Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié de travaux dirigés

Première année socle commun

Domaine : Sciences et Technologie

Module : Mathématiques 2

Intitulé

Cours et exercices corrigés

Dr : ZENKOUFI Lilia

Année universitaire

2021/2022

Table des matières

PREFACE

Ce document correspond au programme du module : Mathématiques 2, qui s'adresse aux étudiants de la première année socle commun, domaine Science et Technologie.

Son objectif est de mettre à la disposition du lecteur un document de travail permettant de métriser les notions de mathématiques exposées.

Il se compose de cinq chapitres. Chaque chapitre est subdivisé en un rappel de cours, suivi par une série d'exercices résolus, permettant ainsi à l'étudiant de tester son assimilation du cours et de contrôler ses connaissances.

- Les ouvrages traitant de ce contenu sont nombreux et il est vivement conseillé de les consulter.

- Je serai attentive à toute suggestion ou critique susceptible d'améliorer le contenu de ce document.

Chapitre 1

Matrices et déterminants

1.1 Matrices (Définition, opération)

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et m deux entiers naturels non nuls.

1.1.1 Définitions

• Une matrice A de type (m, n) ou m lignes et n colonnes est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{k}$.

• Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.

• Le coefficient situé à la $i - ème$ ligne et à la $j - ème$ colonne est noté a_{ij}.

• Un tel tableau est représenté de la manière suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{i,} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ ou } \ A = (a_{ij})_{m,n}.$$

On dit que la matrice A est de taille $m \times n$ (lire : "m croix n") (respecter l'ordre de lecture).

Exemple 1.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

est une matrice 2×3 *avec, par exemple,* $a_{11} = 1$ *et* $a_{23} = 7$.

• On note $M_{mn}(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$.

$M_n(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$.

• Les éléments de $M_{mn}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.

• **Deux matrices sont égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.

1.1.2 Matrices particulières

1− **Les matrices colonnes,** sont les matrices à une colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, donc de taille $m \times 1$. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

2− **Les matrices lignes,** sont les matrices à une ligne $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$, donc de taille $1 \times n$. Par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

3− **La matrice nulle,** est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note : 0_{mn} si elle a m lignes et n colonnes, 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4− **Les matrices carrées,** sont les matrices dont les nombres de lignes et de colonnes sont égaux. Ce nombre de lignes et de colonnes s'appelle **l'ordre** de la matrice. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c'est une matrice d'ordre 3.

Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent **les coefficients diagonaux**. Exemple : a_{11}, a_{22}, a_{33}....

5$-$ **Les matrices triangulaires inférieures,** sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j > i$) sont nuls. Exemple : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

6$-$ **Les matrices triangulaires supérieures,** sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j < i$) sont nuls. Exemple : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

7$-$ **Les matrices diagonales,** sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients non nuls sont donc, ceux de la diagonale. Exemple : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

8$-$ **La matrice identité,** est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note : I_n la matrice identité d'ordre n. Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

9$-$ Une matrice carrée d'ordre n telle que $a_{ii} = a \in \mathbb{k}$, $1 \leq i \leq n$ et $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ est dite **matrice scalaire.** Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.3 Opérations sur les matrices

Addition des matrices

Somme de deux matrices : Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ deux matrices ayant la même taille $m \times n$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 1.2 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, *alors*

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1 *Soient A, B et C trois matrices de $M_{mn}(\Bbbk)$.*

- *L'addition est* ***associative :*** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- *La matrice nulle à m lignes et n colonnes est un élément neutre pour l'addition :* $A + 0 = A$.
- *Toute matrice A admet* ***un symétrique*** *ou* ***"opposée"*** $(-A)$.

En posant $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$, *on a* $A + (-A) = 0$.

- *L'addition est* ***commutative :*** $A + B = B + A$.

$*$ On note $A - B$ la somme $A + (-B)$.

Produit d'une matrice par un élément de $\Bbbk$

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

Exemple 1.3 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = 2$, *alors* $\lambda A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2 *Soit λ, μ des éléments de $\Bbbk$, A et B des matrices de $M_{mn}(\Bbbk)$. Alors,*

- $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.

- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
- $1A = A$.

Produit de deux matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient $A = (a_{ij})_{m,n}$ et $B = (b_{ij})_{n,p}$. Le produit de A et B est une matrice de type (m,p).

$A \times B = (c_{ij})_{m,p}$ tel que $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Exemple 1.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$(\textit{le nombre de colonnes de } A = 3) = (\textit{le nombre delignes de } B = 3)$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2\times 4 + 1\times 1 + 4\times 0 & 2\times 5 + 1\times 2 + 4\times 4 \\ 3\times 4 + 0\times 1 + 5\times 0 & 3\times 5 + 0\times 2 + 5\times 4 \\ 1\times 4 + 7\times 1 + 6\times 0 & 1\times 5 + 7\times 2 + 6\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 28 \\ 12 & 35 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1 ***Pièges à éviter :***

1. *Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.*

<u>$En\ effet$</u>, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 1.5 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ *mais,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. $AB = 0$ *n'implique pas* $A = 0$ *ou* $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 1.6 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Soient $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$.

• **Associativité.** Soit $A \in M_{mn}(\Bbbk)$, $B \in M_{np}(\Bbbk)$ et $C \in M_{pq}(\Bbbk)$, alors

$$(AB)\,C = A\,(BC)\,.$$

• **Rôle des matrices identité**. Si $A \in M_{mn}(\Bbbk)$:

$$AI_n = A \quad et \quad I_m A = A.$$

• **Distributivité par rapport à l'addition**.

Si A et B sont deux matrices de $M_{mn}(\Bbbk)$ et $C \in M_{np}(\Bbbk)$, alors

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

.

Si $A \in M_{mn}(\Bbbk)$ et si B et $C \in M_{np}(\Bbbk)$, alors

$$A\,(B + C) = AB + AC.$$

• **Compatibilité avec le produit externe**. Si $A \in M_{mn}(\Bbbk)$ et si $B \in M_{np}(\Bbbk)$,

$\lambda \in \mathbb{k}$, alors

$$\lambda (AB) = (\lambda A) B = A (\lambda B) .$$

Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n (\mathbb{k})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$, la multiplication des matrices est une opération interne :

$$\text{Si} \quad A,\ B \in M_n (\mathbb{k}) \quad \text{alors,} \qquad AB \in M_n (\mathbb{k}) .$$

En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même, on note :

$A^2 = A \times A,\ \ A^3 = A \times A \times A.$

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition 1.1 *Pour tout $A \in M_n (\mathbb{k})$, on définit les puissances successives de A par*

$A^0 = I$ *et*

$A^{p+1} = A^p \times A,$ *pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{p\ facteurs}.$

Exemple 1.7 *On cherche à calculer A^p avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

* *On calcule A^2, A^3 et A^3 et on obtient :*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est :

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

Démontrons ce résultat par récurrence :

Il est vrai pour $p = 0$: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ *(on trouve l'identité).*

On le suppose vrai pour un entier p *et on va le démontrer pour* $p+1$.

On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Proposition 1.3 (*Calcul de* $(A+B)^p$ *lorsque* $AB = BA$.)

Soient A *et* B *deux éléments de* $M_n(\mathbb{k})$ *qui* ***commutent,*** *c'est-à-dire :*

tels que $AB = BA$. *Alors, pour tout entier* $p \geq 0$, *on a la formule*

$$(A+B)^p = \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} A^{p-k} B^k,$$

où $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ *désigne le coefficient du binôme.*

* La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a+b)^p$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On pose* $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice N *est nilpotente d'indice* k *(c'est-à-dire il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $N^k = 0$*) comme le montrent les calculs suivants :*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad N^4 = 0.$$

(N *est nilpotente d'indice* 4)

Comme on a, $A = N + I$ *et les matrice* N *et* I *commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer* ***la formule du binôme de Newton****.*

Comme $I^k = I$ *pour tout* k *et* $N^k = 0$ *pour* $k \geq 4$, *on obtient*

$A^p = (N+I)^p = \sum\limits_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} N^p I^{p-k} = I + pN + \frac{p(p-1)}{2!} N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$

D'où,

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p\left(p^2 - p + 1\right) \\ 0 & 1 & 2p & p\left(3p - 2\right) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transposée d'une matrice

Définition 1.2 *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(\mathbb{k})$, *on appelle* ***transposée*** *de* A *et on note* ${}^tA$ *la matrice à* m *lignes et* n *colonnes. Ainsi,*

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}.$$

Proposition 1.4 *Soit* A *et* B *deux matrices de* $M_{mn}(\mathbb{k})$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$. *Alors,*

- ${}^t\left({}^tA\right) = A.$
- ${}^t\left(\lambda A\right) = \lambda {}^tA.$
- ${}^t\left(A + B\right) = {}^tA + {}^tB.$
- ${}^t\left(AB\right) = {}^tB {}^tA.$

Trace d'une matrice

La trace de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les **éléments diagonaux** de A. Autrement dit,

$$trA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Exemple 1.9 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, *alors* $trA = 1 + 2 + (-10) = -7.$

Théorème 1.1 *Soient* A *et* B *deux matrices* $n \times n$. *Alors :*

- $tr\left(A + B\right) = trA + trB.$

• $tr\,(\alpha A) = \alpha trA$ *pour tout* $\alpha \in \Bbbk$.

• $tr\,({}^tA) = trA$.

• $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

Définition 1.3

• *Une matrice A de taille $n \times n$ est **symétrique** si, elle est égale à sa transposée c'est-à-dire si :* ${}^tA = A$.

• *Une matrice A de taille $n \times n$ est **antisymétrique** si :* ${}^tA = -A$.

Inverse d'une matrice

Définition 1.4 (*Matrice inverse*)

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que :

$$AB = I \quad et \quad BA = I,$$

*on dit que A est **inversible**.*

** On appelle B l'**inverse de** A et on la note A^{-1}.*

Quand A est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{p\ facteurs}.$$

• L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\Bbbk)$ est noté $GL_n(\Bbbk)$.

Exemple 1.10 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *à coefficients dans* $\Bbbk$, *telle que* $AB = I$ *et* $BA = I$.

Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}.$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$, dont la vérification est laissée au lecteur.

La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Proposition 1.5

- *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*
- *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :*

$(A^{-1})^{-1} = A$.

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}, \ \ \lambda \in \mathbb{k}^*$.

${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

- *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

• *Soient A, B et C trois matrices de $M_n(\mathbb{k})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

<u>**Matrices** 2×2</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Déterminant d'une matrice

1) Si $A = (a_{11}) = a_{11}$.

Le déternimant de A est un nombre réel ou complexe noté $\det(A) = a_{11}$.

2) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

En développement par rapport à la première colonne. Lle déternimant de A est un nombre réel ou complexe noté :

$$\det(A)\, ou \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Le déternimant de A est :

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exemple 1.11 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix},$$

$$= 2 \times (-35) - 1 \times 13 + 4 \times 21 = 1.$$

4) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k}),\ n \geq 2.$

$$\det(A) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}).$$

On note $M_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{k})$ la matrice obtenue en retirant la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne à la matrice A.

Propriétés.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad A, B \in M_n(\mathbb{k}).$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \quad \det(A) \neq 0.$

• Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ sont nuls alors, $\det(A) = 0.$

• Si tous les éléments d'une ligne (colonne) du déterminant d'une matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ sont multiplié par un scalaire k, alors le déterminant est multiplié par k.

• Si B est obtenue à partir de $A \in M_n(\Bbbk)$ en échangeant deux de ces lignes (colonnes), alors : $\det(A) = -\det(B)$.

• Si deux lignes (colonnes) de $A \in M_n(\Bbbk)$ sont identiques, alors $\det(A) = 0$.

Comatrice d'une matrice $(n \times n)$.

Comatrice de la matrice $A = (a_{ij})_{n,n}$, notée $com(A)$ et

$$com(A) = \left((-1)^{i+j}\det(M_{ij})\right)_{n,n},$$

tel que $M_{ij} \in M_{n-1}(\Bbbk)$ la matrice obtenue en retirant la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne à la matrice A.

Exemple 1.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, *alors*

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -6 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Inverse d'une matrice $(n \times n)$

L'inverse de la matrice A notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(com(A))^t.$$

Remarque 1.2 *A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0.$

Exemple 1.13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -6 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ *et*

$$com\,(A)^t = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 4 \\ -24 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{array} \right|, \ (\textbf{\textit{règle de Sarrus}})$$

$\det A = 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 2 \times 0 + 1 \times 4 \times 2 - 1 \times 0 \times 0 - 1 \times 2 \times 2 - 2 \times 4 \times 6$

$\det A = -44.$

Donc, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{-4}{-44} & \frac{-6}{-44} & \frac{4}{-44} \\ \frac{-24}{-44} & \frac{6}{-44} & \frac{2}{-44} \\ \frac{8}{-44} & \frac{-2}{-44} & \frac{-8}{-44} \end{pmatrix},$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{22} & \frac{-1}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{-3}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Matrices semblables

Définition 1.5 *Soient A et B deux matrices de $M_n(\Bbbk)$. On dit que la matrice B est **semblable** à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\Bbbk)$ telle que*

$$B = P^{-1}AP.$$

1.2 Matrice associée à une application linéaire

1.2.1 Applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire ($f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$), si $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Définition 1.6 *Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une expression qui transforme un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en un vecteur $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ de $\mathbb{R}^m$, où chaque composante z_i est donnée par une combinaison linéaire des coordonnées x_i. C'est-à-dire qu'il existe des constantes a_{ij} telles que :*

$$f : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto Z = \begin{pmatrix} z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ z_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ z_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \\ \vdots \\ z_n = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Matrice associée

Une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est uniquement déterminée par un tableau A à m lignes et colonnes de coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où a_{ij} est l'élément de A situé sur la $i - ème$ ligne et la $j - ème$ coonne de A.

Définition 1.7 *A s'appelle la matrice de l'application linéaire f , et on écrit $A = M_f$. (La matrice associée a l'application f.)*

On remarque que

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \\ &= AX, \quad X \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Exemple 1.14 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ x - y + 4z \\ 7x - y + z \end{pmatrix}.$$

La matrice associée a l'application f est

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ une matrice donnée.

L'application linéaire associée à la matrice A est définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1.15 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'application linéaire associée à la matrice A est

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}.$$

C-à-d :

$$f(x,y,z) = (2x+3y+z, x-y+4z, 7x-z).$$

1.4 Changement de base, matrice de passage

1.4.1 Espaces vectoriels

Définition 1.8 *On dit que l'ensemble non vide E, est un espace vectoriel sur $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou $\Bbbk -$ espace vectoriel si E est muni des deux lois de composition :*

- *Loi de composition interne "addition", vérifiant :*

$\forall (x,y,z) \in E^3$, *on a :* $(x+y)+z = x+(y+z)$.

$\forall (x,y) \in E^2$, *on a :* $x+y = y+x$.

$\exists 0_E \in E$ *tel que* $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$. (*avec* 0_E *élément neutre*).

$\forall x \in E$, $\exists -x \in E \setminus x+(-x) = 0_E$. ($-x$ *élément symétrique*).

- *Loi de composition externe "multiplication par un scalaire", vérifiant :*

1) $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk$, *on a :*

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$.

2) $\exists 1_E \in E$ *tel que* $\forall x \in E$, *on a :* $1_E x = x$.

Les éléments de E sont appelés "**vecteurs**", les éléments de $\Bbbk$ sont appelés "**scalaires**".

1.4.2 Base d'un espace vectoriel

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E est dite libre ou les vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont dits linéairement indépendants si et seulement si : $\forall \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n \in \Bbbk$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E est dite **génératrice** de E si pour tout vecteur $X \in E$ on peut trouver $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n \in \Bbbk$ tels que

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Définition 1.9 *On appelle base d'un espace vectoriel , toute famille* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *libre et génératrice de* E.

Définition 1.10 *Soit* E *un* $\Bbbk -$ *espace vectoriel, la dimension de* E *est le cardinal commun à toutes ses bases. Ce nombre est noté :* $\dim E$ *(lire : dimension de* E*).*

Exemple 1.16 *Soit* $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

En effet :

1) B *est libre*

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$,

$\alpha (1, 0, 0) + \beta (0, 1, 0) + \gamma (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$\Longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

2) B *est une génératrice de* $\mathbb{R}^3$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$(x, y, z) = \alpha (1, 0, 0) + \beta (0, 1, 0) + \gamma (0, 0, 1) = (\alpha, \beta, \gamma)$, *donc*

$\exists (\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$.

Ainsi, $\dim B = 3.$

1.4.3 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel et $B_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$ deux bases de E.

On écrit les vecteurs de la base B_2 dans la base B_1 :

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i \ , \quad j = \overline{1, n}$$

ou, la matrice de passage P de B_1 à B_2 est la matrice carée (n, n) :

$$P = (p_{ij})_{n,n}$$

Exemple 1.17 *Soit* $B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *et* $B_1 = \{(1,4,2), (4,1,0), (6,0,0)\}$ *deux bases de* $\mathbb{R}^3$.

$(1,4,2) = (1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)$,

$(4,1,0) = 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,

$(6,0,0) = 6(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$.

La matrice de passage P *de* B_1 *à* B_2 *est la matrice carée* $(3,3)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.18 *Soit* f *l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - 2y + 3z) .$$

Soit, $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$,

$B' = (w_1, w_2) = \{(1,0), (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1) *La matrice de f dans les bases B et B', $M(f, B, B')$.*

On a :

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = (1,0) + (0,1) = w_1 + w_2.$$

La première colonne de la matrice $M(f, B, B')$ est donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = w_1 - 2w_2.$$

La deuxième colonne de la matrice $M(f, B, B')$ est donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Enfin

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -w_1 + 3w_2.$$

La troisième colonne de la matrice $M(f, B, B')$ est donc, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$M(f, B, B') = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle f(e_1) & \scriptstyle f(e_2) & \scriptstyle f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) *On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée.*

Quelle est la matrice de f dans les nouvelles bases $M(f, B_0, B_0')$?

Soient les vecteurs :

$$\epsilon_1 = (1,1,0), \epsilon_2 = (1,0,1), \epsilon_3 = (0,1,1)$$

$$\varphi_1 = (1,0), \varphi_2 = (1,1).$$

On montre facilement que :

$B_0 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$,

et $B_0' = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

- Quelle est la matrice de f *dans les bases* B_0 *et* B_0' *?*

On a :

$$f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\varphi_1 - \varphi_2.$$

$$f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\varphi_1 + 4\varphi_2.$$

$$f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\varphi_1 + \varphi_2.$$

Donc,

$$M(f, B_0, B_0') = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

** Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.*

1.4.4 Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel contenant tous ces vecteurs.

Définition 1.11 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel et soit* $\{v_1, ..., v_p\}$ *une famille finie de vecteurs de* E. *Le rang de la famille* $\{v_1, ..., v_p\}$, *"noté* rg*" est la dimension du sous-espace vectoriel* $Vect(v_1, ..., v_p)$ *engendré par les vecteurs* $v_1, ..., v_p$. *Autrement dit :*

$$rg(v_1, ..., v_p) = \dim Vect(v_1, ..., v_p).$$

- Si E est de dimension finie alors, $rg(v_1, ..., v_p) \leq \dim E$
- Le rang d'une famille vaut 0 si et seulement si tous les vecteurs sont nuls.

Exemple 1.19 *Soient* $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (-1,1,0,1)$.

Quel est le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ *dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^4$ *?*

- v_1, v_2, v_3 *sont des vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *donc*

$$rg\,(v_1, v_2, v_3) \leq 4.$$

Mais comme il n'y a que 3 *vecteurs alors,*

$$rg\,(v_1, v_2, v_3) \leq 3.$$

- *Il reste donc à déterminer si le rang vaut* 1, 2 *ou* 3*. On cherche si la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est libre ou liée en résolvant le système linéaire :*

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0, 0, 0)\,, \ \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}.$

On trouve : que la famille est donc liée.

Ainsi $Vect\,(v_1, v_2, v_3) = Vect\,(v_1, v_2)\,.$

Il est clair que v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants, donc :*

$$rg\,(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect\,(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect\,(v_1, v_2) = 2.$$

1.4.5 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice associée

Définition 1.12 *Soit* $A \in M_{nm}\,(\mathbb{R})\,,$ *on appelle* ***rang*** *de la matrice* A*, on note* $rg(A)$ *le nombre de vecteurs colonnes de* A *linéairement indépendantes.*

Exemple 1.20 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, *Calculer le rang de la matrice* A*.*

Comme,

$$\det A = -44 \neq 0,$$

alors : les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendantes et

$$rg(A) = 3.$$

- *Si* $\det A = 0$, *alors :* $rg(A) \leq 2$.

Théorème 1.2 *Soient E et F deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels de dimenssion finie, B une base de E, B' une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$rg(f) = rg(M(f, B, B')).$$

Exemple 1.21 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :*

$$f(x, y, z) = (3x - 4y + 2z, 2x - 3y - z).$$

Quel est le rang de f ?

Si on note, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

alors (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit de trouver le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, où

$$v_1 = f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui revient au même, trouver le rang de la matrice : $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est donc liée.* (*la vérification est laissée au lecteur*)

Ainsi,

$$rg(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect(v_1, v_2) \leq 2,$$

les vecteurs v_1, v_2, v_3 *ne sont pas tous nuls, donc :* $rg(v_1, v_2, v_3) \geq 1$.

Il est facile de voir que les vecteurs v_1, v_2 *sont linéairement indépendants, donc le rang est* 2.

$$rgf = rg(f(e_1), f(e_2), f(e_2)) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = \dim ect(v_1, v_2) = 2 = rg(A).$$

• ***Remarque :*** *il est encore plus facile de voir que le rang de la matrice* A *est* 2, *en remarquant que ses deux seules lignes ne sont pas colinéaires*

(*autrement dit que ses deux vecteurs lignes sont linéairement indépendants*)

Théorème du rang

Le théorème du rang est un résultat fondamental dans la théorie des applications linéaires en dimension finie. On se place toujours dans la même situation :

$f : E \longrightarrow F$, est une application linéaire entre deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels.

E est un espace vectoriel de dimension finie.

• **Le noyau** de f est

$$\ker f = \{x \in E \setminus \ f(x) = 0_F\},$$

c'est un sous-espace vectoriel de E, donc $\ker f$ est de dimension finie.

• **L'image** de f est

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \setminus \ x \in E\},$$

c'est un sous-espace vectoriel de F et est de dimension finie.

•

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f.$$

Théorème 1.3 (*Théorème du rang*)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Dans la pratique, cette formule sert a déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.

Exemple 1.22 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t). \end{array}$$

Calculons le rang de f et la dimension du noyau de f.

• ***Première méthode.***

On calcule d'abord le noyau.

$$(x,y,z,t) \in \ker f \Longleftrightarrow f(x,y,z,t) = (0,0,0),$$

$$\Longleftrightarrow (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) = (0,0,0),$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+2y+6z+4t=0 \\ -x-2z-t=0 \end{cases}.$$

On résout ce système, on choisit z *et,* t *comme paramètres on trouve :*

$$\begin{cases} x=-2z-t \\ y=-z-t \end{cases},$$

alors

$$\ker f = \{(-2z-t, -z-t, z, t) \,/\; z, t \in \mathbb{R}\},$$

$$= \{z(-2,-1,1,0) + t(-1,-1,0,1)\},$$

$$= Vect\{(-2,-1,1,0), (-1,-1,0,1)\}.$$

$\ker f$ *est engendré par deus vecteurs :* $(-2,-1,1,0)$ *et* $(-1,-1,0,1)$.

Les deux vecteurs qui engendre le noyau sont linéairement indépendants.

Donc,

$$\dim \ker f = 2.$$

On applique maintenant le théorème du rang pour en déduire sans calculs la dimension de l'image :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 2 = 2 = rgf.$$

• ***Deuxième méthode.***

On calcule d'abord l'image.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(x,y,z,t) \,/\; (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \right\},$$

$$= \left\{ (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \,/\; (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \right\},$$

$$= \left\{ x\,(1,2,-1) + y\,(-1,2,0) + z\,(1,6,-2) + t\,(0,4,-1) \,/\; (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \right\},$$

$$= Vect\,\{(1,2,-1)\,,(-1,2,0)\,,(1,6,-2)\,,(0,4,-1)\}$$

$$= Vect\,\{f\,(e_1)\,,f\,(e_2)\,,f\,(e_3)\,,f\,(e_4)\}\,,$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) *est la base canonique de* $\mathbb{R}^4$.

On réduit la matrice A*, formée des vecteurs colonnes, sous une forme échelonnée*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le rang de A *est* 2*, (c'est-à-dire : la famille de vecteurs* $\{f\,(e_1)\,,f\,(e_2)\,,f\,(e_3)\,,f\,(e_4)\}$ *est liée)*

Ainsi,

$$rgf = \dim \operatorname{Im} f = \dim Vect\,\{f\,(e_1)\,,f\,(e_2)\,,f\,(e_3)\,,f\,(e_4)\} = 2.$$

Maintenant, par le théorème du rang :

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - rgf = 4 - 2 = 2.$$

- *On trouve bien sûr le même résultat par les deux méthodes.*

1.5 Exercices résolus

Exercice 1.1 *Éffectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Si non, dire pourquoi.*

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad b)$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad d)$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$e)$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f)$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Solution

$a)$ Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{2}$ et $\underline{2}\times 2$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2.

On a alors,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}.$$

$b)$ Les matrices étant respectivement de format $2\times\underline{2}$ et $\underline{3}\times 2$, leur produit est impossible à définir.

$c)$ Les matrices étant respectivement de format $1\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times 3$, leur produit est bien défini et est une matrice 1×3. On a alors,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \end{pmatrix}.$$

$d)$ Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times 2$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2.

On a alors,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

e) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{2}$ et $\underline{3}\times 2$, leur produit est impossible à définir.

f) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times 3$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×3.

On a alors,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2

Soit A, B et C les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Calculer $2B + 3C,\ A^2,\ A^3,\ {}^tA,\ {}^tB,\ {}^t(AB)$.

Solution

$$2B + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 6 & -3 \\ 24 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -6 & -7 \\ -36 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -7 \\ -21 & 22 & -21 \\ -7 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 15 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 15 & -1 \\ 6 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.3

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution.

(Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.)

1) $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 14 - 11\,(-8) = 116.$

2) <u>Règle de Sarrus</u>. **Attention !** La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix} \Bigg|$$

$$= 1\times4\times21+0\times15\times5+6\times3\times6-6\times4\times5-1\times15\times6-0\times3\times21 = -18.$$

3) <u>Se ramener à une matrice diagonale ou triangulaire</u>.

Si dans une matrice on change une ligne L_i en $L_i - \lambda L_j$ alors le déterminant reste le même. Même chose avec les colonnes.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - \frac{3}{2}L_2 \to L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 4 \left(-\frac{3}{2}\right) = -6.$$

On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit des coefficients sur le diagonal.

4) <u>Développement par rapport à une ligne ou une colonne</u>.

Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -0 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14.$$

Remarque. Bien souvent on commence par simplifier la matrice en faisant apparaître un maximum de 0 par les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Puis on développe en choisissant la ligne ou la colonne qui a le plus de 0.

5) On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3-2L_2\to L_3\\ L_4-3L_2\to L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -6 & 1\\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & -6 & 1\\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & -6 & 1\\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2+L_1\to L_2\\ L_3+6L_1\to L_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -4 & 4\\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96.$$

6) La matrice a déjà beaucoup de 0 mais on peut en faire apparaître davantage sur la dernière colonne, puis on développe par rapport à la dernière colonne

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2\to L_3\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

7) Toujours la même méthode, on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on développe par rapport à cette colonne

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12.$$

8) Nous allons permuter des lignes et des colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs. Souvenons-nous que **lorsque l'on échange deux lignes** (ou **deux colonnes**) alors le **déterminant change de signe**.

Nous allons rassembler les zéros. On commence par échanger les colonnes C_1 et C_3 : $C_1 \longleftrightarrow C_3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis on échange les lignes L_1 et L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Notre matrice est sous la forme d'une matrice diagonale par blocs et son déterminant est le produit des déterminants.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31)\,(-6) = 186.$$

Exercice 1.4 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) *Calculer* $M^3 - 2M^2 + 2M$.

2) *Déduire de ce qui précède que la matrice* M *est inversible, puis donner* M^{-1}.

Solution

1) On a

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$M^3 - 2M^2 + 2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 - 2M^2 + 2M = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I.$$

2) On a,

$M^3 - 2M^2 + 2M = 2I$, alors $\frac{1}{2}M\left(M^2 - 2M + 2I\right) = I$,

et comme, $MM^{-1} = M^{-1}M = I$,

on en déduit que :

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\left(M^2 - 2M + 2I\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5

1) *Montrer que la matrice* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, *est inversible et calculer* P^{-1}.

2) *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$,

trouver une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

Solution

1) $\det P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$, donc P est inversible et son inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^{t}(comP) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2) On a, $A = PDP^{-1} \Longrightarrow D = P^{-1}AP$.

Ainsi

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{15} & \frac{1}{10} \\ \frac{-7}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6

Soit A une matrice carrée telle que :

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0. \text{ (\textit{la matrice nulle})}$$

Montrer que $(I-A)$ est inversible, où I est la matrice identité et donner l'expression de $(I-A)^{-1}$.

Solution

On a $A^{2014}=0$.

Et

$I^n-A^n=(I-A)\left(I^{n-1}+I^{n-2}A+I^{n-3}A^2+...+A^{n-1}\right).$

Prenons,

$n=2014$, et comme, $I^n=I$,

on obtient :

$I-A^{2014}=(I-0)=I=(I-A)\left(I+A+A^2+...+A^{2013}\right).$

Ainsi,

$(I-A)$ est inversible et son inverse, $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+...+A^{2013}$.

Exercice 1.7 *Soit la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) *La matrice A est-elle inversible ?*

2) *Calculer A^3.*

3) *En déduit que $(I-A)$ est inversible et en déduire l'expression $(I-A)^{-1}$.*

4) *Retrouver $(I-A)^{-1}$ par la méthode classique (en utilisant la comatrice).*

Solution

1) $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$

donc A n'est pas inversible.

2) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Comme, $A^3 = 0$, alors : $I = I - A^3$,

et

$I = I - A^3 = (I - A)(I + A + A^2)$,

ce qui permet de conclure que $(I - A)$ est inversible et son inverse est

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det(I - A) = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, alors $(I - A)$ est inversible.

$$^t com\,(I - A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)}.{}^{t}com\,(I-A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z).$$

1) *Montrer que* f *est une application linéaire.*

2) *Donner une base de* $\ker f$*, en déduire* $\dim \operatorname{Im} f$.

3) *Donner une base de* $\operatorname{Im} f$.

Solution

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$,

$$f[\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')] = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'),$$

$$= (-2\alpha x - 2\beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y' + \alpha z + \beta z'),$$

$$= \alpha(-2x + y + z, x - 2y + z) + \beta(-2x' + y' + z, x' - 2y' + z'),$$

$$= \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z').$$

Donc, f est linéaire.

2) On a

$$\ker f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ f(x, y, z) = (0, 0, 0)\right\},$$

et, $f(x,y,z) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (-2x+y+z, x-2y+z) = (0,0,0)$,

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=z, \\ x=z. \end{cases}$$

Donc,

$\ker f = \{(z,z,z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,1,1) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1,1,1)\}$.

$\ker f$ est engendré par un vecteur non nul alors,

$$\dim \ker f = 1.$$

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

3) On a, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, alors on prend comme une base de $\operatorname{Im} f$: $\{(1,0),(0,1)\}$ (la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

Exercice 1.9 *Soit f l'application linéaire, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x,y,z) = (x-z, 2x+y-3z, -y+2z).$$

Et soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) *Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$*

2) *Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.*

3) *Calculer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.*

Solution.

1) $f(e_1) = (1,2,0) = 1 \times e_1 + 2e_2 + 0 \times e_3$.

$f(e_2) = (0,1,-1) = 0 \times e_1 + e_2 - 1 \times e_3$.

$f(e_3) = (-1,-3,2) = -1 \times e_1 - 3e_2 + 2 \times e_3.$

2)

les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base canonique sont : $(1,2,0)$.

les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base canonique sont : $(0,1,-1)$.

les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base canonique sont : $(-1,-3,2)$.

3)

$(x,y,z) \in \ker f \iff f(x,y,z) = (0,0,0),$

$$\iff (x-z, 2x+y-3z, -y+2z),$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ -y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Donc, $\ker f = \{(0,0,0)\}$. Alors, $\dim \ker f = 0$.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(x,y,z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

$$= \left\{ (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

$$= \{(x,2x,0) + (0,y,-y) + (-z,-3z,2z)\},$$

$$= \{x(1,2,0) + y(0,1,-1) + z(-1,-3,2)\},$$

$$= \{x\,(1,2,0) + y\,(0,1,-1) + z\,(-1,-3,2)\}\,,$$

$$= Vect\,\{(1,2,0)\,,(0,1,-1)\,,(-1,-3,2)\}\,,$$

$$= Vect\,\{f\,(e_1)\,,f\,(e_2)\,,f\,(e_2)\}\,,$$

$\operatorname{Im} f$ est engendré par les trois vecteurs $(1,2,0)\,,(\ 0,1,-1)\,,(-1,-3,2)\,.$

Puis, on vérifie si la famille $\{(1,2,0)\,,(0,1,-1)\,,(-1,-3,2)\}$ est libre.

On a, $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{k}$,

$$\alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,1,-1) + \gamma\,(-1,-3,2) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = 0, \\ -\beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc, la famille est libre et elle engendre $\operatorname{Im} f$ c'est une base de $\operatorname{Im} f$, on en conclut que, $\dim \operatorname{Im} f = 3$ et que, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.10 *Soit* $\mathbb{R}_2\,[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ *l'espace des polynômes réels de degré au plus* 2 *et soit* $B = (1, X, X^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2\,[X]$. *On considère l'application*

$$f : \mathbb{R}_2\,[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2\,[X]\,,$$

$$P \longmapsto (X+1)\,P'.$$

1) *Montrer que* f *est linéaire.*

2) *Montrer que la matrice* A *de* f *est :* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

3) *Montrer que* $B' = \left(1, X+1, (X+1)^2\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2\,[X]\,.$

4) *Trouver la matrice* C *de* f *par rapport aux bases* B' *et* B'.

5) *Caculer* A^2, A^3.

6) *Déterminer le rang de* f.

7) *Trouver une base de l'image de* f.

8) *Trouver une base de noyau de* f.

Solution.

1) On a, $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors, $d^\circ[(X+1)P'] \leq 2$, donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + \beta P_2) = (X+1)(\alpha P_1 + \beta P_2)' &= \alpha(X+1)P_1' + \beta(X+1)P_2' \\ &= \alpha f(P_1) + \beta f(P_2) \end{aligned}$$

Donc, f est linéaire.

2) $f(1) = (X+1)(1)' = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$.

$$f(X) = (X+1)(X)' = (X+1) \times 1 = X+1 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2.$$

$$f(X^2) = (X+1)(X^2)' = (X+1) \times 2X = 2X^2 + 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2.$$

Donc, $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$.

3) On a $B' = \left(1, X+1, (X+1)^2\right)$ donc,

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$,

$\alpha \times 1 + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0, \\ \beta + 2\gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc B' est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 $(\dim \mathbb{R}_2[X] = 3)$, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4) $f(1) = (X+1)(1)' = (X+1) \times 0 = 0,$
$$= 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2.$$

$f(X+1) = (X+1)(X+1)' = (X+1) \times 1 = X+1,$
$$= 1 \times 0 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2.$$

$f\left((X+1)^2\right) = (X+1)\left((X+1)^2\right)' = (X+1) \times 2(X+1) = 2(X+1)^2,$
$$= 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 2 \times (X+1)^2.$$

Donc, $C = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X+1) & f\left((X+1)^2\right) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$

5) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

6) La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles (sont libres) "la vérification est laissée au lecteur", donc le rang de A est 2.

$$rgA = rgf = 2.$$

7) $\operatorname{Im} f$ est engendré par $\{f(X), f(X^2)\}$ cette famille constitue une base de $\operatorname{Im} f$.

8) D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, en effet

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2 [X] = 3.$$

Et $P \in \ker f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow (X+1) P' = 0$.

C'est-à-dire, $P = 1$ "$f(1) = 0$", donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire, le polynôme constant égale à 1 est base de $\ker f$).

Exercice 1.11 *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) *Déterminer l'application linéaire f associée à M par rapport à la base canonique de l'ensemble de départ et à la base canonique de l'ensemble d'arrivé.*

2) *Déterminer l'application linéaire g associée à M par rapport aux bases* $\{(1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$ *et* $\{(1,2), (2,1)\}$ *respectivement de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1) Soit $B = (e_i)_{1 \le i \le 3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e'_i)_{1 \le i \le 3} = \{(1,0), (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

D'après la représentation matricielle de f il est claire que, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et par linéarité de f on peut écrire :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3), \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3). \end{aligned}$$

Et comme $M = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array} \end{array}$, on a

$f(e_1) = e'_1 + 3e'_2$,

$f(e_2) = 2e'_1 + e'_2$,

$f(e_3) = 3e'_1 + e'_2$,

ainsi

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3),\\
&= x(e'_1 + 3e'_2) + y(2e'_1 + e'_2) + zf(3e'_1 + e'_2),\\
&= x[(1,0) + 3(0,1)] + y[2(1,0) + (0,1)] + z[3(1,0) + (0,1)],\\
&= (x,0) + (0,3x) + (2y,0) + (0,y) + (3z,0) + (0,z),\\
&= (x+2y+3z,0) + (0,3x+y+z),\\
&= (x+2y+3z,3x+y+z).
\end{aligned}$$

Donc,

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+2y+3z, 3x+y+z).$$

2) On note : $V = (v_i)_{1\leq i\leq 3} = \{(1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ et $W = (w_i)_{1\leq i\leq 3} = \{(1,2),(2,1)\}$ la base de $\mathbb{R}^2$.

L'application linéaire g associée à M par rapport aux bases V et W. D'après la représentation matricielle de g il est claire que, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et par linéarité de g on peut écrire :

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= g(xe_1 + ye_2 + ze_3),\\
&= xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3).
\end{aligned}$$

Exprimons maintenant les vecteurs de la base B en fonction des vecteurs de la base V, on a :

$$\begin{cases}
v_1 = (1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = e_1 + e_2 + e_3,\\
v_2 = (1,-1,1) = (1,0,0) + (0,-1,0) + (0,0,1) = e_1 - e_2 + e_3,\\
v_3 = (1,1,-1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,-1) = e_1 + e_2 - e_3.
\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \\ v_2 = e_1 - e_2 + e_3, \\ v_3 = e_1 + e_2 - e_3. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3, \\ e_2 = \frac{-1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_1, \\ e_3 = \frac{-1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_1. \end{cases}$$

Et comme, $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(v_1) & g(v_2) & g(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array} \end{array}$,

on a : $\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 3w_2, \\ g(v_2) = 2w_1 + w_2, \\ g(v_3) = 3w_1 + w_2. \end{cases}$

Et

$$\begin{cases} w_1 = (1,2) = (1,0) + (0,2) = e'_1 + 2e'_2, \\ w_2 = (2,1) = (2,0) + (0,1) = 2e'_1 + e'_2. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3), \\ &= xg\left(\tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{2}v_3\right) + yg\left(\tfrac{-1}{2}v_2 + \tfrac{1}{2}v_1\right) + zg\left(\tfrac{-1}{2}v_3 + \tfrac{1}{2}v_1\right), \\ &= \tfrac{1}{2}xg(v_2) + \tfrac{1}{2}xg(v_3) - \tfrac{1}{2}yg(v_2) + \tfrac{1}{2}yg(v_1) - \tfrac{1}{2}zg(v_3) + \tfrac{1}{2}zg(v_1), \\ &= \tfrac{1}{2}(y+z)g(v_1) + \tfrac{1}{2}(x-y)g(v_2) + \tfrac{1}{2}(x-z)g(v_3), \\ &= \tfrac{1}{2}(y+z)(w_1+3w_2) + \tfrac{1}{2}(x-y)(2w_1+w_2) + \tfrac{1}{2}(x-z)(3w_1+w_2), \\ &= \tfrac{1}{2}(y+z)\left[(e'_1+2e'_2) + 3(2e'_1+e'_2)\right] + \tfrac{1}{2}(x-y)\left[2(e'_1+2e'_2) + (2e'_1+e'_2)\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(x-z)\left[3(e'_1+2e'_2) + (2e'_1+e'_2)\right], \\ &= \left(\tfrac{9}{2}x + \tfrac{3}{2}y + z\right)e'_1 + (6x-z)e'_2 = \left(\tfrac{9}{2}x + \tfrac{3}{2}y + z\right)(1,0) + (6x-z)(0,1). \end{aligned}$$

Alors,

$$g(x,y,z) = \left(\tfrac{9}{2}x + \tfrac{3}{2}y + z, 6x - z\right).$$

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Equations linéaires

Définition 2.1 *On appelle équation linéaire à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ toute équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

où les éléments a_1, a_2, a_n et b appartiennent à $\Bbbk$, ($\Bbbk$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et sont les coefficients de l'équation.

L'équation est homogène si $b = 0$.

Une solution de cette équation est un $n-$ uplet, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Bbbk^n$ qui vérifie l'équation.

Résoudre l'équation, c'est trouver l'ensemble S de toutes les solutions.

Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple 2.1 *L'équation $y = 2x - 1$ représente une droite affine dans le plan. C'est une équation linéaire à deux inconnues, car on peut l'écrire*

$$2x_1 - x_2 = -1,$$

où on a simplement changé les noms des inconnues : $x = x_1$ *et* $y = x_2$

2.2 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.2 *On appelle système d'équations linéaires de* m *équations en* n *inconnues un système de la forme :*

$$(S_1) : \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_j sont donnés, et où les x_i sont des inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

* Un cas particulier important est celui des systèmes **homogènes**, pour lesquels $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul.

2.2.1 Ecriture matricielle

On peut écrire le système (S_1) sous la forme matricielle suivante : $AX = B$,

où, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Exemple 2.2

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = -10 \\ x - 3y - 7z = 5 \\ x - z = 13 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$.

$$Alors,\ AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Rang d'un système d'équations linéaires

Soit A une matrice de type (m, n).

Déterminant d'ordre r extrait de A :

On appelle déterminant d'ordre r extrait de A le déterminant d'une matrice carrée formée en supprimant dans A : $(m - r)$ lignes et $(n - r)$ colonnes.

On appelle **rang de la matrice** A : l'ordre du déterminant non nul, d'ordre le plus élevé, extrait de A.

* On appelle rang dU système, le rang de la matrice A de ce système.

2.3 Étude de l'ensemble des solutions

Soit le système (S_1) que nous supposons de rang r et écrit de telle façon que le déterminant des coefficients des r premières inconnues et r premières équations soit non nul.

2.3.1 Déterminant caractéristique

Déterminant caractéristique de (S_1)

On appelle déterminant caractéristique de (S_1) le déterminant de la forme

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & ... & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}; \quad k = r+1,\ r+2, ..., m.$$

2.3.2 Étude de l'ensemble des solutions

a) Si $r = m = n$, le système (S_1) admet une seule solution.

b) Si $r < m < n$, le système (S_1) indéterminé à $(n - r)$ paramètres.

c) Si $r < m$ et si l'un au moins des déterminants caractéristiques de (S_1) non nul, (S_1) n'a pas de solution.

d) Si $r < m$ et si les déterminants caractéristiques de (S_1) sont nuls, (S_1) réduit aux r équations et se résout comme dans le cas (b).

Exemple 2.3 $(S) : \begin{cases} x + y + 2w = -2, \\ x + 2y + 3w = a, \\ 3x + 5y + 8z = 2, \\ 5x + 9y + 14z = b. \end{cases}$, *a et b supposés donnés,* $(a,\ b \in \mathbb{R}.)$

la matrice de ce système : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$,

et, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$.

Les quatre déterminants d'ordre 3 *sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est pas nul,* A *est de rang* 2.

Les déterminants caractéristiques :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 4, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix} = -4a + b + 2.$$

1) *Si* $D_1 \neq 0$ *ou* $D_2 \neq 0$ *alors* (S) *n'a pas de solution.*

2) *Si* $D_1 = D_2 = 0$, *donc ce cas* (S) *indéterminé à un paramètre* z,

$$\begin{cases} x = -3z - 6, \\ y = z + 4. \end{cases}, \ z \in \mathbb{R}.$$

2.3.3 Systèmes équivalents

Définition 2.3 *Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Pour résoudre un système donné on peut essayer de trouver des systèmes plus simples.

Exemple 2.4 *Les deux systèmes :*

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + 3y = 15, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad et \quad (S_1) : \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

sont équivalents.

2.3.4 Systèmes échelonnés

Définition 2.4 (*Système triangulaire*) .

Un système linéaire est ***triangulaire*** *s'il a autant d'inconnues que d'équations et si tous les coefficients de sa matrice situés au-dessous de la diagonale sont nuls.*

Exemple 2.5 *Le système*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ \qquad 3y - z = -1, \\ \qquad\quad -2z = 1. \end{cases}$$

est triangulaire. Ses coefficients diagonaux 1, 3 *et* (-2) *sont non nuls. On remarque que ce système possède une et une seule solution.*

En $effet$, *la dernière équation détermine uniquement* z, *puis la deuxième donne* y, *et la première donne* x.

Définition 2.5 (*Système échelonné*)

Un système lièaire est ***échelonné*** *si sa matrice est formée d'une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, à laquelle on a ajouté des colonnes (quelconques), puis des lignes identiquement nulles. La taille du sous-système triangulaire s'appelle le rang du système.*

Il est ***échelonné réduit*** *si en plus, le premier coefficient non nul d'une ligne vaut* 1 *et c'est le seul élément non nul de sa colonne.*

Exemple 2.6

- Le système $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ \quad\quad y-4z=-1, \\ \quad\quad\quad\quad 0=1. \end{cases}$ *est échelonné, de rang* 2*. Il ne possède pas de solution, puisque la dernière équation n'est jamais satisfaite.*

- Le système $\begin{cases} 2x+3y+2z-t=5, \\ \quad\quad -y-2z=4, \\ \quad\quad\quad\quad 3t=1. \end{cases}$ *est échelonné (mais pas réduit).*

- Le système $\begin{cases} 2x+3y+2z-t=5, \\ \quad\quad\quad -2z=4, \\ \quad\quad\quad z+t=1. \end{cases}$ *n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).*

- Le système $\begin{cases} x+2z=25 \\ y-2z=16 \\ \quad\quad t=1 \end{cases}$ *est échelonné et réduit.*

2.4 Méthodes de résolutions d'un système linéaire

2.4.1 Méthode de substitution

Le principe est : de choisir une équation, de calculer dans cette équation l'une des inconnues en fonction des autres, puis de la remplacer par cette expression dans toutes les autres équations, puis de recommencer.

Exemple 2.7 (1) : $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = -3. \end{cases}$.

$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y, \\ 3x - y = -3. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y, \\ 3(7 - y) - y = -3. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 6. \end{cases}$.

Le système a une unique solution : $S = \{(1, 6)\}$.

2.4.2 Méthode de Cramer

Définition 2.6 *Un système de Cramer est un système carré (autant d'inconnues que d'équations) qui a* ***une unique solution****.*

Soit (S) un système carré c'est à dire sa matrice A est carrée, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$. Si la matrice A **est inversible** on peut résoudre ce système par la méthode de Cramer.

Nous noterons A_i la matrice des coefficients dans laquelle on a remplacé la $i - ème$ colonne par la matrice B.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, ..., n.$$

Exemple 2.8 *Avec la méthode de Cramer, résoudre* $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -5x + 2y = -2 \end{cases}$.

On a : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, *comme le* $\det A \neq 0$ *on peut résoudre ce système par la méthode de Cramer et ça nous donnera :*

$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, *donc :*

$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8-3}{1} = 6.$

$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-6+20}{1} = 14.$

Donc, $(x, y) = (6, 14)$ *est l'unique solution de ce système.*

2.4.3 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$.

Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit :

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Exemple 2.9 *Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16, \\ 3x - 2y + 4z = -7, \\ x + y - z = 6. \end{cases}$.

On a, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\det A = 24 \neq 0$, *alors* A *est inversible et son inverse est :* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(com\,(A)\right)^t$.

<u>*Calculons* A^{-1}</u>

$$com\,(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & -29 & -31 \end{pmatrix},$$

$$(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$X = A^{-1}B$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

donc $(3, -2, -5)$ *est l'unique solution de ce système.*

2.4.4 Méthode de Gauss

La méthode du **pivot** de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme un système (S) en un système (S') équivalent plus facile à résoudre et dont la matrice est triangulaire supérieure. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple

Exemple 2.10 *Soit* (S) *un système linéaire de* 3 *équations,* 4 *inconnues et à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

$$(S) : \begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1. \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Partie A. *Passage à une forme échelonnée.*

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit no nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire : $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ \quad - x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1. \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Nous avons déjà un coefficient 1 *devant le* x_1 *de la première ligne. On dit que nous avons* ***un pivot*** *en position* $(1,1)$ *(première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne. Il n'y a pas de terme* x_1 *sur le deuxième ligne. Faisons disparaître le terme* x_1 *de la troisième ligne, pour cela on fait l'opération élémentaire :* $L_3 \longrightarrow L_3 + L_1$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ -\, x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5, \\ x_2 - 3x_4 = 3. \end{array}\right. \qquad L_3 + L_1 \longrightarrow L_3$$

On change le signe de la seconde ligne $(-L_2 \longrightarrow L_2)$ *pour faire apparaître* 1 *au coefficient du pivot* $(2,2)$ *(deuxième ligne, deuxième colonne) :*

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5, \\ x_2 - 3x_4 = 3. \end{array}\right. \qquad -L_2 \longrightarrow L_2$$

On fait disparaître le terme x_2 *de la troisième ligne, puis on fait apparaître un coefficient* 1 *pour le pivot de la position* $(3,3)$:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5, \\ 2x_3 + 10x_4 = 8. \end{array}\right. \qquad L_3 - L_2 \longrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5, \\ x_3 + 5x_4 = 4. \end{array}\right. \qquad \tfrac{1}{2}L_3 \longrightarrow L_3$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie B. *Passage à une forme réduite.*

Il reste à le mettre sous la forme échelonnée réduite. Pour cela, on ajoute à une ligne *des multiples adéquats des lignes situées au-dessous d'elle, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.*

On fait apparaître des 0 *sur la troisième colonne en utilisant le pivot de la troisième ligne :*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4, \\ x_2 - 3x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases} \qquad L_2 + 2L_3 \longrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -8, \\ x_2 - 3x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases} \qquad L_1 - 3L_3 \longrightarrow L_1$$

On fait apparaître des 0 *sur la deuxième colonne (en utilisant le pivot de la deuxième ligne) :*

$$\begin{cases} x_1 - 4x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases} \qquad L_1 + 2L_2 \longrightarrow L_1$$

Le système est sous forme échelonnée réduite.

Partie C. *Solutions.*

Le système est maintenant très simple à résoudre. En choisissant x_4 *comme variable libre, on peut exprimer* x_1, x_2, x_3 *en fonction de* x_4.

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$S = \{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4)\}$.

Remarque 2.1 *On peut associe à ce système linéaire* (S) *le tableau des coefficients des premiers membres (matrice du système) éventuellement complété par les coefficients des seconds membres. La résolution devient une série de transformations de la matrice* *complétée :*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & 1 \end{array}\right)$$

Proposition 2.1

- *Tout système d'équations linéaires est équivalent à un système échelonné.*
- *Un système d'équations linéaires est a :*

– *ou bien aucune solution,*

– *ou bien une solution unique,*

– *ou bien une infinité de solutions.*

2.5 Exercices résolus

Exercice 2.1 *Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par* ***substitution****, par la méthode du* ***pivot de Gauss****, en* ***inversant la matrice des coefficients****, par* ***les formules de Cramer****) :*

$$(S) : \quad \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x + 7y = -2. \end{cases}$$

Solution.

$$(S) : \quad \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x + 7y = -2. \end{cases}$$

1) **Par substitution**.

La première équation s'écrit aussi $y = 1 - 2x$. On remplace maintenant y dans la deuxième équation

$3x + 7(1 - 2x) = -2 \Longleftrightarrow 11x = 9 \Longleftrightarrow x = \frac{9}{11}$.

On en déduit y :

$y = 1 - 2\left(\frac{9}{11}\right) = -\frac{7}{11}$.

La solution de ce système est donc, $\left\{\left(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11}\right)\right\}$.

N'oubliez pas de vérifier que votre solution fonctionne !

2) **Par le pivot de Gauss**.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} 2x+y=1, \\ 3x+7y=-2. \end{array}\right. \quad \underset{2L_2-3L_1 \to L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+y=1, \\ 11y=-7. \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire, on en déduit $y = \frac{-7}{11}$.

Et la première ligne : $x = \frac{9}{11}$.

3) **Par les matrices inverse**.

En terme matriciel le système s'écrit : $AX = B$, avec,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice : $X = A^{-1}B$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0.$$

Linverse de A est donc, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t comA = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$X = A^{-1}B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

4) **Par les formules de Cramer**.

$\det A = 11 \neq 0$, on peut donc appliquer les formules de Gramer.

Les formules de Cramer pour un système de deux équations sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\det A_x}{\det A}, \\ y = \frac{\det A_y}{\det A}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{9}{11}, \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-7}{11}. \end{array}\right.$$

Exercice 2.2 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7, \\ 5x + 7y - 3z = 16, \\ x + y - z = 6. \end{cases}$$

1) *Écrire la matrice A associée à ce système.*

2) *Caculer A^2.*

3) *Calculer* $\det A$ *en développant le déterminant de la matrice A suivant la première ligne.*

4) *Calculer* $\det A$ *par la règle de Sarrus.*

5) *Déterminer si la méthode de Cramer est applicable pour résoudre le système d'équation donné. Si oui, résoudre le système.*

Solution.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7, \\ 5x + 7y - 3z = 16, \\ x + y - z = 6. \end{cases}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -16 & 14 \\ 47 & 36 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

3) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -24.$

4) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 7\,(-1) + (-2)\,(-3) \times 1 + 4 \times 5 \times 1 - 4 \times$ $7 \times 1 - 3\,(-3) \times 1 - (-2) \times 5\,(-1) = -24.$

5) Comme $\det A = -24 \neq 0$, alors : la méthode de Cramer est applicable et le système admet une unique solution :

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 16 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-24} = \frac{-72}{-24} = 3,$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 5 & 16 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{-24} = \frac{48}{-24} - 2,$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 5 & 7 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-24} = \frac{120}{-24} = -5.$$

L'ensemble de solution : $S = \{(x, y, z)\} = \{(3, -2, -5)\}$.

Exercice 2.3 *Résoudre le système suivant où x, y et z sont des réels positifs*

$$(S) \quad \begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1, \\ x^4 y^5 z^{12} = 2, \\ x^2 y^2 z^5 = 3. \end{cases}$$

Solution.

on a,

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln\left(x^3y^2z^6\right) = \ln 1, \\ \ln\left(x^4y^5z^{12}\right) = \ln 2, \\ \ln\left(x^2y^2z^5\right) = \ln 3. \end{cases}$$

On pose : $a = \ln x$, $b = \ln y$, $c = \ln z$. (La fonction logarithme étant injective.)

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0, \\ 4a + 5b + 12c = \ln 2, \\ 2a + 2b + 5c = \ln 3. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0, \\ 7b + 12c = 3\ln 2, \\ 2b + 3c = 3\ln 3. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0, \\ 7b + 12c = 3\ln 2, \\ -3c = 21\ln 3 - 6\ln 2. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = -2\ln 2 + 6\ln 3, \\ b = -3\ln 2 + 12\ln 3, \\ c = 2\ln 2 - 7\ln 3. \end{cases}$$

Ceci donne finalement comme unique solution : $\begin{cases} x = 2^{-2}3^{6}, \\ y = 2^{-3}3^{12}, \\ z = 2^{2}3^{-7}. \end{cases}$

Exercice 2.4 *Résoudre le système linéaire suivant par la méthode du pivot de Gauss*

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1, \\ 2x + 3y + 4z + t = 2, \\ 3x + 4y + z + 2t = 3, \\ 4x + y + 2z + 3t = 4. \end{cases}$$

Solution.

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
x+2y+3z+4t=1, \\
2x+3y+4z+t=2, \\
3x+4y+z+2t=3, \\
4x+y+2z+3t=4.
\end{array}
\right.
\Longleftrightarrow
\begin{array}{l}
\\
L_2-2L_1 \to L_2 \\
L_3-3L_1 \to L_3 \\
L_4-4L_1 \to L_4
\end{array}
\left\{
\begin{array}{c}
x+2y+3z+4t=1, \\
-y-2z-7t=0, \\
-2y-8z-10t=0, \\
-7y-10z-13t=0.
\end{array}
\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow
\begin{array}{l}
\\
\\
L_3-2L_2 \to L_3 \\
L_4-7L_2 \to L_4
\end{array}
\left\{
\begin{array}{r}
x+2y+3z+4t=1, \\
-y-2z-7t=0, \\
-4z+4t=0, \\
4z+36t=0.
\end{array}
\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
L_4+L_3 \to L_4
\end{array}
\left\{
\begin{array}{r}
x+2y+3z+4t=1, \\
-y-2z-7t=0, \\
-4z+4t=0, \\
40t=0.
\end{array}
\right.
\Longleftrightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
x=1, \\
y=0, \\
z=0, \\
t=0.
\end{array}
\right.
$$

Donc la solution du système : $S=\{(1,0,0,0)\}$.

Chapitre 3

Intégration

3.1 Intégrale indéfinie

3.1.1 Primitives d'une fonction

Définition 3.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F est* ***une primitive*** *de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.*

Théorème 3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F est une primitive de f sur I.*

Toute primitive de f sur I est de la forme : $F(x) + C$, où C est une constante réelle (La primitive d'une fonction s'il existe n'est pas unique).

Exemple 3.1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$.*

f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C, \quad$ *où* $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.2 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin 2x$.*

Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$.

$*$ *Lensemble des primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions :* $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

La condition : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *impose*

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 \\ &\Longrightarrow C = 1 + \frac{1}{2}\cos\pi \end{aligned}$$

comme $\cos\pi = -1 \Longrightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La primitive de f *qui prend la valeur* 1 *pour* $x = \frac{\pi}{2}$ *est la fonction*

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$.

Définition 3.2 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *et* F *une de ces primitives sur* I*. On prend alors l'habitude de noter toute primitive de* f *sous forme*

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f*.*

Proposition 3.1 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$

3.1.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f definie par	**Primitives F de f**	**Sur I**
$f(x) = a, \quad$ où $\quad a \in \mathbb{R}.$	$F(x) = ax + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I = \mathbb{R}.$
$x^n, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I = \mathbb{R}.$
$\frac{1}{x^2}.$	$-\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[.$
$\frac{1}{\sqrt{x}}.$	$2\sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I =]0, +\infty[.$
$\sin x.$	$-\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I = \mathbb{R}.$
$\cos x.$	$\sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I = \mathbb{R}.$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$\tan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$I = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[, \quad n \in \mathbb{N}.$

* Le tableau suivant découle des règle de dérivation des fonctions.

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	**Primitives F sur I**	I
$u'u^n, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$\mathbb{R}.$
$\frac{u'}{u^2}.$	$-\frac{1}{u} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$\forall x \in I, \quad$ avec $\quad u(x) \neq 0.$ ·
$\frac{u'}{\sqrt{u}}.$	$2\sqrt{u} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$\forall x \in I, \quad$ avec $\quad u(x) > 0.$
$\frac{u'}{u^n}, \quad (n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2).$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$	$\forall x \in I, \quad$ avec $\quad u(x) \neq 0.$

Exemple 3.3 *Déterminer les primitives F de $f : x \mapsto x(1 + x^2)^3$ sur $\mathbb{R}$.*

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, l'integrale existe, posons :

$u(x) = 1 + x^2$ alors : $u'(x) = 2x$. $f(x)$ est donc de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)\,u^3(x).$$

Alors, les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}u^4(x) + C, \\ &= \frac{1}{8}\left(1+x^2\right)^4 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3.1.3 Intégration par parties

Théorème 3.2 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Exemple 3.4 *Caculons : $\int x^2e^x dx$. On peut choisir :*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x, \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x. \end{aligned}$$

$\int x^2e^x dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$

De même pour $\int xe^x dx$, On peut choisir :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \Rightarrow u'(x) = 1, \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x. \end{aligned}$$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$ *Alors :*

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C,$

$\int x^2e^x dx = e^x\left(x^2 - 2x - 2\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

3.1.4 Changement de variable

Théorème 3.3 *Soient u une fonction dérivable, f une fonction continue et $F(x) = \int f(x)\,dx$. On a*

$$\int u' f(u)\,dx = \int f(u)\,du = F(u).$$

Exemple 3.5 *Calculons la primitive $F(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.*

On choisit, $u(x) = \cos x,\ \ u'(x) = -\sin x,$

et, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. *On pose* $f(u) = u,$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int u' f(u)\,dx = -\int f(u)\,du = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Donc, $F(x) = -\ln|\cos x| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

3.2 Intégration des fonctions rationnelles

Définition 3.3 *Une fonction f est dite* ***une fonction rationnelle*** *si :*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où $P(x)$, $Q(x)$ sont ***des polynômes*** *à coefficients réels.*

3.2.1 Intégration des éléments simples

La fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{\gamma}{(x - x_0)^n}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^m}, \quad \text{avec } a^2 - 4b < 0,$$

où $E(x)$ un polynôme de $R[x]$, et $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ \ n,\ m \in \mathbb{N}^*$.

• Calculons :

$$\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^n} dx.$$

Si $n=1$, $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^1} dx = \gamma \ln |x-x_0| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$

Si $n \geq$, $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^n} dx = \gamma \int (x-x_0)^{-n} dx = \gamma (x-x_0)^{-n+1} + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$

Proposition 3.2 *Soit* $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx, \ \ n \in \mathbb{N}^*.$

1) $I_1 = \int \frac{1}{(x^2+1)} dx = arctg(x) + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$

2) $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \ \ n \geq 1.$

• Calculons :

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+ax+b)^m} dx, \quad \text{avec} \ \ a^2 - 4b < 0.$$

1)

Si $\alpha \neq 0$,

$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+\frac{\beta}{\alpha}}{(x^2+ax+b)^m} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+a-a+\frac{\beta}{\alpha}}{(x^2+ax+b)^m} dx$

$= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^m} dx + \frac{\alpha}{2} \left(-a+\frac{\beta}{\alpha}\right) \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m} dx.$

$i)$ $\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^m} dx = \int \frac{u'(x)}{(u(x))^m} dx = \begin{cases} \frac{1}{-m+1} (u(x))^{-m+1}, & \text{si } m \geq 2 \\ \ln |u(x)|, & \text{si } m = 1 \end{cases}.$

$ii)$ $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m} dx = \int \frac{1}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\right]^m} dx,$

on pose $t = x - \frac{a}{2}$, $k^2 = b - \frac{a^2}{4}$, on obtient :

$\int \frac{1}{(t^2+k^2)^m} dt = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2+1\right)^m} dt,$

on choisit : $s = \frac{t}{k} \Longrightarrow kds = dt$. Donc,

$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m} dx = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2+1\right)^m} dt = k \int \frac{1}{(s^2+1)^m} ds = (\text{voir la proposition}).$

2)

Si $\alpha = 0$,

$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m} dx = \int \frac{\beta}{(x^2+ax+b)^m} dx = (\text{voir } (ii)).$

Exemple 3.6

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

i) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx = \frac{-1}{x^2+x+1}$.
ii) $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}dx$,
par changement de variable $t = x + \frac{1}{2}$,

on obtient :

$\int \frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}dt = \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)^2}dt,$

par changement de variable $s = \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}ds = dt$,

on obtient :

$\frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(s^2+1)^2}ds = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(s^2+1)^2}ds, \quad \left(voir : I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n,\ n \geq 1\right).$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right).$$

Donc,

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{-1}{x^2+x+1} + \frac{4}{9}\sqrt{3}\left(\frac{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)} + arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right) + C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, par la division euclidien on obtient :

$$P(x) = Q(x)\,q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},\quad \text{tel que } \deg R \leq \deg Q.$$

Exemple 3.7 *Intégrer la fraction rationnelles suivante :* $\int \frac{x^3}{x^2-x-6}$.

<u>*Première étape :*</u>

Effectuer la division euclidienne,

$$\frac{x^3}{x^2-x-6} = x+1+\frac{7x+6}{x^2-x-6}.$$

<u>*Deuvième étape :*</u>

Décomposer en fractions simples,

$\frac{7x+6}{x^2-x-6} = \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} = \frac{(a+b)x+(-3a+2b)}{(x+2)(x-3)}$,

alors,

$\begin{cases} a+b=7 \\ -3a+2b=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{5} \\ -b=\frac{27}{5} \end{cases}.$

<u>*Troisième étape :*</u> *Intégrer,*

$\int \frac{x^3}{x^2-x-6}dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{7x+6}{x^2-x-6}dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{5}\ln|x+2| + \frac{27}{8}\ln|x-3| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exemple 3.8 $\int \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}dx.$

On peut écrire $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}$ *sous la forme,*

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1},$$

et on obtient : $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ a = 0,\ b = -1,\ c = 1,$ *et*

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Alors, $\int \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^3}dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = ...$

3.3 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques

3.3.1 Intégration des fonctions exponentielles

Pour calculer les primitives de la forme $\int f(e^x)\,dx$, on peut choisir le changement de variable $t = e^x \Longrightarrow \frac{1}{t}dt = dx$.

Exemple 3.9 $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t}\frac{t}{t+1}dt = \ln|t+1| + C,\ \ C \in \mathbb{R},$
$= \ln|e^x+1| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Exemple 3.10 $I_n = \int x^n e^x dx$, *on utilise l'integration par partie, on choisit :*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^n \Longrightarrow u'(x) = nx^{n-1}, \\ v'(x) &= e^x \Longrightarrow v(x) = e^x. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x dx \\ &= x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}.$$

3.3.2 Intégration des fonctions trigonométriques

• Pour calculer les primitives de la forme $\int \sin^n x \cos^m x dx\,;\, n, m \in \mathbb{N}$, on peut choisir le changement de variable : $t = \sin x$, ou $t = \cos x$.

• Pour calculer les primitives de la forme $\int f(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx$, on peut choisir le changement de variable : $t = \tan\frac{x}{2}$, et on a,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Exemple 3.11 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

On choisit : $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx,$

on sait que : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2,$

alors,

$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Donc,

$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exemple 3.12 $\int \frac{\tan x}{\cos x + \sin x} dx.$

On choisit : $t = \tan \frac{x}{2},$

on obtient :

$\int \frac{\tan x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{4t}{(1-t^2+2t)(1+t^2)} dt = ...$ *(décomposition en élément simple)*

3.4 Intégration définie

Définition 3.4 *On appelle* ***subdivision*** *(d'ordre n) de l'intervalle $I = [a, b]$ l'ensemble fini $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tel que, $a = x_0 < ... < x_k = a + k\frac{b-a}{n} < ... < x_n = b,\ k \in \mathbb{N}$.*

Le pas *$\delta(S)$ de la subdivision est le plus grand des nombres $(x_i - x_{i-1})$, où $i \in \{0, 1, ..., n\}$.*

Pour tout choix de n points $h_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$, on appelle ***somme de Riemann*** *de f le nombre*

$$R(f, S, \{h_1, ...h_n\}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(h_i).$$

• *Dans cette somme, chaque terme $(x_i - x_{i-1}) f(h_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.*

Théorème 3.4 *Si $\lim\limits_{\delta(S) \to 0} R(f, S, \{h_i\})$ existe, alors elle est indépendante du choix des* *points $h_i \in I_i$, on la note*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(S)\to 0} R(f, S, \{h_{ij}\}).$$

Définition 3.5 *Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'**intégrale** de f sur $[a,b]$ et on dit que f est **intégrable au sens de Riemann.***

Proposition 3.3 1. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.*

2. *Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann*

Définition 3.6 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a,b]$ et F une de ces primitives. L'intégrale définie de f entre a et b est le nombre réel défini par :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

L'ordre de a et de b est important.

Le nombre a est appelé **borne inférieure**, et b la **borne supérieure** de l'intégrale.

Proposition 3.4 *Soient f et g deux fonctions continues.*

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, *tel que $a < c < b$. (relation de Chasles)*
2. *Si $a \leq b$, on a* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
3. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.13 *Calculer l'intégrale* $\int_{-1}^2 (2x^2+3)\,dx$.

L'intégrale existe car, la fonction $f(x) = 2x^2+3$ est continue sur $[-1,2]$.

$\int_{-1}^2 (2x^2+3)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 3x\right]_{-1}^2 = 15.$

Exemple 3.14 $\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^2$, *(integration par parties)*

$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$

3.5 Exercices résolus

Exercice 3.1 *Calculer les intégrales suivantes*

1) $\int \cos^3 x dx$, 2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$, 3) $\int x^3 e^x dx$, 4) $\int \frac{dx}{x^3+1}$, 5) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$,
6) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$, 7) $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\, dx$, 8) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$, 9) $\int_1^2 x \ln x dx$, 10) $\int_{-2}^{2} e^{\sqrt{x+2}}dx$.

Solution.

1) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$,

on pose : $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$.

Et, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$.

Donc,

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-t^2)\, dt = \int dt - \int t^2 dt,$$
$$= t - \tfrac{t^3}{3} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$
$$= \sin x - \tfrac{\sin^2 x}{3} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$,

on pose, $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt$.

Et, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Donc,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \tfrac{1+co2t}{2}dt,$$
$$= \int \tfrac{1}{2}dt + \tfrac{1}{2}\int co2tdt,$$
$$= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right) + C,\quad C \in \mathbb{R},$$
$$= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}(\sin t \cos t) + C,$$
$$= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C,$$
$$= \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

3) $\int x^3 e^x dx$.

On utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= x^3 \Longrightarrow u' = 3x^2, \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

Donc, $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx,$

on note, $I_1 = \int x^2 e^x dx$, on utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= x^2 \Longrightarrow u' = 2x, \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

$I_1 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx,$

on note, $I_2 = \int x e^x dx$, on utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow u' = 1, \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

$I_2 = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1).$

Donc,

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_1 = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2I_2) = x^3 e^x - 3 (x^2 e^x - 2e^x (x - 1)),$

$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

4) $\int \frac{dx}{x^3+1}$,

on a

$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$, (décomposition en fractions simples).

Donc,

$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{1}{3(x+1)} dx + \int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} dx = I_1 + I_2.$

$I_1 = \int \frac{1}{3(x+1)} dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1|.$

$$I_2 = \int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{-1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = \frac{-1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$
$$= \frac{-1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{-1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}I_3.$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1},$$
on pose :

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = t \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}dx = dt.$$

Alors,

$$I_3 = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= I_1 + I_2\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{-1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}I_3,\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\cos dx,$

on pose

$t = \sin t \Longrightarrow dt = \cos x dx.$

Et,

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(1-\sin^2 x\right)^2 = (1-t^2)^2.$

Donc,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\cos dx &= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t}dt,\\ &= \int \frac{1-2t^2+t^4}{t}dt,\\ &= \int \frac{dt}{t} - 2\int t dt + \int t^3 dt,\\ &= \ln|t| - 2\left(\frac{1}{2}t^2\right) + \frac{1}{4}t^4 + C, \quad C \in \mathbb{R},\\ &= \ln|\sin x| - \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

6) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x},$

on pose $\quad t = \tan\frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$

On a,

$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}},$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right).$

Donc,

$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$

7) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx,$

on pose : $t = \ln x \Longrightarrow x = e^t$, et

$dt = \frac{1}{x} dx \Longrightarrow x dt = dx \Longrightarrow e^t dt = dx.$

Pour : $\begin{cases} x = 1, \quad t = \ln 1 = 0 \\ x = e^\pi, \quad t = \ln e^\pi = \pi \end{cases}$

$i.e,\ x : 1 \longrightarrow e^\pi \Longrightarrow t : 0 \longrightarrow \pi.$

Et,

$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx = \int_0^\pi e^t \sin t dt,$

on utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \sin t \Longrightarrow u' = \cos t, \\ v' &= e^t \Longrightarrow v = e^t. \end{aligned}$$

On obtient, $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx = \int_0^\pi e^t \sin t dt = [e^t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t dt,$

on utilise l'integration par parties, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \cos t \Longrightarrow u' = -\sin t, \\ v' &= e^t \Longrightarrow v = e^t. \end{aligned}$$

On obtient, $\int_0^\pi e^t \sin t dt = [e^t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t dt,$

$= [e^t \sin t]_0^\pi - [e^t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin t dt,$

$2\int_0^\pi e^t \sin t dt = \left[e^t \sin t\right]_0^\pi - \left[e^t \cos t\right]_0^\pi$,

et,

$\int_0^\pi e^t \sin t dt = \frac{1}{2}\left[e^t(\sin t - \cos t)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

8) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$,

on pose $\quad x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt$,

on a, $\ x : 0 \longrightarrow 1 \Longrightarrow t : 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt,\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1-\cos 4t}{2} dt,\\ &= \tfrac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \tfrac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = \tfrac{1}{8}\left[t - \tfrac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

9) $\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx,$ (integration par parties)

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

10) $\int_{-2}^2 e^{\sqrt{x+2}}dx$,

on pose $t = \sqrt{x+2} \Longrightarrow x = t^2 - 2 \Longrightarrow dx = 2t dt$,

on a, $x : -2 \longrightarrow 2 \Longrightarrow t : 0 \longrightarrow 2$.

Donc,

$\int_{-2}^2 e^{\sqrt{x+2}}dx = 2\int_0^2 te^t dx = 2\left[(t-1)e^t\right]_0^2 = 2(e^2+1)$.

Exercice 3.2

1) *Intégrer* $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$*, par parties.*

2) *Calculer* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Solution.

1) (Intégration par parties) on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{a^2-x^2} \Longrightarrow u' = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}},\\ v' &= 1 \Longrightarrow v = x.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx &= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \tfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \tfrac{-\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int \tfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int \tfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 \arcsin\left(\tfrac{x}{a}\right) + C, \;\; C\in\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

alors, $2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \;\; C\in\mathbb{R},$

$\Longrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \;\; C\in\mathbb{R}.$

2) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha},$

on pose $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $d\alpha = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$

Exercice 3.3 *Calculer les intégrales suivantes :*

$I_1 = \int \frac{1}{\sin x}dx, \;\; I_2 = \int \frac{1}{chx}dx, \;\; I_3 = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx, \;\; I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx.$

Solution.

• $I_1 = \int \frac{1}{\sin x}dx$, on pose $x = 2y$,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \tfrac{1}{\sin x}dx = \int \tfrac{2}{\sin 2y}dy = \int \tfrac{dy}{\sin y\cos y} = \int \tfrac{dy}{\frac{\sin y}{\cos y}\cos^2 y}\\
&= \int \tfrac{\frac{1}{\cos^2 y}}{\tan y}dy = \int \tfrac{dy}{\tan y\cos^2 y} = \int \tfrac{(\tan y)'}{\tan y}dy = \ln\left(\tan\tfrac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}
$$

• $I_2 = \int \frac{1}{chx}dx = \int \frac{1}{\frac{e^{-x}+e^x}{2}}dx = \int \frac{1}{e^{-x}(1+e^{2x})}dx = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx,$

on pose $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx.$

$I_2 = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2\arctan t = 2\arctan e^x + C, \;\; C\in\mathbb{R}.$

• $I_3 = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx,$

on utilise l'integration par parties, on choisit : $u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x},$

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Longrightarrow v = -\frac{1}{x+1}.$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\tfrac{\ln x}{x+1} + \int \tfrac{dx}{x(x+1)} = -\tfrac{\ln x}{x+1} + \int \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x+1}\right)dx,\\
&= -\tfrac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + C, \;\; C\in\mathbb{R},\\
&= -\tfrac{\ln x}{x+1} + \ln\tfrac{x}{x+1} + C, \;\; C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

• $I_4 = \int e^x \sin x dx$,

on utilise l'integration par parties deux fois, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \sin x \Longrightarrow du = \cos x dx, \\ dv &= e^x dx \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

Donc, $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx$, on choisit :

$$\begin{aligned} u &= \cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx, \\ dv &= e^x dx \Longrightarrow v = e^x. \end{aligned}$$

Donc,
$I_4 = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[[e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx \right]$,
$I_4 = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_4$,
$\Longrightarrow 2I_4 = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} + 1 \Longrightarrow I_4 = \frac{1}{2}$.

Chapitre 4

Équations différentielles

Définition 4.1 $\big($*Équation différentielle du premier ordre*$\big)$

Une équation différentielle ordinaire (EDO) *du premier ordre une équation qui a pour inconnue une fonction* y *d'une variable réelle* x, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *qui s'écrit sous la forme suivante :*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \tag{E}$$

où I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue de* $I \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui est connue. On cherche alors les fonctions* y *de classe* C^1 *qui vérifient l'équation.*

Définition 4.2 $\big($*Équation différentielle ordinaire*$\big)$

Une équation différentielle ordinaire notée EDO, *d'ordre* n *est une relation entre la variable réelle* $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, *une fonction inconnue* $x \longmapsto y(x)$ *et ses dérivées* y', ..., $y^{(n)}$ *au point* x *définie par*

$$f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ ...,\ y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Définition 4.3 $\big($*Équation différentielle normle*$\big)$

On appelle équation différentielle normale d'ordre n *toute équation de la forme*

$$y^{(n)}(x) = f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ ...,\ y^{(n-1)}(x)\right).$$

Définition 4.4 (*Équation différentielle autonome*)

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f\left(y(x),\ y'(x),\ ...,\ y^{(n-1)}(x)\right).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

4.1 Équations différentielles d'ordre 1

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1, une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où l'inconnue y est une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$, a et b sont deux fonctions continue sur un intervalle I.

Lorsque la fonction $b(x)$ est nulle, on dit que l'équation est **homogène du 1er ordre**. Elle s'écrit

$$y' + a(x)y = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$y_0(x) = ke^{-\int a(x)dx}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Un cas particulier important est celui où la fonction $a(x)$ est constante, dans ce cas l'équation est dit **équation différentielle linéaire homogène d'ordre** 1 **à coefficients constantes** et on écrit :

$$y' + ay = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$y_h(x) = ke^{-ax}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

• Résolution d'une équation différentielle linéaire $y' + a(x)\,y = b(x)$.

Si y_p est une **solution particulière** de cette équation alors, sa solution générale est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Exemple 4.1 *Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur* $\mathbb{R}^*$

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{x}{x^2+1}.$$

• *La solution de l'équation homogène,* $y' + \frac{2}{x}y = 0$ *est*

$$y_0(x) = ke^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{k}{x^2}, \quad \text{où} \ \ k \in \mathbb{R}.$$

• *La solution particulière de l'équation,* $xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

On a, $y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2} \Longrightarrow y_p'(x) = \frac{1}{x^2}k'(x) - \frac{2}{x^3}k(x)$.

Donc :

$xy_p' + 2y_p = \frac{x^2}{x^2+1} \Longleftrightarrow x\left(\frac{1}{x^2}k'(x) - \frac{2}{x^3}k(x)\right) + 2\left(\frac{k(x)}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1}$

alors,

$\frac{1}{x}k'(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow k'(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x\left(x^2+1\right)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$

$\Longrightarrow k(x) = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).$

Alors, $y_p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

• *Finalement la solution générale est* $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \frac{k}{x^2}, \ \ \text{où} \ \ k \in \mathbb{R}.$$

4.1.1 Équations à variables séparées

Une équation différentielle de $1ier$ ordre est dite **à variables séparées** si on peut l'écrire sous la forme

$$f(y)\,y' = g(x).$$

où, f et g sont des fonctions donneés.

Exemple 4.2 *Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle*

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)\, y.$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx \ln x$, on obtient :

$$\frac{y'}{y} = \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x},$$

donc : $\int \frac{y'}{y} dy = \int \frac{3 \ln x+1}{x \ln x} dx$, *alors*

$\ln |y| = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{x \ln x} dx = 3 \ln x + \ln (\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, *alors*

$$y = ke^{3 \ln x + \ln(\ln x)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

4.1.2 Équation de Bernoulli

Définition 4.5 *Une équation différentielle du premier ordre est dite* ***de Bernoulli*** *si elle a la forme*

$$y'(x) + g(x)\, y(x) + h(x)\, y^{\alpha}(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

où g et h sont des fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution :

On pose, $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, d'où $z'(x) = (1-\alpha)\, y'(x)\, y^{-\alpha}(x)$.

En divisant l'équation de Bernoulli par y^{α}, on obtient :

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}} + g(x)\, y^{1-\alpha}(x) + h(x) = \frac{z'(x)}{1-\alpha} + g(x)\, z(x) + h(x) = 0.$$

Donc, on obtient (une équation différentielle en z) une équation linéaire de 1^{er} ordre non homogène. On la résout par la méthode de la variation de la constante.

4.1.3 Équation différentielle de Riccati

Définition 4.6 *L'équation différentielle* ***de Riccati*** *est une équation de la forme*

$$y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^2(x) = 0.$$

Méthode de Résolution :

Il faut connaitre une solution particulière φ de l'équation de Riccati. On pose

$$u(x) = y(x) - \varphi(x).$$

Comme y et φ sont solutions de l'équation, on a

$[y(x) - \varphi(x)]' + g(x)[y(x) - \varphi(x)] + h(x)[y^2(x) - \varphi^2(x)] = 0,$

$u'(x) + g(x)u(x) + h(x)[y(x) - \varphi(x)][y(x) + \varphi(x)] = 0,$

$u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x) + \varphi(x)] = 0,$

$u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x) - (\varphi(x) - \varphi(x)) + \varphi(x)] = 0,$

$u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[u(x) + 2\varphi(x)] = 0,$

$u'(x) + [g(x) + 2h(x)\varphi(x)]\,u(x) + h(x)u^2(x) = 0.$

Cette dernière est une équation de Bernoulli que nous savons résoudre.

4.2 Équations différentielles d'ordre 2

Les équations différentielles linéaires du second ordre sont de la forme

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x).$$

où, f est une fonction donneé et, $.a$, b et c sont des fonctions continue sur un intervalle I.

Définition 4.7 *Une équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constante* *est une équation de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{E}$$

où a, b et c des constantes et $a \neq 0$ *et* f *une fonction continue sur* I (I *un ouvert de* $\mathbb{R}$). *L'équation homogène (ou sans second membre) associée est*

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{EH}$$

• La méthode de résolution de (E) se décompose en deux points

1. On résout l'équation homogène (EH). On obtient la solution : y_h.

2. On recherche une solution particulière de l'équation avec second membre : y_p.

La solution générale de l'équation (E) est alors : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

* **Résolution de l'équation homogène**

On cherche la solution de l'équation homogène (EH) sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc, $y' = re^{rx} = ry$ et $y'' = r^2e^{rx} = r^2y$, alors l'équation

$ay'' + by' + cy = 0 \Longleftrightarrow y(ar^2 + br + c) = 0.$

L'équation

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{EC}$$

se nomme **équation caractéristique** de (EH), et $\Delta = b^2 - 4ac.$

Proposition 4.1 *Suivant le signe de* $\Delta = b^2 - 4ac$ *on a les résultats suivants*

1) $\Delta > 0$: (EC) *admet* 2 *racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$ *et*

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

est une solution de (EH).

2) $\Delta = 0$: (EC) *admet* 1 *racine double* $r \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3) $\Delta < 0$: (EC) *admet* 2 *racine complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$ *et*

$$y(x) = (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))\, e^{\alpha x}.$$

Exemple 4.3 *Soit* $y'' - 4y' + 3y = 0$ *l'équation caractéristique est* $r^2 - 4r + 3 = 0$, $\Delta > 0$, *on a* 2 *racines réelles distinctes* $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, *et la solution est :*

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}.$$

Exemple 4.4 *Soit* $y'' + 2y' + y = 0$ *l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$, *admet* 1 *racine double* $r = -1$, *et la solution*

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\, e^{-x}.$$

Exemple 4.5 *Soit* $y'' + 2y' + 4y = 0$ *l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 4 = 0$, $\Delta = -12 < 0$, $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$, *et la solution*

$$y(x) = \left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right) e^{-x}.$$

* **Solution particulière de l'équation** (E)

1) $f(x)$ est un polynôme **de degré** n.

- Si $f(x)$ est un polynôme de degré n et $c \neq 0$ et $b \neq 0$, on peut montrer qu'une solution particulière est un polynôme de même degré.

- Si $f(x)$ est un polynôme de degré n et si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors la solution particulière sera un polynome de degré $n + 1$.

Exemple 4.6 *Soit* $y'' - 5y' + 6y = 3x$.

* *La solution de l'équation homogène est* $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

* *Détermination d'une solution particulière de l'équation.*

Le second membre est un polynôme d'ordre 1. *On recherche comme solution particulière un polynôme de même ordre :*

$y_p(x) = Ax + B,$

$y_p'(x) = A, \;\; y_p''(x) = 0,$

alors :

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 3x \Longleftrightarrow -5A + 6(Ax + B) = 3x$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

D'où : $y_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}.$

La solution générale de l'équation : $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2) $f(x) = P(x) e^{\alpha x}$, où $P(x)$ est un polynôme de degré p.

- Si α n'est pas solution de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x) e^{\alpha x}$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $q = p$

- Si α est une racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x) e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynome de degré $q = p + 1$.

- Si α est une racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = Q(x) e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynome de degré $q = p + 2$.

Exemple 4.7 *Soit l'équation suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

** La solution de l'équation homogène est* $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

** Détermination d'une solution particulière de l'équation.*

α est une racine d'ordre 1 de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière du type $y_p(x) = P(x) e^{\alpha x}$, *où $P(x)$ est un polynome de degré 1 :*

On a, $y_p(x) = (Ax + B) e^x,$

alors, $y_p'(x) = (Ax + B + A) e^x,$

et, $y_p''(x) = (Ax + B) e^x + Ae^x + Ae^x = (Ax + B + 2A) e^x.$

En injectant ces relations dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$(Ax+B+2A)\,e^{x}-3\,(Ax+B+A)+2\,(Ax+B)\,e^{x}=e^{x},$$

donc,

$(-A)\,e^{x}=e^{x}\Longrightarrow A=-1,$ *d'où* $y_p\,(x)=(-x)\,e^{x}.$

La solution générale de l'équation est :

$$y\,(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+(-x)\,e^{x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Donc : $y\,(x)=(c_1-x)\,e^{x}+c_2e^{2x},\;\; c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

3) $f\,(x)=K\sin\,(ax)$ ou $f\,(x)=K\cos\,(ax)\,.$

- Si $\sin\,(ax)$ ou $\cos\,(ax)$ n'est pas solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du type : $y=A\cos\,(ax)+B\sin\,(ax)\,,\;\; A,B\in\mathbb{R}.$

- Si $\sin\,(ax)$ ou $\cos\,(ax)$ est pas solution de l'équations sans second membre, on cherche une solution particulière du type : $y=Ax\cos\,(ax)+Bx\sin\,(ax)\,,\;\; A,B\in\mathbb{R}.$

Exemple 4.8 *Soit l'équation suivante :*

$$y''-3y'+2y=2xe^{3x}+3\sin x.$$

* *La solution de l'équation homogène associée est* $y_h\,(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x},\;\; c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

* *Détermination d'une solution particulière de l'équation.*

Le second membre est une combinaison linéaire d'une fonction trigonométrique et du produit d'une fonction exponentielle par un polynôme d'ordre 1. On recherche comme solution particulière du type :

$$y_p=(Ax+B)\,e^{3x}+C\sin\,(x)+D\cos\,(x)\,,\quad A,B,C,D\in\mathbb{R}.$$

On a, $y_p'=(3Ax+3B+A)\,e^{3x}+C\cos\,(x)-D\sin\,(x)\,,$

$y_p''=(9Ax+9B+6A)\,e^{3x}-C\sin\,(x)-D\cos\,(x)\,.$

L'équation différentielle appliquée à y_p conduit à :

$y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x} + 3\sin x \Longleftrightarrow$

$(9Ax + 9B + 6A)\, e^{3x} - C\sin(x) - D\cos(x) - 3\left[(3Ax + 3B + A)\, e^{3x} + C\cos(x) - D\sin(x)\right] + 2\left[(Ax + B)\, e^{3x} + C\sin(x) + D\cos(x)\right] = 2xe^{3x} + 3\sin x,$

Alors,

$(2Ax + 2B + 3A)\, e^{3x} + (C + 2D)\sin(x) + (D - 3C)\cos(x) = 2xe^{3x} + 3\sin x,$

et par identification, on obtient : $A = 1,\ B = -\frac{3}{2},\ C = \frac{3}{10},\ D = \frac{9}{10}.$

Donc :

$y_p = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x).$

- La solution générale est :

$y(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{3x} + \frac{3}{10}\sin(x) + \frac{9}{10}\cos(x) + c_1e^{x} + c_2e^{2x},\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

4.3 Exercices résolus

Exercice 4.1 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E):\quad y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad \textit{avec } x > 0.$$

(1) *Montrer que* $y_0 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ *est solution de* (E).

(2) *Chercher la solution générale de l'équation (à variables séparables)* $y' + \frac{y}{x} = 0$.

(3) *En déduire la solution générale de l'équation* (E).

(4) *Donner la solution de* (E) *vérifiant,* $y(1) = \sqrt{2} - 1$, *et calculer sa limite quand* $x \longrightarrow 0^+$.

Solution.

(1)

Si, $\forall x > 0,\ y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \Longrightarrow y_0'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}},$

alors,

$y' + \frac{y}{x} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

Alors, $y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ est solution de (E).

(2)

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x},$$
$$\iff \ln|y| = -\ln x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\iff y = \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\iff y = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(3)

Donc la solution génarale de (E) est : $\quad y(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

(4)

$$y(1) = \sqrt{2} - 1 \iff \sqrt{2} - 1 = \frac{\sqrt{1^2+1}}{1} + \frac{\lambda}{1},$$
$$\iff \lambda = -1, \quad \text{d'où } y(x) = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x},$$

de plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0.$$

Exercice 4.2 *Donner le nom de chaque type d'équation différentielle suivante :*

(1) $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $\qquad$ (2) $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}$, *où* $\alpha \neq 0$ *et* 1

(3) $M(x)\,dx + N(x)\,dy = 0$, $\qquad$ (4) $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = q(x)$.

Solution.

(1) Équation homogène.

(2) Équation de Bernoulli.

(3) Équation à variables séparées.

(4) Équation linéaire du premier ordre.

Exercice 4.3 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

(E_1) : $\; y' + 2y = x^2.$

(E_2) : $\; y' + y = 2\sin x.$

(E_3) : $y' - y = (x+1)\,e^x$.

(E_4) : $y' + y = x - e^x + \cos x$.

Solution.

(E_1) : $y' + 2y = x^2$, une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$,

les solutions sont : $y_h = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_1) . Le second membre étant polynomial de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme :

$y_p(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y_p'(x) = 2ax + b$,

et,

$(E_1) \Longleftrightarrow y_p' + 2y_p = x^2 \Longleftrightarrow 2ax + b + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = x^2$,

$\Longleftrightarrow 2ax^2 + 2(a+b)\,x + b + 2c = x^2$,

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a = 1, \\ 2(a+b) = 0, \\ b + 2c = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow a = \tfrac{1}{2},\ b = -\tfrac{1}{2},\ c = \tfrac{1}{4}.$$

Ainsi,

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_p(x) + y_h(x), \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(E_2) : $y' + y = 2\sin x$, une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constantes, avec second membre.

Les solutions $y_h = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin :

$y_p(x) = a\cos x + b\sin x$, et

$(E_2) \Longleftrightarrow (a+b)\cos x + (b-a)\sin x = 2\sin x.$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_p(x) = -\cos x + \sin x$ convient.

Les solutions de (E_2) sont :

$$y_g(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

(E_3) : $y' - y = (x+1)e^x$. Les solutions de l'équation homogène associée :

$y_h = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de (e^x) par une fonction polynomiale de degré $d+1 = 2$: $y_p(x) = (ax^2+bx+c)e^x$, et

$(E_3) \Longleftrightarrow (2ax+b)e^x = (x+1)e^x$. Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x$.

Les solutions de (E_2) sont :

$$\begin{aligned} y_g(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x + \lambda e^x, \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda\right)e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(E_4) : $y' + y = x - e^x + \cos x$. Les solutions de l'équation homogène associée :

$y_h = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque que le second membre est la somme d'une fonction polynomiale de degré 1, d'une fonction exponentielle (différente de e^{-x}) et d'une fonction trigonométrique. D'après le principe de superposition, on cherche donc une solution particulière sous la forme d'une telle somme :

$y_p(x) = ax + b + \mu e^x + \alpha\cos x + \beta\sin x$, et

$(E_4) \Longleftrightarrow ax + a + b + 2\mu e^x + (\alpha + \beta)\cos x + (\beta - \alpha)\sin x = x - e^x + \cos x.$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_p(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.

Les solutions de (E_4) sont :

$$y_g(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4.4 *Résoudre :*

(E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0.$

(E_2) : $y'' + 2y' + 2y = 0.$

(E_3) : $y'' - 2y' + y = 0.$

(E_4) : $y'' + y = 2\cos^2 x.$

Solution.

• (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0.$

Il s'agit d'une équation homogène du second ordre. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = 2$ et $r = 1$. Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

• (E_2) : $y'' + 2y' + 2y = 0.$ L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2r + 2 = 0$, qui admet deux solutions : $r = -1 + i$, et $r = -1 - i$.

Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, $y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\, e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

• (E_3) : $y'' - 2y' + y = 0.$ L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet une racine double : 1, Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme, $y(x) = (c_1 x + c_2)\, e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

• (E_4) : $y'' + y = 2\cos^2 x$. Les solutions de l'équation homogène sont :

$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Le second membre peut en fait se réécrire, $\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme :

$y_p(x) = a + \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$. En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = 0$, c-à-d : $y_p(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x$.

Les solutions générales sont donc,

$$y_g(x) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}., \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4.5 *Montrer que l'équation de Bernoulli*

$$y' + a(x)\, y + b(x)\, y^n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0, \ n \neq 1,$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction : $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

Solution.

On suppose qu'une solution y ne s'annule pas. On divise l'équation

$y' + a(x)\, y + b(x)\, y^n = 0$, par y^n, ce qui donne

$\frac{y'}{y^n} + a(x) \frac{y}{y^n} + b(x) \frac{y^n}{y^n} = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{y^n} + a(x) \frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$

On pose, $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$ et donc, $z'(x) = (1-n) \frac{y'}{y(x)^n}$.

L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n} z' + a(x)\, z + b(x) = 0.$$

Exercice 4.6 *Montrer que si* y_0 *est une solution particulière de l'équation de Riccati*

$$y' + a(x)\, y + b(x)\, y^2 = c(x).$$

alors, la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ *vérifie une équation de Bernoulli* $($*avec* $n = 2)$.

Solution.

Soit y_0 une solution de : $y' + a(x)\, y + b(x)\, y^2 = c(x)$.

Posons, $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$.

Et :

$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$.

Comme y_0 est une solution particulière alors,

$y_0' + a(x)\, y_0 + b(x)\, y_0^2 = c(x)$.

Et donc l'équation se simplifie en :

$u' + [a(x) + 2y_0(x)\, b(x)]\, u + b(x)\, u^2 = 0$,

qui est une équation du type Bernoulli.

Chapitre 5

Fonctions à plusieurs variables

Ce chapitre est consacré aux fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}^n$ ou une partie de $\mathbb{R}^n$, qu'on appellera son domaine de définition

5.1 Ensemble de définition d'une fonction de deux variables

On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y).$$

L'ensemble de définition de f (noté : D_f) est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples de réels tels que $f(x,y)$ existe.

Exemple 5.1 1) $f(x,y)=x+\frac{1}{2}y+1$, $D_f=\mathbb{R}^2$.

2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, D_f *est la boule fermée de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1.

3) $f(x,y)=(\ln x)(\ln y)$, $D_f=\mathbb{R}_+^2-\{(0,0)\}$.

Définition 5.1 *Soit* $f:D\to\mathbb{R}$ *une fonction défine sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$. *On appelle* $i-$ *ème fonction partielle au point* $a=(a_1,...,a_n)\in D$ *la fonction* f_i , *définie sur le* *domaine* $D_i = \{x \in \mathbb{R} / (a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) \in D\}$ *par :*

$$\forall x \in D_i, \quad f_i(x) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Exemple 5.2 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par* $f(x, y, z) = xy^2z^3$. *Soit* $a = (1, -1, 2)$. *Les fonctions partielles de* f *en* a *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$f_1(x) = f(x, -1, 2) = 8x.$

$f_2(x) = f(1, y, 2) = 8y.$

$f_3(x) = f(1, -1, z) = z.$

5.2 Limite et continuité

En dimension 1, on a vu que la notion de continuité est associée à celle de limite. Une fonction est continue en x_0 si $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$ lorsque x s'approche de x_0, c'est-à-dire lorsque $|x - x_0|$ devient petit. En dimension supérieure, pour définir les notions de limite et de continuité, il est tout d'abord nécessaire de définir une notion de proximité, c'est-à-dire de définir la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.2 (*Distance*)

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. *La distance de* u *à* v, *notée* $d(u, v)$ *est définie par :*

$$d(u, v) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|.$$

Définition 5.3 (*Limite*)

On dit que la fonction f *définie sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$ *admet la limite* l *en* u_0 *si pour tout* $\epsilon > 0$, *on peut trouver un* d_0 *tel que si* $d(u, u_0) \leq d_0$ *alors* $|f(u) - l| \leq \epsilon$.

On note

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l.$$

Interprétation : Le fait que f admette la limite l en u_0 signifie d'une part que si u est proche de u_0, alors $f(u)$ est proche de l, et surtout que l'on peut obtenir une approximation arbitraire de l par une évaluation de f en un point u, à condition que u soit assez proche de u_0.

Définition 5.4 (*Au cas où* $n = 2$)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in A$ *et* $l \in \mathbb{R}^m$, *alors* f *a pour limite* l *quand* (x, y) *tend vers* (x_0, y_0) *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, (\ |x - x_0| < \eta \text{ et } |y - y_0| < \eta) \Longrightarrow \|f(x, y) - l\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

Exemple 5.3 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *par*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

La fonction f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.

En effet, *on a*

$f(x, 0) = 0$ *pour tout* $x \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0$, (*le long de l'axe horizontal*).

et de même,

$f(0, y) = 0$ *pour tout* $y \neq 0$ *et* $\lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$, (*le long de l'axe vertical*).

Le long de la diagonale $x = y$, *on a* $f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ *pour tout* $x \neq 0$ *et donc,*

$\lim\limits_{x \to 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$. *La fonction* f *n'a pas donc pas de limite en* $(0,0)$.

Définition 5.5 *Une fonction* f *définie sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$ *est continue en un point* u_0 *si* $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, *elle est continue sur* D *si elle est continue en tout point de* D.

Remarque 5.1 *Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Notamment, les polynômes, les fractions rationnelles aux points où le dénominateur ne s'annule pas. Les règles de la continuité des fonctions d'une seule variable s'appliquent : la somme, le produit de fonctions continues sont des fonctions continues. La composée de deux fonctions continues est continue.*

Théorème 5.1 *Si f est continue en (x_0, y_0), les deux applications partielles*

$f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ et $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

Attention! la résiproque de ce théorème est fausse.

Exemple 5.4 *Soit f la fonction définie par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Les applications partielles

$f_x : x \mapsto f(x, 0)$ et $f_y :\mapsto f(0, y)$ sont toutes deux constantes nulles sur $\mathbb{R}$, et en particulier elles sont continues en $(0,0)$. Par contre f n'est pas continue en $(0,0)$ puisque pour tout réel x non nul : $f(x,x) = \frac{1}{2}$.

5.3 Dérivées partielles d'une fonction

5.3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 5.6 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U et (x_0, y_0) un point de U.*

- *Si la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0) et on note :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- *De même, si l'application partielle $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, on dit f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0) et on note :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Définition 5.7 *On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert $U \subseteq A$ de $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur U si, elle admet des dérivées partielles et sont continues sur U.*

5.3.2 Développement limité d'ordre 1

Théorème 5.2 *Soit f une fonction de classe C^1 sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de D. Alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 donné par :*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (|x-x_0| + |y-y_0|)\,\epsilon(x,y),$$

$$\text{avec,} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0.$$

Autrement dit, toute fonction de classe C^1 en (x_0, y_0) admet une approximation affine en ce point.

Définition 5.8 *(Dérivées partielles d'ordre supérieur).*

Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. Si ses dérivées partielles d'ordre 1 sont encore dérivable par rapport à chaque variable, leurs dérivées partielles sont appelées dérivées partielles secondes. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre n comme les dérivées partielles des dérivées d'ordre $n-1$.

5.3.3 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 5.9 *Une fonction de classe C^1 sur un ouvert U admet des dérivées partielles d'ordre 2 en un point (x_0, y_0) de U si et seulement si, ses deux dérivées partielles d'ordre 1 admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y en (x_0, y_0). On note :*

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = f''_{x^2}(x_0,y_0).$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0).$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = f''_{y^2}(x_0,y_0).$

Définition 5.10 *Une fonction f définie sur un ouvert U est dite de classe C^2 sur U si toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U.*

Exemple 5.5 *Calculons quelques dérivées partielles successives de* $f(x,y,z) = xy^2z^3$. *On a*

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^2,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 2yz^3,$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y,z) = 2z^3, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = 6yz^2,$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x,y,z) = 0.$

Proposition 5.1 *(Lemme de Schwarz). Soit* f *une fonction définie sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$. *Soient* $i \neq j$ *deux entiers compris entre* 1 *et* n. *Si les dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *existent et sont continues, alors elles sont égales.*

Exemple 5.6 *Soit* $f : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \left(\sqrt{x^3y}\right)$. *Alors, pour* $x, y > 0$, *on a*

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}},$
$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\sqrt{xy}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{y}},$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{y}}.$

5.3.4 Développement limité d'ordre 2

Théorème 5.3 *Soit* f *une fonction de classe* C^2 *sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^2$ *et* (x_0, y_0) *un point de* D. *Alors elle admet un développement limité à l'ordre* 2 *donné par :*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \left(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2\right)\epsilon(x,y), \end{aligned}$$

$$\textit{avec,} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0.$$

Exemple 5.7 *Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = \frac{(x+y)}{(x-y)}$. . Cette fonction est bien définie et admet des dérivées partielles de tout ordre au voisinage du point $(1,-1)$.*

Calculons son développement limité à l'ordre 2.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2y}{(x-y)^2}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{(x-y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4y}{(x-y)^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4y}{(x-y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\frac{x+y}{(x-y)}$.

On évalue ces dérivées partielles en $(-1,1)$ on obtient :

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \frac{1}{2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) = -\frac{1}{2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,1) = 0$.

On obtient le développement limité de f à l'ordre 2 en $(-1,1)$:

$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x-1)+(y+1)\right] - \frac{1}{4}\left[(x-1)^2+(y+1)^2\right] + \left[|x-1|^2+|y+1|^2\right]\epsilon(x,y)$,

avec : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$.

Notation de Monge : En un point donné (x_0, y_0), il est d'usage de noter, quand il n'y a pas d'ambigüité sur le point concerné :

$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$,
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, $\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.

5.3.5 Extrema

Le but de cette section est de trouver des conditions pour qu'un point (x_0, y_0) soit un point extrémal d'une fonction de deux variables.

Dans le cas d'une fonction dérivable d'une seule variable, on sait que la dérivée première s'annule en un extremum.

La nature de l'extremum, minimum ou maximum dépend de la dérivée seconde si elle existe.

Dans le cas d'une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles à l'ordre 2, si (x_0, y_0) est un extremum, alors les dérivées partielles sont nulles. La nature de l'extremum est alors donnée par les dérivées partielles secondes.

La situation est plus complexe que dans le cas d'une seule variable

Définition 5.11 *La fonction f définie sur un ouvert U admet* ***un maximum local*** *(ou relatif) en un point (x_0, y_0) si, il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V,*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

De même, f admet ***un minimum local*** *au point (x_0, y_0) si, il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V,*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Définition 5.12 *La fonction f définie sur un ouvert U admet* ***un maximum global*** *en un point (x_0, y_0) si pour tout point $(x, y) \in U$,*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

De même, f admet ***un minimum global*** *au point (x_0, y_0) si pour tout point $(x, y) \in U$,*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

.

Remarque 5.2 *L'étude d'existence d'extrema global sur un domaine qui peut être non borné n'est pas facile à faire.*

Théorème 5.4 *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 en (x_0, y_0). Si (x_0, y_0) est* ***un extremum,*** *alors les deux dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent en (x_0, y_0).*

Exemple 5.8 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

Ses dérivées premières sont,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$

Les dérivées premières s'annulent donc simultanément uniquement en $(0,0)$.

Exemple 5.9 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy$.*

Ses dérivées premières sont,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$

Les dérivées premières s'annulent donc simultanément uniquement en $(0,0)$.

La première partie de la recherche d'un extremum consiste donc à trouver les points d'annulation des dérivées partielles premières. Une fois ces points trouvés, il faut en déterminer la nature. Un point où les dérivées partielles première s'annule n'est pas nécessairement un extremum. Un tel point est appelé **point stationnaire** (**point critique**).

• Soit (x_0, y_0) *un point stationnaire* de la fonction f. Trois cas peuvent se produire :

1) (x_0, y_0) est **un maximum**, c'est-à-dire qu'il existe un domaine D autour de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$.

2) (x_0, y_0) est **un minimum**, c'est-à-dire qu'il existe un domaine D autour de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

3) (x_0, y_0) n'est ni un maximum, ni un minimum, c'est-à-dire que pour tout domaine D contenant (x_0, y_0), contient aussi des points (x,y) et (x', y') tels que $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ et $f(x', y') > f(x_0, y_0)$. Un tel point est appelé **point selle**.

Pour distinguer de tels extrema, il est nécessaire de considérer la dérivée seconde.

Proposition 5.2 *Soit f une fonction admettant des dérivées partielles secondes continues au point (x_0, y_0). On note :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Ce qu'on appelle les notations de Monge, si (x_0, y_0) est un point critique de f alors, on a les cas suivants :

- Si $s^2 - rt < 0$, (x_0, y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$).

- *Si* $s^2 - rt > 0$, (x_0, y_0) *il n'y a pas d'extremum en ce point.*

- *Si* $s^2 - rt = 0$ *on ne peut pas conclure, il faut chercher le signe de* $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ *selon d'autres moyens.*

Conclusion 5.1 *Pour chercher les extremums éventuels d'une fonction* f *de classe* C^2 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

- *On cherche les points critiques, qui vérifient :* $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$

- *Les extrémums sont à chercher parmi les points critiques.*

- *On calcule les expressions théoriques de* r, s, t, *où* $\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0). \end{cases}$

- *En chaque point critique* (x_0, y_0) *on calcule* $s^2 - rt$, *et on conclut à l'aide de la Proposition 5.2.*

Exemple 5.10 *Soit* $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Ses dérivées partielles d'ordre 1 *et* 2 *sont :*

$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15,$

$q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12,$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x,$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y,$

$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x.$

On cherche d'abord les points critiques en résolvant le système $p = q = 0$:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

On a donc 4 *points critiques* $A = (1, 2)$, $B = (-1, -2)$, $C = (2, 1)$, $D = (-2, -1)$.

Pour chacun d'entre eux calculons $s^2 - rt$:

• *Pour A et pour B : $s^2 - rt > 0$: f n'admet pas d'extremum en ces points.*

• *Pour C : $s^2 - rt < 0$: et $r > 0$: la fonction f admet un minimum local au point $(2,1)$, et ce minimum vaut $f(2,1) = -28$.*

• *Pour D : $s^2 - rt < 0$: et $r < 0$: la fonction f admet un maximum local au point $(-2,-1)$, et ce maximum vaut $f(-2,-1) = 28$.*

5.4 Différentiabilité

Définition 5.13 *On dit que f de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est différentiable au point P, si il existe un opérateur linéaire L tel que*

$$\begin{aligned} f(P+h) - f(a) &= L.h + \|h\|_A \epsilon(h), \\ \text{avec,} \lim_{\|h\|_A \to 0} \epsilon(h) &= 0 \end{aligned}$$

L'opérateur linéaire s'appelle la différentielle au point P. Elle sera noté $df(P)$ et simplement df s'il n'y a pas d'ambiguïté. h est bien sûr un élément de l'ensemble A et sert à définir la "direction" de dérivation (pour la différentiabilité, on les prend toutes en considérations).

• De manière équivalente on peut dire que f est différentiable au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si l'expression :

$$\frac{f(x_{01}+h_1,...,x_{0n}+h_n) - f(x_{01},...,x_{0n}) - h_1\partial_{x_1}f(x_0) - ... - h_n\partial_{x_n}f(x_0)}{\sqrt{h_1^2+...+h_n^2}},$$

tend vers 0 lorsque $(h_1,...h_n) \longrightarrow (0,...,0)$.

Pour fixer les idées et bien comprendre ce à quoi correspond l'opérateur linéaire L, nous allons redonner cette définition dans le cas d'une fonction de trois variables.

Définition 5.14 *Soient a, b et c trois réels, on dit que f est différentiable au point*

(a, b, c) *si, il existe trois constantes réelles* A, B *et* C *telles que :*

$$\begin{aligned} f(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - f(a,b,c) &= A \times h_1 + B \times h_2 + C \times h_3 \\ &= \|(h_1, h_2, h_3)\|_A \, \epsilon(h_1, h_2, h_3), \end{aligned}$$

$$\textit{avec,} \quad \lim_{\|(h_1,h_2,h_3)\|_A \to 0} \epsilon(h_1, h_2, h_3) = 0.$$

La fonction $(h_1, h_2, h_3) \to Ah_1 + Bh_2 + Ch_3$ *est bien une application linéaire et ainsi* (A, B, C) *définit notre opérateur linéaire.*

Exemple 5.11 *Soit une fonctionnelle* f *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *déninie par :* $f(x, y) = x^4 + 3x^2y$.

Plaçons nous au point $(1, -1)$:

$$f(1+h_1, -1+h_2) - f(1,-1) = \left[(1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2)\right] - (-2)$$

$$= 1 + 4h_1 + 6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + \left(3 + 6h_1 + 3h_1^2\right)(-1+h_2) + 2$$

$$= 1 - 3 + 2 + (4-6)h_1 + 3h_2 + \left(6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 - 3h_1^2 + 6h_1h_2 + 3h_1^2h_2\right)$$

$$= -2h_1 + 3h_2 + \|(h_1, h_2)\|_A \, \epsilon(h_1, h_2).$$

On vérifie bien que, $\epsilon(h_1, h_2) \to 0$ *quand* $(h_1, h_2) \to (0, 0)$.

Donc f *est différentiable au point* $(1, -1)$ *et sa différentielle est l'application linéaire :*

$$df(1,-1) : (h_1, h_2) \to -2h_1 + 3h_2.$$

On remarque que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^2 + 6xy \ \textit{et} \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2,$$

et,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -2 \ \textit{et} \ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 3,$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.

Théorème 5.5 *Si f est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable sur U.*

Réciproquement, *si f est différentiable sur U alors f admet des dérivées partielles. Celles-ci ne sont pas forcément continues et donc on n'a pas la réciproque complète. De plus, les dérivées partielles sont les coefficients de l'opérateur linéaire comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = l_i$$

où l_i est la ième composante de l'opérateur linéaire L.

Exemple 5.12 *Cet exemple va nous permettre d'illustrer le théoréme précédent.*

Soit f une fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

D'après les théorémes généraux des compositions sur les fonctions de classe C^1, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. *f est continue en $(0,0)$.*

En effet,

$|f(x,y)| \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

2. *Dérivées partielles premières en $(0,0)$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(h_1,0) - f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} h_1 \sin \frac{1}{|h_1|} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(h_2,0) - f(0,0)}{h_2} = 0.$$

3. *Dérivées partielles premières sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2 y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

4. *Différentiabilité en* $(0,0)$:

Si f *est différentiable en* $(0,0)$, *alors on a correspondance avec les dérivées partielles et donc l'opérateur linéaire est l'opérateur nul. On a ainsi que :*

$$|\epsilon(h_1,h_2)| = \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{\left|h_1^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|}{\|(h_1,h_2)\|} \leq \frac{h_1^2}{\|(h_1,h_2)\|} \leq \|(h_1,h_2)\|,$$

or, $\|(h_1,h_2)\| \to 0$ *quand* $(h_1,h_2) \to (0,0)$. f *est donc différentiable en* $(0,0)$.

5. f *est elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$?

Si $x > 0$ *alors,*

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, *n'admet pas de limite quand* x *tend vers* 0.

Ainsi, cette dérivée partielle n'est pas continue en $(0,0)$ *et donc,* f *n'est pas de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.15 (*Matrice Jacobienne*)

La matrice des dérivées partielles de $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *au point* a *s'appelle* ***la matrice jacobienne*** *de* f. *On la note* $J_f(a)$, *elle a* m *colonnes et* n *lignes :*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

La première colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de f par rapport à la première variable x_1, la deuxième colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de f par rapport à la deuxième variable x_2 et ainsi de suite.

Exemple 5.13 *Calculons le jacobien de la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = \left(x^2 + x\cos y, e^{x-y}, y^3 x\right).$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 2x + \cos y & -x\sin y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ y^3 & 3y^3 x \end{pmatrix}.$$

Définition 5.16 *f est dite de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$ lorsque chacune des applications coordonnées est de classe C^1 sur U.*

5.4.1 Différentielle d'une application composée

Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit g une application de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(u)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors la fonction composée gof définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est de classe C^1 sur U et sa matrice jacobienne est donnée pour tout $a \in U$ par :

$$J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Exemple 5.14 *Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par*

$$g(u,v) = \left(u^2 + v^2, u^2 - v^2\right).$$

Calculer le jacobien de l'application h de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par :

$$h(x,y) = g(x+y, xy).$$

- La fonction h est la composée de g par l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par : $f(x,y) = (x+y, xy)$ et dont le jacobien est la matrice :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

et,

$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Donc, $J_h(x,y) = J_g(x+y, xy) \times J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$.

Il faut remplacer u par $x+y$ et v par xy :

$$J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y) + 2xy^2 & 2(x+y) + 2yx^2 \\ 2(x+y) - 2xy^2 & 2(x+y) - 2yx^2 \end{pmatrix},$$

ce que l'on pouvait directement en calculant explicitement $h(x,y) = \left((x+y)^2 + x^2y^2, (x+y)^2 -\right.$

Opérateurs différentiels

Nabla :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \overrightarrow{\text{grad}} f,$$

où f est un champs scalaire.($i.e$, f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$).

Laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \ \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

où, f est un champs scalaire.

Divergence :

$$Div\,\overrightarrow{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

un champs vectoriel ($i.e$, f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$).

Rotationnel :

$$rot\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\nabla} \wedge f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

5.5 Intégrales double, triple

5.5.1 Intégrale double

Définition 5.17 *Une* ***subdivision*** *S de $[a,b]\times[c,d]$ est une partition du pavé $[a,b]\times[c,d]$ en $m\times n$ pavés.*

$I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ...n\}$, avec $x_0 = a$, $x_m = b$ et $y_0 = c$, $y_n = d$.

Le pas *$\delta(S)$ de la partition est le maximum des $(x_i - x_{i-1})$ et $(y_j - y_{j-1})$.*

Pour tout choix de mn points $h_{ij} \in I_i \times J_j$, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ...n\}$, on appelle ***somme de Riemann*** *de $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ le nombre*

$$R(f, S, \{h_{ij}\}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(h_{ij}).$$

Théorème 5.6 *Si la limite $\lim\limits_{\delta(S)\to 0} R(f, S, \{h_{ij}\})$ existe alors elle est indépendante du choix des points $h_{ij} \in I_i \times J_j$, on la note*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\delta(S)\to 0} R(f, S, \{h_{ij}\}).$$

Définition 5.18 *Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite l'****integrale double*** *de f sur $[a,b]\times[c,d]$ et on dit que f est* ***integrable au sens de Riemann*** *sur $[a,b]\times[c,d]$.*

Proposition 5.3 *Toute fonction continue $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.*

• On note D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenu dans **un rectangle** $[a,b]\times[c,d]$ (autrement dit, D est bornée).

Définition 5.19 *On appelle **fonction indicatrice** de D l'application notée* $1_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *définie par*

$$1_D(x, y) = \begin{cases} 1, & si \quad (x, y) \in D \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Définition 5.20 *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $D \subset [a, b] \times [c, d]$ si $1_D f$ est intégrable sur $[a, b] \times [c, d]$ et on pose :*

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} 1_D(x, y) f(x, y)\, dxdy.$$

Propriété

1. Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R alors

$$\int\int_R (f + g)(x, y)\, dxdy = \int\int_R f(x, y)\, dxdy + \int\int_R g(x, y)\, dxdy.$$

2. Soit f une fonction intégrable sur un rectangle fermé R et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int\int_R \lambda f(x, y)\, dxdy = \lambda \int\int_R f(x, y)\, dxdy.$$

3. Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R telles que $\forall (x, y) \in R$, $f(x, y) \leq g(x, y)$, alors

$$\int\int_R f(x, y)\, dxdy \leq \int\int_R g(x, y)\, dxdy.$$

Théorème 5.7 (*Théorème de Fubini sur le rectangle.*)

Soit $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, une fonction continue, on a

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x, y)\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy. \end{aligned}$$

Corollaire 5.1 *On a*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dxdy = \int_a^b f_1(x)\, dx \int_c^d f_2(y)\, dy.$$

Exemple 5.15 $\int\int_{[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} x\cos y dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 [\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$

Exemple 5.16 $\int\int_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\, dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_0^1$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}.$$

Théorème 5.8 (*Théorème de Fubini sur* D)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors*

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

• *Si* D *est décrit avec deux applications continues* $a,\ b : [c,d] \to \mathbb{R}$ *telle que,*
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}$ *alors*

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx\right) dy.$$

Exemple 5.17 $\int\int_D x^2ydxdy,$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}.$

On a :

$\int\int_D x^2ydxdy = \int_{-1}^1 x^2dx \int_{x^2}^1 ydy = \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^1,$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\, dx = \frac{2}{15}.$$

Exemple 5.18 $\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2+y^2 \leq 1\},$

on a donc

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}.$

Ainsi

$\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy,$
$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{1-x^2}}dy.$

On effectue le changement de variable :

$y = \sqrt{1-x^2}\sin t, \;\; dy = \sqrt{1-x^2}\cos t dt, \;\;$ *et*

$$\sin t = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = -1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \end{cases}, \;\; \textit{donc} : \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{1-x^2}}dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\sqrt{1-x^2}\cos t dt,$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-x^2\right)^2 \cos^2 t dt,$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^2 dx \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{2\pi}{3}.$$

Changement de variables

Soit h une application définie comme suit

$$\begin{array}{ccc} h & : & \Delta \longrightarrow D \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)). \end{array}$$

h est une application de classe C^1 qui est bijective et dont la réciproque $h^{-1} : D \longrightarrow \Delta$ est aussi de classe C^1 (c'est-à-dire *un* $C^1 - \textit{difféomorphisme}$).

Rappelons que **le jacobien** J_h est le déterminant de la matrice jacobienne J_h :

$$J_h(u,v) = \det J_h(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

Théorème 5.9 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $h : \Delta \longrightarrow D$ *un* C^1-*difféomorphisme alors*

$$\int\int_\Delta f(x,y)\,dxdy = \int\int_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\,|Jh(u,v)|\,dudv.$$

* ***Changement de variables en coordonnées polaires :*** *on pose* $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$

L'application

$$h : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \diagdown \{y = o,\ x \leq 0\}$$

$$(\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

est un C^1-*difféomorphisme et*

$$J_h(u, v) = \det J_h(u, v) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

* *Si* $D \subset \mathbb{R}^2 \diagdown \{y = o,\ x \leq 0\}$, *alors*

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int\int_{h^{-1}(D)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho d\rho d\theta.$$

Exemple 5.19 $\int\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$, *où* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$,

En coordonnées polaires : $\begin{cases} \theta \in [0, 2\pi], \\ \rho \in [0, 1]. \end{cases}$

$h : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow D$

$(\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

- La formule de changement de variable s'écrit

$\int\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho d\theta.$

- Le théorème de Fubini permet de séparer les variables :

$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_{[0,1]} \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho \int_{[0,2\pi]} d\theta = 2\pi \int_{[0,1]} \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho.$

- Par changement de variable : $t = 1 - \rho^2,\ \ dt = -2\rho d\rho.$

$2\pi \int_{[0,1]} \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho = 2\pi \int_1^0 \sqrt{t}\left(\frac{1}{-2}\right) dt = \pi \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2\pi}{3}.$

5.5.2 Intégrale triple

• On définit l'intégrale triple d'une fonction

$$f : [a,b] \times [c,d] \times [e,l] \longrightarrow \mathbb{R}$$

similairement à l'intégrale double au moyen de sommes de Riemann

$$R(f, S, \{h_{ijk}\}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) f(h_{ijk}),$$

sur des subdivisions S en parallélépipèdes.

• Lorsque la limite $\lim\limits_{\delta(S)\to 0} R(f, S, \{h_{ijk}\})$ existe, elle est indépendante du choix des points h_{ijk} et on la note :

$$\int\int\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,l]} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

• On dit alors que f est **intégrable au sens de Riemann** sur $[a,b] \times [c,d] \times [e,l]$ et on appelle cette limite l'**intégrale triple** de f sur $[a,b] \times [c,d] \times [e,l]$.

• On dit enfin qu'une fonction $f : [a,b] \times [c,d] \times [e,l] \longrightarrow \mathbb{R}$, est intégrable sur $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,l]$ si $1_D f$ est intégrable sur $[a,b] \times [c,d] \times [e,l]$ et on pose

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,l]} 1_D(x,y) f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Théorème 5.10 (*de Fubini I*)

Soit $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,l]$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue alors

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^l f(x,y,z)\, dz,$$

(*dans l'ordre qu'on voudra*)

Théorème 5.11 *(de Fubini II) Soient*

$$D = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /$$

$$x \in [a, b]\,,\; y \in (c(x), d(x))\,,\; z \in (e(x, y), l(x, y)) \}$$

et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue alors*

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{l(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

Exemple 5.20 *Soit à calculer* $I = \int\int\int_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\, dxdydz$*. En appliquant le théorème de Fubini on obtient :*

$$I = \int_2^3 dx \int_1^2 dy \int_0^1 \left(x^2 - 2yz\right) dz = -\frac{43}{6}.$$

Exemple 5.21 *Soit* Ω *le cylindre plein de hauteur* 3 *et de base le disque* D*, où*
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\; x^2 + y^2 \leq 1,\; z = 0\}$.
On cherche à déterminer, $J = \int\int\int_\Omega (1 - 2yz)\, dxdydz$.

- On a : $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\; x^2 + y^2 \leq 1,\; 0 \leq z \leq 3\}$,
$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\; x \in [-1, 1]\,,\; y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right] \leq 1,\; z \in [0, 3]\right\}$.
- En appliquant la deuxième version du théorème de Fubini, on obtient :
$J = \int_0^3 dz \int\int_D (1 - 2yz)\, dxdy = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - 2yz)\, dy = 3\pi.$

Changement de variables

Théorème 5.12 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues et* $h : \Delta \longrightarrow D$ *un* C^1-*difféomorphisme alors*

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$\int\int\int_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |J_h(u, v, w)|\, dudvdw.$$

Corollaire 5.2

- ***En coordonnées cylindriques :*** $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *et*

$$dxdydz = |\det J_h(\rho, \theta, z)|\, d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz.$$

- ***En coordonnées sphériques :*** $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

et

$$dxdydz = |\det J_h(r, \theta, \varphi)|\, drd\theta d\varphi = r^2 \sin\varphi drd\theta d\varphi.$$

Exemple 5.22 *Considérons à nouveau l'intégrale* $J = \int\int\int_\Omega (1 - 2yz)\, dxdydz$*, sur le cylindre plein* Ω *de hauteur* 3 *et de base le disque* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0\}$.

- *On a :* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 3\}$,

- *En coordonnées cylindriques,*

$\Omega = \{(\rho, \theta, z) / \ \rho \in [0,1], \ \theta \in [0, 2\pi], \ z \in [0,3]\}$.

Donc,

$J = \int\int\int_\Omega (1 - 2yz)\, dxdydz = \int_0^3 dz \int\int_D (1 - 2yz)\, dxdy$

$= \int_0^3 dz \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho(\sin\theta)\, z)\, d\theta = 3\pi.$

Définition 5.21 *Soit* $D \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, l]$. *On appelle* ***volume*** *de* D *le nombre :*

$$Vol(D) = \int\int\int_D dxdydz.$$

Exemple 5.23 *En coordonnées sphériques, la boule unité* B *s'écrit :*

$$B = \{(r, \theta, \varphi) / \ r \in [0,1], \ \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, \pi]\},$$

ainsi,

$$Vol\,(D) = \int\int\int_B dxdydz,$$

$$= \int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi,$$

$$= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \left(\frac{1}{3}\right) 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

5.6 Exercices résolus

Exercice 5.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *définie par*

$$f\,(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & si \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

1) *Etudier la continuité de* f *en* $(0,0)$.

2) *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3) f *est-elle différentiable en* $(0,0)$?

4) f *est-elle de classe* C^1 *en* $(0,0)$?

5) *Camculer* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. *Que peut-on déduire.*

Solution

1) $|f\,(x,y)| = \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| y^2 \leq \frac{1}{2}y^2 \longrightarrow 0.$

Alors,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f\,(x,y) = 0 = f\,(0,0) \Longrightarrow f \text{ est continue en } (0,0)\,.$$

2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3\left(x^2+y^2\right)-2x\left(xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^5-x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2\left(x^2+y^2\right)-2y\left(xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3x^3y^2+xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$

3)

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\rho\longrightarrow 0} r\cos\theta\sin^3\theta = 0.$$

Alors, f est-elle différentiable en $(0,0)$.

4)

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\rho\longrightarrow 0} r\left(\sin^5\theta - \cos\theta\sin^4\theta\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \lim_{\rho\longrightarrow 0} r\left(3\cos^3\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin^4\theta\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\end{aligned}$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sont deux fonctions continues en $(0,0)$.

Donc, f est de classe C^1 en $(0,0)$.

5)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 1.$$

On remarque que, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, alors f n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$.

Exercice 5.2 *Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on pose*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Solution.

• f est définies sur $\mathbb{R}^2$.

• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Continuité en $(0,0)$.

Pout $(x,y) \neq (0,0)$,

$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy| |x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|$.

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers $(0,0)$ on a donc

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0) .$$

On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est de classe C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

• Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a $f(x,y) = -f(x,y)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$.

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq 0,\\ 0 \quad \text{si} & (x,y)=0.\end{cases} \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq 0,\\ 0 \quad \text{si} & (x,y)=0.\end{cases}$$

• Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y|\left|x^4+4x^2y^2-y^4\right|}{(x^2+y^2)^2}\leq |y|\,\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\leq |y|\,\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 2\,|y|\,.$$

Comme $2\,|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$.

Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Et on a montré que : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.3 *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, *où*

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$.

Solution.

On commence par écrire le domaine d'une meilleure façon. On a

$$(x,y)\in D \Longleftrightarrow x\in[0,1] \text{ et } 0\leq y\leq 1-x.$$

Donc, $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\right]dx,$

$$=\int_0^1\left[\left(x^2y+\tfrac{1}{3}y^3\right)\right]_0^{1-x}dx,$$
$$=\int_0^1\left(-\tfrac{4}{3}x^3+2x^2-x+\tfrac{1}{3}\right)dx=\tfrac{1}{6}.$$

Exercice 5.4 *Soit D le domaine :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ -1 \leq x \leq 1 \ \ et\ x^2 \leq y \leq 4 - x^3\right\}.$$

Calculer l'aire de D.

Solution.

Il suffit de raisonner par intégrations successives.

$aire\,(D) = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{4-x^3} dydx = \int_{-1}^{1}(4 - x^3 - x^2)\,dx$

$= \left[4x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{22}{3}.$

Exercice 5.5 *Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.*

1) *Montrer que D est un disque.*

2) *Calculer $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.*

Solution.

1) On a, $x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$, alors

$x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$

D est le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

2) On passe en coordonnées polaires, avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

On a, $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Longrightarrow \rho^2 - 2\rho\cos\theta \leq 0,$

$\Longrightarrow 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta,$

tendis que θ varie dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc,

$\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho d\theta,$

$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta\right)d\theta = \frac{32}{9}.$

Exercice 5.6 *Soit B la boule unité et $a > 1$. Calculer*

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$$

Solution.

On passe en coordonnées sphériques, en posant :

$x = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ y = r\cos\theta\sin\varphi,\ \ z = r\sin\varphi.$

On obtient :

$$\begin{aligned}\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}d\theta d\varphi dr,\\ &= 2\pi\int_0^1 r^2\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}d\varphi\right]dr,\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale en effectuant le changement de variables :

$t = r^2+a^2-2ar\cos\varphi \Longrightarrow dt = 2ar\sin\varphi d\varphi,$

on obtient,

$\int_0^1 r^2\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}d\varphi\right]dr = 2\pi\int_0^1 r^2\left[\int_{(a-r)^2}^{(r+a)^2}\frac{dt}{2ar\sqrt{t}}\right]dr = \frac{4\pi}{a}\int_0^1 r^2 dr = \frac{4\pi}{3a}.$

Bibliographie

[1] K. ALLAB, Elements d'Analyse, OPU (1986).

[2] BENYAD A., BENHASSAINE M., Mathématiques, EXWERCICES RESOLUS, Office des Publications Universitaires : 04 2004.

[3] MESSAOUD HANNACHI, EXERCICES D'ANALYSE MATHEMATIQUES, Office des Publications Universitaires : 02 2000.

[4] Mohamed MEHBALI, Mathématiques, $1ère$ année Universitaire, Office des Publications Universitaires : 01 2003.

[5] SALAH GOURARI, ALGEBRE-LINEAIRE, COURS ET EXERCIXES RESOLUS, Office des Publications universitaires : 11 1993.