre statique.

1.2.3.4 Ecrouissage ou consolidation (YP sur la figure 1.11)

Lorsqu'un matériau est soumis à une contrainte externe croissante, la densité des dislocations dans le matériau peut augmenter car les dislocations peuvent se former et se déplacer pour accommoder la déformation plastique. Cependant, le nombre de points de blocage dans le matériau augmente également avec l'augmentation de la contrainte, ce qui peut entraver la progression de la déformation.

Ainsi, pour que la déformation continue, la sollicitation doit augmenter pour surmonter la résistance à la déformation croissante résultant de l'augmentation de la densité des dislocations et des points de blocage. Cette résistance accrue à la déformation est appelée phénomène d'écrouissage.

1.2.3.5 Déformation viscoplastique (PV sur la figure 1.11)

Si la contrainte continue à croître dans un matériau, les glissements peuvent traverser les joints de grains et se propager à travers les grains avoisinants. Ce phénomène de glissement intergranulaire est favorisé par divers facteurs, notamment l'activation thermique, les défauts de surface et les contraintes locales. Ce phénomène est surtout sensible aux températures dépassant le tiers de la température de fusion du matériau.

Lorsque la déformation se poursuit à contrainte constante et que les dislocations traversent les joints de grains, la possibilité d'équilibre statique n'existe plus, et il peut y avoir un écoulement de fluage dans le matériau. Ce domaine de comportement plastique est connu sous le nom de viscoplasticité, car il implique des comportements de fluage visqueux et plastiques.

I.3 Mécanisme physique de rupture

Les déformations élastiques et permanentes qui se produisent respectivement au niveau des atomes et des plans cristallins sont responsables de la cohésion de la matière. La rupture, d'autre part, est la rupture de cette cohésion par la création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière. Elle se situe donc à l'échelle plus grande des cristaux, où l'on peut parler de microfissures ou de cavités dont la dimension se chiffre en microns ou en centimes de millimètre, de macro fissures de l'ordre du millimètre, et de fissures à l'échelle des structures mécaniques qui se mesurent en centimètres ou en décimètres.

Les deux principaux mécanismes élémentaires de rupture locale sont la rupture fragile par clivage et la rupture ductile mettant en jeu de grandes déformations plastiques locales.

I.3.1 Rupture fragile

La rupture fragile par clivage se produit lorsque le matériau est soumis à une contrainte qui dépasse la contrainte de clivage du matériau. Les liaisons atomiques le long d'un plan de clivage sont tellement faibles qu'une petite augmentation de la contrainte peut provoquer la rupture. La rupture se produit alors brutalement, sans déformation plastique significative, et la fissure qui se forme suit le plan de clivage.

I.3.2 Rupture ductile

La rupture ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales qui se produisent au voisinage des défauts cristallins dans un matériau. Selon la densité

et la nature de ces défauts, la déformation macroscopique globale peut être importante ou non. Par conséquent, un matériau présentant des faciès de rupture ductile peut présenter un comportement global ductile ou fragile.

Les défauts qui peuvent être responsables de l'amorçage de la rupture ductile sont les suivants:

- Les particules d'éléments d'addition dans les alliages: ces particules peuvent avoir des propriétés mécaniques différentes de celles de la matrice, ce qui peut conduire à des zones locales de déformation accrue et à la formation de fissures.
- Les inclusions: ces défauts peuvent agir comme des points de concentration de contrainte et favoriser la formation de fissures.
- Les précipités de mise en solution par traitements thermiques: ces défauts peuvent également agir comme des points de concentration de contrainte et favoriser la formation de fissures.
- Les empilements de dislocations: ces défauts peuvent former des nœuds de dislocations qui peuvent favoriser la formation de fissures.
- Les joints de grains: ces défauts peuvent être des zones de transition où les propriétés mécaniques peuvent varier de manière significative, ce qui peut conduire à des zones locales de déformation accrue et à la formation de fissures.

Chapitre II

Classification rhéologique et caractérisation expérimentale

II.1 - Identification et classement rhéologiques des solides

On distingue généralement trois grandes méthodes de formulation des lois de comportement des matériaux :

a. Approche microscopique : cette méthode tente de modéliser les mécanismes de déformation et de rupture aux échelles atomiques et cristallines, le comportement macroscopique étant le résultat d'une intégration ou d'une moyennisation des variables microscopiques à l'échelle de l'élément de volume.

b. Approche thermodynamique : cette méthode cherche à représenter les phénomènes physiques microscopiques par des variables internes macroscopiques et à caractériser le comportement d'un élément de volume représentatif (EVR) équivalent au milieu réel.

c. Approche fonctionnelle : cette méthode repose sur l'utilisation de lois héréditaires de type intégral qui font intervenir des fonctions caractéristiques des matériaux utilisant des variables macroscopiques.

Les approches thermodynamique et fonctionnelle, à l'inverse de l'approche microscopique, cherchent simplement à caractériser le comportement d'un élément de volume représentatif (EVR).

La méthode EVR consiste à déterminer les relations de cause à effet qui existent entre les variables constituant les entrées et les sorties du processus étudié. Elle trouve une justification dans le fait que des phénomènes de l'échelle microscopique très divers peuvent conduire, après des effets de moyenne, à des réponses globales de même nature. Dans bien des cas, cette méthode est la seule applicable dans un cadre industriel. Le choix de l'élément de volume représentatif est fondamental et doit être suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités du matériau et suffisamment petit pour que les dérivées partielles des équations de la mécanique des milieux continus aient un sens.

Le tableau ci-dessous donne l'ordre de grandeur de tailles raisonnables d'éléments de volume en dessous desquels il est difficile de donner un sens physique aux contraintes ou déformations :

Tableau 2.1: Ordre de grandeur des éléments de volume représentatifs.

Matériaux	Hétérogénéité	Éléments de volume
Métaux et alliages	Cristal 1 à 100 um	0.5x0.5x0.5 mm
Polymères	Molécule 10 à 50 um	1.0x1.0x1.0 mm
Céramiques	Grain 1 à 10 um	0.1x0.1x0.1 mm
Bois	Fibre 0.1 à 1 mm	10x10x10mm
Béton	Granulat = 10 mm	100x100x100 mm

Il est vrai que l'utilisation d'une loi de comportement pour décrire un matériau donné n'est pas intrinsèque au matériau lui-même, mais plutôt à l'utilisation spécifique pour laquelle le matériau est destiné. En effet, la loi de comportement doit être choisie en

fonction des contraintes et des déformations que le matériau est susceptible de subir dans l'application envisagée.

L'exemple de l'acier à température ambiante illustre bien le fait que la loi de comportement d'un matériau dépend de l'utilisation spécifique pour laquelle il est destiné. En effet, selon l'application envisagée, l'acier peut être considéré comme :

- **Élastique linéaire** : lorsque l'on effectue un calcul de déformation d'une structure en acier soumise à des charges faibles, on peut considérer que l'acier se comporte de manière élastique linéaire, c'est-à-dire que sa déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée. Dans ce cas, on peut utiliser la loi de Hooke pour décrire le comportement élastique de l'acier.
- **Viscoélastique** : lorsque l'on s'intéresse à des problèmes d'amortissement ou de vibration, l'acier peut être considéré comme viscoélastique, c'est-à-dire qu'il présente à la fois des propriétés visqueuses et élastiques. Dans ce cas, on peut utiliser des modèles de comportement viscoélastique pour décrire le comportement de l'acier.
- **Rigidité parfaitement plastique** : lorsque l'on effectue un calcul de charges limite, c'est-à-dire une analyse de la capacité de l'acier à supporter des charges élevées sans se rompre, on peut considérer l'acier comme rigide parfaitement plastique.
- **Élastoplastique écrouissable** : lorsque l'on effectue un calcul précis de déformations permanentes de l'acier, on peut considérer l'acier comme élastoplastique écrouissable. Cela signifie que l'acier peut subir des déformations permanentes tout en conservant des propriétés élastiques, et que sa résistance à la déformation peut être renforcée par un phénomène d'écrouissage.

II.2 - Les grands principes d'essai mécaniques

II.2.1 Essais caractéristiques

Un grand nombre de matériaux présente des comportements non linéaires, ce qui signifie que leur réponse mécanique n'est pas proportionnelle à la contrainte appliquée. Pour déterminer les paramètres ou variables de ces lois de comportement, il est nécessaire de réaliser des essais mécaniques sur le matériau.

Il existe de nombreux types d'essais mécaniques qui permettent de caractériser les propriétés mécaniques des matériaux, tels que la résistance à la traction, la résilience, la ténacité, la dureté, etc. Les essais simples sont souvent normalisés, c'est-à-dire qu'ils sont définis dans des normes établies par des organismes de normalisation tels que :

- **AFNOR** : Association Française de Normalisation, qui établit des normes françaises ;
- **ISO** : International Organization for Standardization, qui établit des normes internationales ;

- ASTM : American Society for Testing and Materials, qui établit des normes américaines.

Les normes définissent les méthodes d'essai à suivre pour obtenir des résultats fiables et reproductibles, ainsi que les équipements et les procédures de mesure à utiliser. Les résultats des essais peuvent ensuite être utilisés pour déterminer les paramètres nécessaires à la description des lois de comportement non linéaires des matériaux.

Les essais classiques de caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux se font essentiellement en traction, c'est-à-dire en appliquant une sollicitation axiale (force ou déplacement) qui engendre un état de contrainte ou de déformation dans tout le volume utile du matériau. Cette sollicitation permet de caractériser les propriétés mécaniques du matériau, telles que sa résistance à la traction, sa limite d'élasticité, sa résilience, sa ténacité, etc.

II.2.1.1 L'essai de traction

La traction est l'essai le plus couramment utilisé pour caractériser les propriétés mécaniques des métaux, en particulier pour déterminer leur résistance à la traction et leur limite d'élasticité. Cependant, les déformations atteintes par ce type d'essai sont limitées par la rupture du matériau, ce qui peut être un inconvénient pour caractériser les comportements mécaniques des matériaux à des niveaux de déformation plus élevés.

Néanmoins, l'essai de traction peut être utilisé pour obtenir une loi de comportement simple et rapide en traction, qui peut être utile pour des applications d'ingénierie courantes. La courbe contrainte-déformation obtenue lors de l'essai de traction peut être utilisée pour déterminer les propriétés mécaniques du matériau, telles que sa résistance à la traction, sa limite d'élasticité, son module d'élasticité, etc.

1.1. Eprouvettes de traction

La géométrie des épreuves de traction peut être soit :

- Eprouvettes cylindriques ;
- Eprouvettes sous la forme de plaques de section rectangulaire.

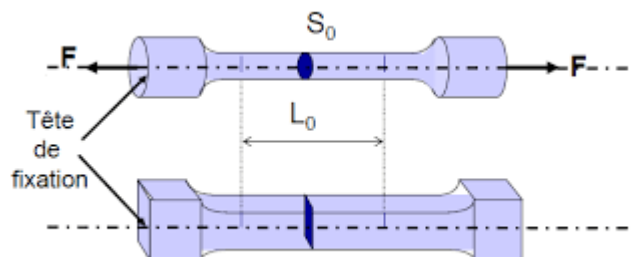


Figure 2.1 : Eprouvettes de traction à section circulaire et plate.

Les dimensions des éprouvettes de traction sont réglementées par des normes pour garantir la reproductibilité et la fiabilité des résultats des essais de traction. Les normes les plus couramment utilisées pour la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux par essai de traction sont les normes européennes :

- NF EN 10002-1 : "Essais des matériaux - Essai de traction sur éprouvette normale à température ambiante" ;
- NF EN 10002-2 : "Essais des matériaux - Essai de traction sur éprouvette normale à haute température".

Ces normes définissent les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction, ainsi que les procédures d'essai à suivre pour garantir la reproductibilité et la fiabilité des résultats. Les éprouvettes de traction sont généralement de forme allongée, avec une section transversale de forme et de dimensions normalisées, telles que la section en forme de rectangle ou de cercle.

Il est important de noter que les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction peuvent varier en fonction du matériau et de l'application envisagée. Par exemple, pour les matériaux composites, les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction peuvent être différentes de celles des métaux.

1.2. Dispositif expérimental

Le dispositif de traction est composé :

- Un bâti rigide ;
- Une traverse mobile ;
- Le déplacement de la traverse est assuré par des vérins hydrauliques, l'échantillon de matériaux à caractériser est fixé entre deux mors.

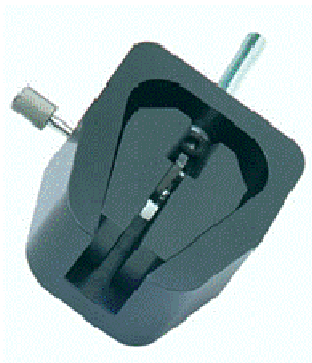


Figure 2.2 : Photo des Mors utilisés lors de l'essai de traction.

Une cellule de force directement liée à l'échantillon permet de mesurer la force appliquée lors de l'essai.

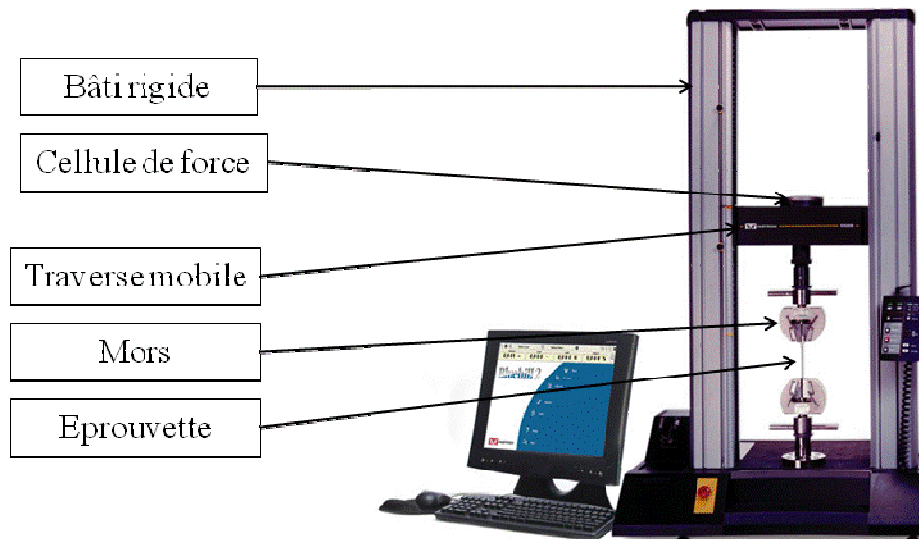


Figure2.3 :Dispositif expérimental de l'essai de traction.

L'allongement de l'éprouvette lors de l'essai de traction est une mesure importante pour caractériser les propriétés mécaniques du matériau. Cette mesure peut être effectuée de différentes manières, notamment :

- Des jauges de déformation : Ce sont des capteurs qui mesurent la déformation de l'éprouvette lors de l'essai de traction. Les jauges de déformation peuvent être collées sur l'éprouvette avant l'essai, et leur déformation est mesurée à l'aide d'un appareil de mesure approprié. Les jauges de déformation peuvent être utilisées pour mesurer la déformation longitudinale et transversale de l'éprouvette.
- Un extensomètre : C'est un appareil de mesure qui est fixé à l'extérieur de l'éprouvette et qui mesure l'allongement de l'éprouvette pendant l'essai de traction. L'extensomètre peut être utilisé pour mesurer la déformation longitudinale de l'éprouvette.

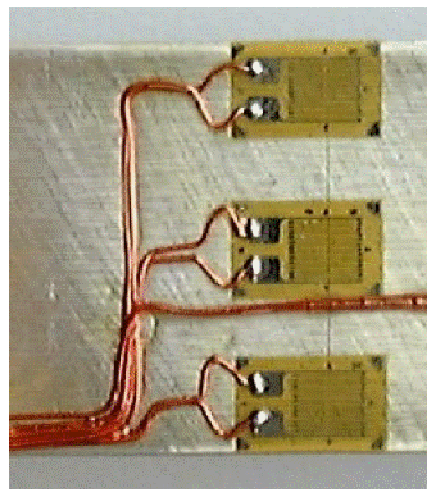


Figure2.4 : Jauges de déformation.

La courbe brute d'un essai de traction se présente sous la forme de $F = f(\Delta l)$, suivant la nature du matériau l'allure générale de cette courbe varie.

a. Matériaux au comportement fragile

Certains matériaux peuvent présenter un comportement fragile, c'est-à-dire qu'ils ne présentent aucune déformation plastique avant la rupture. Dans ce cas, la rupture se produit brutalement, sans avertissement préalable, dès que la contrainte atteint une certaine valeur.

Les matériaux au comportement fragile sont généralement des matériaux céramiques, tels que le verre, la porcelaine, les carreaux, etc. Ces matériaux ont une structure atomique rigide et une faible résistance à la propagation des fissures, ce qui les rend très sensibles aux défauts et aux contraintes locales.

La courbe $F = f(\Delta l)$ est une droite caractéristique de l'élasticité linéaire.

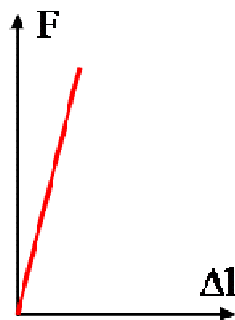


Figure2.5 : Courbe typique pour un matériau fragile.

b. Matériaux au comportement ductile

les matériaux ductiles sont des matériaux qui présentent un comportement élastique linéaire suivi d'un comportement plastique sous l'effet d'une sollicitation. Cela signifie que, jusqu'à une certaine valeur de contrainte, la déformation est réversible et suit la loi de Hooke, tandis que pour des niveaux de contrainte plus élevés, la déformation devient irréversible et permanente. La courbe $F = f(\Delta l)$ est :

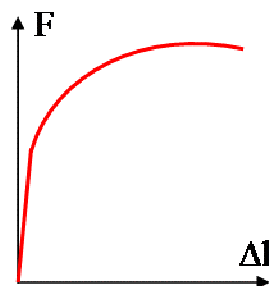


Figure2.6 : Courbe typique pour un matériau ductile.

Les matériaux ductiles ont une structure atomique qui leur permet de se déformer plastiquement sans se rompre, en absorbant l'énergie de déformation. Les métaux, tels que l'acier, l'aluminium, le cuivre, etc., sont des exemples de matériaux ductiles couramment utilisés dans les applications industrielles.

Les matériaux ductiles sont utilisés dans une grande variété d'applications, telles que la construction de structures, les pièces automobiles, les équipements aéronautiques, les ustensiles de cuisine, etc. Leur capacité à se déformer plastiquement sans se rompre leur permet de résister à des charges importantes et de subir des déformations importantes sans se briser.

c. Matériaux au comportement élastique non linéaire

Certains matériaux peuvent présenter un comportement élastique non linéaire, c'est-à-dire que la déformation élastique n'est pas proportionnelle à la charge appliquée. Ce comportement élastique non linéaire est souvent dû à des phénomènes microstructuraux complexes tels que les interactions entre les dislocations, les effets de taille, les contraintes résiduelles, etc. La courbe $F = f(\Delta l)$ est :

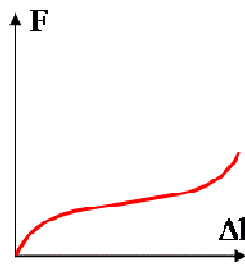


Figure 2.7 : Courbe typique pour un comportement élastique non linéaire.

Les matériaux à comportement élastique non linéaire sont souvent des matériaux composites, tels que les composites à matrice polymère renforcée par des fibres (composites PRF), les composites à matrice métallique renforcée par des fibres (composites MRF), etc. Ces matériaux présentent une combinaison de propriétés mécaniques de la matrice et des fibres, ce qui peut conduire à un comportement élastique non linéaire.

1.3. Courbe contraintes - déformations

L'inconvénient de ces courbes brutes est qu'elles sont dépendantes de la géométrie des éprouvettes de mesure, la conversion en courbe $\sigma = f(\epsilon)$ s'obtient à partir des relations :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \epsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_{x0}} \epsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_{y0}} \nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (2.1)$$

Où S_0 est la section initiale perpendiculaire à la direction de sollicitation de l'éprouvette de traction et l_0 est la longueur initiale entre repères de l'échantillon.

- Les contraintes s'expriment en Pascals (1 Pa = 1 N/m²) ou Méga Pascal (1 MPa = 1 N/mm²).
- Les déformations sont sans dimensions et peuvent être exprimées en pourcentage de déformation.

1.3.1. Lecture d'une courbe $\sigma = f(\epsilon)$ d'un matériau ductile

La courbe $\sigma = f(\epsilon)$ d'un matériau ductile peut se décomposer en 3 parties traduisant 3 phénomènes différents :

- un domaine de déformation élastique ;
- un domaine de déformation plastique homogène ;
- un domaine de déformation plastique inhomogène (ou striction);

La déformation élastique linéaire obéit à la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \epsilon$, la pente de la droite donne le module d'Young du matériau, dans cette partie l'échantillon s'allonge de manière homogène entre les deux repères.

La pente de la courbe de la déformation plastique est donnée par le taux de consolidation $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$. Elle diminue pendant que la contrainte augmente jusqu'à atteindre

une valeur nulle (traduit la valeur maximale de la contrainte). Cet extrémum traduit le changement de comportement plastique, en dessous de cette valeur l'échantillon s'allonge de manière homogène et au-dessus la déformation n'est plus homogène mais se localise dans la zone de striction.

L'allongement se poursuit alors que la contrainte chute jusqu'à la rupture du matériau dans la zone de striction.

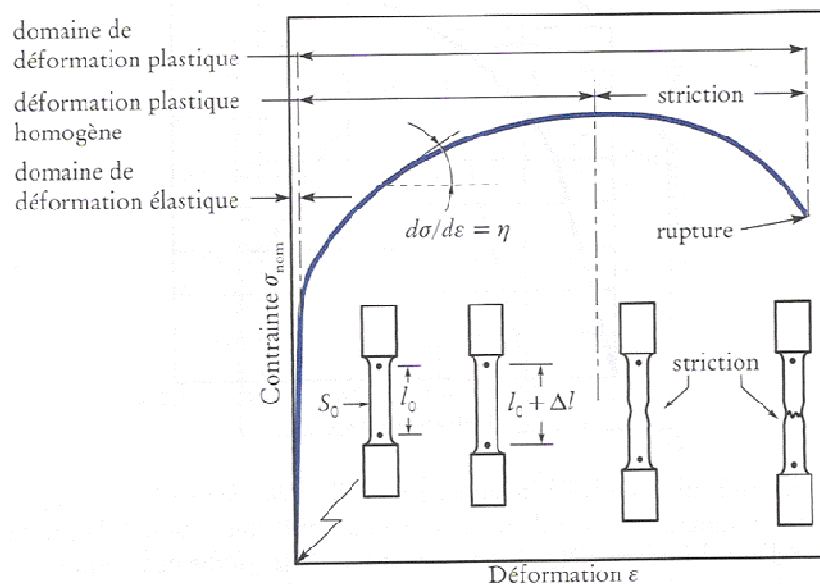


Figure2.8 : Courbe contrainte-déformation typique jusqu'à la rupture.

Plusieurs informations caractéristiques des propriétés du matériau sont décrites par les résultats de l'essai de traction :

- La limite d'élasticité

Dans la notion de limite d'élasticité deux grandeurs apparaissent :

- ✓ la limite d'élasticité vraie (R_e)
- ✓ la limite d'élasticité conventionnelle à 0,2% ($R_{e0,2}$)
- ✓ R_e correspond à la contrainte à partir de laquelle le comportement du matériau s'écarte de la loi de Hooke, moment où apparaît la première déformation plastique.
- ✓ R_e délicat à déterminer dans la pratique car la transition du domaine élastique au domaine plastique s'effectue progressivement. Pour s'affranchir de cette difficulté, une limite $R_{e0,2}$ est souvent utilisée. $R_{e0,2}$ correspond à la contrainte à laquelle une déformation plastique permanente de valeur égale à 0,2% existe.

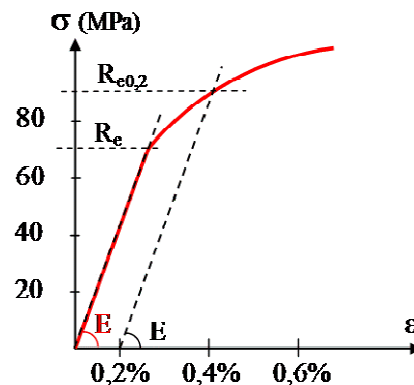


Figure 2.9 : Méthode de détermination de la limite élastique conventionnelle.

- La résistance à la traction

La résistance à la traction R_m est la contrainte maximale atteinte lors de l'essai de traction.

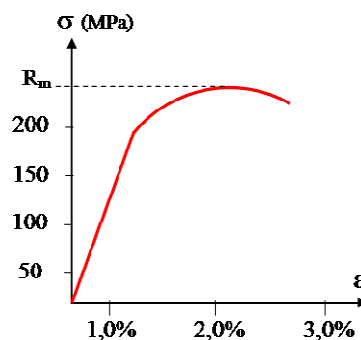


Figure 2.10 : Détermination de la résistance à la traction.

Pour les matériaux ductiles, elle se situe dans le domaine plastique lorsque le taux de consolidation est nul ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$).

- *L'allongement à la rupture*

L'allongement à la rupture correspond à la valeur de la déformation au moment de la rupture.

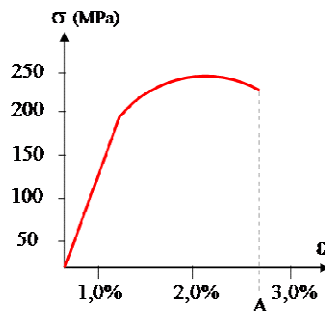


Figure 2.11 : Détermination de la résistance à la rupture.

- *La striction à la rupture*

La striction traduit la variation de section à l'endroit où la rupture s'est produite. Elle se calcule à partir de la relation :

$$Z = \frac{S_0 - S_f}{S_0} \quad (2.2)$$

Avec S_0 la section initiale de l'échantillon et S_f la section finale de la surface de rupture.

II.2.1.3. L'essai de fluage

Lorsqu'une éprouvette est soumise à une sollicitation de traction ou de compression simple, la relation entre la contrainte et la déformation peut être décrite par la loi de comportement du matériau. Si la sollicitation est maintenue constante, deux cas peuvent se produire :

- Si la déformation reste constante dans le temps, cela signifie qu'il n'y a pas de déformations différées dans le matériau. Dans ce cas, le matériau est considéré comme élastique et il n'y a pas de phénomène de viscosité. La loi de comportement du matériau est dite "instantanée", car elle décrit la réponse du matériau à la sollicitation à un instant donné.
- Si, en revanche, des déformations différées se produisent dans le matériau sous la sollicitation constante, cela peut indiquer la présence d'un phénomène de viscosité. Dans ce cas, la loi de comportement du matériau est dite "temporelle", car elle décrit la réponse du matériau à la sollicitation dans le temps. Le phénomène de viscosité peut être dû à des processus thermiques, tels que la diffusion, la relaxation, la reptation, etc.

Il est important de noter que le phénomène de viscosité est souvent observé dans les matériaux polymères, les liquides et les solides amorphes, tandis que les matériaux cristallins ont généralement un comportement élastique.

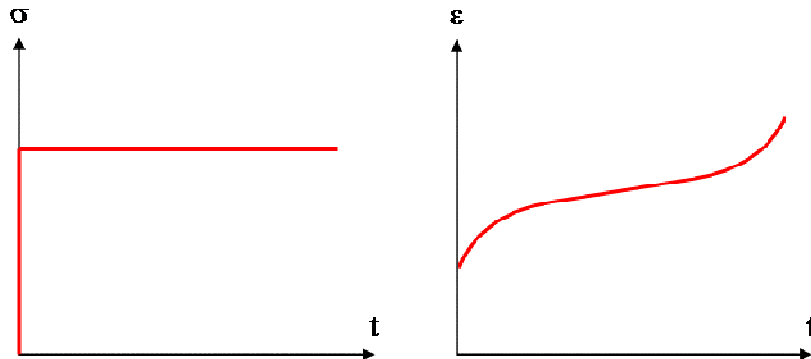


Figure 2.16 : Courbes type en contrainte et déformation en fonction du temps d'un essai de fluage.

II.2.1.4. L'essai de relaxation

Une autre manière de caractériser la viscosité d'un matériau est de le soumettre à un essai de relaxation. Dans cet essai, une pré-déformation initiale est appliquée à l'éprouvette, puis la déformation est maintenue constante tandis que la contrainte est mesurée dans le temps. Si le comportement du matériau présente une composante visqueuse importante, la contrainte chute rapidement au cours du temps, pour atteindre éventuellement une valeur nulle.

L'essai de relaxation est une méthode couramment utilisée pour caractériser les propriétés viscoélastiques des matériaux, qui peuvent varier en fonction de la fréquence de sollicitation, de la température, de la pression, etc. Les matériaux polymères, les métaux et les matériaux composites sont souvent soumis à des essais de relaxation pour caractériser leur comportement viscoélastique.

Dans le cas des matériaux polymères, l'essai de relaxation est souvent utilisé pour caractériser les propriétés de fluage, qui sont liées à la capacité du matériau à se déformer sous une contrainte constante dans le temps. Les métaux, quant à eux, présentent généralement un comportement élastique, mais peuvent également présenter une composante visqueuse dans certaines conditions, telles que les hautes températures ou les sollicitations cycliques.

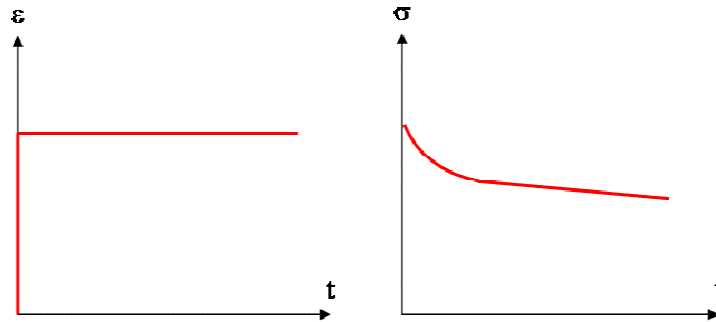


Figure 2.17 : Courbes type en déformation et en contrainte en fonction du temps d'un essai de relaxation.

II.2.1.5. L'essai de triaxialité

L'essai de triaxialité est une méthode couramment utilisée pour caractériser les propriétés mécaniques des matériaux qui ne peuvent pas être facilement sollicités en traction en raison de leur très faible résistance ou de leur forte sensibilité aux défauts d'alignement. Les matériaux tels que les bétons, les sols et les céramiques sont des exemples de matériaux souvent testés par l'essai de triaxialité.

Elle consiste à soumettre l'échantillon à une pression hydrostatique qui assure son maintien, tandis que les bords latéraux de l'échantillon sont maintenus fixes. Cette configuration permet de maintenir l'échantillon dans une forme cylindrique et de lui appliquer une charge axiale contrôlée. L'essai de triaxialité peut être réalisé de manière consolidée ou non consolidée, selon le niveau de densité de l'échantillon.

Elle est souvent utilisée pour caractériser les propriétés mécaniques des sols, tels que la résistance à la rupture, la compressibilité, la dilatance, etc. Dans le cas des bétons et des céramiques, l'essai de triaxialité peut être utilisé pour caractériser leur résistance à la compression et leur comportement en termes de fissuration et de propagation de fissures.

II.2.1.6. L'essai de flexion

L'essai de flexion est une méthode couramment utilisée pour caractériser les matériaux, qui peut être réalisée avec 3 ou 4 points d'appui.

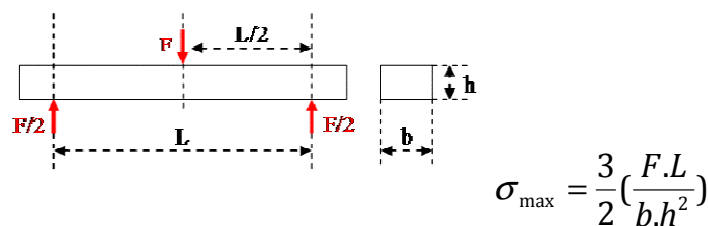


Figure 2.18 : Essai de flexion 3 points.

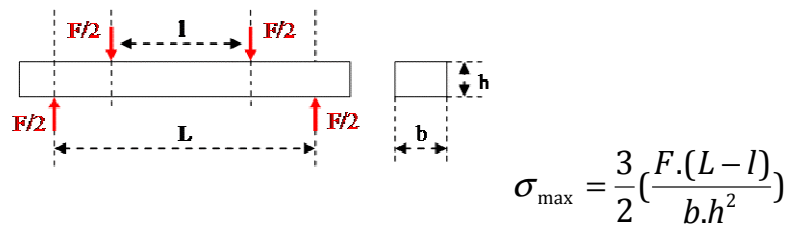


Figure2.19 : Essai de flexion 4 points.

II.2.1.7. Les essais cycliques

Lorsqu'une éprouvette est soumise à une contrainte ou une déformation périodique, sa réponse a tendance à se stabiliser après un certain nombre de cycles. Dans ce cas, on utilise une courbe cyclique qui représente le lieu des sommets des boucles stabilisées pour différents niveaux de contrainte ou de déformation.

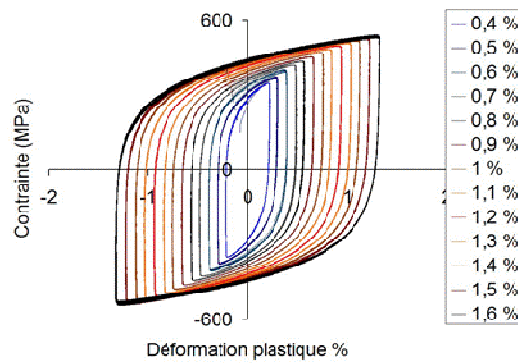


Figure2.20 : Essai de traction compression cyclique sur un acier mi-dur.

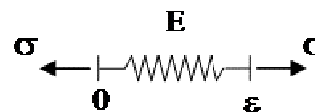
II.3. Schéma des comportements réels à partir de modèles analogiques

Les essais caractéristiques permettent de classer qualitativement les matériaux en fonction de leur réponse. On distingue cinq types de comportements : rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique. Chaque type de comportement correspond à un schéma type, qui est décrit par une théorie mathématique spécifique.

II.3.1. Modèles analogiques

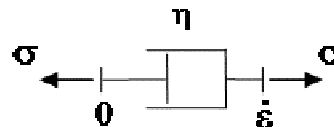
Les modèles analogiques sont constitués d'assemblages d'éléments mécaniques tels que des ressorts, des patins, des amortisseurs ou des butées, qui sont utilisés pour décrire le comportement d'un matériau. Parmi ces éléments, les plus couramment utilisés sont :

- Le ressort est utilisé pour modéliser l'élasticité linéaire des matériaux. Ce modèle analogique représente le solide hookéen, qui obéit à la loi de Hooke.



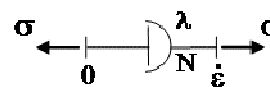
$\sigma = E \cdot \epsilon$

- L'amortisseur est utilisé pour modéliser la viscosité linéaire des matériaux. Ce modèle analogique représente le fluide newtonien, qui obéit à la loi de Newton et présente un comportement visqueux (ou liquide) Newtonien.



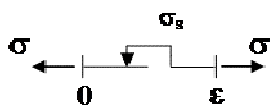
$\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon}$

- L'amortisseur est également utilisé pour modéliser la viscosité non linéaire des matériaux, en utilisant la loi de Norton.



$\sigma = \lambda (\dot{\epsilon})^{1/N}$

- Le patin (ou élément de Saint-Venant) est utilisé pour modéliser un seuil de contrainte des matériaux.

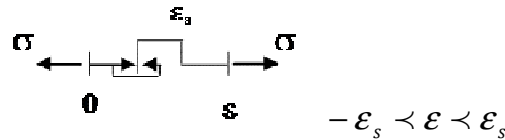


$-\sigma_s < \sigma < \sigma_s$

Le modèle représentant le solide rigide parfaitement plastique introduit une non-linéarité dans les modèles et décrit un comportement plastique, c'est-à-dire une

déformation irréversible des matériaux. Il est notamment utilisé pour les fluides à seuil, où la contrainte appliquée doit dépasser un seuil de plasticité (également appelé seuil de déformabilité, de friction ou contrainte d'écoulement) pour obtenir un déplacement.

- La butée est utilisée pour modéliser un seuil de déformation des matériaux.



Chacun des éléments analogiques décrits précédemment peut être associé à un autre élément pour créer des modèles plus complexes :

Lorsqu'on associe les éléments analogiques en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément. De plus, la déformation subie par l'ensemble est la somme des déformations subies par chaque élément.

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \quad \sigma = \sigma_i \quad (2.2)$$

Lorsqu'on associe les éléments analogiques en parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche. De plus, la déformation subie par l'ensemble est égale aux déformations subies par chacune des branches, toutes identiques entre elles.

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad \varepsilon = \varepsilon_i \quad (2.3)$$

Association mixte : série / parallèle

II.3.1.1 Fluides visqueux

Un corps est appelé fluide visqueux si ses réponses aux essais caractéristiques ont les allures suivantes : une déformation qui dépend du temps et qui diminue avec la distance par rapport à la surface solide, ainsi qu'une contrainte de cisaillement qui varie linéairement avec la vitesse de déformation.

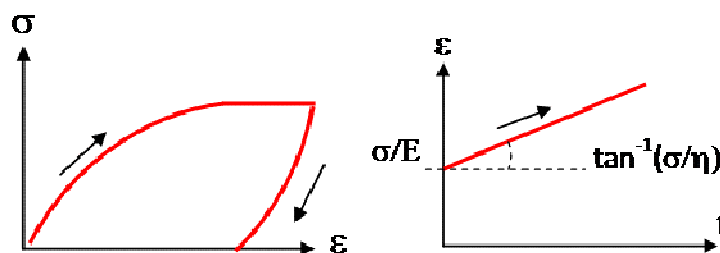
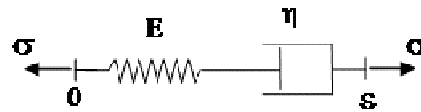


Figure 2.21 : Evolution de ε en fonction du temps.

Ce corps est parfois qualifié de solide viscoélastique. Un modèle analogique simple pour ce type de comportement est le modèle de Maxwell, qui est constitué d'un ressort et d'un amortisseur linéaire en série.



Modèle viscoélastique de Maxwell

Dans ce modèle de Maxwell, la force est la même dans chacun des éléments, mais les déformations individuelles sont cumulées. ($\epsilon_{totale} = \epsilon_{ressort} + \epsilon_{amortisseur}$).

La relation de la contrainte est :

$$\sigma = E \cdot \epsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) \quad (2.4)$$

Ce comportement est couramment observé chez les "solides mous", tels que les polymères thermoplastiques, le béton frais ou encore de nombreux métaux à haute température.

II.3.1.2. Solides élastiques

La notion d'élasticité traduit un comportement réversible du solide.

1. Solides élastiques parfaits

Les solides élastiques parfaits ont un comportement réversible et instantané. Leurs réponses qualitatives aux essais caractéristiques sont les suivantes :



a) élastique parfait linéaire.

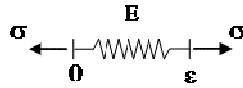
b) élastique parfait non linéaire.

Figure 2.22 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique.

Cas du comportement élastique linéaire :

La relation contrainte - déformation est : $\sigma = E \cdot \epsilon$

Le modèle analogique utilisé est le ressort seul :



Ce comportement s'applique aux métaux, aux bétons, aux céramiques et aux roches, mais seulement pour des sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.

2. Solides viscoélastiques

Dans le cas des solides viscoélastiques, la réversibilité n'est plus immédiate mais plutôt "retardée", et elle n'intervient qu'après un temps infini.

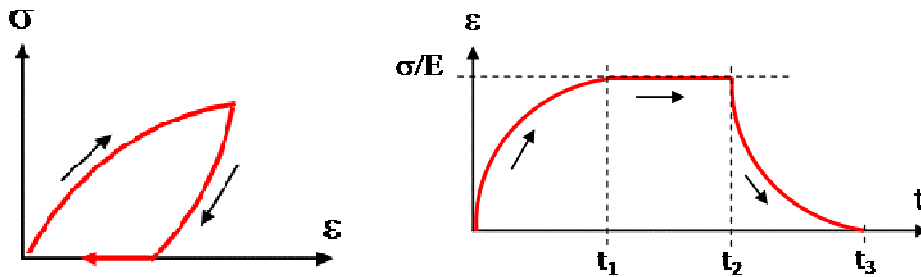
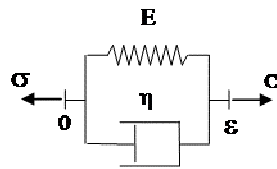


Figure 2.23 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement viscoélastique.

Il existe plusieurs modèles analogiques pour décrire le comportement viscoélastique, parmi lesquels le plus simple est le modèle de Kelvin-Voigt. Ce modèle associe en parallèle un ressort et un amortisseur.



L'association en parallèle du ressort et de l'amortisseur impose que les deux éléments aient toujours la même position (ou déformation) à tout instant. La contrainte totale de cet assemblage est la somme des contraintes de chaque élément.

$$(\sigma_{totale} = \sigma_{ressort} + \sigma_{amortisseur})$$

$$\sigma_{ressort} = E \cdot \epsilon \quad \sigma_{amortisseur} = \eta \cdot \dot{\epsilon} = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad \sigma_{totale} = E \cdot \epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.5)$$

Après intégration en fonction du temps de cette relation, on obtient :

$$\epsilon = \frac{\sigma_{totale}}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E \cdot t}{\eta}\right) \right] \quad (2.6)$$

II.3.1.3. Solides plastiques

La notion de solide plastique désigne les solides qui conservent une déformation permanente après la cessation d'une sollicitation. Contrairement aux solides viscoélastiques, leur comportement ne dépend pas explicitement du temps. Par définition, la déformation plastique est celle qui correspond à la configuration relâchée :

1. Solide rigide parfaitement plastique

Le solide rigide parfaitement plastique décrit les solides dont le comportement en contrainte/déformation suit la courbe ci-dessous :

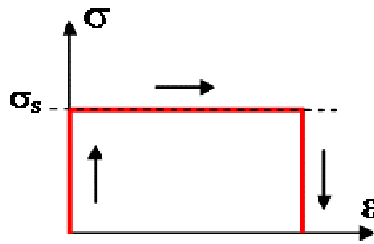


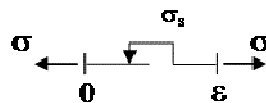
Figure 2.24 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement rigide parfaitement plastique.

La déformation est nulle ou suffisamment négligeable en dessous d'une valeur seuil (σ_s). À partir de ce seuil, la déformation devient "arbitraire" et indépendante de la vitesse de déformation dans les essais de fluage, ou du temps dans les essais de fluage et de relaxation.

$$\sigma < \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0; \quad (2.7)$$

$$\sigma = \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_p. \quad (2.8)$$

Le modèle analogique qui traduit ce comportement est le patin :



Ce modèle s'applique essentiellement dans les domaines de la mécanique des roches et de l'analyse de la mise en forme des métaux.

2. Solide élastique parfaitement plastique

Il s'agit d'un comportement élastique linéaire ($\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$) suivi d'une déformation plastique (ε_p) « arbitraire » et indépendante du temps une fois atteint une valeur seuil (σ_s)

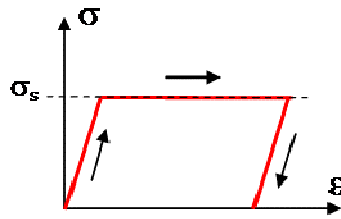


Figure 2.25 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique parfaitement plastique.

$$\sigma < \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_e; \quad (2.9)$$

$$\sigma = \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (2.10)$$

Le modèle de Saint-Venant est le plus simple de ce type et associe en série un ressort et un patin pour modéliser le comportement élastique parfaitement plastique.

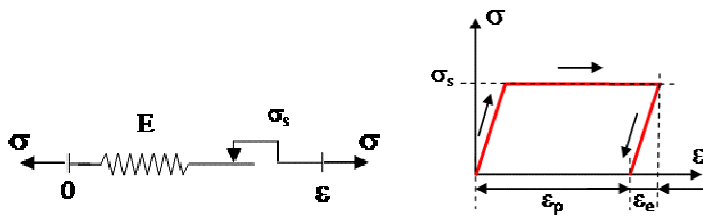


Figure 2.26 : Modèle rhéologique de Saint-Venant.

Ce modèle s'applique en particulier aux aciers à faible teneur en carbone qui présentent un palier dans leur comportement élastique parfaitement plastique.

3. Solide rigide plastique

Le modèle rigide-plastique associe en parallèle un ressort et un patin, et est connu sous le nom de modèle de Prager :



Figure 2.27 : Modèle rhéologique de Prager.

La déformation est nulle tant que la contrainte appliquée est inférieure à la valeur seuil σ_s (caractéristique du patin). Au-delà de cette valeur, un écoulement plastique linéaire intervient, ce qui correspond à un modèle à écrouissage linéaire dit cinématique, car dépendant de la valeur instantanée de la déformation plastique.

4.- Solide élastoplastique parfait

En ajoutant un ressort en série au modèle rigide-plastique précédent, on obtient le modèle élastoplastique parfait.

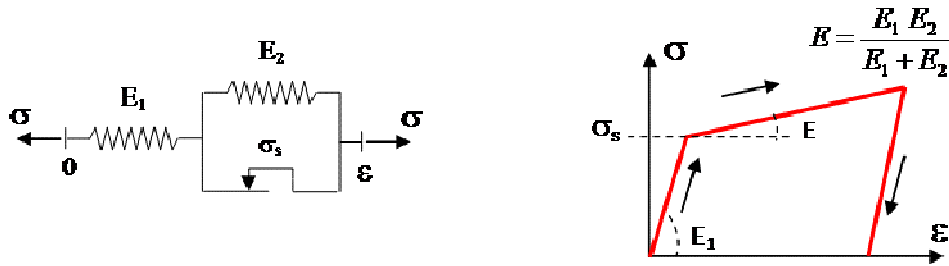


Figure 2.28 : Modèle rhéologique élastoplastique parfait.

Ce modèle représente le comportement idéalisé des matériaux métalliques dans l'approximation élastoplastique parfaite, qui est souvent utilisée en calcul analytique pour simplifier les calculs.

5. Solide élastoplastique écrouissable

Ce comportement est composé :

Une première partie élastique linéaire ($\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$) réversible, suivie d'une déformation plastique (ϵ_p) permanente si la sollicitation a atteint le seuil minimal (σ_s). La déformation plastique est fonction de la contrainte.

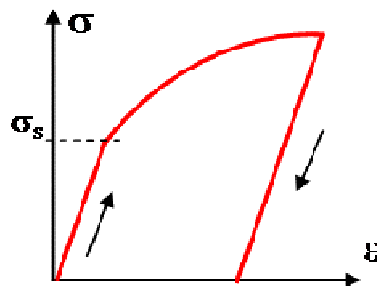


Figure 2.29 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastoplastique écrouissable.

L'assemblage en parallèle de modèles de Saint-Venant permet de décrire de manière satisfaisante le comportement élastoplastique écrouissable caractéristique, en particulier pour les métaux.

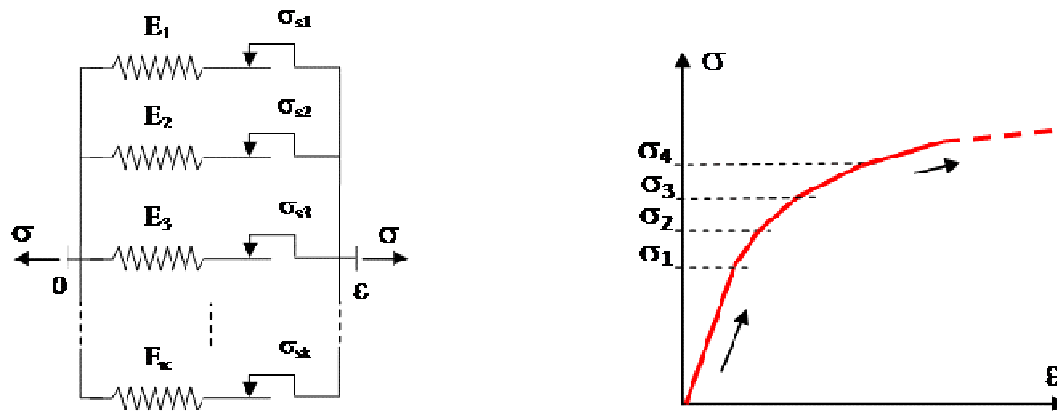


Figure 2.30 : Modèle rhéologique élastoplastique écrouissable.

Le comportement est élastique linéaire, résultant de la combinaison des contributions individuelles des différents ressorts ε_i , jusqu'à atteindre la valeur seuil imposée par le patin le moins résistant σ_s . Au-delà de cette limite, et à chaque instant, l'écoulement plastique est gouverné par la hiérarchie des résistances des patins encore en service σ_{si} .

II.3.1.4. Solides viscoplastiques

Les solides dits viscoplastiques regroupent les corps qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations et qui, sous l'action d'une sollicitation, tendent à s'écouler en fonction du temps, ce qui est appelé le phénomène de fluage.

1. Solide parfaitement viscoplastique

Le comportement du solide parfaitement viscoplastique est similaire à celui des fluides visqueux : la vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte appliquée.

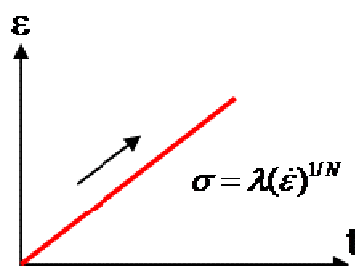
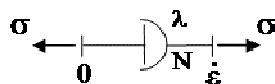


Figure 2.31 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement parfaitement viscoplastique.

Le modèle de Norton est l'équivalent analogique pour décrire le comportement des solides parfaitement viscoplastiques, et il est représenté par un amortisseur.



Cependant, ce modèle décrit de manière très grossière le comportement des métaux à haute température, et il peut être nécessaire d'utiliser des modèles plus sophistiqués pour une description plus précise.

2. Solides élastique parfaitement viscoplastique

Sous une sollicitation donnée, le solide élastique parfaitement viscoplastique va se déformer de manière élastique (réversible instantanément) si la contrainte est inférieure à une valeur seuil. Au-delà de ce seuil, la déformation engendrée par la sollicitation sera composée d'une déformation élastique et plastique. La déformation plastique dépend uniquement de la contrainte, et il n'y a pas de phénomène d'écrouissage dans ce cas.

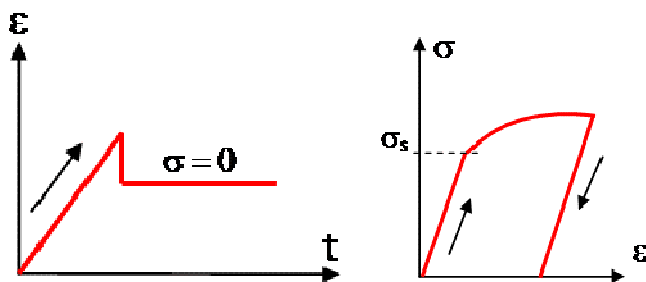


Figure 2.32 : Courbe type contrainte-déformation d'un comportement élastique parfaitement viscoplastique.

$$\sigma < \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad (2.11)$$

$$\sigma = \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma). \quad (2.12)$$

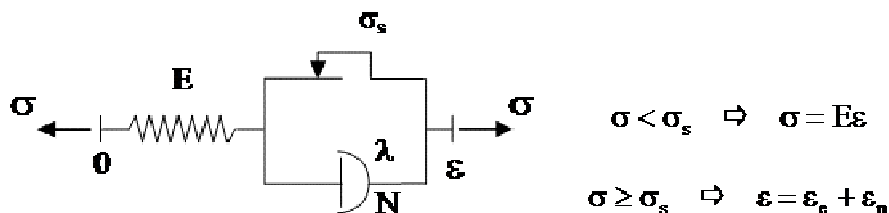


Figure 2.33 : Modèle rhéologique de Bingham-Norton.

Chapitre III



Elasticité et viscoélasticité

Partie I: élasticité

I.1 Rappel mathématique

I.1.1 Calcul indiciel

En calcul indiciel, on applique le calcul algébrique ordinaire. Il n'y a pas de règles spéciales (contrairement au calcul vectoriel par exemple, qui distingue le produit scalaire et le produit vectoriel).

Le nombre des indices montre clairement l'ordre des tenseurs. Cette simplicité a un revers : on dépend des axes, ce qui oblige à définir la règle de transformation des composantes d'une grandeur physique objective, lors d'un changement d'axes.

En indiciel, x , y et z sont remplacés par 1, 2, 3. Le système d'axes est (x_1, x_2, x_3) (fig. 3.1.1) ; les composantes d'un vecteur \vec{a} sont a_1, a_2, a_3 ou simplement a_i ; on écrit :

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

Les indices, inférieurs, prennent les valeurs 1 à 3 ; une grandeur telle que b_i a 3 composantes, A_{ij} 9 composantes, etc.

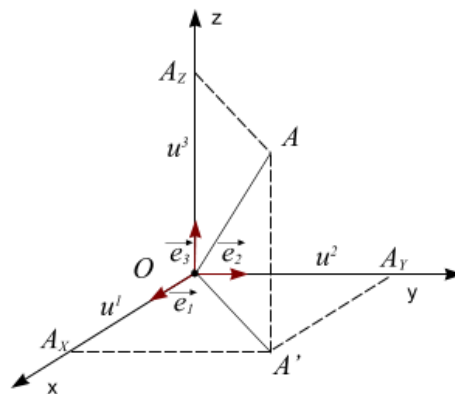


Figure 3.1.1 : Repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en notation indicielle.

I.1.2 Règles

On peut compacter l'écriture indicielle en observant quelques règles.

Règle 1 ou convention de sommation (Einstein) : chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans un même monôme, ce monôme représente la somme de trois termes, obtenue en donnant aux indices les valeurs 1, 2 et 3 successivement.

Exemples :

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a_{km}b_m = a_{k1}b_1 + a_{k2}b_2 + a_{k3}b_3$$

$$g_{ss} = g_{11} + g_{22} + g_{33}$$

La deuxième somme, par exemple, devrait s'écrire :

$$a_{km}b_m = \sum_{m=1}^3 a_{km}b_m$$

Mais, vu que les indices sont toujours attachés aux coordonnées (x, y, z c'est-à-dire 1, 2, 3), le signe \sum est finalement inutile.

L'indice répété s'appelle indice de sommation ; il est dit muet, puisqu'il disparaît une fois la somme effectuée. Il en résulte la règle suivante :

Un même indice muet ne peut apparaître que deux fois dans un monôme. Ainsi :

$$c_{ij}c_{ik}x_k$$

Est correcte et indique une double somme sur les indices muets i et k , alors que :

$$c_{mj}c_{mm}x_m \text{ est incompréhensible.}$$

Règle2 : un indice qui n'apparaît qu'une fois dans un monôme doit aussi apparaître une fois dans tous les monômes d'une expression.

Cet indice s'appelle indice d'identification ou indice libre et représente le numéro de l'équation traitée. Par exemple :

$$x_j = a_{ij}b_j + d_j$$

est correct et représente l'équation j , tandis que

$$x_j = a_{ij}b_i + d_k$$

n'a pas de sens.

I.1.3 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker est une grandeur à deux indices notée δ_{ij} et définie par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ce symbole est symétrique ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$) et permet d'écrire, par exemple :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

En groupant les neuf valeurs δ_{ij} dans une matrice carrée 3x3, on constate que le symbole de Kronecker est l'image indicelle de la matrice identité I.

$$I = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le delta de Kronecker fait apparaître les propriétés :

$$\delta_{kk} = 3 = \text{Tr}(I)$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$A_{im} \delta_{mj} = A_{ij}$$

I.1.4 Algèbre des tenseurs cartésiens

On rappelle ici sans démonstration, quelques règles et propriétés utiles, relatives aux tenseurs cartésiens.

1. *Tenseur nul* : si toutes les composantes d'un tenseur sont nulles dans un système d'axes, elles sont aussi nulles dans tout autre système.

2. *Addition et soustraction* : la somme ou la différence de deux tenseurs de même ordre est encore un tenseur de même ordre.

Exemple : $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

3. *Multiplication* : Le produit de deux tenseurs d'ordre m et n n'est un tenseur d'ordre $m+n$.

Exemple : $C_{ijk} = A_i B_{jk}$

4. *Contraction* : Si deux indices d'un tenseur d'ordre n prennent la même valeur, il en résulte un tenseur d'ordre $n - 2$. (En effet, la convention de sommation s'applique).

Exemple :

$$\delta_{ii} = 3.$$

5. *Multiplication contractée* : on appelle multiplication contractée, ou produit contracté, une contraction effectuée lors d'une multiplication tensorielle.

Exemple : $A_{ijk} B_{jq} = C_{ikq}$

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre m et n conduit à un tenseur d'ordre $m + n - 2$.

6. *Objectivité* : si une équation tensorielle est vraie dans un système d'axes, elle l'est dans tout autre système. L'équation doit être homogène dans ses divers termes ; la structure de l'équation doit être homogène dans ses divers termes ; la structure de l'équation est conservée lors du changement d'axes.

7. *Dérivation* : dériver un tenseur d'ordre n par rapport au temps donne un tenseur de même ordre. Dériver un tenseur d'ordre n par rapport à la variable x_i produit un tenseur d'ordre $n+1$.

Exemple : $B_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$

La dérivée partielle d'un tenseur se comporte comme les composantes d'un tenseur.

Tenseur d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 bénéficient de quelques propriétés complémentaires intéressantes.

8. *Transposé d'un tenseur* :

Si $u_i = A_{ij}v_j$ et $u_i = B_{ji}v_j$, le tenseur **B** est la transposé du tenseur **A** (et inversement).

9. *Tenseur symétrique et tenseur antisymétrique*

Un tenseur est symétrique si : $A_{ij} = A_{ji}$.

Un tenseur est antisymétrique si $A_{ij} = -A_{ji}$. Il en résulte que les composantes A_{11}, A_{22}, A_{33} sont nulles. Ces propriétés sont conservées dans un changement de repère.

Tout tenseur peut s'écrire comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique (cette décomposition est unique).

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

Si **A** est symétrique et **B** antisymétrique, alors :

$$A_{ij}B_{ij} = 0$$

10. *Invariants*

Tout tenseur **A** d'ordre 2 possède trois invariants qu'on peut déduire des valeurs propres de l'équation matricielle (où **A** est la matrice 3x3 associée à **A**).

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si **A** est un tenseur symétrique, les valeurs propres sont réelles et qualifiées de principales ; il s'y associe trois vecteurs propres mutuellement orthogonaux (directions principales).

I.1.5 Equations du mouvement

Par application de la loi de quantité de mouvement, l'ensemble des équations de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial i} + b_j = \rho a_j \quad (3.1.1)$$

et constitue les équations du mouvement de Cauchy.

En notation explicite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Les composantes du tenseur contrainte sont des fonctions $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ des coordonnées et du temps, dérivables et continues.

I.1.6 Equilibre statique

Les termes fonction du temps disparaissent dans le cas de l'équilibre statique (accélération $a_j = 0$), les équations (3.1.2) deviennent :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (3.1.3)$$

et s'appelle équations d'équilibre de volume.

I.1.7 Contraintes principales et plans principaux

Soit σ_{ij} le tenseur contrainte caractérisant l'état de contrainte en un point O d'un solide.

Existe-t-il en ce point certaines facettes auxquelles le vecteur contrainte \vec{f} serait purement normal ?

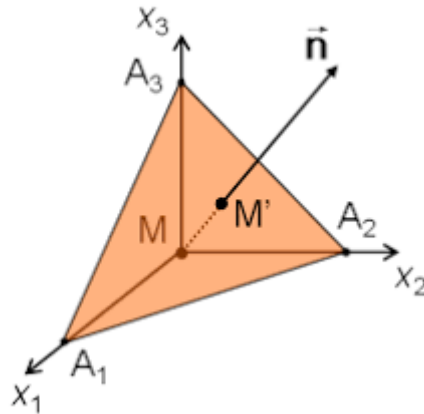


Figure 3.1.2 : Tétrahédre élémentaire de Cauchy.

Pour répondre à cette question, il suffit d'exprimer que \vec{f} est parallèle à \vec{n} (fig 3.1.2), donc égal à \vec{n} multiplié par un scalaire λ .

$$f_j = \lambda n_j \quad (3.1.4)$$

Mais f_j égale aussi : $f_j = \sigma_{ij} n_i$

Alors on a : $\sigma_{ij} n_i - \lambda n_j = 0$

$$\sigma_{ij} n_i - \lambda n_j = \sigma_{ij} n_i - \lambda \delta_{ij} n_i$$

et donc $(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_i = 0$

Les solutions s'obtiennent en annulant le déterminant :

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda \overline{\overline{I}}) = 0 \quad (3.1.5)$$

Soit explicitement :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.6)$$

On est donc ramené au problème de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice du tenseur des contraintes. Vu la symétrie, il existe trois valeurs propres réelles auxquelles correspondent trois vecteurs propres orthogonaux.

Ainsi, en un point O d'un solide, on peut toujours trouver trois facettes perpendiculaires entre elles, auxquelles le vecteur contrainte est purement normal, donc où les contraintes tangentielles sont nulles.

Les plans de ces facettes sont dits plans principaux et les axes perpendiculaires à ces plans axes principaux (ou directions principales). Les contraintes normales aux plans principaux, notées σ_I, σ_{II} et σ_{III} , sont les contraintes principales.

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

I.1.8 Equation caractéristique et directions principales

Le développement du déterminant fournit l'équation caractéristique cubique :

$$-\lambda^3 + I_\sigma \lambda^2 - II_\sigma \lambda + III_\sigma = 0 \quad (3.1.7)$$

dont les solutions sont les trois contraintes principales et les coefficients I_σ, II_σ et III_σ les invariants.

Invariants

Les contraintes principales en un point sont des quantités physiques objectives, ce sont donc des invariants de l'état de contrainte. Puisqu'on les trouve par l'équation caractéristique (3.1.7), les coefficients de cette équation doivent aussi être objectifs. On appelle ces coefficients les invariants du tenseur contrainte et le développement de (3.1.6) montre qu'ils valent :

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \text{tr} \sigma \\ II_\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ III_\sigma &= \det \sigma = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Il est clair que, dans les axes principaux, la matrice des contraintes principales prend la forme diagonalisée :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

I.1.9 Tenseurs déviateur et sphérique

On appelle contrainte normale moyenne la quantité :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_\sigma \quad (3.1.10)$$

C'est un invariant, il permet d'écrire le tenseur contrainte σ_{ij} comme la somme de deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij} \quad (3.I.11)$$

Ou encore, matriciellement :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (3.I.12)$$

Dans le premier tenseur, dit tenseur contrainte sphérique, toutes les contraintes normales sont égales et les contraintes tangentielles nulles. Ce tenseur caractérise par exemple un état de contrainte hydrostatique.

Le second tenseur, dit tenseur déviateur des contraintes, s'écrit donc :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (3.I.13)$$

Et par la suite le tenseur déviateur s_{ij} a, pour directions principales, les mêmes directions que celles du tenseur contrainte σ_{ij} , et pour contraintes principales $\lambda_{(s)}$

$$s_I = \sigma_I - \sigma_0 \quad s_{II} = \sigma_{II} - \sigma_0 \quad s_{III} = \sigma_{III} - \sigma_0 \quad (3.I.14)$$

Les invariants du déviateur ont pour expression

$$\begin{aligned} I_s &= 0 \\ II_s &= -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \\ III_s &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \det s \end{aligned} \quad (3.I.15)$$

I.2 Domaine de validité et d'emploi de l'élasticité

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique.

Avant d'utiliser la théorie d'élasticité pour telle ou telle application, il y a donc lieu de s'assurer que l'ordre de grandeur des contraintes est bien compatible avec le domaine d'élasticité du matériau considéré. L'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques, elle l'est un peu moins pour le béton alors que pour les composites et les bois, il faut utiliser des théories à anisotropies particulières.

I.3 Bilan des inconnues des équations de l'élasticité

Les équations générales de la physique (conservation de la masse, principe fondamental de la mécanique, principes de la thermodynamique ...) ne suffisent pas pour déterminer les champs de contraintes ou de déplacement dans une structure. Le constat est le suivant :

Les quinze inconnues d'un problème de mécanique des solides sont :

- 3 composantes des champs de déplacement : u_i
- 6 composantes du tenseur de déformations ε_{ij}
- 6 composantes du tenseur de contraintes σ_{ij}

Les équations nécessaires sont :

- 3 équations de mouvement ou d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho a_j \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (3.1.16)$$

- 6 équations cinématiques (relations déformations-déplacement) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.17)$$

Un déficit du nombre d'équations vis à vis du nombre d'inconnus apparaît. Il est donc nécessaire d'employer des relations expérimentales pour compléter la modélisation. On obtient ainsi les *équations de comportement*. Ces dernières relient les contraintes aux déformations et permettent d'avoir suffisamment d'équations pour solutionner le problème.

- 6 lois constitutives:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.1.18)$$

L'intégration de ces équations laisse substituer des constantes d'intégration qui se déterminent par les conditions aux limites, à savoir :

$$\text{- Les équations sur } A_t : n_i \cdot \sigma_{ij} = t_j \quad (3.1.19)$$

$$\text{- Les équations sur } A_u : u_i = \bar{u}_i \quad (3.1.20)$$

A_t est la portion de la surface du solide où les tractions de surface sont imposées (et les déplacements inconnus) et A_u celle où les déplacements sont imposés (appuis) et les tractions (réactions) inconnues.

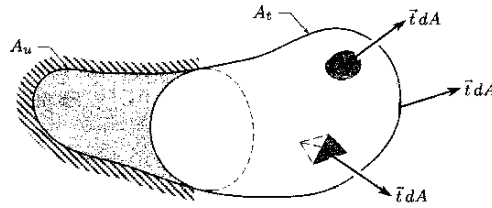


Figure 3.I.3 : Partie libre A_t et partie appuyée A_u de la surface A .

I.4 Formulation en déplacements (cas tridimensionnel)

I.4.1 Equation de Navier

IL est possible d'éliminer, dans les quinze équations précédentes, les déformations et contraintes au profit des déplacements.

Introduisons (3.I.17) dans (3.I.18) pour éliminer ε_{ij} ; avec :

$$D_{ijkl} = D_{ijlk} \quad (3.I.21)$$

$$\text{On a : } \sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = D_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (3.I.22)$$

Il reste à introduire cette relation dans (3.I.16) afin d'éliminer les contraintes ; on obtient :

$$D_{ijkl} \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_l} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (3.I.23)$$

Ce sont les équations de **Navier** (1821) ou de **Cauchy** (1828), c'est-à-dire les équations du mouvement exprimées en fonction des déplacements. Elles traduisent la formulation en déplacements d'un problème d'élasticité et représentant un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre pour les inconnues u_i . Leur intégration produit des fonctions et constantes d'intégration, qui sont évaluées par les conditions aux limites et les conditions initiales.

I.4.2 Matériau isotrope

Dans ce cas, la forme des équations de Navier sont données par :

$$(\lambda + \nu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (3.I.24)$$

I.5 Formulation en contraintes (cas tridimensionnel)

On peut adopter, pour seules inconnues, les douze grandeurs suivantes :

- 6 composantes σ_{ij} ;
- 6 composantes ε_{ij} .

Les composantes u_i n'apparaissent plus comme inconnues. Les équations nécessaires sont alors :

- 3 équations d'équilibre ;
- 6 lois de comportement ;
- 3 conditions de compatibilité de Saint-Venant.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (3.1.25)$$

I.5.1 Matériau isotrope

Il s'agit d'éliminer les grandeurs cinématiques au profit des contraintes. Les calculs conduisent à :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial b_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1.26)$$

qui représentent les conditions de compatibilité cinématique exprimées en fonction des contraintes. Ce sont les équations de **Beltrami** (1892) et **Michell** (1900). Elles correspondent à la formulation en contraintes du problème d'élasticité (ici isotrope et statique) et représentent un système de six équations aux dérivées partielles du second ordre pour les six inconnues σ_{ij} .

I.6 Elasticité plane isotrope – Les deux états plans

I.6.1 Etat plan de contrainte

Considérons une paroi (figure 3.1.4)

- De plan moyen situé dans (x, y),
- D'épaisseur t constante, mais petite vis-à-vis des dimensions mesurées selon x et y (paroi mince), soumise à des forces agissant parallèlement au plan (x, y) et constantes dans le sens de l'épaisseur.

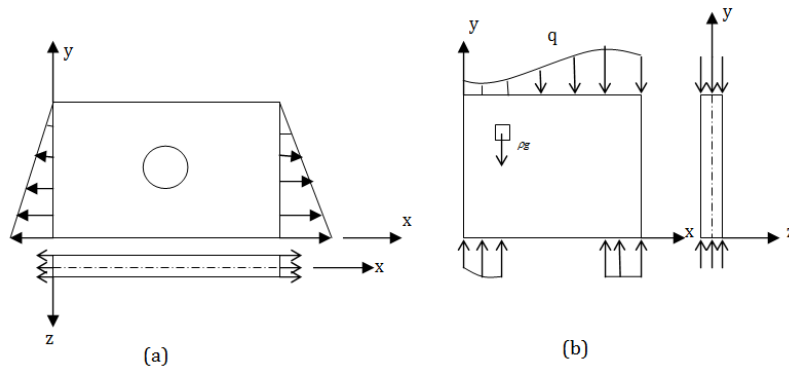


Figure 3.1.4 : États plans de contrainte : a) pièce percée d'un trou ;
b) paroi porteuse sous charge (q) et pesanteur (ρg).

Les composantes σ_z , τ_{xz} et τ_{yz} des contraintes sont nulles sur les deux faces $z = \pm t/2$. Sur tout plan intérieur parallèle à (x, y) , ces composantes ne peuvent prendre que des valeurs très faibles et l'on ne commet pas d'erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles.

$$\sigma_z \cong 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (3.1.27)$$

Semblablement, les trois composantes sont nulles (tenseur plan)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (\tau_{xy} = \tau_{yx}) \quad (3.1.28)$$

restent pratiquement constantes sur l'épaisseur t .

L'épaisseur t et l'axe z ne jouent donc pas de rôle ici ; on peut prendre $t = 1$ et négliger toutes les quantités associées à z . La loi de Hooke est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Ou inversement,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.1.30)$$

I.6.2 Etat plan de déformation

Inversement, considérons un solide prismatique infiniment long dans la direction z (figure 3.1.5), sollicité, toutefois comme au cas précédent (forces agissant dans des plans perpendiculaires à z et constantes avec z).

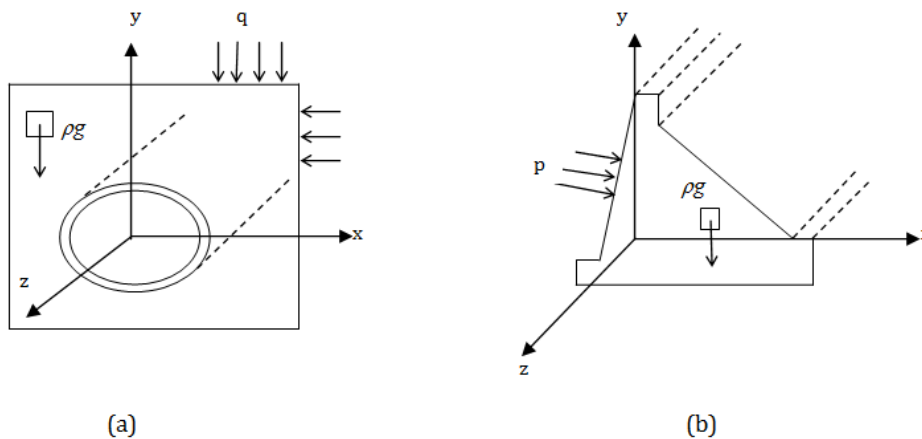


Figure 3.1.5 : Etats plans de déformation (vue en coupe ; solide admis très long selon z) ;
a) tunnel ; b) barrage.

Toutes les tranches d'épaisseur t de ce solide sont dans le même état et se déforment et déplacent dans leur plan moyen, parallèle au plan (x, y) . Il en résulte :

$$\varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (3.1.31)$$

Les autres composantes de la déformation (tenseur plan) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (\gamma_{xy} = \gamma_{yx}) \quad (3.1.32)$$

La loi de Hooke est :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.33}$$

Inversement

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\
 \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\
 \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.34}$$

I.7 Bilan des deux états plans

Pour les deux états plans, il s'agit de déterminer, en fonction de x et y seulement (et éventuellement, avec du temps t),

- L'état de contrainte $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$
- L'état de déformation $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$
- Les déplacements u, v

en satisfaisant aux équations statiques et cinématiques communes :

- Equilibre (ou mouvement)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \quad (= \rho \ddot{u}) \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \quad (= \rho \ddot{v})
 \end{aligned}
 \tag{3.1.35}$$

- Cinématique

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.36}$$

- Compatibilité cinématique

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.1.37)$$

I.8 Action thermique (cas plan)

En état de contrainte, la loi de Hooke est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Ou, inversement,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Avec :
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha T \quad (3.1.40)$$

En état plan de déformation, la loi de Hooke s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] + (1+\nu)\alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] + (1+\nu)\alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Et, résolue par rapport aux contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{3.I.42}$$

$$\text{Avec : } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T \tag{3.I.43}$$

Partie II: viscoélasticité

II.1 Viscoélasticité linéaire

Le comportement viscoélastique, typiquement illustré par les modèles de ressorts-amortisseurs, se rencontre surtout dans les polymères et, par conséquent, aussi dans les matériaux composites dont ils constituent la matrice. La propriété caractéristique de ces modèles de ressorts-amortisseurs est la linéarité. Nous nous intéresserons donc à la viscoélasticité linéaire. En rhéologie, cette linéarité se traduit par le principe de superposition de Boltzmann. Il en résulte alors, comme c'est un résultat classique pour les systèmes linéaires, que l'on peut explicitement écrire la fonction de réponse par les intégrales héréditaires de Volterra. Techniquement, il sera commode d'utiliser la transformée de Laplace.

La viscoélasticité non linéaire se réfère à des modèles qui incorporent des éléments de non-linéarité dans la relation entre la contrainte et la déformation, contrairement à la viscoélasticité linéaire qui est caractérisée par une relation linéaire entre la contrainte et la déformation. Dans la viscoélasticité non-linéaire, la fonction de relaxation $E(t)$ peut dépendre non seulement du temps mais également du niveau de déformation, ce qui conduit à une réponse non-linéaire du matériau.

Les modèles viscoélastiques non-linéaires sont utilisés pour décrire le comportement de nombreux matériaux, tels que les élastomères, les polymères et les matériaux composites, qui présentent des comportements non-linéaires sous des charges importantes ou des déformations importantes. Les modèles de viscoélasticité non-linéaire peuvent être beaucoup plus complexes que les modèles de viscoélasticité linéaire, et peuvent nécessiter des techniques de calcul plus avancées pour les résoudre.

II.1.1 Principe de superposition de Boltzmann

Dans un modèle de comportement linéaire, la fonctionnelle de réponse est linéaire, ce qui signifie que la réponse à une combinaison linéaire de sollicitations est égale à la somme des réponses à chaque sollicitation individuelle. Autrement dit, si le matériau est soumis à une combinaison linéaire de contraintes ou de déformations, sa réponse sera

également une combinaison linéaire de réponses correspondantes. Cette propriété est appelée superposition linéaire et est une caractéristique importante de la viscoélasticité linéaire.

Elle permet de simplifier considérablement les calculs et les analyses, car il est possible de calculer la réponse à une sollicitation donnée et de l'utiliser pour prédire la réponse à toute autre combinaison linéaire de sollicitations.

Considérons par exemple un essai à vitesse de déformation constante

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t \quad (3.II.1)$$

ou plus exactement $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t \varphi(t)$ ($\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t$ si $t \geq 0$, 0 si $t \leq 0$)

où $\varphi(t)$ est l'échelon unité (fonction de Heaviside, $\varphi(t) = 0$ si $t < 0$, $\varphi(t) = 1$ si $t > 0$). Nous supposons en effet dans la suite que la sollicitation commence à l'instant $t = 0$, $\varepsilon = \sigma = 0$ pour $t \leq 0$ (fig 3.II.1). Considérez donc que, sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions du temps sont nulles pour $t < 0$ et doivent donc être multipliées par un échelon unité que nous omettrons souvent dans la notation.

Il résulte de la linéarité que la réponse à cet essai est proportionnelle à $\dot{\varepsilon}_0$. On écrira:

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t \quad \sigma = \dot{\varepsilon}_0 L(t) \quad (3.II.2)$$

où $L(t)$ est la réponse correspondant à une vitesse unité. Si maintenant on arrête la déformation à t_0 , cette sollicitation est la superposition des deux essais, et la réponse en découle directement:

$$\sigma = \dot{\varepsilon}_0 L(t) - \sigma = \dot{\varepsilon}_0 L(t - t_0) \quad (3.II.3)$$

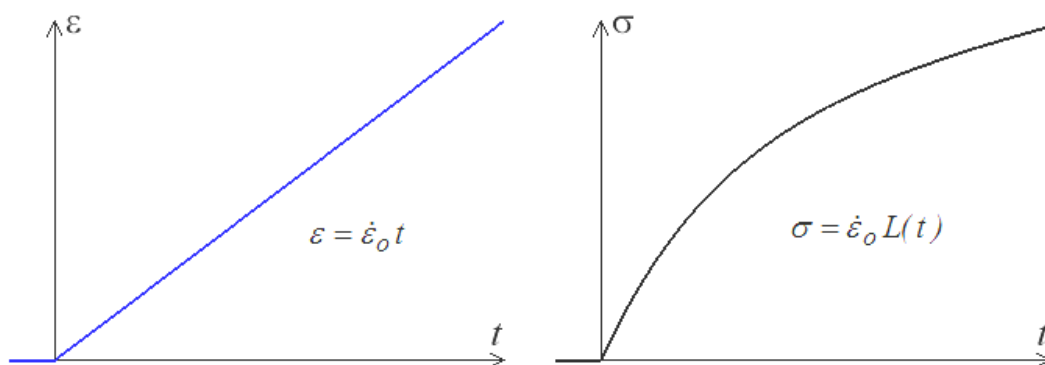


Figure 3.II.1 : Réponse typique en déformation et en contrainte pour la viscosité linéaire.

Plus généralement, la linéarité nous permettra de suivre la réponse à une sollicitation complexe à partir de quelques essais élémentaires.

II.1.2 Fonctions de fluage et de relaxation

L'essai de fluage correspond à un échelon de contrainte $\sigma = \sigma_0$

La réponse sera alors : $\varepsilon = \sigma_0 J(t)$

où $J(t)$, réponse en déformation à un essai de fluage pour une contrainte unité, est la fonction de fluage du matériau.

Suivant la démarche décrite plus haut, on peut en tirer directement la réponse à un créneau de contrainte.

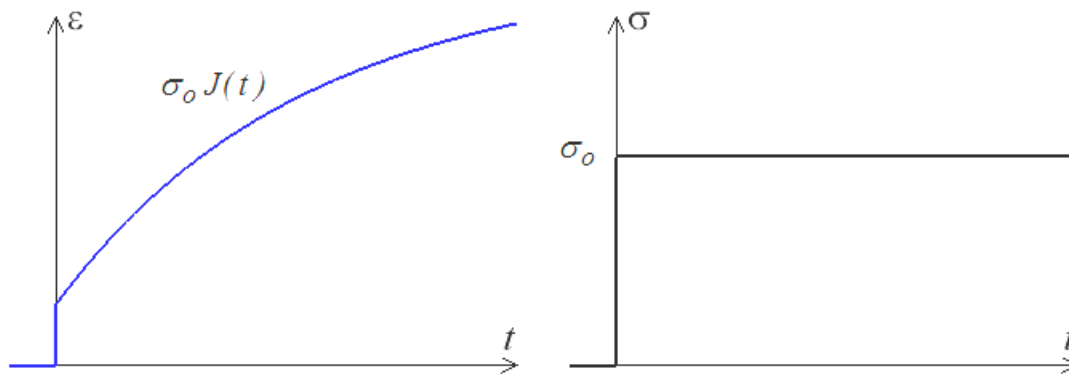


Figure 3.II.2 : Courbe typique d'un essai de fluage pour un échelon de contrainte unitaire.

De même la fonction de relaxation $E(t)$ est la réponse à un essai de relaxation pour une déformation unité:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \sigma = \varepsilon_0 E(t) \quad (3.II.4)$$

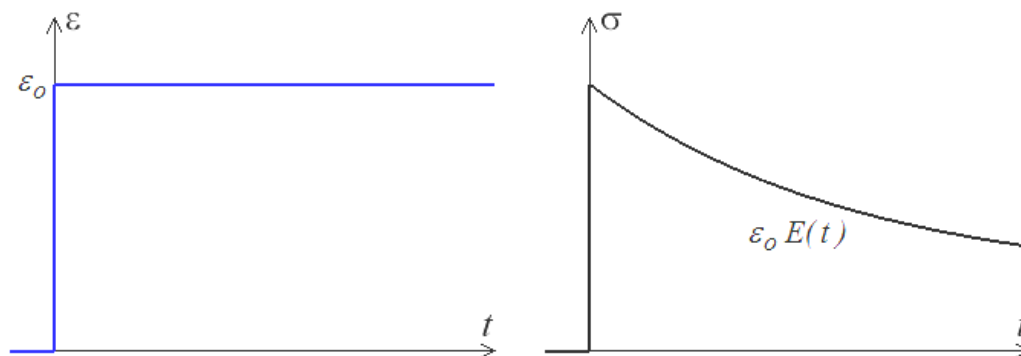


Figure 3.II.3 : Courbe typique d'un essai de relaxation pour une déformation unitaire.

On remarquera toutefois que cette fonction, définie sans difficulté pour un modèle avec élasticité instantanée, pose problème pour un modèle visqueux qui ne peut supporter une discontinuité de déformation et donc un essai de relaxation. Il faudra faire intervenir une fonction de Dirac.

II.1.3 Lois héréditaires de Volterra

La loi viscoélastique générale s'écrit donc sous forme d'une intégrale:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.II.5)$$

souvent appelée intégrale héréditaire de Volterra. On remarquera que l'on a, dans cette écriture, remplacé la borne inférieure $t = 0$ par $t = -\infty$, ce qui est légitime puisque l'on a considéré que le matériau était au repos ($\varepsilon = \sigma = 0$) avant le début de la sollicitation que nous avons choisi comme origine des temps.

On trouve dans la littérature d'autres formes équivalentes. Par exemple une intégration par parties donne:

$$\varepsilon(t) = [J(t - \tau)\sigma(\tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=t} - \int dJ(t - \tau)\sigma(\tau) = J(0)\sigma(t) + \int_{-\infty}^t J'(t - \tau)\sigma(\tau) d\tau \quad (3.II.6)$$

puisque $\sigma(-\infty) = 0$ et en notant J' la dérivée de la fonction de fluage. Le changement de variable $t - \tau = s$ permet aussi d'écrire:

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^{\infty} J'(s)\sigma(t - s) ds \quad (3.II.7)$$

Par ailleurs, on peut obtenir, pour une sollicitation à déformation imposée, une formulation symétrique faisant intervenir, à la place de la fonction de fluage, la fonction de relaxation.

II.2. Modélisation en viscoélastiques

En viscoélasticité on peut écrire explicitement la fonctionnelle de réponse et oublier le cadre général présenté précédemment. La viscoélasticité est en ce sens un cas singulier en Mécanique des Matériaux.

Néanmoins ces modèles, c'est-à-dire en fait ici les modèles rhéologiques ressorts-amortisseurs, gardent tout leur intérêt, ne serait-ce que comme cas particuliers simples, et ils sont effectivement largement utilisés.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = E(0)\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t E'(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^{\infty} E'(s)\varepsilon(t - s) ds \quad (3.II.8)$$

II.2.1 Transformée de Laplace-Carson

Le lecteur un peu habitué à ces questions (classiques, répétons-le, en automatique et en électronique) aura reconnu dans cette loi intégrale un produit de convolution:

$$\varepsilon = J * \frac{D\sigma}{Dt} \quad (3.II.9)$$

La déformation ε considérée comme une fonction du temps est le produit de convolution de la fonction de fluage par la dérivée $\frac{D\sigma}{Dt}$ (dérivée au sens des distributions, d'où la notation $\frac{D\sigma}{Dt}$ plutôt que $\frac{d\sigma}{dt}$, mais pas d'affolement, c'est important pour la rigueur mathématique mais totalement indolore pour les applications).

Ceci conduit tout naturellement à l'utilisation de la transformation de Laplace – ou plus précisément de Laplace-Carson – associant à une fonction du temps $f(t)$ sa transformée $f^*(p)$ définie par:

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.II.10)$$

En transformée de Laplace-Carson la loi de comportement viscoélastique s'exprime par un simple produit:

$$\varepsilon^*(p) = J^*(p)\sigma^*(p) \quad \sigma^*(p) = E^*(p)\varepsilon^*(p) \quad (3.II.11)$$

où $J^*(p)$ et $E^*(p)$ sont les transformées de Laplace-Carson des fonctions de fluage et de relaxation. On parle souvent de module opérationnel. On en déduit en particulier que ces deux fonctions sont inverses lune de l'autre

$$E^*(p)J^*(p) = 1 \quad (3.II.12)$$

L'utilisation de cette transformée de Laplace-Carson réduit (presque !) les calculs viscoélastiques à des simples calculs algébriques. Pour calculer la réponse $\varepsilon(t)$ à une sollicitation $\sigma(t)$ quelconque, il suffit de:

1. Calculer la transformée $\sigma^*(p)$ de $\sigma(t)$.
2. En déduire $\varepsilon^*(p) = J^*(p)\sigma^*(p)$.
3. Revenir à l'original $\varepsilon(t)$.

C'est cette dernière étape qui peut poser problème (d'où le presque de mon affirmation). Dans la pratique on pourra souvent s'en sortir en utilisant le mini-formulaire.

II.3 Modèles viscoélastiques

Les modèles rhéologiques viscoélastiques c'est-à-dire formés de ressorts et d'amortisseurs - s'inscrivent tout naturellement dans ce cadre.

II.3.1 Modèle de Kelvin et Maxwell

Le modèle de Kelvin, montage parallèle d'un ressort et d'un amortisseur, est le plus simple. Sa loi de comportement est:

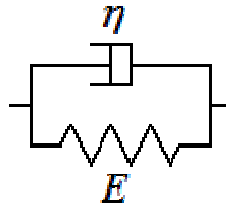


Figure 3.II.4 : Modèle de Kelvin et Maxwell.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.II.13)$$

devient en transformée de Laplace-Carson:

$$\sigma^* = E\varepsilon^* + \eta p\varepsilon^* \quad (3.II.14)$$

Les modules opérationnels sont donc:

$$E^* = E + \eta p \quad J^* = \frac{1}{E^*} = \frac{1}{E + \eta p} \quad (3.II.15)$$

soit, en revenant à l'original,

$$E^* = E + \eta p \quad E(t) = E + \eta\delta(t) \quad (3.II.16)$$

La fonction de relaxation fait intervenir une fonction de Dirac, ce qui correspond à l'impossibilité d'imposer une déformation instantanée – matériau visqueux au sens où nous l'avons défini plus haut. Rappelons que toutes les fonctions que nous manipulons sont en fait – bien que ceci soit tout à fait transparent pour l'utilisateur – des distributions.

La fonction de fluage $j(t)$ s'obtient directement à partir du mini-formulaire:

$$J^* = \frac{1}{E + \eta p} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{p + 1/\tau} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{\tau} \frac{1}{p + 1/\tau} \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.II.17)$$

d'où, par utilisation de la formule appropriée:

$$J(t)^* = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.II.18)$$

et on retrouve bien évidemment le résultat obtenu directement par intégration de l'équation différentielle.

II.3.2 Modèle de Poynting et Zener

Le modèle de Poynting ou Poynting-Thomson est le montage en série d'un ressort et d'un modèle de Kelvin. On écrira donc, avec des notations naturelles,

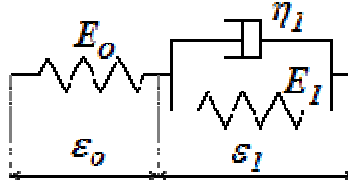


Figure 3.II.5 : Modèle de Poynting.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \quad \sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = E_0 \varepsilon_0 = E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (3.II.19)$$

soit en transformée de Laplace-Carson (dont on peut remarquer ici l'efficacité):

$$\sigma^* = E_0 \varepsilon_0^* = E_1 \varepsilon_1^* + \eta_1 p \varepsilon_1^* \quad (3.II.20)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0^* + \varepsilon_1^* = \frac{\sigma^*}{E_0} + \frac{\sigma^*}{E_1 + \eta_1 p} = j^* \sigma^* \quad (3.II.21)$$

d'où la fonction de fluage

$$j^*(p) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta_1 p} \quad j(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \quad (3.II.22)$$

en utilisant pour le second terme le résultat obtenu pour le modèle de Kelvin.

Pour la fonction de relaxation, il faut prendre l'inverse de cette fraction rationnelle:

$$E^* = \frac{1}{j^*} = \frac{E_0(E_1 + \eta_1 p)}{E_0 + E_1 + \eta_1 p} \quad (3.II.23)$$

d'où l'on pourrait tirer $E(t)$ par utilisation du mini-formulaire après décomposition de cette fraction en éléments simples. Je laisse ce calcul de côté, car nous verrons très bientôt une méthode plus économique et porteuse de sens pour obtenir cette fonction de relaxation $E(t)$.

Je passe maintenant au modèle de Zener (avec des notations un peu moins naturelles mais qui trouveront rapidement leur raison d'être).

$$\sigma = \sigma_\infty + \sigma_1 \quad \sigma_\infty = E_\infty \varepsilon \quad \sigma_1 = E_1' \varepsilon_1 = \eta_1' \dot{\xi}_1 \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \xi_1 \quad (3.II.24)$$

soit en transformée de Laplace-Carson:

$$\sigma_1^* = E_1' \varepsilon_1^* = \eta_1' p \xi_1^* \quad \varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \xi_1^* = \sigma_1^* \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{\eta_1' p} \right) \quad \sigma_1^* = \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{\eta_1' p} \right)^{-1} \varepsilon^*$$

$$\sigma^* = \sigma_\infty^* + \sigma_1^* = \left(E_\infty + \frac{E_1' \eta_1' p}{E_1' + \eta_1' p} \right) \varepsilon^* \quad (3.II.25)$$

et en utilisant le résultat obtenu pour le modèle de Maxwell:

$$E^* = E_\infty + \frac{E_1' \eta_1' p}{E_1' + \eta_1' p} \quad E(t) = E_\infty + E_1' e^{-t/\tau_1'} \quad \tau_1' = \frac{\eta_1'}{E_1'} \quad (3.II.26)$$

Pour obtenir la fonction de fluage on écrira:

$$j^* = \frac{1}{E^*} = \left(\frac{E_\infty (E_1' + \eta_1' p)}{E_1' + \eta_1' p} \right)^{-1} \quad (3.II.27)$$

Le retour à l'original permettrait ensuite de calculer $j(t)$.

On peut maintenant remarquer que ces deux modèles, Poynting et Zener, conduisent pour j^* et E^* à deux fonctions rationnelles de la forme

$$\frac{ap+b}{cp+d} \quad (3.II.28)$$

et, sous réserve de l'identification de ces fractions, on pourra affirmer que ces deux modèles coïncident. Prenons par exemple, pour réaliser cette identification, la fonction de relaxation. Nous devons donc écrire:

$$\frac{(E_1' + E_\infty) \eta_1' p + E_\infty E_1'}{E_1' + \eta_1' p} = \frac{E_0 \eta_1' p + E_0 E_1'}{\eta_1' p + (E_0 + E_1)} \quad (3.II.29)$$

L'identification de ces deux fractions rationnelles va nous donner 3 relations (les 4 coefficients ne sont définis qu'à une constante multiplicative près) qui vont nous permettre de calculer E_1' , E_∞ et η_1' en fonction de E_0 , E_1 et η_1 ou réciproquement, ce qui permettra d'identifier ces deux modèles. Ce calcul algébrique peut être mené directement, mais il est plus astucieux d'examiner les limites $p \rightarrow 0$ et $p \rightarrow \infty$. On obtient alors respectivement:

$$p \rightarrow 0 \quad E^* \rightarrow E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \quad \frac{1}{E_\infty} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \quad (3.II.30)$$

$$p \rightarrow \infty \quad E^* \rightarrow E_0 = E_1' + E_\infty \quad (3.II.31)$$

Ces deux relations donnent (E_∞, E_1') en fonction de (E_0, E_1) et réciproquement.

Poynting et Zener sont donc en fait deux représentations équivalentes du même modèle, et on utilisera l'un ou l'autre selon ce qui sera le plus commode. C'est pour cette raison

que nous n'avons pas directement calculé la fonction de relaxation pour Poynting : il est plus simple d'utiliser le résultat obtenu pour Zener.

Le comportement en fluage et relaxation de ce modèle est représenté ci-dessous.

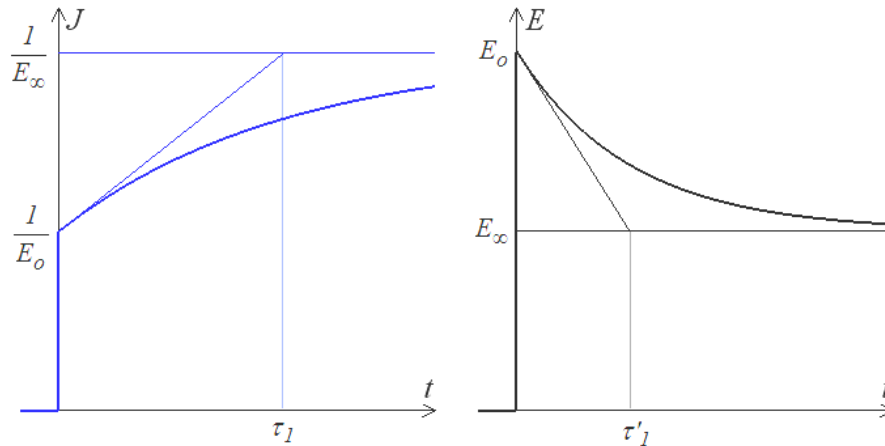


Figure 3.II.6 : Comportement en fluage et relaxation pour le modèle de Poynting.

On constate que E_0 correspond à la limite $t \rightarrow 0$ ($p \rightarrow \infty$) et E_∞ à la limite $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$), ce qui motive la notation utilisée. Nous y reviendrons.

Remarquons aussi que la loi de comportement transformée:

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* \quad E^* = \frac{E_0(E_1 + \eta_1 p)}{E_0 + E_1 + \eta_1 p} \quad (3.II.32)$$

Peut aussi s'écrire:

$$(E_0 + E_1 + \eta_1 p)\sigma^* = E_0(E_1 + \eta_1 p) \varepsilon^* \quad (3.II.33)$$

Ce qui, en revenant aux fonctions originales, correspond à une équation différentielle

$$\eta_1 \frac{d\sigma}{dt} + (E_0 + E_1)\sigma = E_0(\eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 \varepsilon) \quad (3.II.34)$$

forme différentielle de la loi de comportement.

II.3.3 Autres modèles simples

Les autres modèles viscoélastiques simples s'étudieraient de la même manière. On montrerait par exemple que les deux versions proposées pour le modèle de Jeffreys correspondent bien au même modèle à condition d'identifier correctement les 3 constantes. Le lecteur pourra, en guise d'exercice, déterminer par exemple la fonction de fluage $J(t)$, correspondant au modèle de Burgers. Je n'insiste pas car nous allons immédiatement retrouver cela dans un contexte plus général.

II.4 Loi de comportement

Contrairement à ce qui se passera pour les autres types de comportement, l'écriture d'une loi de comportement tridimensionnelle ne présente pas ici de difficulté particulière. Le principe de superposition de Boltzmann qui nous a servi de point de départ s'applique également aux différentes composantes du tenseur des déformations ou des contraintes.

II.4.1 Viscoélasticité isotrope

Comme en élasticité cela devient beaucoup plus manipulable dans le cas isotrope, et la loi de comportement devient alors, en considérant par exemple l'écriture opérationnelle (en transformée de Laplace-Carson, mais les écritures complexes et héréditaires s'écriront de manière analogue).

$$\sigma_{ij}^*(p) = \lambda^*(p)\varepsilon_{kk}^*(p)\delta_{ij} + 2\mu^*(p)\varepsilon_{ij}^*(p) \quad (3.II.35)$$

ou, comme nous l'avons vu dans le cas élastique, toute autre forme équivalente. Nous privilégierons toutefois l'écriture en partie sphérique / déviateur qui est, comme nous le verrons bientôt, la plus porteuse de sens physique. Nous écrirons donc:

$$s_{ij}^* = 2G^* \varepsilon_{ij}^* \quad \sigma_I^* = 3K^* \varepsilon_I^* \quad (3.II.36)$$

Un modèle viscoélastique isotrope résulte de la combinaison de deux modèles monodimensionnels décrivant le comportement en contraction isotrope et glissement simple respectivement.

Le comportement en traction simple, plus facile à suivre expérimentalement, s'en déduira directement en écrivant:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_t^* & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_t^* \end{bmatrix} \quad (3.II.37)$$

et, en m'autorisant – temporairement – à omettre les étoiles,

$$\sigma_I = \sigma \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/3 \end{bmatrix} \quad (3.II.38)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{3K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2G} \begin{bmatrix} 2\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/3 \end{bmatrix} \quad (3.II.39)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)\sigma \quad \varepsilon_t = \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9G}\right)\sigma = \frac{3K-2G}{2(G+3K)}\varepsilon \quad (3.II.40)$$

Soit, en réintroduisant les étoiles,

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* \quad E^* = \frac{9K^*G^*}{3K^*+G^*} \quad (3.II.41)$$

La réalisation d'un essai de fluage ou de relaxation donnera $E(t)$ ou $E^*(p)$. Si on mesure en plus la contraction transversale $\varepsilon_t(t)$ on en tirera une seconde information qui nous permettra de séparer dans E^* les deux modules élémentaires K^* et G^* .

Pour éviter cette détermination on fait souvent l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes.

Hypothèse 1.

Les deux modules E et G ont le même comportement temporel:

$$E(t) = E_0\varphi(t) \quad G(t) = G_0\varphi(t) \quad (3.II.42)$$

Le rapport $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ reste alors constant et on peut encore parler du coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} = \frac{3K_0-2G_0}{2(G_0+3K_0)} \quad (3.II.43)$$

Hypothèse 2.

La viscoélasticité n'intervient que sur la partie déviatoire:

$$K(t) = K_0 \quad G(t) \text{ quelconque}$$

Le rapport $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ évolue alors au cours du temps mais sa mesure instantanée ($t \rightarrow 0$) ou différée ($t \rightarrow \infty$) suffit pour compléter l'information donnée par $E(t)$ et obtenir un modèle isotrope complet.

II.5 Classification des comportements

Nous avons présenté, dans le cas monodimensionnel, une classification selon deux critères

- comportement différé : fluide ou solide ,
- comportement instantané : élastique ou visqueux .

Un modèle tridimensionnel isotrope est constitué de deux modèles monodimensionnels décrivant respectivement le comportement en compression hydrostatique et en glissement simple. La classification des comportements tridimensionnels isotropes se fera donc tout naturellement par « produit » de ces deux classifications, conduisant en principe à 4x4 types de comportement.

Tous ne sont pas raisonnables. En particulier

Postulat physique.

le comportement en compression hydrostatique est nécessairement de type solide

$K(t) \rightarrow K_\infty$ pour $t \rightarrow \infty$. Si l'on impose par exemple une pression constante (fluage en compression hydrostatique) alors le volume va éventuellement diminuer mais finira par se stabiliser. L'hypothèse 2 évoquée plus haut consiste d'ailleurs à négliger cette évolution. La distinction fluide/solide porte donc uniquement sur le comportement déviatoire.

Cette propriété met aussi en évidence une limitation majeure de l'hypothèse 1 qui ne peut en effet être pertinente que pour un comportement de type solide.

Nous n'insisterons pas davantage ici, une discussion approfondie de cette distinction entre fluide et solide ne pourra être abordée sérieusement que dans un contexte autorisant les grandes déformations qui sont ici exclues. En fait cette distinction sera au cœur du cours sur les grandes transformations. Toutefois, même si l'interprétation donnée ici reste simpliste et n'est qu'une première étape, elle n'en est pas moins porteuse de sens et mérite d'être assimilée. C'est un pas de plus vers la réponse à la question "Qu'est-ce qu'un fluide?", question qui, sans hanter nos nuits, nous servira de fil directeur lorsque nous aborderons les grandes transformations.

Chapitre IV



Plasticité et viscoplasticité

Partie I: Plasticité

I.1 Introduction

Les premiers travaux sur la théorie de la plasticité remontent en effet aux années 1870 et sont associés au nom de Saint-Venant. Au début du XXe siècle, deux critères de résistance, ceux de Tresca (1864) et de Von Mises (1913), ont été proposés et sont encore utilisés de nos jours. En Hongrie, Károlyi Károlyi Kaszáló, connu sous le nom de Károly Károlyi, a introduit la possibilité de formation de rotule plastique dans les poutres fléchies en 1914, concluant que la rupture ne se produisait pas avant qu'un nombre suffisant de sections ne soient plastifiées.

À partir des années 1970, des programmes de calcul par ordinateur pour l'analyse et le dimensionnement plastique des structures ont été développés par Brozzetti et Lescourc'h en France. Cependant, actuellement en Algérie, le calcul plastique des structures n'est pas largement utilisé contrairement à la plupart des autres pays.

Il convient de noter que la théorie de la plasticité est un domaine de la mécanique des matériaux qui étudie le comportement des matériaux lorsqu'ils sont soumis à des charges importantes, provoquant des déformations permanentes ou plastiques. La théorie de la plasticité est appliquée dans la conception de structures et de composants mécaniques pour garantir leur sécurité et leur durabilité.

I.2 Les grandes classes de comportement

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements "de base", qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont, en Fig. I.4.1:

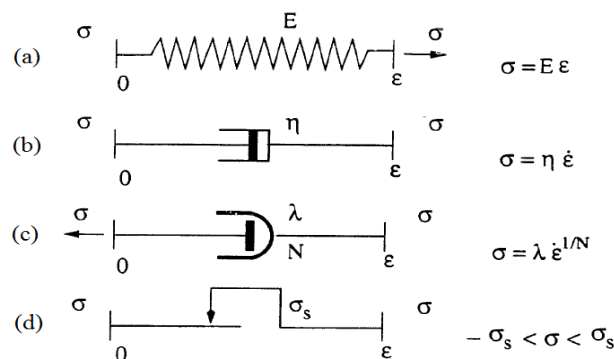


Figure 4.1.1 : Eléments mécaniques élémentaires.

a) **Le ressort** est un élément mécanique qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite d'un matériau. Dans ce cas, la déformation est entièrement réversible lorsqu'une charge est appliquée puis retirée, et il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation. (fig.4.1.1.a).

- b) **L'amortisseur** est un élément mécanique qui symbolise la viscosité d'un matériau. La viscosité peut être linéaire ou non-linéaire, et peut être représentée par un amortisseur linéaire (fig.4.I.1.b) ou non-linéaire (fig.4.I.1.c).
- c) **Le patin** est un élément mécanique qui symbolise l'apparition de déformations permanentes dans un matériau sous l'effet d'une charge suffisante. La figure I.4.1.d montre un exemple de patin représentant un matériau possédant un comportement plastique. Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des **modèles rhéologiques**.

I.3. Choix des lois de comportement

I.3.1 Comportements viscoélastiques

Les comportements viscoélastiques sont observés dans de nombreux matériaux, y compris les polymères thermoplastiques, les verres et les bétons frais.

- Pour les polymères thermoplastiques, le comportement viscoélastique est particulièrement important aux températures proches de la température de fusion. À ces températures, les polymères peuvent se déformer de manière visqueuse, c'est-à-dire en dissipant de l'énergie sous forme de chaleur, ainsi que de manière élastique, c'est-à-dire en retrouvant leur forme initiale après la charge est retirée. Ce comportement viscoélastique peut être représenté par un modèle de Kelvin-Voigt ou un modèle de Maxwell, qui combinent les comportements élastiques et visqueux.
- Pour les verres, le comportement viscoélastique est important aux températures proches de la température de transition. À ces températures, les verres peuvent se déformer de manière visqueuse, ainsi que de manière élastique. Ce comportement viscoélastique peut être représenté par un modèle de Maxwell.
- Pour les bétons frais, le comportement viscoélastique est important pendant la phase de mélange et de mise en place. À ces stades, le béton peut se déformer de manière visqueuse, ainsi que de manière élastique. Ce comportement viscoélastique peut être représenté par un modèle de Kelvin-Voigt ou un modèle de Maxwell.

I.3.2 Comportements rigides-parfaitement plastiques

Les comportements rigides-parfaitement plastiques sont importants pour l'étude des sols, l'analyse limite et la mise en forme des métaux.

- Dans le cas de l'étude des sols, le comportement rigide-parfaitement plastique peut être utilisé pour modéliser le comportement des sols lorsqu'ils atteignent leur limite de résistance. Ce comportement est important pour la conception de structures de génie civil, comme les fondations, les murs de soutènement et les tunnels.

- Pour l'analyse limite, le comportement rigide-parfaitement plastique est utilisé pour évaluer la capacité d'une structure à résister aux charges maximales. Cette méthode est couramment utilisée dans la conception de ponts, de bâtiments et d'autres structures.
- Enfin, pour la mise en forme des métaux, le comportement rigide-parfaitement plastique est utilisé pour modéliser le comportement des métaux lorsqu'ils sont déformés à des températures élevées. Ce comportement est important pour la conception de processus de formage des métaux, tels que l'extrusion et le laminage.

I.3.3 Comportements plastiques

Les comportements plastiques sont observés dans de nombreux matériaux, y compris les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion et les sols et roches.

- Dans le cas des métaux, le comportement plastique peut être observé à des températures inférieures au quart de la température de fusion, où la déformation plastique est principalement due à la glissement des dislocations. Les métaux peuvent subir des déformations plastiques importantes avant de se rompre, ce qui les rend utiles pour les applications de formage et de forgeage.
- Pour les sols et les roches, le comportement plastique est important pour la modélisation de la stabilité des pentes, des fondations et des tunnels. Les sols et les roches peuvent subir des déformations plastiques en réponse à des charges à long terme ou à des tremblements de terre. Cela peut entraîner des mouvements et des déformations permanents dans les structures, ce qui peut être dangereux.

I.3.4 Comportements viscoplastiques

Les comportements viscoplastiques sont observés dans de nombreux matériaux, y compris les métaux à moyenne et haute température, le bois, les sols (y compris le sel) et les céramiques à très haute température.

Dans le cas des métaux, les comportements viscoplastiques sont observés à des températures moyennes et élevées, où la déformation est due à la glissement des dislocations ainsi qu'à la diffusion des atomes à travers la structure cristalline. Les métaux peuvent subir des déformations viscoplastiques importantes avant de se rompre, ce qui nécessite une prise en compte des effets thermiques et temporels lors de la modélisation de leur comportement.

Pour le bois, les comportements viscoplastiques sont observés à des températures élevées, où la déformation est due à la décomposition thermique des polymères qui constituent le bois. Les sols, y compris le sel, peuvent également présenter des

comportements viscoplastiques en réponse à des charges à long terme ou à des variations de température.

Pour les céramiques à très haute température, les comportements viscoplastiques sont observés en raison des processus de diffusion des atomes à travers la structure cristalline, ce qui peut conduire à une déformation à long terme et à une rupture.

I.4. Modèles plastiques

Dans les modèles plastiques, une fois que la zone élastique d'un matériau est dépassée, le comportement devient irréversible, ce qui signifie que la déformation permanente est observée même après la suppression de la charge. Dans la figure 4.I.2, le diagramme B représente le comportement typique d'un matériau plastique, où la courbe de chargement-déchargement ne coïncide pas avec la courbe d'élasticité.

- le **module d'élasticité tangent**, pente de la tangente en A,

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (4.I.1)$$

- le **module d'élasticité sécant**, pente de la droite OA,

$$E_s = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_A} \quad (4.I.2)$$

La plasticité étant précédée de déformations élastiques, les modèles sont dits élastiques plastiques (ou élasto-plastiques).

I.4.1. Modèle élastique parfaitement plastique

Ce modèle sert à décrire les matériaux qui présentent un palier d'étirage bien marqué, tels que l'acier doux, et dont les dilatations restent suffisamment faibles pour ne pas atteindre la zone d'écrouissage (zone BCD Fig. 4.I.3).

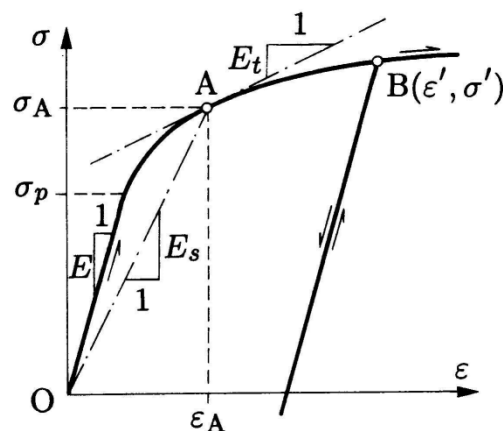


Figure 4.I.2 : Modèle élasto-plastique.

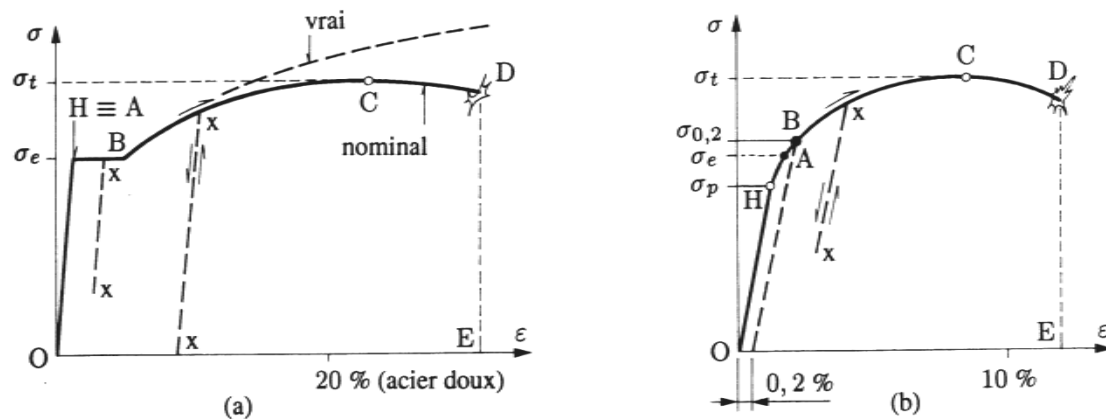


Figure 4.1.3 : Diagramme contrainte-déformation (σ, ε), (a) acier à palier ; (b) alliage d'aluminium.

On admet que ce matériau se comporte de façon linéaire élastique jusqu'à la limite d'élasticité (σ_e). Lorsque celle-ci est atteinte, la contrainte cesse de croître et la dilatation (ε) peut prendre une valeur indéterminée.

En cas de déchargement à partir d'un point quelconque du palier, le matériau se comporte élastiquement selon une parallèle à la droite de Hooke (figure 4.1.4.a).

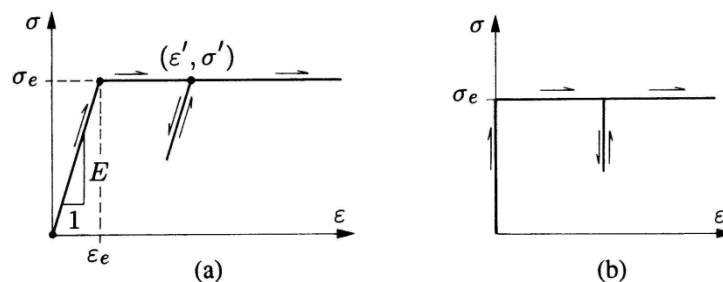


Figure. 1.4 : Modèle élastique parfaitement plastique.

Les équations du modèle sont :

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_e = \sigma_e / E \quad (\text{Hooke})$$

$$\sigma = \sigma_e \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_e \quad (\text{chargement})$$

$$\sigma - \sigma' = E(\varepsilon - \varepsilon') \quad \text{si } \varepsilon < \varepsilon_e \quad (\text{déchargement})$$

Ce modèle est employé dans le calcul plastique des structures.

Si l'on ignore les déformations élastiques, on obtient le modèle rigide parfaitement plastique (figure 4.1.4.b).

1.5. Formulation des lois élastoplastiques

La formulation des modèles élastoplastiques est basée sur quatre notions fondamentales :

1. La partition des déformations élastiques et plastiques : Cette notion postule que lorsqu'un matériau est soumis à une charge, une partie de la déformation est élastique et réversible, tandis qu'une autre partie est plastique et irréversible.
2. L'existence d'une surface de charge dans l'espace des contraintes : Cette notion représente une surface dans l'espace des contraintes qui sépare les états de contrainte où le matériau est en équilibre stable de ceux où il est en équilibre instable.
3. La loi d'écoulement : Cette notion décrit la relation mathématique entre la contrainte et le taux de déformation plastique. La loi d'écoulement peut prendre différentes formes, telles que la loi de plasticité de Von Mises ou la loi de plasticité de Drucker-Prager.
4. Le type d'écrouissage : Cette notion décrit la relation entre la contrainte et la déformation plastique après que le matériau a subi une certaine quantité de déformation plastique. Le type d'écrouissage peut être linéaire ou non linéaire.

I.5.1. Principe de partition des déformations élastiques et plastiques

Les déformations totales peuvent se décomposer en déformations élastiques réversibles et en déformations plastiques irréversibles.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (4.I.3)$$

Avec :

- ε_{ij} le terme du tenseur de déformations totales,
- ε_{ij}^e le terme du tenseur de déformations élastiques,
- ε_{ij}^p le terme du tenseur de déformations plastiques.

I.5.2. Définition de la surface de charge

Dans l'espace des contraintes principales, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il existe une surface de charge à partir de laquelle l'écoulement plastique peut se produire. Cette surface est convexe et s'exprime à travers l'équation scalaire suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (4.I.4)$$

où $F(\sigma_{ij})$ est appelée fonction de charge.

En résumé, trois états de chargement sont possibles :

- $F(\sigma_{ij}) < 0$ correspond à un comportement élastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0$ caractérisent un écoulement plastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0 >$ on ne peut pas avoir cette situation.

Lorsque le point représentatif de l'état de contrainte se situe sur la surface de charge, $F = 0$, deux cas sont possibles :

- la surface de charge n'évolue pas, c'est le cas du modèle élastoplastique parfait,
- la surface évolue au cours du chargement, c'est le cas du modèle élastoplastique avec écrouissage ; la figure 4.1.5 illustre ce second cas.

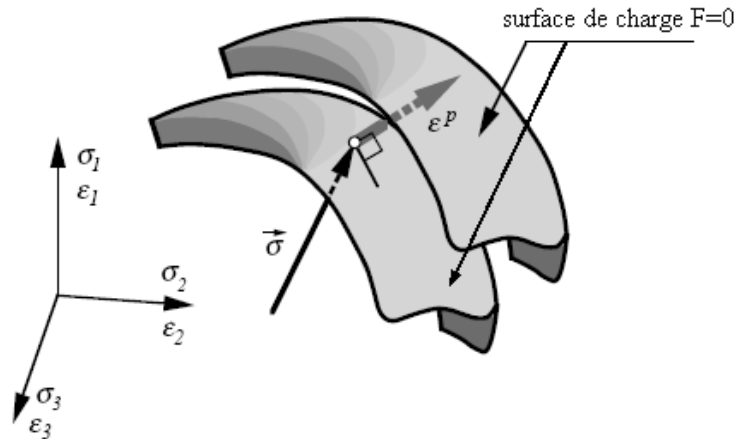


Figure 4.1.5 : Évolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage.

I.5.3. Lois d'écoulement associées

En mécanique des matériaux, la loi d'écoulement associée est une loi d'écoulement plastique qui est définie de telle manière que la surface de charge et la surface représentative du potentiel plastique soient confondues. Cette condition revient à considérer l'identité $F = G_p$, où F est la fonction de flux (relation entre la contrainte et le taux de déformation plastique) et G_p est la fonction de potentiel plastique (relation entre les contraintes et les déformations plastiques).

Les matériaux pour lesquels la loi d'écoulement est dite associée sont dits "standards". C'est le cas des métaux, qui ont une réponse plastique relativement simple et bien comprise. Dans le cas des métaux, la loi d'écoulement associée est souvent représentée par la loi de plasticité de Von Mises, qui est largement utilisée en ingénierie.

En revanche, les sols et les roches ont une réponse plastique plus complexe, avec des surfaces de charge fortement non linéaires, ce qui signifie que leurs lois d'écoulement ne sont pas associées. Pour ces matériaux, des lois d'écoulement non associées, telles que la loi de plasticité de Drucker-Prager, sont utilisées pour modéliser leur comportement plastique.

I.5.4. Lois d'écoulement non associées

Bien que les lois d'écoulement associées soient couramment utilisées pour décrire le comportement plastique des métaux, elles peuvent conduire à des difficultés dans les modèles numériques. En effet, des problèmes de convergence peuvent se produire lorsque la surface de charge est fortement non linéaire, ce qui peut entraîner des instabilités numériques et des erreurs de calcul.

Pour cette raison, les modèles numériques utilisent souvent des lois d'écoulement qui ne sont pas associées à la surface de charge, mais plutôt à une autre surface appelée le potentiel plastique. Dans ce cas, l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire à la surface du potentiel plastique. Ces lois d'écoulement non associées permettent de modéliser plus précisément le comportement plastique des matériaux présentant des surfaces de charge non linéaires (figure 4.I.6)..

L'utilisation de lois d'écoulement non associées est une astuce couramment utilisée en ingénierie pour éviter de violer la théorie de la plasticité et pour améliorer la stabilité numérique des modèles de comportement plastique.

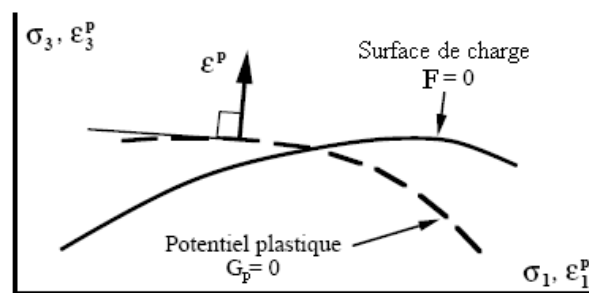


Figure 4.I.6 : Surface de charge et potentiel plastique dans le plan des contraintes.

En effet, pour les lois élastoplastiques considérant un angle de frottement φ , une loi d'écoulement associée induit un angle de dilatance, $\psi = \varphi$, qui s'avère souvent trop élevé pour les géomatériaux.

On a alors recours à des lois non associées. Dans ce cas, la direction du vecteur de déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique, $G_p(\sigma_{ij})$ qui est distincte de celle représentative de la fonction de charge plastique, $F(\sigma_{ij})$. Cela permet de considérer des angles de dilatance, ψ , compris entre 0 et φ , comme représenté sur la figure 4.I.7.

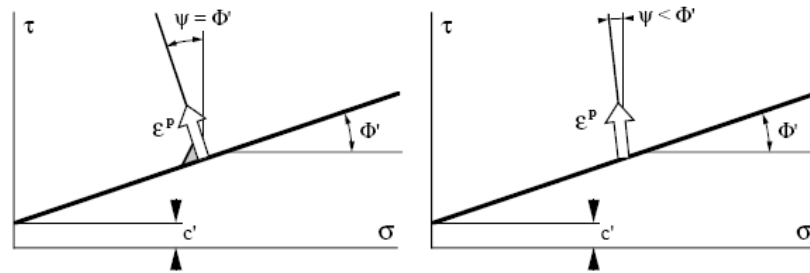


Figure 4.1.7 : Diagrammes traditionnels de Mohr a) Loi associée $\psi = \phi'$
 b) Loi non associée $\psi < \phi'$.

I.5.5. Paramètres d'écrouissage

L'écrouissage est un phénomène qui se produit lorsque le matériau est déformé plastiquement. On observe généralement une augmentation de la limite élastique lors de ce processus, ce qui est appelé écrouissage positif ou durcissement. À l'inverse, l'écrouissage négatif correspond à une diminution de la limite élastique, ou en d'autres termes, à un adoucissement du matériau.

L'écrouissage peut être soit isotrope, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la direction de la déformation, soit cinématique, c'est-à-dire qu'il dépend de la direction de la déformation. Pour qualifier et quantifier l'écrouissage, il est nécessaire d'effectuer des essais de laboratoire de chargement et déchargement, tels que des essais de traction-compression ou de flexion.

Les paramètres d'écrouissage décrivent la relation entre la contrainte et la déformation plastique du matériau après qu'il a subi une certaine quantité de déformation plastique. Les paramètres d'écrouissage peuvent être linéaires ou non linéaires, en fonction de la nature du matériau et de son comportement plastique. Ils sont souvent déterminés à partir de données expérimentales obtenues lors d'essais de laboratoire.

5.1. Écrouissage isotrope

L'écrouissage est dit isotrope, quand l'évolution de la surface de charge n'est gouvernée que par un seul paramètre scalaire, par exemple la déformation plastique cumulée. Ainsi, dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple, la courbe de traction succédant à celle de compression se déduit de cette dernière par une homothétie de rapport (-1) et de centre, le point de contrainte nulle (point A de la figure 4.1.8). Dans le plan déviatoire (plan normale à la trisectrice de l'espace des contraintes principales, d'équation $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$, la surface de charge croît de manière homothétique par rapport au point représentatif d'une contrainte déviatoire nulle (point B de la figure 4.1.8).

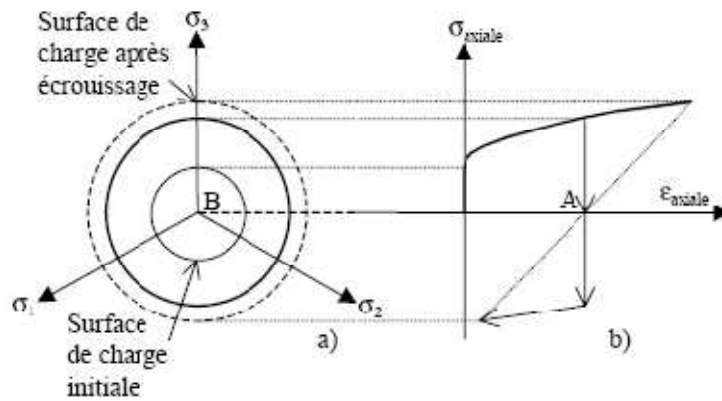


Figure 4.I.8 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \epsilon_{axiale}$ en traction-compression simple.

5.2. Écrouissage cinématique

L'écrouissage isotrope est souvent insuffisant pour décrire le comportement des géomatériaux, qui peuvent présenter des comportements différents en compression et en traction. Dans ces cas, un modèle d'écrouissage anisotrope est nécessaire pour décrire correctement le comportement du matériau.

L'écrouissage cinématique est un type d'écrouissage anisotrope qui est souvent utilisé pour modéliser le comportement des géomatériaux. Il est basé sur l'idée que l'écrouissage dépend de la direction de la déformation plastique. Dans ce modèle, l'écrouissage est linéaire, ce qui signifie que la relation entre la contrainte et la déformation plastique est une fonction linéaire de l'état de déformation plastique précédent. La figure 4.I.9 représente un exemple de schématisation de l'écrouissage cinématique linéaire.

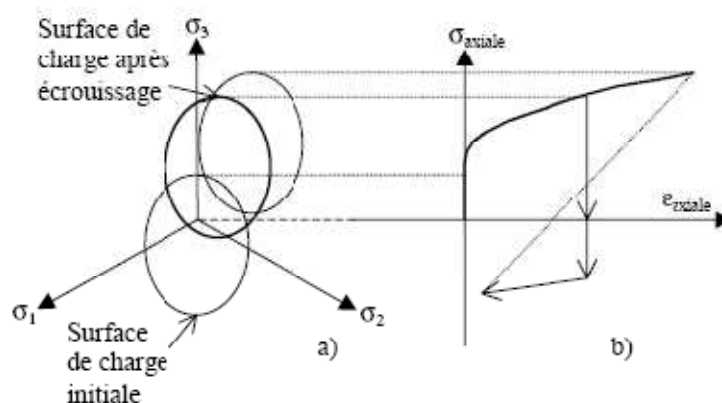


Figure 4.I.9 : Représentation de l'écrouissage cinématique en projection a) dans le plan déviatoire, b) dans le plan $\sigma_{axiale} - \epsilon_{axiale}$ en traction-compression simple.

Le domaine d'élasticité délimité par la surface de charge se déplace par translation dans l'espace des contraintes principales et sans distorsion de la surface de charge initiale. Ainsi, dans le plan $\sigma_{\text{axiale}} - \varepsilon_{\text{axiale}}$ en traction-compression simple, le chemin de contrainte n'est plus homothétique par rapport au point de contrainte nulle.

I.6. Exemples de critères de plasticité

Il existe de nombreux critères de plasticité adaptés à différentes classes de matériaux. Un bon critère doit être cohérent avec les observations expérimentales, être aussi simple que possible, et être défini par un nombre limité de paramètres qui peuvent être facilement identifiés par des essais expérimentaux standard.

I.6.1. Critère de Rankine

Le critère de Rankine est un critère de plasticité qui porte sur les limites de contraintes normales. Ce critère est largement utilisé pour les matériaux fragiles, tels que les céramiques et les verres.

Dans ce critère, la limite élastique est définie par une contrainte normale maximale, qui peut être identifiée à partir d'un essai de traction, et une contrainte normale minimale, qui peut être identifiée à partir d'un essai de compression. La limite élastique est donc déterminée par la contrainte normale la plus faible entre ces deux valeurs.

Le critère de Rankine peut être représenté graphiquement dans le plan de Mohr, comme indiqué dans la figure 4.I.10. Dans ce graphique, les contraintes normales sont représentées sur l'axe horizontal et les contraintes de cisaillement sont représentées sur l'axe vertical. La limite élastique est représentée par une ligne droite qui relie la contrainte normale maximale et la contrainte normale minimale.

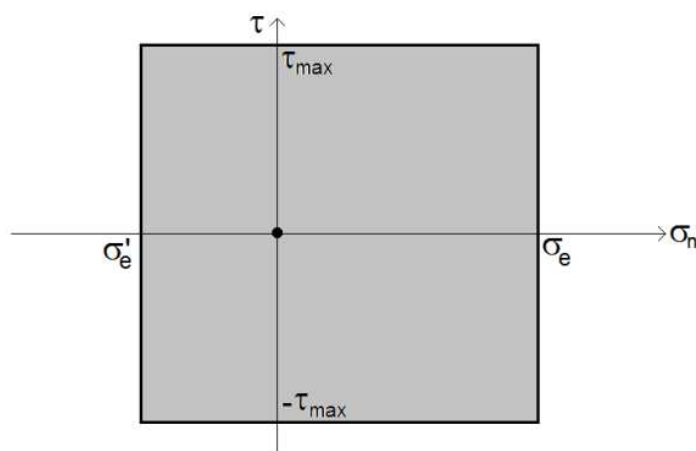


Figure 4.I.10 : Critère de Rankine.

On peut le formaliser mathématiquement par l'expression suivante (par exemple) :

$$f(\bar{\sigma}) = \max\{(\sigma_1 - \sigma_e); (\sigma_e' - \sigma_3)\} \quad (4.1.5)$$

Il apparaît bien que le scalaire $f(\bar{\sigma})$ reste strictement négatif tant que la contrainte principale maximale est strictement inférieure à σ_e et tant que la contrainte principale minimale est strictement supérieure à σ_e' .

Comme on le constate, le simple fait de définir des contraintes maximales de traction et de compression permet de limiter également le cisaillement, puisque le plus grand cercle de Mohr admissible à l'intérieur des deux valeurs σ_e et σ_e' définit une contrainte de cisaillement égale à :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_e - \sigma_e'}{2} \quad (4.1.6)$$

Le critère de Rankine est en général assez imprécis, et il est par exemple très peu probable de trouver un matériau conduisant à la même valeur de τ_{max} que l'équation (4.1.6) si on le soumet à un essai de cisaillement ou de torsion. Le critère de Rankine est donc seulement utilisé dans un cadre mécanique où l'on sait que les matériaux étudiés seront principalement soumis à des sollicitations de traction - compression.

Ce critère est parfois utilisé pour les bétons, car il permet de définir une valeur différente des limites en traction et en compression, ce qui constitue une propriété essentielle de ces matériaux (qui sont environ dix fois plus résistants en compression qu'en traction).

I.6.2. Critère de Tresca

Effectivement, contrairement au critère de Rankine, le critère de Tresca s'intéresse à la valeur maximale de la contrainte de cisaillement, qui peut être obtenue à partir d'un essai de cisaillement, d'un essai de torsion ou d'un essai triaxial de révolution selon le matériau étudié. Ce critère se formalise mathématiquement par :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_e \quad (4.1.7)$$

On reconnaît dans cette expression le terme $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ qui correspond au rayon du grand cercle de Mohr défini par les contraintes principales maximale et minimale, et qui correspond également au cisaillement maximal décrit par ce cercle de Mohr. Graphiquement, le critère de Tresca est représenté par deux lignes horizontales parallèles, comme sur la Fig. (4.1.11).

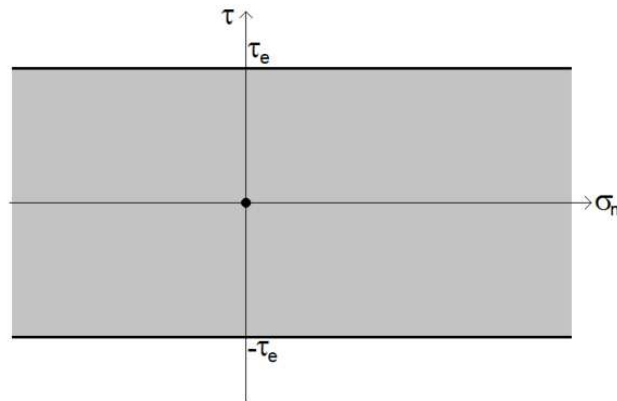


Figure 4.I.11 : Critère de Tresca.

Il apparaît sur la Fig. (4.I.11) que le critère de Tresca délimite un domaine élastique infini selon l'axe horizontal. Un tel matériau ne peut donc pas plastifier par compression hydrostatique ou par traction hydrostatique. Une telle propriété est peu réaliste physiquement. C'est pourquoi on utilise ce critère dans le cas de matériaux soumis à du cisaillement, ou on le combine avec un critère de Rankine convenablement choisi.

Le critère de Tresca est très utilisé en mécanique des sols, car il décrit correctement les limites du comportement élastique des argiles saturées en comportement non-drainé. Dans ce cadre, la valeur maximale de cisaillement τ_e est nommée "cohésion non-drainée" et notée c_u .

I.6.3. Critère de Von Mises

Ce critère suppose que seule la partie déviatorique du tenseur de contrainte joue un rôle dans la plastification du matériau. Il se définit mathématiquement par l'expression suivante :

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - \sigma_e^2 \quad (4.I.8)$$

Comme on le voit, le critère de Von Mises fait intervenir un seul et unique paramètre qui dépend du matériau, mais a en revanche recours aux valeurs des trois contraintes principales et en particulier à la contrainte principale intermédiaire σ_2 . Il est donc impossible de le représenter graphiquement dans le plan de Mohr, et on utilise une représentation 3D, comme dans la Fig. (4.I.12).

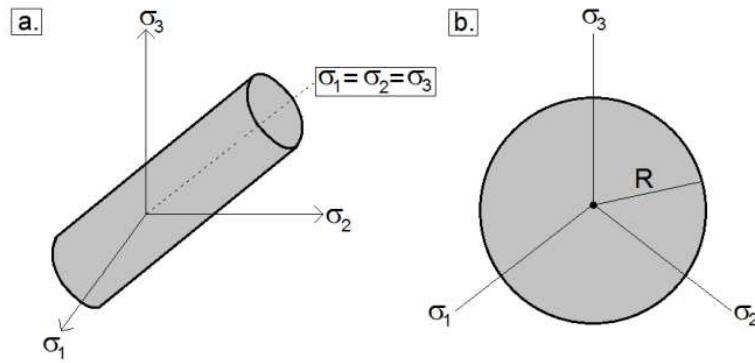


Figure 4.I.12 : Critère de Von Mises : a. Dans le repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ b. En projection selon l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Dans l'espace 3D, le critère de Von Mises définit un domaine élastique de forme cylindrique à section circulaire constante, dont l'axe correspond à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. En projection dans le plan perpendiculaire à cet axe, ce critère définit donc un cercle dont le rayon est donné par :

$$R = \sigma_e \sqrt{2} \quad (4.I.9)$$

Ce critère est très souvent utilisé pour les métaux, et notamment pour les aciers.

I.6.4. Critère de Mohr Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est le critère de plasticité royal de la mécanique des sols. Il dépend de deux paramètres. Le premier est noté φ , s'exprime en degrés, et s'appelle "angle de frottement interne". Le second est noté c , prend les dimensions d'une pression (généralement le kilopascal), et s'appelle "cohésion". Ce critère est défini mathématiquement par :

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 + \sin\varphi) - 2c \cdot \cos\varphi \quad (4.I.10)$$

Puisqu'il ne fait pas intervenir la contrainte principale intermédiaire σ_2 on peut le représenter dans le plan de Mohr, comme dans la Fig. (4.I.13).

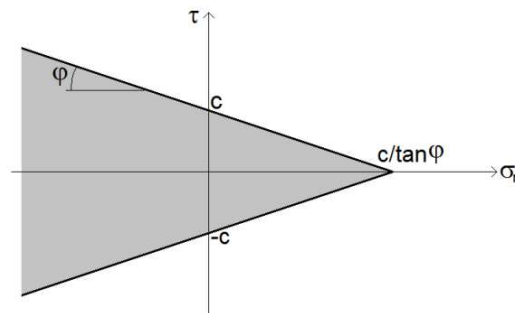


Figure 4.I.13 : Critère de Mohr-Coulomb.

Ce critère permet de bien représenter le comportement des matériaux granulaires, de types sables ou argiles. Dans le cas où la cohésion est nulle, le matériau est dit pulvérulent. C'est le cas par exemple du sable sec. Quand l'angle de frottement est nul, on retrouve le critère de Tresca, qui s'applique avec succès aux argiles en conditions non-drainées.

D'une manière générale, il est nécessaire d'effectuer au moins deux essais triaxiaux de révolution (ou autres essais de cisaillement) pour déterminer la cohésion et l'angle de frottement.

On notera que, dans l'équation (4.I.10) et dans la Fig. (4.I.13), on a utilisé les conventions de signes de la mécanique des milieux continus. Dans le cadre de la mécanique des sols où ce critère est utilisé, on utilise généralement la convention inverse, qui compte comme positive une contrainte de compression et négative une traction. Dans ce cas il faut faire basculer la Fig. (4.I.13) autour de son axe vertical, et il faut également modifier l'équation (4.I.10). Plus de détails sont disponibles dans n'importe quel cours de mécanique des sols.

Partie II: Viscoplasticité

II.1. Introduction

La grande diversité des matériaux réels se traduit par l'existence d'une multitude de lois de comportement et en particulier d'une grande variété de critères et de lois d'évolution aussi bien en élastoplasticité qu'en élastoviscoplasticité. Il est illusoire de vouloir établir une liste exhaustive des modèles, d'autant plus que les chercheurs continuent encore à proposer de nouvelles versions. Aussi ce chapitre sera-t-il consacré à une tâche plus modeste qui consiste à présenter le cadre général d'écriture, en illustrant l'exposé par les lois les plus classiques, et en se limitant aux transformations infinitésimales (petits déplacements et petits gradients de déplacements). On considérera d'abord les modèles pour lesquels la surface de charge n'évolue pas (elle pourra éventuellement être de rayon nul en viscoplasticité), donc qui ne présentent pas d'écrouissage. L'introduction de l'écrouissage se fera au chapitre suivant. Pour le moment, on résume les concepts généraux qui ont été introduits dans les chapitres précédents.

II.2. Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations $\bar{\varepsilon}$ est décomposé en trois parties :

- Une partie élastique $\bar{\varepsilon}^e$ fonction de la variation du tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$ entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence, $\bar{\sigma}_I$ dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire :

$$\bar{\varepsilon}^e = \bar{\Lambda}^{-1} : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_I) \quad (4.II.1)$$

- Une partie de dilatation thermique $\bar{\varepsilon}^{th}$ fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_I . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur $\bar{\alpha}$, qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes. En confondant température initiale et température de référence :

$$\bar{\varepsilon}^{th} = (T - T_I) \bar{\alpha} \quad (4.II.2)$$

- Une partie non élastique $\bar{\varepsilon}^{ne}$, elle même décomposée en une partie plastique $\bar{\varepsilon}^p$ et une partie viscoplastique $\bar{\varepsilon}^{vp}$, (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité). D'où :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\Lambda}^{-1} : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_I) + \bar{\varepsilon}^{th} + \bar{\varepsilon}^p + \bar{\varepsilon}^{vp} \quad (4.II.3)$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu

conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée $\bar{\varepsilon}^p$) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques $\bar{\varepsilon}^{vp}$). On a laissé de côté ici les déformations liées à des évolutions de microstructures tels que les changements de phase.

II.3. Lois d'écoulement

Ce sont les règles qui vont permettre de définir la vitesse de déformation plastique ou viscoplastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. L'étude des modèles rhéologiques a montré la nature des équations mises en jeu pour ce qui concerne l'intensité de la vitesse d'écoulement. Celle-ci est liée à la vitesse de contrainte ou de déformation totale pour un modèle plastique, et à l'état actuel de contrainte et des variables internes pour un modèle viscoplastique. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la direction de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

Les lois d'écrouissage, définissant l'évolution du domaine d'élasticité, complètent le modèle pour le cas d'un matériau dont la résistance à la déformation évolue avec celle-ci.

II.4. Formulation des lois de comportement viscoplastiques

II.4.1 Ecriture générale

Pour définir un comportement viscoplastique, il faut disposer d'un modèle qui donne l'intensité de la vitesse de déformation viscoplastique (un scalaire) et sa direction (un tenseur du second ordre symétrique en petites déformations). Les deux chapitres précédents fournissent les briques nécessaires.

Ainsi, la généralisation de l'écriture de la vitesse de déformation viscoplastique est-elle immédiate. On conserve la notion de fonction de viscosité ϕ , qui va continuer de porter sur la valeur de la fonction définissant le domaine d'élasticité, f . Dans la mesure où on dispose maintenant d'une expression valide sous chargement multiaxial pour f , on définira l'intensité de l'écoulement, ou vitesse de déformation viscoplastique équivalente, à l'aide d'une fonction ϕ ($\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$), par:

$$\dot{\nu} = \phi(\langle f \rangle) \quad (4.II.4)$$

Dans le cas général, la direction d'écoulement sera notée \bar{N} . Il y a deux possibilités concernant la définition de la direction d'écoulement. Elle peut n'être pas liée à f , auquel cas on introduit généralement une fonction g , qui porte sur les mêmes variables que f , à

savoir le tenseur de contraintes et les variables d'écoulement ($g: (\bar{\sigma}, A_I) \rightarrow g: (\bar{\sigma}, A_I)$). On écrit:

$$\bar{\varepsilon}^{vp} = \dot{\nu} \bar{N} = \dot{\nu} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (4.II.5)$$

La seconde possibilité, qui constitue un cas particulier important, consiste à utiliser le critère f pour définir la direction d'écoulement, si bien que f et g sont identiques, et que la direction d'écoulement est $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$. En appelant Ω la primitive de ϕ , on peut alors écrire :

$$\bar{\varepsilon}^{vp} = \phi \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \quad (4.II.6)$$

Dans un tel modèle, dit modèle *standard*, ou modèle de viscoplasticité *associée*, la direction d'écoulement est fournie par la normale à la surface de charge. La fonction Ω constitue un potentiel viscoplastique, puisque sa donnée va suffire à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction.

II.5. Viscoplasticité uniaxiale

II.5.1 Exemple de modèle rhéologique

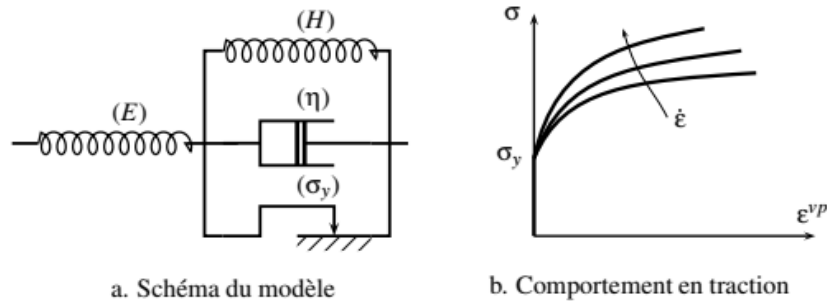


Figure 4.II.1 : Modèle de Bingham généralisé.

La figure 4.II.1a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer très simplement d'un modèle ayant un comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. On retrouverait l'original de ce modèle en enlevant le ressort en série ($E \rightarrow \infty$, pas d'élasticité instantanée, on obtient alors un modèle *rigide viscoplastique*), et en supprimant le ressort en parallèle, ($H = 0$, pas d'écoulement). La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique E , la déformation viscoplastique, que l'on nommera ε^{vp} , aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\varepsilon^{vp} \quad \sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp} \quad \sigma_p \leq \sigma_y \quad (4.II.7)$$

où X , σ_v et σ_p sont respectivement les contraintes dans le ressort de caractéristique H , dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p \quad (4.II.8)$$

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d'élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque $|\sigma_p| = \sigma_y$. On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive ou négative :

$$(a) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} = 0 \quad |\sigma_p| = |\sigma - H\varepsilon^{vp}| \leq \sigma_y \quad (4.II.9)$$

$$(b) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} > 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = \sigma_y \quad (4.II.10)$$

$$(c) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} < 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = -\sigma_y \quad (4.II.11)$$

Le cas (a) correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ($|\sigma_p| < \sigma_y$) ou à un état de décharge élastique ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $\dot{\sigma}_p \leq 0$), les deux autres cas à de l'écoulement ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $\dot{\sigma}_p = 0$). En posant $\langle x \rangle = \max(x, 0)$, les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\eta\dot{\varepsilon}^{vp} = \langle |\sigma - X| - \sigma_y \rangle \text{signe}(\sigma - X) \quad (4.II.12)$$

ou encore :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - X) \quad \text{avec} \quad f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (4.II.13)$$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone $f > 0$, et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation.

Ceci explique qu'en figure 4.II.1b la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte visqueuse σ_v sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité (on peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante). Par ailleurs, il est possible de simuler des expériences de fluage ou de relaxation.

En fluage (figure 4.II.2), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à $\sigma_0 > \sigma_y$) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est une exponentielle en fonction du temps t , avec un temps caractéristique $\tau_f = \frac{\eta}{H}$ (figure 4.II.2a).

$$\varepsilon^{vp} = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (4.II.14)$$

La figure 4.II.2b montre, dans le plan contrainte – déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne X et du seuil $X + \sigma_y$. Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée σ_0 , la vitesse de déformation viscoplastique s’annule.

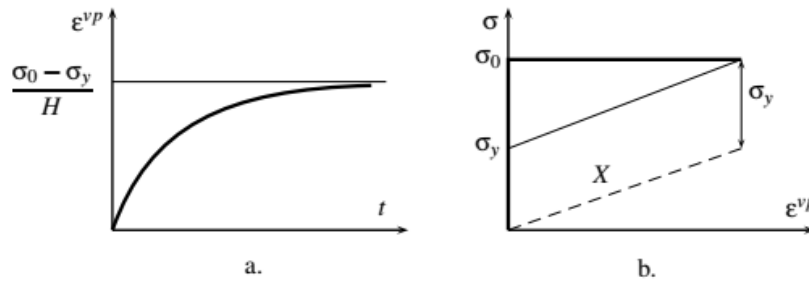


Figure 4.II.2 : Fluage avec le modèle de Bingham.

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à ε_0 tel que $E\varepsilon_0 > \sigma_y$) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation $\tau_r = \eta / (E + H)$:

$$\sigma = \sigma_y \frac{E}{E+H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) + \frac{E\varepsilon_0}{E+H} \left(H + E \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) \quad (4.II.15)$$

La figure 4.II.3a montre le trajet parcouru par le point représentatif de l’état de contrainte au cours de la relaxation (pente $-E$ puisque $\dot{\varepsilon}^{vp} + \frac{\dot{\sigma}}{E} = 0$). La figure 4.II.3b représente quant à elle le trajet caractéristique au cours d’une expérience d’effacement, ou encore de *recouvrance*. En fonction du niveau de chargement initial, on peut rencontrer après décharge une vitesse d’écoulement négative ou nulle, mais en aucun cas on ne pourra ramener la déformation viscoplastique à zéro, sauf dans le cas particulier où la contrainte σ_y est nulle. Il n’y a alors plus de seuil initial, et on conçoit bien qu’il n’est plus nécessaire dans ce cas de définir une décomposition de la déformation : on retrouve d’ailleurs le modèle de Kelvin-Voigt, donc une approche viscoélastique.

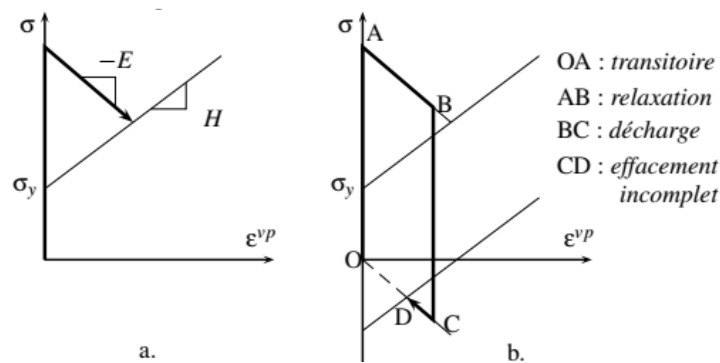


Figure 4.II.3 : Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée.

II.5.2 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction f au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme plus générale, en introduisant une fonction de viscosité, ϕ , qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \phi(f) \quad (4.II.16)$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'écouissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple :

$$\sigma = \sigma_y + X + R + \phi^{-1}(\dot{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_y + X + R + \sigma_v \quad (4.II.17)$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité (au travers de X et R), mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse σ_v . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que $\phi(0) = 0$, et on suppose également que ϕ est une fonction monotone croissante. Dans le cas où σ_v s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, et plus la contrainte atteinte pour une déformation donnée sera élevée.

Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il y a donc deux possibilités pour introduire de l'écouissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type X et R , et on peut également jouer sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à écouissage additif ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à écouissage multiplicatif ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine d'élasticité se réduit à l'origine ($\sigma = 0$), et qui ne possède pas d'écouissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de Norton (avec deux coefficients matériau K et n) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K}\right)^n \text{signe}(\sigma) \quad (4.II.18)$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans écouissage, ou réintroduire X et R aux côtés de σ_y , ce qui conduit à un modèle à écouissage additif.

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad (4.II.19)$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - X) \quad (4.II.20)$$

Il y a également une grande liberté pour choisir d'autres formes que la fonction puissance, ainsi un sinus hyperbolique dans le modèle de Sellars et Tegart (loi sans écrouissage, coefficients A et K) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = A \sinh\left(\frac{|\sigma|}{K}\right) \text{signe}(\sigma) \quad (4.II.21)$$

Pour obtenir des lois à écrouissage multiplicatif, il faut admettre que la fonction ϕ ne dépend pas uniquement de f , ainsi la loi de Lemaitre (coefficients matériau K , m et n positifs) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K}\right)^n p^{-n/m} \text{signe}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \dot{p} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| \quad (4.II.22)$$

Bibliographie

- [1] J. Lemaitre, J.L. Chaboche. Mécanique des solides déformables et endommageables. Ed. Dunod.
- [2] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. Mécanique des matériaux solides. Ed. Dunod.
- [3] D. François, A. Pineau, A. Zaoui. Elasticité et plasticité. Ed. Lavoisier.
- [4] S. Timoshenko, J.M. Goodier. Théorie de l'élasticité. Ed. Librairie Polytechnique Ch. Béranger.
- [5] J. Salençon. Elastoplasticité. Ed. Ecole polytechnique, France.
- [6] B. Halphen, J. Salençon. Elasto-plasticité. Ed. Presses des ponts, France.
- [7] V.A. Lubarda. Elastoplasticity theory. Ed. CRC Press.
- [8] R. Richards Jr. Principles of solid mechanics. Ed. CRC Press.
- [9] Robert J. Asaro, Vlado A. Lubarda. Mechanics of solid and materials. Ed. Cambridge University Press.