République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié de cours

Première année socle commun

Domaine : Sciences de la matière

Module : Mathématiques 1 & Mathématiques 2

Réalisé par :
Dr. BOULARES Hamid

Année universitaire
2022/2023

Table des matières

1 Méthodes du Raisonnement Mathématique **5**

1.1 Logique Mathématique . . . 5

1.1.1 Assertions . . . 5

1.1.2 Les opérateurs logiques mathématique . . . 5

1.1.3 Quantificateurs . . . 8

1.2 Raisonnements . . . 10

1.2.1 Raisonnement direct . . . 10

1.2.2 Raisonnement par contraposition . . . 10

1.2.3 Raisonnement par l'absurde . . . 11

1.2.4 Raisonnement cas par cas . . . 11

1.2.5 Raisonnement par contre exemple . . . 12

1.2.6 Raisonnement par récurrence . . . 12

1.3 Exercices . . . 13

1.3.1 Énoncés . . . 13

1.3.2 Correction des exercices . . . 14

2 Les ensembles, les relations et les applications **18**

2.1 Théorie des ensembles . . . 18

2.1.1 Inclusion, union, intersection, complémentaire . . . 18

2.1.2 Produit cartésien . . . 21

2.2 Relation d'ordre, Relation d'équivalence . . . 22

2.2.1 Relations binaires . . . 22

2.2.2 Relation d'équivalence . . . 23

2.2.3 Relation d'ordre . . . 24

2.3 Les applications . . . 26

2.3.1 Définition d'une application . . . 26
2.3.2 Image directe, image réciproque . . . 28
2.3.3 Application injective, surjective, bijective . . . 29
2.4 Exercices . . . 30
2.4.1 Énoncés . . . 30
2.4.2 Correction des exercices . . . 32

3 Les fonctions réelles à une variable réelle 42
3.1 Notions de fonction . . . 42
3.1.1 Définitions générales . . . 42
3.1.2 Graphe d'une fonction . . . 42
3.1.3 Fonctions bornées, fonction monotones . . . 43
3.1.4 Fonction paire, impaire, périodique . . . 43
3.1.5 Opérations algébriques sur les fonctions . . . 44
3.2 Limite d'une fonction . . . 44
3.2.1 Définition générales . . . 44
3.2.2 Théorèmes sur les limites . . . 47
3.2.3 Opérations sur les limites . . . 48
3.3 Continuité d'une fonction . . . 49
3.3.1 Définition générales . . . 49
3.3.2 Opérations sur les fonctions continues . . . 51
3.4 Fonction dérivable . . . 52
3.4.1 Définition et propriétés . . . 52
3.4.2 Dérivées d'ordres supérieurs . . . 53
3.4.3 Opérations de dérivations . . . 55
3.4.4 Théorème de Rolle . . . 56
3.4.5 Fonctions équivalentes . . . 59
3.5 Exercices . . . 60
3.5.1 Énoncés . . . 60
3.5.2 Correction des exercices . . . 61

4 Application aux fonctions élémentaires 68
4.1 Fonction logarithme, fonction exponentielle et fonction puissance . . . 68
4.1.1 Fonction Logarithme . . . 68
4.1.2 Fonction exponentielle . . . 69

4.1.3 Fonction puissance . . . 71

4.2 Fonctions trigonométriques et leurs inverses . . . 72

4.2.1 Fonctions trigonométriques . . . 72

4.2.2 Fonctions circulaire réciproques . . . 75

4.3 Fonctions hyperboliques et leurs inverses . . . 78

4.3.1 Fonctions hyperboliques . . . 78

4.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques . . . 79

4.4 Exercices . . . 82

4.4.1 Énoncés . . . 82

4.4.2 Correction des exercices . . . 83

5 Résumé de cours sur les structures algébriques 89

5.1 Notion de groupe . . . 89

5.1.1 Généralités . . . 89

5.1.2 Sous-groupes . . . 91

5.1.3 Notion de morphisme . . . 92

5.2 Notion d'anneau . . . 94

5.3 Notion de corps . . . 96

6 Espace vectoriel réel 97

6.1 Structure d'espace vectoriel réel . . . 97

6.1.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ . . . 97

6.1.2 Espace vectoriel réel . . . 98

6.1.3 Propriétés . . . 98

6.2 Sous espaces vectoriels . . . 99

6.2.1 Définition et propriétés . . . 99

6.2.2 Intersection de sous espaces vectoriels . . . 100

6.2.3 Somme de sous espaces vectoriels . . . 100

6.3 Combinaison linéaire - système générateur . . . 101

6.3.1 Combinaison linéaire . . . 101

6.3.2 Système générateur . . . 102

6.3.3 Système libre - système lié . . . 103

6.3.4 Ordre et rang d'un système de vecteurs . . . 104

6.3.5 Base d'un espace vectoriel . . . 104

6.3.6 Espace vectoriel de dimension fini . . . 105

7 Applications Linéaires . . . **107**

7.1 Définitions et généralités . . . 107

7.1.1 Définitions . . . 107

7.1.2 Propriétés . . . 108

7.2 Opérations sur les applications linéaires . . . 108

7.2.1 Addition . . . 109

7.2.2 Multiplication par un scalaire . . . 109

7.2.3 Composition de deux applications linéaires . . . 109

7.3 Image et image réciproque par une application linéaire . . . 109

7.4 Noyau et image d'une application linéaire . . . 110

7.5 Applications linéaires injectives et surjectives . . . 110

7.6 Rang d'une application linéaire . . . 111

Chapitre 1

Méthodes du Raisonnement Mathématique

1.1 Logique Mathématique

1.1.1 Assertions

Définition1.1.1 : Une assertion est une phrase qui peut être vraie ou fausse et ne peut pas être les deux en même temps.

Exemple 1.1.1.

a) $2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.

b) $32 = 7$ est une assertion fausse.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| = 1$ est une assertion fausse.

1.1.2 Les opérateurs logiques mathématique

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q :

L'opérateur logique "et" ($\wedge$) (Conjonction)

L'assertion "P et Q " est vraie si P est vraie et Q est vraie, et elle est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.1.2.

a) $(3+5=8) \wedge (36=18)$ est une assertion vraie.

b) $(2+2=4) \wedge (23=7)$ est une assertion fausse.

L'opérateur logique "ou" $(\vee)$ **(Disjonction)**

L'assertion "P ou Q" est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion (P ou Q) est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	P∨Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.1.3.

a) $(2+2=4) \vee (32=6)$ est une assertion vraie.

b) $(2=4) \vee (43=7)$ est une assertion fausse.

La négation "non" $(\overline{P})$

L'assertion $\overline{P}$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.1.4. La négation de l'assertion $3 \geq 0$ est l'assertion $3 < 0$.

L'implication $(\Rightarrow)$

L'assertion ($\overline{P}$ ou Q) est notée P $\Rightarrow$ Q. Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	P⇒Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.1.5. $2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion P $\Rightarrow$ Q est toujours vraie.

L'équivalence $(\Leftrightarrow)$

L'équivalence est dénie par l'assertion (P $\Rightarrow$ Q) et (Q $\Rightarrow$ P), elle est notée P $\Leftrightarrow$ Q. On dira (P est équivalent à Q) ou (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si Q). Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément ou lorsque P et Q sont fausses simultanément. Sa table de vérité est :

P	Q	P⇔Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.1.6. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'équivalence "$xy=0, x=0$ ou $y=0$" est vraie.

Proposition 1.1.1. Soient P,Q et R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :

(1) $P \Leftrightarrow \overline{(\bar{P})}$

(2) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

(3) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

(4) $(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$

(5) $(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$

(6) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(7) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(8) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

1.1.3 Quantificateurs

Le quantificateur "$\forall$" : pour tout

L'assertion

$$\forall x \in E; \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit : pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.1.7.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Quantificateur "$\exists$" :

il existe L'assertion

$$\exists x \in E; \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On lit il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie).

Exemple 1.1.8.

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de

$$(\forall x \in E, \quad P(x)) \quad \text{est} \quad (\exists x \in E, \quad \overline{P(x)}).$$

Exemple 1.1.9. La négation de $\left(\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 \geq 0}_{P(x)}\right)$ est l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 < 0}_{\overline{P(x)}}.$$

La négation de

$$(\exists x \in E, \quad P(x)) \quad \text{est} \quad (\forall x \in E, \quad \overline{P(x)}).$$

Exemple 1.1.10. La négation de $(\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{x < 0}_{P(x)})$ est l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{x \geq 0}_{\overline{P(x)}}.$$

L'emploi de plusieurs quantificateurs

On peut combiner plusieurs quantificateurs dans une proposition quantifiée seulement il ne faut pas changer leurs dispositions s'ils sont de natures différentes.

Exemple 1.1.11.

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ et $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$sont deux propositions quantifiées différentes.

(ii) $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ et $(\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ sont deux propositions quantifiées équivalentes.

Négation d'une proposition quantifiée

Quand on forme la négation d'une proposition quantifiée, on remplace le quantificateur universel $\forall$ par l'existentiel $\exists$ et vice versa, la propriété $P(x)$ par sa négation $\overline{P(x)}$.

Exemple 1.1.12.

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y = 2)$ sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y \neq 2.$$

(ii) $(\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : (x + y = 1) \text{ et } (2xy \leq 1))$ sa négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : (x + y \neq 1) \text{ ou } (2xy > 1)$$

(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R} : x + y \geq z^2)$ sa négation est :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x + y < z^2.$$

1.2 Raisonnements

1.2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre alors que Q est vraie.

Exemple 1.2.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a = b \Rightarrow \frac{a+b}{2} = b$. Prenons a $= b$, alors $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$, don c

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}.$$

Ainsi $\frac{a+b}{2} = b$.

1.2.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}).$$

Donc si l'on souh aite montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$, on montre en fait que si $\bar{Q}$ est vraie alors $\bar{P}$ est vraie.

Exemple 1.2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\underbrace{(x \neq 2 \text{ et } x \neq -2)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(x^2 \neq 4\right)}_{Q}.$$

Par contraposition ceci est équivalent

$$\underbrace{\left(x^2 = 4\right)}_{\bar{Q}} \Rightarrow \underbrace{(x = 2 \text{ ou } x = -2)}_{\bar{P}}.$$

En effet, prenons $x^2 = 4$, alors $(x-2)(x+2) = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -2$.

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Rightarrow Q$, repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple 1.2.3. Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \quad \text{et} \quad a \neq b.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}\right) &\Leftrightarrow a(a+1) = b(b+1) \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = -(a-b) \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b) \end{aligned}$$

Ceci est équivalent

$$(a-b)(a+b) = -(a-b) \quad \text{et} \quad a - b \neq 0.$$

donc en divisant par $a - b$ on obtient

$$a + b = -1.$$

La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

1.2.4 Raisonnement cas par cas

Lorsqu'on souhaite vérifier une propriété $P(x)$ pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut partager cet ensemble en n sous-ensembles (non vides) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (selon le nombre de cas à traiter) et montrer que la propriété est vérifiée sur chacun d'eux sans exception, puis faire la conclusion qu'elle est vérifiée partout sur E.

Exemple 1.2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n = \frac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, alors

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1) = k(2k+1) \in \mathbb{N}.$$

Deuxième cas : $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, alors

$$a_n = \frac{1}{2}(2k+1)(2k+2) = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}.$$

Dans tous les cas $a_n = \frac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N}$.

1.2.5 Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E : P(x))$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Exemple 1.2.5. Montrer que l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 1)$ est fausse. Un contre-exemple est $x = 0 \in \mathbb{R}$, car $(0)^2 - 1 > 1$ est fausse.

1.2.6 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

i) On prouve $P(0)$ est vraie.

ii) On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.6. Montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : 2^n > n.$$

Notons

$$P(n) : 2^n > n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons que } 2^n > n, \\ &\geq n + 1, \text{ car } 2^n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Remarque. Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.

1.3 Exercices

1.3.1 Énoncés

Exercice 1. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

(a) $(2 < 3)$ et $(2$ divise $4)$

(b) $(2 < 3)$ et $(2$ divise $5)$

(c) $(2 < 3)$ ou $(2$ divise $5)$

(d) $(2 < 3)$ et $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$

(e) $\overline{(2 < 3)}$ ou $(2$ divise $5)$

Exercice 2. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \ldots x = 2$.

(2) $\forall z \in \mathbb{C} : z = \bar{z} \ldots z \in \mathbb{R}$.

(3) $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \ldots x = 1$.

Exercice 3. Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0,$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$

(1) Les assertions a,b,c,d sont-elles vraies ou fausses ?

(2) Donner leur négation.

Exercice 4. Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 5. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'assertions suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 6. Montrer :

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 7. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 3$.

1.3.2 Correction des exercices

Solution 1.

(a) $(2 < 3)$ est vraie et (2 divise 4) est vraie donc $(2 < 3)$ et (2 divise 4) est vraie.

(b) $(2 < 3)$ est vraie et (2 divise 5) est fausse, l'une des deux est fausse donc $(2 < 3)$ et (2 divise 5) est fausse.

(c) $(2 < 3)$ est vraie et (2 divise 5) est fausse, l'une des deux est vraie donc $(2 < 3)$ ou (2 divise 5) est vraie.

(d) $(2 < 3)$ est vraie et $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$ est vraie, les deux sont vraies donc $((2 < 3)$ et $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$ est vraie.

(e) $(2 < 3)$ est vraie donc $\overline{(2 < 3)}$ est fausse et (2 divise 5) est fausse par conséquent $\overline{(2 < 3)}$ ou (2 divise 5) est fausse car les deux assertions sont fausses.

Solution 2. Le connect eur logique sur les assertion suivante

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$

(2) $\forall z \in \mathbb{C} : z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$

(3) $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Solution 3.

(a) est fausse. Car sa négation qui est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y < 0$$

est vraie. Etant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y < 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x + y = -1 < 0$.

(b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$, est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

(d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x.$$

Solution 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier, c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2\right)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(\forall m \in \mathbb{N} : 2n \neq m^2\right)}_{Q}.$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose donc que n est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier, c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2\right)}_{P} \text{ et } \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N}^* : 2n = m^2\right)}_{\bar{Q}}.$$

Alors

$$\exists k, m \in \mathbb{N}^* : 2n = 2k^2 = m^2.$$

donc, $2k^2 = m^2$ et en prenant la racine carrée,

$$\mathbb{Q}^c \ni \sqrt{2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a une contradiction !

Solution 5. Soit n un entier. Montrons l'assertion suivante : Si n^2 est impair, alors n est impair. c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k+1\right)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m+1\right)}_{Q}.$$

La contraposée de l'assertion est : Si n est pair, alors n^2 est pair, c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\right)}_{\bar{Q}} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k\right)}_{\bar{P}}.$$

En effet, s'il existe $m \in \mathbb{N} : n = 2m$, alors

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\left(2m^2\right) = 2k,$$

donc n^2 est pair. Par le principe de contraposition, on a démontré l'assertion de l'én on cé.

Solution 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose l'assertion suivante :

$$P(n) : 1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

$P(1) : 1^1 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1)$ est vraie .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned}
1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $P(n+1)$. Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 7. Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 3.$$

Soit l'hypothèse de récurrence :

$$P(n) : x_n > 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La proposition $P(0)$ est vraie, car $x_0 = 4 > 3$.

Soit $n \geq 0$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2},$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc

$$x_n + 2 > 0 \quad \text{ et } \quad 2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0.$$

L'étude de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x - 9$, pour $x > 3$, on obtient

$$f(x) > 0, \text{ pour tout } x \geq \frac{3}{4}(1 + \sqrt{7}) > 3.$$

Alors $f(x_n) > 0$, car $x_n > 3$, ça signifie que $x_{n+1} - 3 > 0$, donc la proposition $P(n+1)$ est vraie.

Chapitre 2

Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Théorie des ensembles

Définition 2.1.1. Un ensemble est une collection d'éléments.

Parmi les ensemble, un ensemble est particulier, c'est l'ensemble vide, notée ϕ.

Soit E un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

Exemple 2.1.1. On a $\{0, 1\}$, \{rouge, noir \}, et $\{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ sont des ensembles. Alors $0 \in \{0, 1\}$ et $2 \notin \{0, 1\}$.

2.1.1 Inclusion, union, intersection, complémentaire

Définition 2.1.2. Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, si tout élément de E est aussi un élément de F et on écrit $E \subset F$. Autrement dit :

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

On dit alors que E est un sous-ensemble de F ou une partie de F.

Exemple 2.1.2. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1.3. Deux ensembles E et F sont égau sil et seulement si chacun est inclu dans l'autre, c'est-à-dire

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \quad \text{et} \quad E \subset F.$$

Exemple 2.1.3. Si $E = \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x-1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} = [0,2]. \end{aligned}$$

Définition 2.1.4. Soit E un ensemble, on forme un ensemble appelé ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$ qui est caractérisé par la relation suivante

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$$

Exemple 2.1.4. Si $E = \{1,2,3\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},$$

donc $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Définition 2.1.5. Soit E un ensemble, on appelle ensemble complémentaire de $A \subset E$, noté $C_E A$ où A^c l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire

$$C_E A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

Définition 2.1.6. On appelle ensemble réunion de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$ l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A ou appartiennent à B, c'est-à-dire

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle ensemble intersection de deux ensembles A et B, noté $A \cap B$ l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A et appartiennent à B, c'est-à-dire

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple 2.1.5. Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{2,3,4,5\}$, alors $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ et $A \cap B = \{2,3\}$.

Définition 2.1.7. Soit E un ensemble, on dit que l'ensemble E est fini si le nombre d'éléments de E est fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E, noté Card (E).

Exemple 2.1.6. Si $E = \{0, 1, 2, 3\}$, alors Card $(E) = 4$, l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas fini, $Card(\emptyset) = 0$.

Définition 2.1.8. Soit E un ensemble, on appelle différence de A et B, noté $A\backslash B$, l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire

$$A\backslash B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

On appelle différence symétrique de A et B, noté $A\Delta B$, l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à $A \cup B$ et n'appartiennent pas à $A \cap B$, c'est-à-dire

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

Exemple 2.1.7. Si $E = \mathbb{R}, A = [0, 1]$ et $B =]0, +\infty[$, alors

$$A\backslash B = \{0\}, \quad B\backslash A =]1, +\infty[\quad \text{et} \quad A\Delta B = \{0\} \cup]1, +\infty[.$$

Remarque. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E, alors il est claire que - Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

Proposition 2.1.1. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E, alors

- Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
(x \in A \cap (B \cup C)) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),
\end{aligned}$$

alors $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}(x \in A \cup (B \cap C)) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B \cap C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C))\\ &\Leftrightarrow ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C))\\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),\end{aligned}$$

alots $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

Proposition 2.1.2 (Loi de Morgan). Soient A et B des parties d'un ensemble E, alors

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B) \quad \text{et} \quad C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(x \in C_E(A \cap B)) \Leftrightarrow (x \notin A \cap B) &\Leftrightarrow (\overline{x \in A \cap B})\\ &\Leftrightarrow \overline{(x \in A \text{ et } x \in B)} \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B)\\ &\Leftrightarrow (x \in C_E(A) \text{ ou } x \in C_E(B)) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cup C_E(B),\end{aligned}$$

donc $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

$$\begin{aligned}(x \in C_E(A \cup B)) \Leftrightarrow (x \notin A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B\\ &\Leftrightarrow (x \in C_E(A) \text{ et } x \in C_E(B)) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cap C_E(B),\end{aligned}$$

donc $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$. □

Remarque. Soit A un sous ensemble de E, alors $C_E\left(C_E(A)\right) = A$. En effet,

$$\begin{aligned}(x \in C_E\left(C_E(A)\right)) \Leftrightarrow (x \notin C_E(A)) &\Leftrightarrow \overline{(x \in C_E(A))}\\ &\Leftrightarrow \overline{(x \notin A)} \Leftrightarrow (x \in A).\end{aligned}$$

2.1.2 Produit cartésien

Définition 2.1.9. On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, noté EF l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$EF = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Exemple 2.1.8. Si $E = \{1,2\}$ et $F = \{3,5\}$, alors

$$EF = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5)\}$$
$$FE = \{(3,1),(3,2),(5,1),(5,2)\} \neq EF.$$

Notation. On note E^2 le carré cartésien EE. Plus généralement, on définit le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ par

$$E_1E_2\ldots E_n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in E_i, \text{ pour } i = 1,\ldots,n\}.$$

Exemple 2.1.9. Si $E = \{1,2\}$, alors

$$E^2 = EE = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$
$$E^3 = EEE = \left\{ \begin{array}{c} (1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2), \\ (2,1,1),(2,2,1),(2,1,2),(2,2,2) \end{array} \right\}.$$

2.2 Relation d'ordre, Relation d'équivalence

2.2.1 Relations binaires

Définition 2.2.1. On appelle relation binaire sur un ensemble E, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non, , notée $x\mathcal{R}y$ et on lit x est en relation avec y.

Exemple 2.2.1. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \geq 0.$$

Définition 2.2.2. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Pour tous $x, y, z \in E$, on dit que $\mathcal{R}$ est

(1) Réflexive, si chaque élément est en relation avec lui même, c'est à dire

$$x\mathcal{R}x, \quad \forall x \in E.$$

(2) Symétrique, si pour tout $x, y \in E$, si x est en relation avec y alors y est en relation avec x, c'est à dire

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x, \quad \forall x, y \in E.$$

(3) Transitive, si pour tout $x, y, z \in E$, si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z, c'est à dire

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z, \quad \forall x, y, z \in E.$$

(4) Anti-symétrique, si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, alors ils sont égaux, c'est à dire

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in E$$

2.2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2.3. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition 2.2.4. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle classe d'équivalence de $x \in E$, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par $\mathcal{R}$, noté x ou $cl(x)$ ou bien $\mathcal{C}(x)$

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}.$$

La classe d'équivalence $\mathcal{C}(x)$ est non vide car $\mathcal{R}$ est réflexive et contient de ce fait au moins x. On notera par

$$E/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}(x) : x \in E\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation $\mathcal{R}$.

Exemple 2.2.2. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation est bien une relation d'équivalence. En effet,

- Pour $x \in \mathbb{R}$: $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{Z}$, comme $0 \in \mathbb{Z}$, alors $x\mathcal{R}x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive,

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y\mathcal{R}x,$$

alors $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

- Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) &\Rightarrow (x - y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y - z \in \mathbb{Z})\\ &\Rightarrow (x - y + y - z \in \mathbb{Z})\\ &\Rightarrow (x - z \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)\end{aligned}$$

alors $\mathcal{R}$ est une relation transitive.

Donc, l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x) &= \{y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \in x + \mathbb{Z}\}\\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = k + x : k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{k + x : k \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

si $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{C}(x) = \mathbb{Z}$.

2.2.3 Relation d'ordre

Définition 2.2.5. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite une relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.

Exemple 2.2.3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation x divise y, c'est-à-dire

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx.$$

Alors

- Pour $x \in \mathbb{N}^*$: x divise x, donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive,
- Pour $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise z, donc x divise z, ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
- Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise x, alors

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : y = k_1 x \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : x = k_2 y \end{array}\right\} \Rightarrow x = k_2 k_1 x$$

$$\Rightarrow \quad x\left(1 - k_2 k_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_2 k_1 = 1, \text{ car } x \neq 0,$$

il vient que $k_2 k_1 = 1$, comme $k_2, k_1 \in \mathbb{N}^*$,alors $k_2 = k_1 = 1$, c'est-à-dire $x = y$, ca signifie que $\mathcal{R}$ est une relation anti-ymétrique.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

L'or dre total et l'or dre partiel

Définition 2.2.6. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur un ensemble E, on dit que $\mathcal{R}$ est totale, si pour tout $x, y \in E$, on a

$$x\mathcal{R}y \quad \text{ ou } y\mathcal{R}x$$

Sinon, on dit que $\mathcal{R}$ est partielle, c'est-à-dire

$$\exists x, y \in E : \text{ ni } x\mathcal{R}y \text{ et ni } y\mathcal{R}x$$

Exemple 2.2.4. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = nx.$$

Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a ni $x\mathcal{R}y$ ni $y\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

2.3 Les applications

2.3.1 Définition d'une application

Définition 2.3.1. Soient E et F des ensembles donnés, on appelle application de E dans F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui associe à tout élément de E un et seul élément de F, on écrit

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x)$$

L'ensemble E est dit ensemble de départ et F est dit ensemble d'arrivée.

L'élément x est dit l' antécédent et y est dit l'image de x par f.

L'application f est dite fonction si, pour chaque $x \in E$, il existe au plus $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 2.3.1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, tel que $f(n) = n + ie^n$, alors f est une application, avec $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{C}$.

Définition 2.3.2. (Graphe). Soient E et F des ensembles donnés. Le graphe d'une application $f : E \to F$ est

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset EF.$$

Définition 2.3.3. (Égalité). Soient $f, g : E \to F$ des applications. On dit que f, g sont égales si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in E : f(x) = g(x).$$

On écrit alors $f = g$.

Définition 2.3.4. (Composition). Soient E, F et G trois ensembles et f et g deux applications telles que

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On peut en déduire une application de E dans G not ée $g \circ f$ et appelée application composée de f et g, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{pour tout } x \in E$$

Définition 2.3.5. Soit E un ensemble, on appelle application identité, notée id : $E \to E$ l'application qui vérifie id $(x) = x, \forall x \in E$.

Exemple 2.3.2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$et $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ définies par :

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ est donnée par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.3.6. Soit $f : E \to F$ une fonction. On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des éléments $x \in E$ fait au quels il existe un unique élément $y \in F$, telle que $y = f(x)$.

Exemple 2.3.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[.$$

Définition 2.3.7. Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$ une application. On appelle restriction de f à A, l'application $f_{|A} : E \to F$ définie par

$$f_{|A}(x) = f(x), \quad \textbf{pour tout } x \in A.$$

Définition 2.3.8. Soit $E \subset G$ et $f : E \to F$ une application. On appelle prolongement de f à G, toute application g de G vers F dont la restriction à E est f.

2.3.2 Image directe, image réciproque

Définition 2.3.9. Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'image directe de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset F.$$

Exemple 2.3.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $A = [0, 1]$, alors

$$f([0, 1]) = \{f(x) : x \in [0, 1]\} = \{2x + 1 : x \in [0, 1]\},$$

On a

$$x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3,$$

donc $f([0, 1]) = [1, 3]$.

Définition 2.3.10. Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 2.3.5. Soit f l'application définie par $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, 1]) &= \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x| \leq 1\} = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Soit g définie par$g(x) = \sin(\pi x)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) = 0\} = \{x : x = k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.3.1. Soient E, F deux ensembles quelconques et une application $f : E \to F$.

Pour tous $A, B \subset E$ et $X, Y \subset F$, on a les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ et $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(3) $f(A \cup B) = f(A) \cup F(B)$ et $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(4) $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f\left(f^{-1}(X)\right) \subset X$.

2.3.3 Application injective, surjective, bijective

Définition 2.3.11. Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemple 2.3.6. Soit f l'application définie par $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, alors f est injective, soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$tels que $f(x_1) = f(x_2)$,

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ car } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Définition 2.3.12. Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective si et seulement si : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Exemple 2.3.7. Soit f l'application définie par $f(x) = |x|$ de $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, alors$f$ est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$, pour $x = y$ ou $x = -y$, on a $x \in \mathbb{Z}$ et

$$f(x) = |x| = y,$$

donc il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.

Définition 2.3.13. Soit $f : E \to F$. On dit que f est bijective (ou f est une bijection de E sur F) si et seulement si : f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout y $\in$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Exemple 2.3.8. Soit f l'application définie par $f(x) = x - 7$ de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, alors f est bijective. En effet, soit $y \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x)=y$, alors $x = y + 7$, donc il existe un unique x dans $\mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.

Remarque. Si l'application f est bijective, et seulement dans ce cas, à tout $y \in F$ on fait correspondre un $x \in E$ et un seul.

Définition 2.3.14. Soit $f : E \to F$ une application bijective. On définit l'application $f^{-1} : F \to$ E, appelée application réciproque de f, donnée par $f^{-1}(x) = y$ si et seulement si $f(y) = x$.

Exemple 2.3.9. Soit f l'application définie par $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$, alors f est bijective, car pour tout $y \in [1, \infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = \sqrt{y-1}$. La bijection réciproque est $f^{-1} : [1, +\infty [\to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, \quad \text{pour tout } x \in [1, +\infty[$$

Proposition 2.3.2. Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = id_E.$$

Exemple 2.3.10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, f$ est bijective, sa bijection réciproque est $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x)$. On a $f \circ g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tel que

$$(f \circ g)(x) = e^{\ln x} = x = id_{\mathbb{R}_+^*}(x) \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = \ln e^x = x = id_{\mathbb{R}}(x).$$

Proposition 2.3.3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.4 Exercices

2.4.1 Énoncés

Exercice 8.

(1) On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Décrire les ensembles suivants et leurs cardinaux :

$$A \cap B, \quad A \backslash B, \quad A \Delta B, \quad DC, \quad B \cap C, \quad C_D A, \quad D \cup A, \quad \mathcal{P}(C)$$

(2) Décrire les ensembles suivants :

$$F = [-2, 1[\cap] - \infty, 0], \quad E = [-2, 1[\cup] - \infty, 0], \quad G = [-2, 1[\Delta] - \infty, 0], \quad H = C_{\mathbb{R}} F.$$

Exercice 9. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

(1) Montrer que : $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

(2) Si$A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 0)$.

(3) Même questions pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Exercice 11. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

(2) L'ordre est il total ?

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer la classe d'équivalence de $(0,0)$.

Exercice 13.

(1) Montrer que les fonctions suivantes sont des applications puis vérifier si elle sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{array}{ccc} v:\mathbb{N}\to\mathbb{N} & i:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} & k:\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \\ n\to n^2, & n\to 2n^2-7, & n\to 4n^2+5, \\ f:[-1,1]\to[0,1] & g:\mathbb{R}\backslash\{-3\}\to\mathbb{R} & h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R} \\ x\to\sqrt{1-x^2}, & x\to\dfrac{2-x}{x+3}\quad , & \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}. \end{array}$$

(2) Calculer $v\circ k, i\circ k, k\circ i$.

(3) Montrer que l'application $u:]1,\infty[\to]0,\infty[$ définie par : $u(x)=\frac{1}{x-1}$ est bijective et calculer sa bijection réciproque.

Exercice 14. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

(1) f est-elle injective ? surjective ?

(2) Montrer que la restriction $g:[-1,1]\to[-1,1], g(x)=f(x)$ est une bijection.

Exercice 15. Soit f l'application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ définie par

$$f(x)=(\sqrt{x}+1)^2-1.$$

(1) Montrer que f est bijective.

(2) Déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

2.4.2 Correction des exercices

Solution 8.

(1) On a

$$A=\{1,3,7,9,12\},\quad B=\{1,3,2\},\quad C=\{3,4,7,9\},\quad D=\{3,1\}.$$

Alors

$A \cap B = \{1,3\}, \mathrm{Card}(A \cap B) = 2, A \backslash B = \{7,9,12\}, \mathrm{Card}(A \backslash B) = 3,$

$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{1,3,2,7,9,12\} \backslash \{1,3\} = \{2,7,9,12\}, \mathrm{Card}(A \Delta B) = 4,$

$DC = \{3,1\}\{3,4,7,9\} = \{(3,3),(3,4),(3,7),(3,9),(1,3),(1,4),(1,7),(1,9)\},$

$\mathrm{Card}(DC) = 8, B \cap C = \{3\}, \mathrm{Card}(B \cap C) = 3,$

$C_A D = \{7,9,12\}, \mathrm{Card}\,(C_A D) = 3, D \cup A = A, \mathrm{Card}(D \cup A) = 5,$

$$\mathcal{P}(C) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{3\}, \{4\}, \{7\}, \{9\}, \{3,4\}, \{3,7\}, \{3,9\}, \{4,7\}, \{4,9\}, \{7,9\} \\ \{3,4,7\}, \{3,4,9\}, \{3,7,9\}, \{4,7,9\}, \{3,4,7,9\} \end{array} \right\},$$

$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(C)) = 2^{\mathrm{Card}(C)} = 2^4 = 16.$

(2) On a,

$$F = [-2,1[\cap]-\infty,0] = [-2,0],$$

$$E = [-2,1[\cup]-\infty,0] =]-\infty,1[,$$

$$G = [-2,1[\Delta]-\infty,0] =]-\infty,1[\backslash[-2,0] =]-\infty,-2[\cup]0,1[,$$

$$H = C_{\mathbb{R}}F =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$$

Solution 9.

(1) Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, alors

$$(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cap C_E C = (A \cap C_E B) \cap C_E C,$$

et

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cup C) &= A \cap C_E(B \cup C) = A \cap (C_E B \cap C_E C) \\ &= (A \cap C_E B) \cap C_E C \\ &= (A \backslash B) \backslash C. \end{aligned}$$

(2) On a $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Soit $x \in B$, montrons que $x \in C$. En effet

$$\begin{aligned} (x \in B) &\Rightarrow (x \in A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow (x \subset A \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in C). \end{aligned}$$

Si $x \in C$, alors on a fini. Si $x \in A$, alors

$$(x \in A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap C) \Rightarrow (x \in C),$$

donc $x \in C$, d'où $B \subset C$.

Solution 10.

(1) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

- Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, alors $y_1 = y_1 \Leftrightarrow (x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_1, y_1)$, donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \Leftrightarrow (x_2, y_2)\, \mathcal{R}\, (x_1, y_1),$$

alors $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2)\, \mathcal{R}\, (x_3, y_3)] &\Rightarrow [y_1 = y_2 \text{ et } y_2 = y_3] \\ &\Rightarrow [y_1 = y_3] \\ &\Rightarrow (x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_3, y_3) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est une relation transitive. On déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) La classe d'équivalence de $(1, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((1,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\mathcal{R}(1, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\} = \mathbb{R}\{0\}. \end{aligned}$$

(3) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

- Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, on a $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow (x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_1, y_1)$, alors $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

- Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2,y_2) &\Leftrightarrow \left(x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x_2^2+y_2^2=x_1^2+y_1^2\right)\\ &\Leftrightarrow (x_2,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,y_1),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

- Soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\left[(x_1,y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2,y_2)\ \text{ et }\ (x_2,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_3,y_3)\right] &\Rightarrow \left[x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \text{ et } x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2\right]\\ &\Rightarrow \left[x_1^2+y_1^2=x_3^2+y_3^2\right]\\ &\Leftrightarrow (x_1,y_1)\,\mathcal{R}\,(x_3,y_3),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est une relation transitive. On déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, pour la classe d'équivalence de $(1,0)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{C}((1,0)) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(1,0)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}.\end{aligned}$$

Solution 11.

(1) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}^*/n=km.$$

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k=1\in\mathbb{N}^* : n=1n.$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

- Soit $n,m\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}[n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}n] &\Leftrightarrow [(\exists k_1\in\mathbb{N}^* : n=k_1m)\ \text{ et }\ (\exists k_2\in\mathbb{N}^* : m=k_2n)]\\ &\Rightarrow (\exists k_1,k_2\in\mathbb{N}^* : n=k_1k_2n)\\ &\Rightarrow (\exists k_1,k_2\in\mathbb{N}^* : k_1k_2=1)\\ &\Rightarrow k_1=k_2=1\\ &\Rightarrow n=m,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est une relation anti-Symétrique.

- Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
[n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}p] &\Leftrightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m) \text{ et } (\exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 p)] \\
&\Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : n = \underbrace{k_1 k_2}_{k_3} p) \\
&\Rightarrow (\exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^* : n = k_3 p) \\
&\Rightarrow n\mathcal{R}p,
\end{aligned}$$

don $\mathcal{R}$ est une relation transitive.

(2) La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est partiel, il existe $n = 2 \in \mathbb{N}^*$ et $m = 3 \in \mathbb{N}^*$, tel que ni $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$.

Solution 12.

(1) Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \text{ et } \quad |y_1| = |y_2|\,.$$

- Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos^2(x_1) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_1|\,.$$

donc $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$, ce qui signifie $\mathcal{R}$ est réflexive.

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) &\Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2| \\
&\Leftrightarrow 1 - \sin^2(x_1) + 1 - \cos^2(x_2) = 1 \text{ et } |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow \cos^2(x_2) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)\,,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est Symétrique.

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}$, on a

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3) \Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|. \\ \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_3|. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) \\ + \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 2 \\ |y_1| = |y_2| = |y_3| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2(x_1) + 1 + \sin^2(x_3) = 2 \text{ et } |y_1| = |y_3|$$

$$\Rightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_3) = 1 \text{ et } |y_1| = |y_3|$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3)$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

(2) La classe d'équivalence de $(0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((0,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\mathcal{R}(0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos^2(x) = 1 \text{ et } y = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = \pi k : k \in \mathbb{Z}) \text{ et } y = 0\right\} \\ &= \{(\pi k, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Solution 13.

(1) On a

- L'application v est injective, soit $n, m \in \mathbb{N}$, tels que

$$v(n) = v(m) \Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m| \Rightarrow n = m, \text{ car } n, m \in \mathbb{N}$$

- L'application v n'est pas surjective, car $2 \in \mathbb{N}$ et $v(n) = 2 \Rightarrow n^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

- L'application i est injectiv, soit $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (i(n) = i(m)) &\Rightarrow \left(2n^2 - 7 = 2m^2 - 7\right) \\ &\Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m| \\ &\Rightarrow n = m, \quad \text{car } n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- L'application i n'est pas surjective, car $9 \in \mathbb{Z}$ et $i(n) = -9 \Leftrightarrow 2n^2 = -2 \Rightarrow n^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, donc i n'est pas surjective.
- L'application k n'est pas injective, comme $k(-1) = k(1) = 9$ et $-1 \neq 1$.
- L'application k n'est pas surjective, car $6 \in \mathbb{N}$ et $k(n) = 6 \Leftrightarrow n^2 = \frac{1}{4}$, n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
- L'application f n'est pas injective, car $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.
- L'application f est surjective. En effet, soit $y \in [0,1]$. On a

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2},$$

alors

$$y \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq 1-y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 0 \end{cases}$$

donc il existe $x \in [-1,1]$.

- L'application g est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$, on a

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \frac{2-x_1}{x_1+3} = \frac{2-x_2}{x_2+3} \\ &\Rightarrow (2-x_1)(x_2+3) = (2-x_2)(x_1+3) \\ &\Rightarrow 6 - 3x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 6 - 3x_2 + 2x_1 - x_1x_2 \\ &\Rightarrow 5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- L'application g n'est pas surjective, car $-1 \in \mathbb{R}$ et $g(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$
- L'application h est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} h(x_1) = h(x_2) &\Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow e^{\ln x_1} = e^{\ln x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- L'application h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, alors

$$h(x) = y \Rightarrow \ln(x) = y \Rightarrow x = e^y \in \mathbb{R}_+^*.$$

(2) Calculer $v \circ k, i \circ k, k \circ i$.

- On a $v \circ k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{v} \mathbb{N}$, donc

$$n \to (v \circ k)(n) = v\left(4n^2+5\right) = \left(4n^2+5\right)^2.$$

- On a io $k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, donc

$$n \to (i \circ k)(n) = i\left(4n^2+5\right) = 2\left(4n^2+5\right)^2 - 7.$$

- On a $k \circ i : \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N}$, donc

$$n \to (k \circ i)(n) = k\left(2n^2-7\right) = 4\left(2n^2-7\right)^2 + 5.$$

(3) Soit u : $]1,\infty[\to]0,\infty[$ définie par : $u(x) = \frac{1}{x-1}$.

- L'application u est injective. Soit $x_1, x_2 \in]1,\infty[$, on a

$$\begin{aligned}(u(x_1) = u(x_2)) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1}\right)\\ &\Rightarrow (x_1 - 1 = x_2 - 1)\\ &\Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

- L'application u est surjective. Soit $y \in]0,+\infty[$, alors

$$u(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y} \in \left]1,+\infty\right[,$$

car

$$y \in]0,+\infty\left[\Leftrightarrow \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} > 1.\right.$$

donc l'application u est bijective, avec $u^{-1} :]0,\infty[\to]1,+\infty[$ défnie par :

$$u^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Solution 14.

(1) L'application f n'est pas injective, car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$. On a

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est surjective.

(2) L'application g est injective. Soit $x_1, x_2 \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow 2x_1\left(1+x_2^2\right) = 2x_2\left(1+x_1^2\right) \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2) - x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2 \text{ ou } x_1x_2 = 1), \end{aligned}$$

si $x_1x_2 = 1$ et $x_1, x_2 \in [-1,1]$, on a

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \in \left] -\infty, -1\right] \cup [1, +\infty[$$

ce qui entraîne que $x_1 = x_2 = 1$ ou $x_1 = x_2 = -1$, c'est-à-dire que $x_1 = x_2$, ainsi

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'application g est surjective. Soit $y \in [-1,0[\cup]0,1]$, alors

$$\begin{aligned} (f(x) = y) &\Leftrightarrow \left(y\left(1+x^2\right) = 2x\right) \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Si $y \in [-1,1]$, alors $1-y^2 \geq 0$, comme $\Delta = 4-4y^2 = 4\left(1-y^2\right) \geq 0$, al ors l'equation $yx^2 - 2x + y = 0$ admet deux solutions

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad \text{avec } y \neq 0.$$

La seule solution acceptée $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$, car, si $y = \frac{1}{2}$,alors $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} = 2+\sqrt{3} \notin [-1,1]$. Si $y = 0$, alors $x = 0$. Donc g est une bijection.

Solution 15.

(1) La fonction f est injective. Soit $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} [f(x_1) = f(x_2)] &\Rightarrow \left(\sqrt{x_1}+1\right)^2 - 1 = \left(\sqrt{x_2}+1\right)^2 - 1 \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{x_1}+1\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}+1\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1}+1 = \sqrt{x_2}+1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

La fonction f est surjective. Soit $y \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}[y = f(x)] &\Leftrightarrow y = (\sqrt{x}+1)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = y+1.\end{aligned}$$

Comme $y \in [0, +\infty\,[$, alors l'équation $(\sqrt{x}+1)^2 = y+1 > 1$ admet des solution

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+1)^2 = y+1 &\Leftrightarrow |\sqrt{x}+1| = \sqrt{y+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \sqrt{y+1},\end{aligned}$$

car $\sqrt{x}+1 > 0$, donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \geq 0,$$

alors

$$x = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \in [0, \infty[.$$

(2) La fonction réciproque $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est donnée par :

$$f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = x + 2 - 2\sqrt{1+x}, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

Chapitre 3

Les fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Définitions générales

Définition 3.1.1. On appelle fonction numérique sur un ensemble D tout procédé qui, à tout elément x de D, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de D qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté D_f

Exemple 3.1.1. La fonction $f : x \to \sqrt{x-1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x - 1 \geq 0$.

Donc $D_f = [1, +\infty[$.

3.1.2 Graphe d'une fonction

Définition 3.1.2. On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f définie sur un intervalle $D_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble

$$C_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

formé des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3.1.3 Fonctions bornées, fonction monotones

Définition 3.1.3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

a) f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M$.

b) f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \geq m$.

c) f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists M > 0, \forall x \in D : |f(x)| \leq M$.

Définition 3.1.4. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

a) f est croissante sur D si $\forall x, y \in D, x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

b) f est strictement croissante sur D si $\forall x, y \in D, x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

c) f est décroissante sur D si $\forall x, y \in D, x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

d) f est strictement décroissante sur D si $\forall x, y \in D, x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

e) f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Exemple 3.1.2.

i) Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante.

ii) La fonction valeur absolue $x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas monotone.

3.1.4 Fonction paire, impaire, périodique

Définition 3.1.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 . Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

i) f est paire si $\forall x \in I : f(-x) = f(x)$.

ii) f est impaire si $\forall x \in I : f(-x) = -f(x)$.

Exemple 3.1.3.

i) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n} (n \in \mathbb{N})$ est paire.

ii) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.

Définition 3.1.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

Exemple 3.1.4. Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.

3.1.5 Opérations algébriques sur les fonctions

L'ensemble des fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.7. Soient f et $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

- Somme de deux fonctions $f + g : x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda f : x \to (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

- Produit de deux fonctions $fg : x \to (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Remarque. Les fonctions $f+g, \lambda f$ et fg sont des fonctions appartenant à $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.8. Soient f et $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que

- $f \leq g$ si $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$.

- $f < g$ si $\forall x \in D, f(x) < g(x)$.

Exemple 3.1.5. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,1[$ par $f(x) = x, g(x) = x^2$. On a $g < f$, car $\forall x \in]0,1[, x^2 < x$.

3.2 Limite d'une fonction

3.2.1 Définition générales

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 3.2.1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a ℓ pour limite en $x_0 si$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit dans ce cas, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple 3.2.1. Considérons la fonction $f(x) = 2x - 1$ qui est défense sur $\mathbb{R}$. Au point $x = 1$, on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$, si l'on a, à fortiori, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Le bon choix sera alors de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Unicité de la limite

Proposition 3.2.1. Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique. Démonstration. Si f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0, alors on a, par définition, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in I, \text{ si } |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in I, \text{ si } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, alors

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, pour $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ entraine que $\ell_1 = \ell_2$. □

Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.2.2. On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à droite de x_0, ou encore quand x tend vers x_0^+, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que : $x_0 < x < x_0 + \delta$, entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrira, dans ce cas :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à gauche de x_0, ou encore quand x tend vers x_0^-, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que : $x_0 - \delta < x < x_0$, entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On écrira, dans ce cas :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Exemple 3.2.2. La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ ten d vers 0 lorsque $x \to 0^+$.

Remarque. Si la fonction f admet une limite $\ell \grave{a}$ gauche du point x_0 et une limite $\ell' \grave{a}$ droite de x_0, pour que f admet une limite au point x_0 il faut et il suffit que $\ell = \ell'$.

Exemple 3.2.3. Considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Elle admet 1 comme limite à droite de 0 et -1 comme limite à gauche de 0. Mais elle n'admet aucune limite au point 0.

Cas où x devient infini

On posera par définition

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \text{tel que} \quad x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \text{ tel que} \quad x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Limite infinie

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On posera par définition

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Si $x_0 = +\infty$ où $x_0 = -\infty$, on posera

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \text{ tel que } x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x < -B \Rightarrow f(x) > A.$$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \text{tel que} \quad x < -B \Rightarrow f(x) < -A$$

3.2.2 Théorèmes sur les limites

Théorème 3.2.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(2) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in]a, b[$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. Condition nécessaire : Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$. Ceci s'écrit, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme $x_0 = \lim_{n \to +\infty} x_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|x - x_0| \leq \delta$. En récapitulant, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie bien que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Condition suffisante : Supposons que ℓ n'est pas limite de f en x_0. La négation de la définition de la limite nous donne

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in [a, b], \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a, b]$, tel que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Donc, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet x_0 comme limite, cependant, ℓ n'est pas limite de la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.2.4. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite au point 0. En effet, considérons les suites

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, comme

$$\sin(x_n) = \sin((n+1)\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

alors les deux limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite au point 0.

3.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.2.2. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$, tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, Alors

a) $\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$.

b) $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda\ell$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

d) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$

e) $\lim_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$.

f) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$, si $\ell' \neq 0$.

Théorème 3.2.3. Soient $f : [a, b] \to [c, d], g : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[, y_0 \in [c, d]$, tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$ Alors $\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = \ell$.

Proposition 3.2.2. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$, on a

a) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

c) Si $f \leq g$, et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

d) Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Théorème 3.2.4. Soit $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]\, a, b[$, on a

i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pour tout $x \in]a, b[$,

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Remarque. Voici une liste de formes indéterminées

$$+\infty - \infty, \quad 0 + \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}.$$

3.3 Continuité d'une fonction

3.3.1 Définition générales

Définition 3.3.1. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}, I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue au point $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f\left(x_0\right)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.3.1. Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, on a

$$|f(x) - f\left(x_0\right)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on choisira $\delta = \varepsilon$. Ainsi

$$|x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f\left(x_0\right)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est continue au point $x_0 = 0$.

Définition 3.3.2. Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I se note $\mathcal{C}(I)$.

Continuité à gauche, continuité à droite

Définition 3.3.3. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}, I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

(1) La fonction f est dite continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{si } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(2) La fonction f est dite continue à droite en x_0 sil

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite du point x_0.

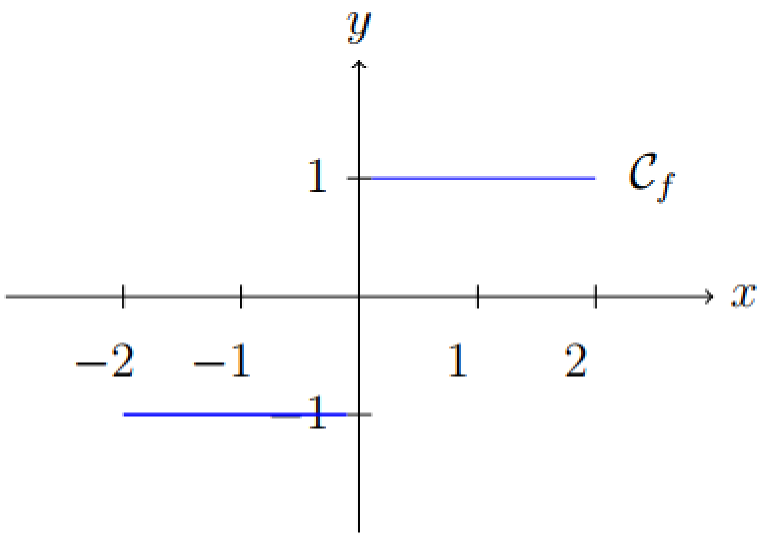
$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 3.3.2. La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$. Au point $x_0 = 0$, la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite car

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0).$$



Prolongement par continuité

Définition 3.3.4. Soit I un intervalle, x_0 un point de I. Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in I$ et qu'elle admet en ce point une limite finie notée ℓ, la fonction définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 3.3.3. La fonction

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$|f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Le prolongement par continuité de f au point 0 est donc la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.3.2 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3.3.1. Soit I un intervalle, et f et g des fonctions définies sur I et continues en $x_0 \in I$. Alors

(1) λf est continue en $x_0, (\lambda \in \mathbb{R})$.

(2) $f+g$ est continue en x_0.

(3) fg est continue en x_0.

(4) $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) est continue en x_0.

Continuité de la fonction composée

Théorème 3.3.2. Soit deux fonctions $f : I \to J, g : J \to \mathbb{R}$, tels que I, J deux intervalles quelconques de $\mathbb{R}$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

3.4 Fonction dérivable

3.4.1 Définition et propriétés

Définition 3.4.1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, x_0$ un point de $I, f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est fini. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

Remarque. En posant $x = x_0 + h$, on a

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

On peut encore écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exemple 3.4.1. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} = \lim_{h \to 0} h + 2x_0 = 2x_0. \end{aligned}$$

Définition 3.4.2. La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$ s'appelle fonction dérivée de f et se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Proposition 3.4.1. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point. Démonstration. Si f est dérivable au point x_0, alors pour tout $h>0$, il existe $\varepsilon(h)$ tel que

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+h f'\left(x_0\right)+h \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)=0.$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right).$$

3.4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 3.4.3. La dérivée f' de $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur l'intervalle I. Si f' est dérivable à son tour, sa dérivée notée $f''=(f')'$ est dite dérivée seconde de f. Cette notion se généralise à l'ordre n. Ainsi la dérivée d'ordre n de f est définie par

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Exemple 3.4.2. Soit la fonction $f(x)=\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 sont

$$f'(x)=\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right).$$

Par récurrence la dérivée d'ordre n de f est

$$\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 3.4.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction définie sur l'intervalle I est de calasse $\mathcal{C}^n$ ou n fois continument dérivable si elle est n fois dérivables et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On notera $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de calasse $\mathcal{C}^n$.

Définition 3.4.5. On dit qu'une fonction est de calasse $\mathcal{C}^0$ si elle est continue sur I, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle indéfiniment dérivable sur I (c'est-à-dire $f^{(n)}$ existe pour tout n).

Exemple 3.4.3. La fonction $x \rightarrow |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, car n'est pas dérivable à l'origine.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 3.4.6. On dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe et est finie.

On dit que la fonction f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe et est finie.

Notation. On note, dans ce cas :

$$f'_d(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{et} \quad f'_g(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque. La dérivée de f au point x_0 existe si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égales

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0)=f'_g(x_0)=f'(x_0).$$

Définition 3.4.7. Si les dérivées à gauche et à droite existent et sont différentes, ils existent alors deux demi-tangentes à la courbe C_f au point $(x_0, f(x_0))$ dit point anguleux.

Exemple 3.4.4. Considérons la fonction $f(x)=|x^2-x|$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet deux points anguleux, à savoir l'origine $(0,0)$ et le point $(1,0)$.

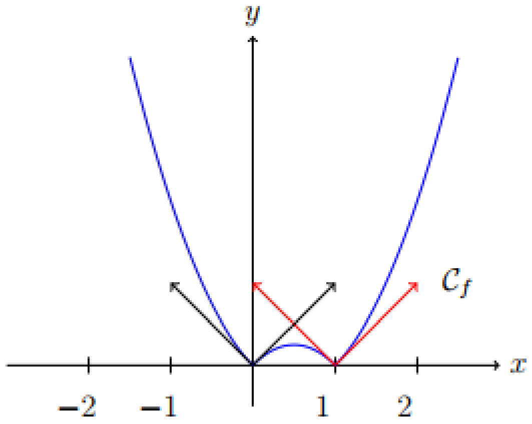
- Au point $(0,0)$ on a

$$f'_g(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x-1=-1 \quad \text{et} \quad f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}1-x=1.$$

- Au point $(1,0)$ on a

$$f'_g(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x=-1 \quad \text{et} \quad f'_d(1)\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x=1.$$

A l'origine on a deux demi-tangentes, à savoir, $y=x$ et $y=-x$. Au point $(1,0)$, on a aussi deux demi-tangentes d'équations : $y=x-1$ et $y=-x+1$.



3.4.3 Opérations de dérivations

Théorème 3.4.1. Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, alors

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0).$$

(2) $f + g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(3) fg est dérivable en x_0 et on a

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

(4) Si $g'(x) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

En particulier

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème 3.4.2. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et g dérivable en $f(x_0) \in J$, la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Dérivée de la fonctions réciproque

Théorème 3.4.3. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection continue. L'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue sur J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ tel que

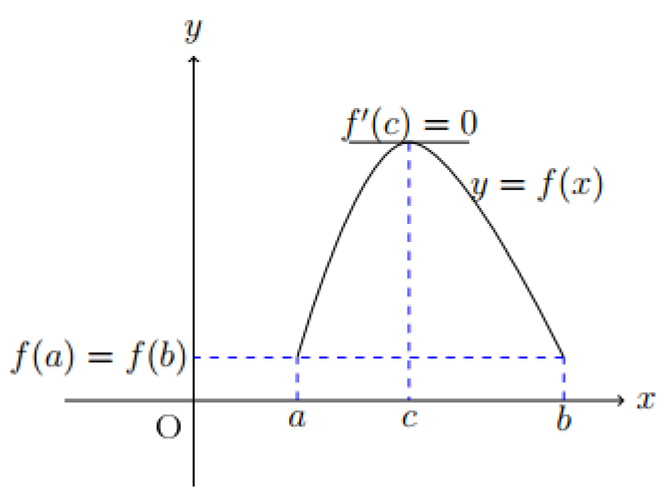
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)}.$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

3.4.4 Théorème de Rolle

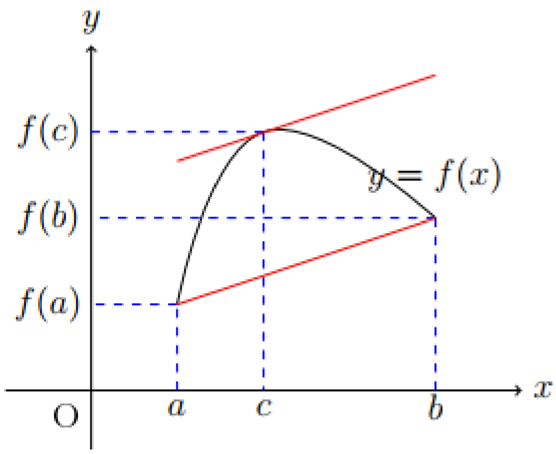
Théorème 3.4.4. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que$f(a) = f(b)$. Alors il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$:



Théorème des accroissements finis

Théorème 3.4.5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$\square$

Exemple 3.4.5. Montrons que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}, x > 0$. Posons $f(t) = \sqrt{1 + t}$, alors $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ et $f(0) = 1$. Pour tout $x > 0$, on applique la formule des accroissements finis à l'intervalle $[0, x]$, il existe $c \in]0, x[$, tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c + 1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Ce qui donne la résultat.

Corollaire 3.4.1. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur$]a, b[$, on a

(1) $\forall x \in]a, b\,[, f'(x) = 0$ si et seulement si f est constante sur $]a, b[$.

(2) Si $\forall x \in]a, b\,[, f'(x) \geq 0$ (resp $f'(x) > 0$), alors f est croissante (resp strictement croissante) .

(3) Si $\forall x \in]a, b\,[, f'(x) \leq 0$ (resp $f'(x) < 0$), alors f est décroissante (resp strictement décroissante).

Théorème des accroissements finis généralisés

Théorème 3.4.6. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur$]a, b\,[$ telles que $g'(x) \neq 0$ sur cet intervalle et $g(a) \neq g(b)$. Il existe $c \in]\,a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)].$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Règle de l'hôpital

Théorème 3.4.7. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \to a^+$. On suppose que $g'(x)$ ne s'annule pas dans un voisinage de a et que $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Dans ces conditions

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Aussi, ce résultat vaut que ℓ soit un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque. Le théorème reste valable quand f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \to b^-$.

Théorème 3.4.8. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b\,[$. On suppose que $g'(x)$ ne s'annule pas dans $]a, b\,[$ et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite ℓ au point $x_0 \in]\,a, b[$, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Démonstration. Le Théorème des accroissements généralisés appliqué sur $[x_0, x]$ donne

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \qquad \text{avec} \qquad c_x \in \left] x_0, x\right[.$$

Si $x \to x_0$, alors $c_x \to x_0$, par suite $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to \ell$, aut rement dit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \to \ell \quad \text{lorsque} \quad x \to x_0.$$

□

Exemple 3.4.6. Soit la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln x}, \quad \forall x \in]0, 2[$$

Posons $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ et $g(x) = \ln(x)$, alors $f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}, g(1) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} = 1,$$

d'après la règle de l'hôpital,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln x} = 1.$$

3.4.5 Fonctions équivalentes

Définition 3.4.8. Soit f, g deux fonction définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en x_0. On dit que f est équivalente à g lorsque $x \to x_0$ (ou en x_0), et l'on note $f \sim g$, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 3.4.7. Soit P un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Alors

$$P(x) \sim a_n x^n \text{ au voisinage de } +\infty.$$

En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = 1.$$

Proposition 3.4.2. Soit f_1, g_1, f_2 et g_2 des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

(i) Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.

(2) Si $f_1 \sim g_1$ et $\lim_{x\to x_0} f_1(x_0) = l$, alors $\lim_{x\to x_0} g_1(x_0) = l$.

Équivalents classiques au voisinage de 0

$$\begin{aligned} &e^x - x \sim x, \quad \sin(x) \sim x, \quad \tan(x) \sim x \\ &1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - x \sim x. \end{aligned}$$

3.5 Exercices

3.5.1 Énoncés

Exercice 16. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) f_1(x) = \frac{x+1}{1-e^{\frac{1}{x}}} & (3) f_3(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\sqrt{x^2-1} \\ (2) f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} & (4) f_4(x) = (1+\ln(x))^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Exercice 17. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (2) \lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (3) \lim_{x\to0} \frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)} \\ (4) \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} & (5) \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} & (6) \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}, a>0 \\ (7) \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x & (8) \lim_{x\to+\infty} \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x}) & (9) \lim_{x\to1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{array}$$

Exercice 18. A l'aide des équivalences, calculer les limites suivantes

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)}{\sin(2x)}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ (3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}, n \neq m$

(4) $\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ (5) $\lim_{x\to +\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

Exercice 19. Soient f, g deux fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

- Etudier la continuité de f et g.

Exercice 20. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(3+\sin(x)), \quad f_2(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad f_3(x) = \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right),$$
$$f_4(x) = x^{x+1}, \quad f_5(x) = \sin\left((e^x)^2\right), \quad f_6(x) = x^{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Exercice 21. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x, & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(x), & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 1+\cos(x), & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x\ln(x) - x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 22. En utilisant la formule de l'Hôpital, calculer les limites suivantes

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{e^x-1}$ (2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{\ln x - x+1}$ (3) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

3.5.2 Correction des exercices

Solution 16. L'ensemble de définition des fonctions :

(1) $\mathcal{D}_{f_1} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } 1-e^{\frac{1}{x}} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*$.

(2) $$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) > 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[\end{aligned}.$$

(3) $\mathcal{D}_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \neq 0 \text{ et } \ x^2-1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.

(4) $\mathcal{D}_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \ln(x) > 0 \text{ et } x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > e^{-1} \text{ et } x > 0\} =]\, e^{-1}, +\infty[$.

Solution 17.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$, par conséquence $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $y = \frac{1}{x}$, lorsque $x \to +\infty, y \to 0^+$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

(3) On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - 2\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}{x\left(1 + 3\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} = \lim \frac{1 - 2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1 + 3\frac{\sin(3x)}{3x}} = -\frac{1}{4}$$

(4) On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

(5) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos(x) \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)} \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(6)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x\to a^+} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(7) On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, pour $y = \frac{1}{x}$, lorsque$x \to +\infty, y \to 0^+$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0^+} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+} \exp\left(\frac{\ln(1 + y)}{y}\right) = e.$$

(8) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty} 2 \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2 \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

car

$$\left|\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ et } \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right) = 0.$$

(9) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = x - 1$, lorsque $x \to 1, y \to 0$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \lim_{y\to 0} -y\tan\left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to 0} -y\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \\ &= \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Solution 18.

(1) On sait que $\sin(2x) \sim 2x$, si $x \to 0$, alors $\frac{x\ln(x)}{\sin(2x)} \sim \frac{1}{2}\ln x$, $x \to 0$, par passage à la limite on trouve

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\ln x = -\infty$$

(2) On sait que $\ln(1+x^2) \sim x^2$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}$, si $x \to 0$, alors $\frac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \sim 2x$, $x \to 0$, d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = 0.$$

(3) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, alors

$$\cos(mx) - \cos(nx) = -2\sin\left(\frac{m-n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+m}{2}x\right)$$

On sait que $\sin\left(\frac{n-m}{2}x\right) \sim \frac{n-m}{2}x$ et $\sin\left(\frac{n+m}{2}x\right) \sim \frac{n+m}{2}x$, si $x \to 0$, alors

$$\cos(mx) - \cos(nx) \sim -2\left(\frac{m-n}{2}\right)\left(\frac{n+m}{2}\right)x^2, \quad x \to 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(n^2 - m^2\right).$$

(4) On sait que $e^x - 1 \sim x$, si $x \to 0$, alors $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$, si $x \to +\infty$, donc $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \sim 1$, $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$$

(5) On sait que $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$, si $x \to 0$, alors $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim 1 + \frac{1}{2x}$, si $x \to +\infty$, donc

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim x + \frac{1}{2}, x \to +\infty, \text{ d'ò }^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{2} = +\infty.$$

Solution 19.

(a) Si $x \neq 0$, la fonction f est continue. Les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, nous donne

$$f_g(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$
$$f_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

On a utilisé le fait que $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, comme $f_g(0) = f_d(0) = f(0) = 0$, alors f est continue au point $x_0 = 0$.

(b) Si $x \neq 0$, la fonction g est continue. Les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, nous donne

$$g_d(0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \frac{\ln(1+y)}{y} = 0,$$
$$g_g(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{e^y}{y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y e^{-y}} = 0.$$

Comme $g_g(0) = g_d(0) = g(0) = 0$, alors g est continue au point $x_0 = 0$.

Solution 20. Les dérivées des fonctions

(1) On a

$$f_1'(x) = \frac{\cos(x)}{3 + \sin(x)}.$$

(2) On a

$$f_2'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(3) On a

$$f_3(x) = \ln(2 + \cos(x)) - \ln(2 - \cos(x)), \text{ car } 2 - \cos(x) > 0 \text{ et } 2 + \cos(x) > 0,$$

donc

$$f_3'(x) = \frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)} - \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} = \frac{-4\sin(x)}{(2 + \cos(x))(2 - \cos(x))} = \frac{-4\sin(x)}{4 - \cos^2(x)}.$$

(4) On a

$$f_4(x) = x^{x+1} = e^{\ln\left(x^{x+1}\right)} = e^{(x+1)\ln(x)},$$

donc

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= ((x+1)\ln(x))' e^{(x+1)\ln(x)} = \left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right) e^{(x+1)\ln(x)} \\ &= \left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right) x^{x+1} \end{aligned}$$

(5) On a

$$f_5(x) = \sin\left((e^x)^2\right) = \sin\left(e^{2x}\right),$$

donc

$$f_5'(x) = 2e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right).$$

(6) On a

$$f_6(x) = x^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{\sin(x)}{x}}\right)} = e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)},$$

donc

$$f_6'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)\right)' e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)},$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)\right)' &= \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' \ln x + \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{x} \\ &= \frac{x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \left(\frac{x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x)}{x^2}\right) x^{\frac{\sin(x)}{x}} \\ &= (x\cos(x)\ln x + (1-\ln x)\sin(x)) x^{\frac{\sin(x)}{x}-2} \end{aligned}$$

Solution 21.

- La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty,0[]0,,\pi[$ et $]\pi,+\infty[$.

- Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$.

  On a

$$f_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + x = 0$$

$$f_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0$$

  Alors $f_g(0) = f_d(0) = f(0)$, donc f est continue en $x_0 = 0$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$. On a

$$f_g'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x+1 = 1.$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Comme $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, alors la fonction f est dérivable en $x_0 = 0$.

- Pour $x_0 = \pi$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors

$$f_g(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \sin(x) = 0,$$

$$f_d(\pi) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} 1 + \cos(x) = 0,$$

Alors $f_g(\pi) = f_d(\pi) = f(\pi)$, donc f est continue en $x_0 = \pi$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors

$$f'_g(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-\sin(y)}{y} = -1.$$

$$\begin{aligned} f'_d(\pi) &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1 + \cos(y + \pi)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0^+} y \left(\frac{1 - \cos(y)}{y^2} \right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{2} = 0, \end{aligned}$$

Comme $f'_g(\pi) \neq f'_d(\pi)$, alors la fonction \$f\$ n'est pas dérivable en $x_0 = \pi$.

- La fonction g est continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

- Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, on a

$$g_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - 1 = 0,$$

$$g_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) - x = 0,$$

Alors $g_g(0) = g_d(0) = g(0)$, donc g est continue en $x_0 = 0$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, nous avons

$$g'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) - 1 = -\infty,$$

Comme $g'_d(0) = -\infty$, alors la fonction g n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Solution 22.

(1) La limite de $\frac{1-\cos(x)}{e^x - 1}$ en 0 est indéterminée, on regarde la limite du quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur

$$\frac{(1 - \cos(x))'}{(e^x - 1)'} = \frac{\sin(x)}{e^x}$$

donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^x}=0.$$

(2) La limite de $\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}$ en 1 est in déterminée, on a
$$\frac{(x^x-1)'}{(\ln x-x+1)'}=\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)'}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x(1+\ln x)x^x}{1-x}.$$

donc
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(1+\ln x)x^x}{1-x}=-\infty.$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(1+\ln x)x^x}{1-x}=+\infty.$$

(3) La limite de $\frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$ en π est indéterminée, on a
$$\frac{(\sin(x))'}{\left(x^2-\pi^2\right)'}=\frac{\cos(x)}{2x},$$

donc
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x)}{2x}=\frac{\cos(\pi)}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}.$$

(4) La limite de $\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ en 0 est indéterminée, on a
$$\frac{(x\cos(x)-\sin(x))'}{\left(x^2\right)'}=\frac{-x\sin(x)}{2x}=-\frac{\sin(x)}{2},$$

donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin(x)}{2}=0.$$

Chapitre 4

Application aux fonctions élémentaires

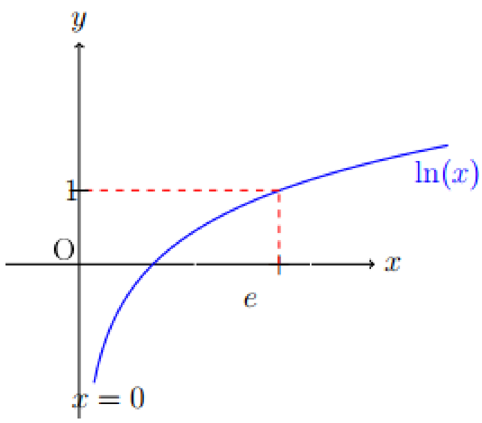
4.1 Fonction logarithme, fonction exponentielle et fonction puissance

4.1.1 Fonction Logarithme

Définition 4.1.1. On appelle logarithme népérien et on note ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Remarque. La fonction $x \to \ln(x)$ est continue, strictement croissante et définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.



Propriétés des logarithmes

Soient a et b des réels strictement positifs, et α est un réel :

- Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- Quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- Puissance : $\ln\left(a^{\alpha}\right) = \alpha \ln(a)$
- Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $\ln(a) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$ et $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Limites particulières

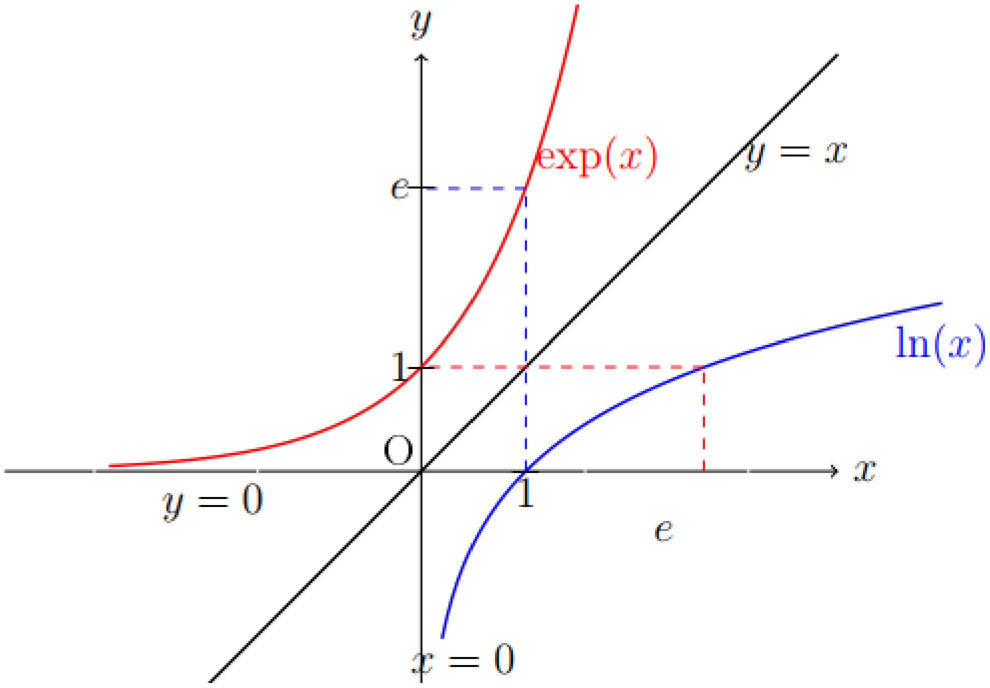
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

4.1.2 Fonction exponentielle

Définition 4.1.2. La fonction réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ ou $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, où

$$(\exp x)' = \exp x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$



Propriétés des exponentielles

Soient a, b et n des réels :

- Produit : $e^a e^b = e^{a+b}$
- Inverse : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- Quotient : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- Puissance : $(e^a)^n = e^{na}$

Lien exponentielle et logarithme

- $\ln(e^a) = a,$
- $e^{\ln(a)} = a > 0,$
- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$
- $a^b = e^{b \ln a}.$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $a^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

- $e^a \geq b > 0 \Leftrightarrow a \geq \ln b$

- $e^a < b \Leftrightarrow a < \ln b$, avec $b > 0$

Limites particulières

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

4.1.3 Fonction puissance

Définition 4.1.3. On appelle fonction puissance d'un réel a positif, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$$

Remarque. La fonction puissance est strictement positive

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x\ln(a)} > 0.$$

Propriétés. Pour tous $a, b > 0$, on a les égalités suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(a^x) = x\ln(a)$.

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : a^{x+y} = a^x a^y$ et $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

- $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)^y = a^{xy}$.

- $\forall x \in \mathbb{R} : (ab)^x = a^x b^x$.

Étude de la fonction puissance

Soit la fonction f_a définie sur$\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$. Comme $a^x = e^{x\ln(a)}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,car composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'_a(x) = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x.$$

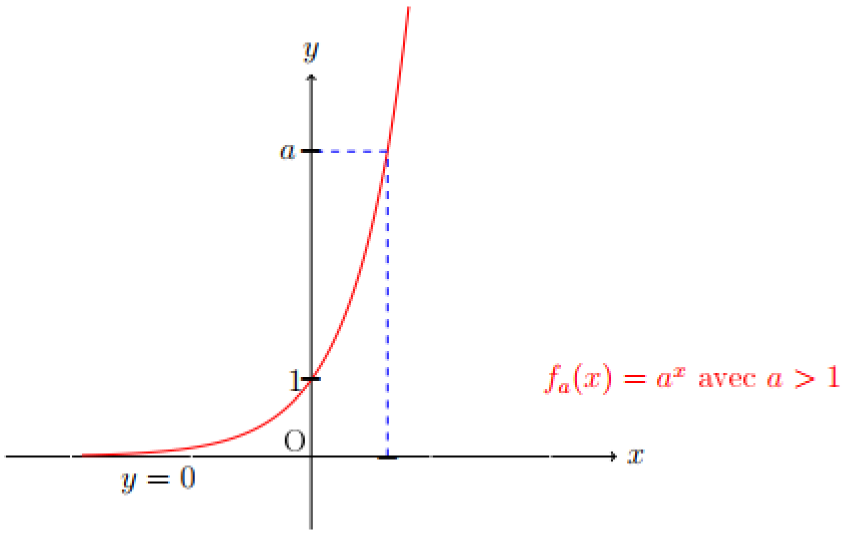
Le signe de la dérivée dépend donc du signe de $\ln(a)$. On a alors :

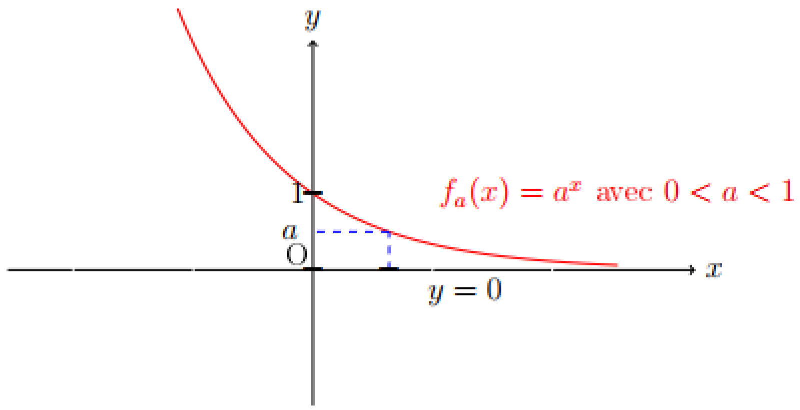
- Si $a > 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} : f'_a(x) > 0$, la fonction puissance est croissante.

- Si$0 < a < 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R} : f'_a(x) < 0$, la fonction puissance est décroissante.

Limite à l'infini

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$



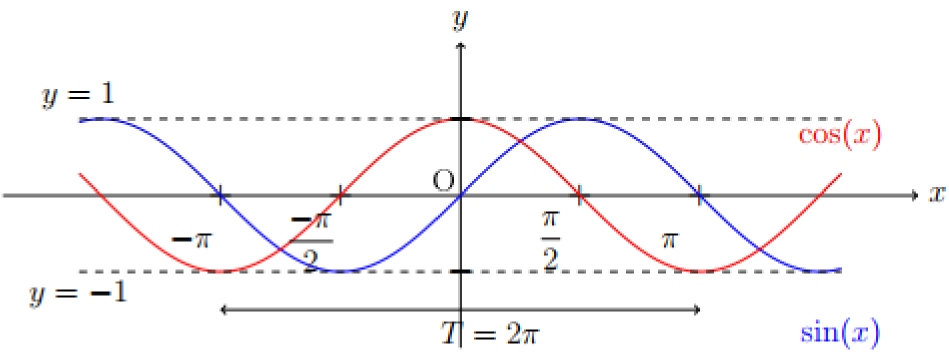


4.2 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

4.2.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus

Fonction	$\sin x$	$\cos x$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	impaire	paire
Période	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$



Propriétés

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

Formules d'addition $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

Formules de transformation de produits en sommes

- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

Formules de transformation de sommes en produits

- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Les fonctions tangente et cotangente

Définition 4.2.1. On appelle tangente la fonction tan (ou tg) définie par :

$$x \to \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} - A,$$

où $A = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ On appelle cotangente la fonction cot définie par :

$$x \to \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} - B$$

où $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

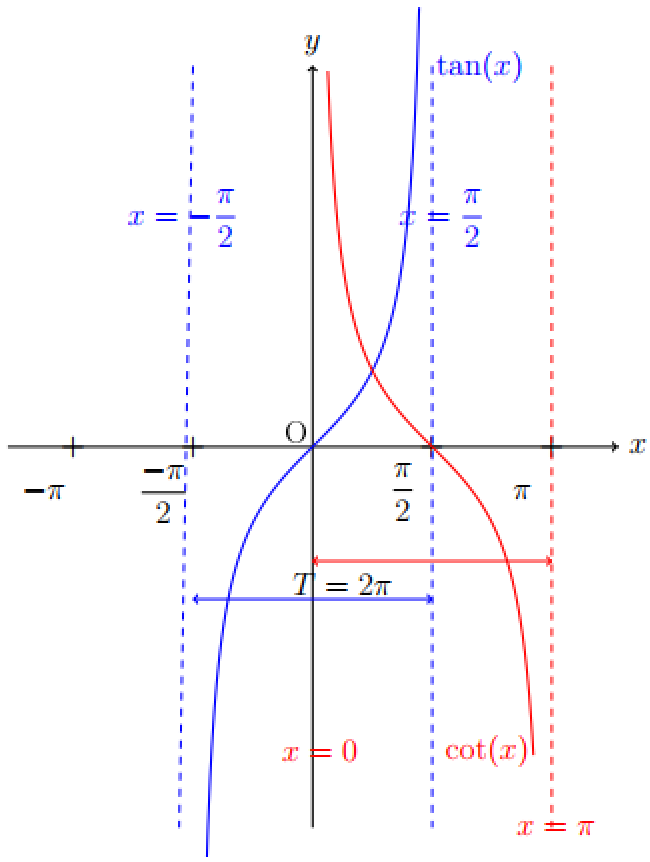
Propriétés.

- Pour tout $x \in \mathbb{R} - (A \cup B)$, on a

$$\cot(x)\tan(x) = 1.$$

- Les deux fonctions étant périodiques de période π, on peut donc restreindre le domaine de l'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour la tangente et $]0, \pi[$ pour la cotangente.
- Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivable sur leurs domaines de définition et l'on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} - A,$$
$$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} - B,$$



Propriétés. La fonction tangente satisfait les propriétés suivantes, $\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a

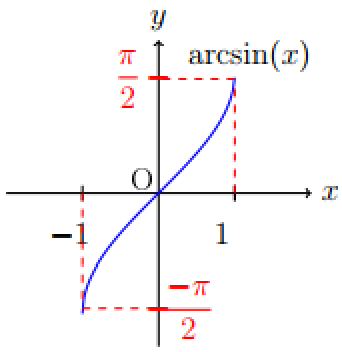
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

4.2.2 Fonctions circulaire réciproques

Fonction $x \to \arcsin x$

La fonction sinus a une fonction dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée arcsin

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [-1,1]$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin \sin(x) = x$.

(3) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.

(4) $\forall x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 4.2.1. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et l'on a

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

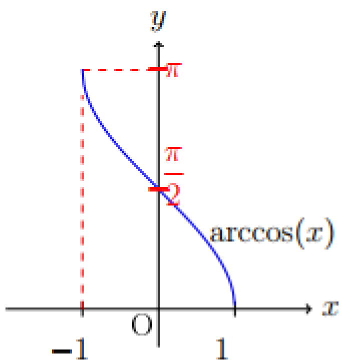
Démonstration. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$, par dérivation, on obtient

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fonction $x \to \arccos x$

La fonction cosinus a une fonction dérivée strictement négative sur $]0,\pi[$, donc bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arccosinus et est notée arccos,

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$.

(2) $\forall x \in [0,\pi]$, on $a \arccos\cos(x) = x$.

(3) $\forall x \in [0,\pi]$, on $a \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y)$.

(4) $\forall x \in [-1,1]$, on $a \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 4.2.2. La fonction arccos est dérivable dans $]-1,1[$, et l'on a

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$, par dérivation, on obtient

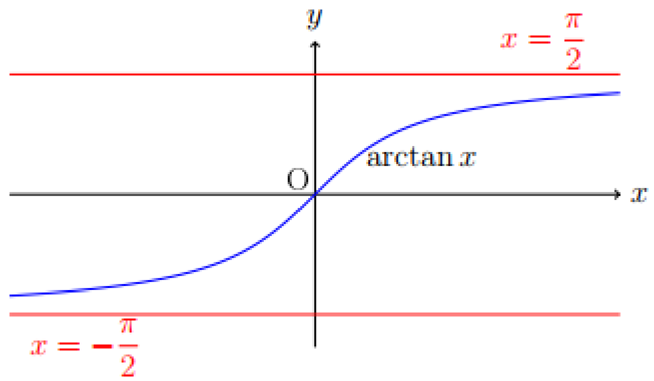
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Fonction $x \to \arctan x$

La fonction tangente a une fonction dérivée strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée arctan,

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\arctan(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arctan\tan(x) = x$.

(3) La fonction arctan est dérivable surs $\mathbb{R}$, et l'on a

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.3 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.3.1 Fonctions hyperboliques

Définition 4.3.1. Les fonctions de la variable x,

$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $\coth(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$, $(x \neq 0)$

s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique.

Propriétés.

(1) La fonction ch est paire et les fonction sh, th, coth impaires.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les relations

$$\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x, \quad \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = -e^{-x},$$
$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2(x) = \tfrac{1}{\coth(x)}.$$

(3) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a les relations

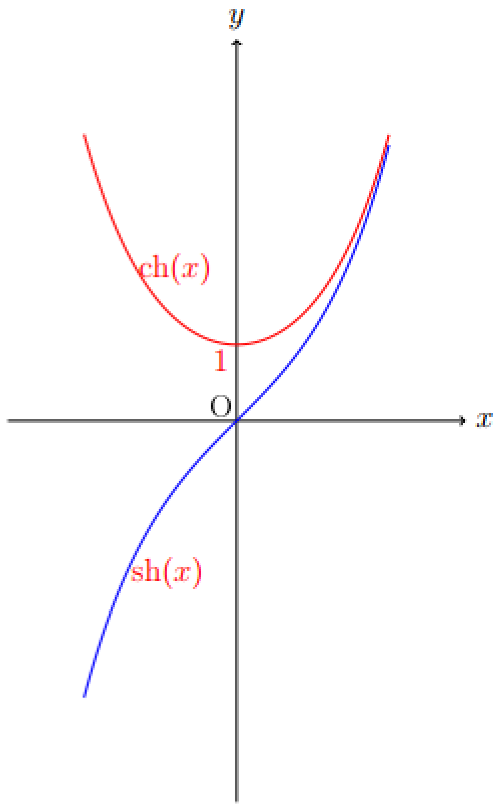
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y),$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y),$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}.$$

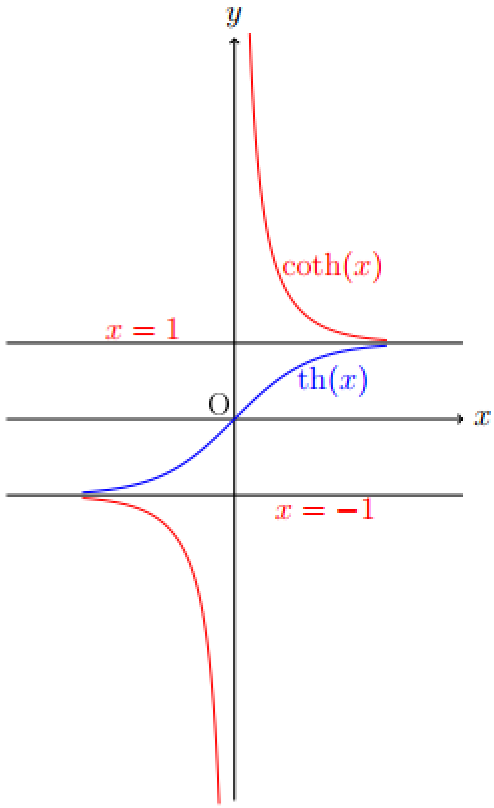
(4) Les fonction ch, sh, th sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$(\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x), \quad (\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x), \quad (\operatorname{th}(x))' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

(5) La fonction coth est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a

$$(\coth(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$$





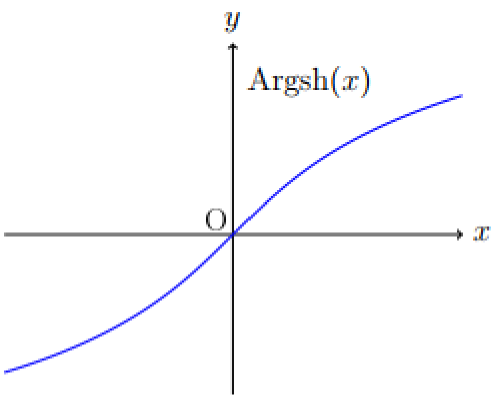
4.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction $x \longrightarrow Argsh$

La fonction sinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection

de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée $Argsh$,

$$Argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \qquad x \longrightarrow Argsh(x)$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x)) = x$ et $\mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

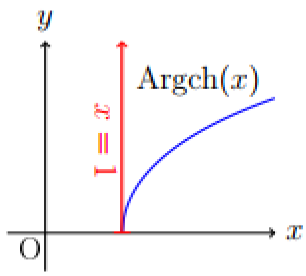
(3) La fonction Argsh est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$(\mathrm{Argsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction $x \to Argch$

La fonction cosinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$\$dans $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée Argch, Argch :

$$[1, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in [1, +\infty[, \mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in [0, +\infty[, \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \left[1, +\infty\right[, \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$.

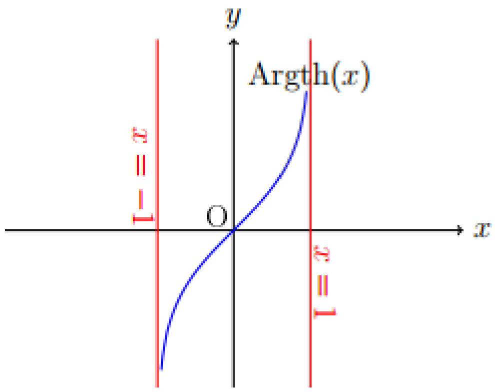
(3) La fonction Argch est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$, et l'on a

$$(\mathrm{Argch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction $x \to Argth$

La fonction tangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée Argth,

$$\mathrm{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{Argth}(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in]-1,1[$, th $(\text{Argth}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argth}(\text{th}(x)) = x$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

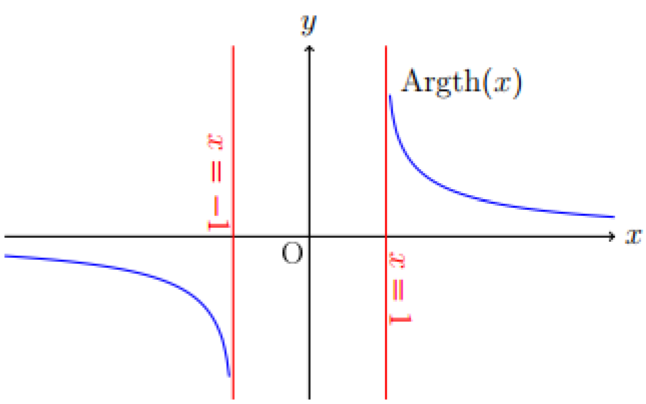
(3) La fonction Argth est continue et dérivable sur $]-1,1[$, et l'on a

$$(\text{Argth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Fonction$x \to Argeth$

La fonction cotangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cotangente hyperbolique et est notée $Argcth$,

$$\text{Argcth} :]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}^*, \quad x \mapsto \text{Argcth}(x).$$



Propriétés.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \coth(\mathrm{Argcth}(x)) = x.$

(2) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, \mathrm{Argcth}(\coth(x)) = x.$

(2) $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty\left[, \mathrm{Argcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right..$

(3) La fonction Argcth est continue et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, et l'on a

$$(\mathrm{Argcth}(x))' = \frac{1}{x^2-1}.$$

4.4 Exercices

4.4.1 Énoncés

Exercice 23.

1) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) Écrire sous forme d'expression algébrique

a) $\cos(2\arcsin(x))$,

b) $\cos(\arctan(x))$.

Exercice 24. Résoudre les équation suivantes :

a) $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$,

b) $\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$.

Exercice 25. Vérifier

i) Pour tout $x \in]-1, 1\left[, \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\right..$

ii) Pour tout $x \in]0, +\infty\left[, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\right..$

Exercice 26.

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$,

b) $f_2(x) = \arccos\left(\sqrt{2-x^2}\right)$,

c) $f_3(x) = \arccos(2x+1) - \arcsin(3x^2)$.

2) Calculer les dérivées des fonctions f_1 et f_2.

Exercice 27. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x)$,

b) $\mathrm{th}\ (\mathrm{Argsh}\, x)$,

c) $\mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argsh}\, x)$,

d) $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x)$,

e) $\mathrm{th}(\mathrm{Argch}\, x)$, $\quad f)\ \mathrm{ch}(2\,\mathrm{Argch}\, x)$,

g) $\frac{2\,\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}(2x)}{x-\ln(\mathrm{ch}(x))-\ln(2)}$.

4.4.2 Correction des exercices

Solution 23.

1) On a $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$, pour $a = \frac{\pi}{6}$, on trouver

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

alors

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

2.a) On a $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$, pour $\alpha = \arcsin(x), (x \in [-1, 1])$, alors

$$\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2.$$

2.b) On a

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha) \quad \text{implique} \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)},$$

pour $\alpha = \arctan(x), (x \in \mathbb{R})$,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme $\arctan(x) \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\arctan(x)) \geq 0$, donc

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Solution 24.

a) On a $\cos(\arccos x) = x$, alors $\cos(\arccos x) = \cos\left(2 \arccos \frac{3}{4}\right)$, donc

$$x = \cos\left(2 \arccos \frac{3}{4}\right) = 2\cos\left(\arccos \frac{3}{4}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Comme $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, alors

$$\begin{aligned} x &= \sin(\arcsin x) \\ &= \sin\left(\arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}\right) \\ &= \sin\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \cdot \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cdot \cos\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5}\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{21}+8}{25}. \end{aligned}$$

Solution 25.

i) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ainsi f est constante $]-1,1[$, alors

$$f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

donc

$$\forall x \in]-1,1[: \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Soit $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, alors

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

alors g est constante sur $]0,+\infty[$, donc

$$g(x) = g(1) = 2\arctan(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 26.

1) L'ensemble de défunition

$$\mathcal{D}_{f_1} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \text{ et } x \neq -1\right\}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} \leq 1, \\ -1 \leq \frac{x}{x+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x+1} \leq 0, \\ \frac{2x+1}{x+1} \geq 0, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (2x+1)(x+1) \geq 0, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,+\infty[, \\ x \in]-\infty,-1] \cup [-\frac{1}{2},+\infty[, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \in [-\frac{1}{2},+\infty[,
\end{aligned}$$

comme $-1 \notin [-\frac{1}{2},+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{f_1} = [-\tfrac{1}{2},+\infty[\\
&\mathcal{D}_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sqrt{2-x^2} \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq \sqrt{2-x^2} \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0\right) &\Leftrightarrow (2-x^2 \leq 1 \text{ et } 2-x^2 \geq 0) \\
&\Leftrightarrow (x^2 \geq 1 \text{ et } x^2 \leq 2) \\
&\Leftrightarrow (x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\text{ et } x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]) \\
&\Leftrightarrow x \in [1,\sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2},-1]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f_2} = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}].$$

$$\mathcal{D}_{f_3} = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1 \text{ et } -1 \leq 3x^2 \leq 1\right\}$$

$$\begin{aligned}
\left(-1 \leq 2x+1 \leq 1 \text{ et } -1 \leq 3x^2 \leq 1\right) &\Leftrightarrow \left(-1 \leq x \leq 0 \text{ et } x^2 \leq \frac{1}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow x \in [-1, 0] \text{ et } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right].
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f_3} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right].$$

2) Les dérivées de f_1 et f_2.

$$[\arcsin(u)]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad [\arccos(u)]' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

On a $f_1(x) = \arcsin(u(x))$, avec $u(x) = \frac{x}{x+1}$, donc

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2 - x^2}} \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad \forall x > \frac{-1}{2},
\end{aligned}$$

car

$$x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[\Rightarrow x+1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |x+1| = x+1.$$

On a $f_2(x) = \arccos\left(\sqrt{2-x^2}\right)$, avec $u(x) = \sqrt{2-x^2}$, donc

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2}} \left(\sqrt{2-x^2}\right)' \\
&= \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{(2-x^2)(x^2-1)}}, \quad \forall x \in \left] -\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}\right[.
\end{aligned}$$

Solution 27.

a) $\mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1$, pour $\alpha = \mathrm{Argsh}\, x$, on a

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}\, x) = \mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}\, x) + 1 = x^2 + 1.$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geq 0$, alors

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argsh}\, x) = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}\, x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) $\mathrm{sh}(2\alpha) = 2\,\mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\alpha)$, pour $\alpha = \mathrm{Argsh}\, x$,

$$\mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argsh}\, x) = 2\,\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x)\,\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}\, x) = 2x\sqrt{x^2+1}.$$

c) On a $\mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1$, pour $\alpha = \mathrm{Argch}\, x$,

$$\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argch}\, x) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}\, x) - 1 = x^2 - 1.$$

Comme $\mathrm{Argch}\, x \geq 0$, alors $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x) \geq 0$, donc

$$\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x) = \sqrt{x^2-1}.$$

d) On a

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argch}\, x) = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\, x)} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}.$$

f) On a ch $(2\alpha) = 2\,\mathrm{ch}^2(\alpha) - 1$, pour $\alpha = \mathrm{Argch}\, x$,

$$\mathrm{ch}(2\,\mathrm{Argch}\, x) = 2\,\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}\, x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

g) On a

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(2x) &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) \\ &= e^{-2x} + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x - \ln(\mathrm{ch}(x)) - \ln(2) &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln(2) \\ &= x - \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + \ln(2) - \ln(2) \\ &= x - \ln\left(e^x\left(1 + e^{-2x}\right)\right) \\ &= x - \ln e^x - \ln\left(1 + e^{-2x}\right) \\ &= -\ln\left(1 + e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch}(x)) - \ln(2)} = -\frac{1 + e^{-2x}}{\ln\left(1 + e^{-2x}\right)}$$

4.4. Exercices

Chapitre 5

Résumé de cours sur les structures algébriques

5.1 Notion de groupe

5.1.1 Généralités

Définition 5.1.1. (Notion de loi de composition interne) Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne sur E une application $f : EE \to E$. Si x et y sont dans E, on note $x * y$ l'image de (x, y) par f. On dit aussi que l'ensemble E est stable par $*$.

Exemples 5.1.1. Le produit vectoriel est une LCI sur l'ensemble des vecteurs de l'espace mais pas le produit scalaire.

Définition 5.1.2. (Notion de groupe) Soit G un ensemble et $*$ une loi. On dit que $(G, *)$ est un groupe si :

- l'ensemble G est stable par $*$: $\forall x, y, \in G, x * y \in G$.
- la loi $*$ est associative : $\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z)$.
- la loi $*$ admet un élément neutre : $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$.
- tout élément x de G admet un symétrique pour la loi $*$: $\exists a \in G, x * a = a * x = e$.

Si la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe G est commutatif.

Proposition 5.1.1. (Groupes de références) Les ensembles suivants ont des structures de groupe

- pour la loi + : $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$. L'élément neutre est 0 .

- pour la loi : $(\mathbb{Q}^*,+),(\mathbb{R}^*,.),(\mathbb{C}^*,.)$. L'élément neutre est 1 .

- pour la loi o : l'ensemble $(S_E,\circ)$ des bijections de E dans E est un groupe. L'élément neutre est l'application identité id d_E.

- pour la loi : le groupe $(GL_n(\mathbb{K}),.)$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'élément neutre est la matrice unité I_n.

- Le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ des classes de congruence modulo 4 (programme SPE).

Remarque 5.1.1 L'ensemble $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe car 2 n'admet pas de symétrique puisque $-2\notin\mathbb{N}$. De même $(\mathbb{R},.)$ n'est pas un groupe, car 0 n'admet pas d'inverse.

Proposition 5.1.2 Dans un groupe $(G,*)$, l'élément neutre e et les symétriques sont uniques.

Remarque 5.1.2 On prendra garde aux notations, selon que la loi du groupe est notée "multiplicativement» $(*,\star,\circ)$ ou "additivement» +.

Définition 5.1.3. (Notations dans un groupe) Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e (la loi est notée "multiplicativement»). Si $x\in G$, on note x^{-1} son symétrique, qu'on appelle l'inverse de x. Si n est un entier naturel, on pose

$$x^0=e \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, x^n=x*x*\cdots*x.$$

On définit aussi x^n avec un exposant négatif : sin $\in\mathbb{N}^*$, on note x^{-n} l'inverse de x^n, c'est-à-dire $x^{-n}=(x^n)^{-1}$.

loi		neutre	symétrique	n-ième itéré	cas où n négatif
$*$	$x*y$	e	x^{-1} inverse de x	$x*x*\cdots*x=x^n$	$x^{-n}=(x^n)^{-1}$
.	$x.y$	1	x^{-1} inverse de x	$x.x.\cdots.x=x^n$	$x^{-n}=(x^n)^{-1}$
+	$x+y$	0	$-x$ opposé de x	$x+x+\cdots+x=nx$	$(-n)x=-(nx)$

Proposition 5.1.3. (Règles de calcul) Soit $(G,*)$ un groupe.

- Inverse d'un produit :

$$\forall(x,y)\in G^2,(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}.$$

- Inverse d'un itéré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in G, (x^n)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n.$$

- Produit d'itérés :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall x \in G, x^n * x^m = x^{m+n}.$$

- Simplification dans un groupe :

$$\forall x, y, z \in G, x * z = y * z \Longrightarrow x = y.$$

Remarque 5.1.3. Attention, en général si x et y sont dans $(G, *)$, on n'a pas $(x*y)^2 = x^2*y^2$.

Penser aux matrices...

5.1.2 Sous-groupes

Définition 5.1.4. (Notion de sous-groupe) Soit $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On dit que H un sous-groupe de $(G, *)$ si :

- H est une partie de G.
- H contient le neutre e de G
- H est stable pour la loi $*$ et par passage au symétrique,

$$\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H \quad \text{et} \quad x^{-1} \in H.$$

Remarquons que si la loi du groupe est noté $+$, la condition de stabilité s'écrit $x - y \in G$.

Proposition 5.1.3. Si H est un sous-groupe de $(G, *)$, alors $(H, *)$ est un groupe.

Remarque 5.1.4. Pour montrer qu'un ensemble est un groupe, on peut ainsi montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe de référence.

Exemple 5.1.2.

- L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, x)$.
- (Voir exos) L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, .)$ (en particulier $\mathbb{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ est un groupe à 4 éléments dont on dresse la table de groupes).

- L'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}), +)$.
- L'ensemble $5\mathbb{Z}$ des multiples de 5 est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
- (Voir exos) Réciproquement tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ (on pose $a = \min H \cap \mathbb{N}^*$ et si $x \in H$, on écrit $x = aq + r$, avec $0 \leqslant r < a$. On a alors $r = x - aq \in H$, donc $r = 0$).

Exercice 5.1.1 1 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient les entiers 5 et 3. Que dire de G ?

5.1.3 Notion de morphisme

On désire comparer des groupes. Pour cela nous allons introduire la notion de morphisme de groupe, puis d'isomorphisme.

Définition 5.1.5. une application f du groupe $(G, *)$ vers le groupe $(H, \bullet)$ est un morphisme de groupe si

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \bullet f(y).$$

Si de plus le morphisme f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de G sur H. Les groupes G et H sont dits alors isomorphes.

Exemple 5.1.3

- L'application ln est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, .)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.
- L'application $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, .)$ défini par $\phi(t) = e^{it}$ est un morphisme de groupe.
- Les groupes $(3\mathbb{Z}, +)$ et $(\{5^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, .)$ sont isomorphes.

Exercice 5.1.2 Soit $f : (]0, +\infty[,) \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme de groupes. Déterminer $f(1)$, puis démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[\; et \, \forall r \in \mathbb{Q}, f(x^r) = r f(x)$

Proposition 5.1.4. Soit $f : (G, *) \to (H, \bullet)$ un morphisme de groupes. Alors f transforme l'élément neutre de G en élément neutre de H et transforme un symétrique dans G en symétrique dans H :

$$f(e_G) = e_H \quad \text{et} \quad \forall x \in G, f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}.$$

Exercice 5.1.3 On pose $K = \{\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1)\}$. Démontrer que K est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$, qui n'est pas isomorphe au groupe $(\mathbb{U}_4,)$. On pourra regarder le carré des éléments des groupes.

Proposition 5.1.5 Soit $f : (G, *) \to (H, \bullet)$ un morphisme de groupes.

- Si K est un sous-groupe de G, alors son image par f, noté $f(K)$ est un sous-groupe de H.
- Si L est un sous-groupe de H, alors son image réciproque par f, notée $f^{-1}(L)$ est un sous-groupe de G.

Définition-Proposition 5.1.6 (Noyau et image d'un morphisme) Soit $f : (G, *) \to (H, \bullet)$ un morphisme de groupes.

- On appelle noyau de f, l'ensemble noté Ker f défini par :

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in G \mid \quad f(x) = e_H\}.$$

- On appelle image de f, l'ensemble noté Im f défini par :

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid \quad x \in G\}$$

L'ensemble Kerf est un sous-groupe de G et l'ensemble Im f est un sous-groupe de H.

Exemple 5.1.4 le morphisme $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, .)$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{it}$. On a Ker $f = \{2\pi\mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{U}$

L'ensemble Ker f est l'ensemble des antécédents du neutre e_H. Le résultat suivant est très utile pour prouver qu'un morphisme est injectif.

Proposition 5.1.7 Soit $f : (G, *) \to (H, \bullet)$ un morphisme de groupes. On a

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{Ker}\, f = \{e_G\}.$$

Remarque 5.1.4 Le noyau mesure ainsi le défaut d'injectivité d'un morphisme.

5.2 Notion d'anneau

Définition 5.2.1. Soit A un ensemble et + et deux lois. On dit que $(A,+,.)$ est un anneau si :

- $(A,+)$ est un groupe commutatif.
- A est stable pour la loi
- La loi est associative.
- la loi admet un élément neutre noté 1_A ou 1 .
- La loi est distributive par rapport à +.

Proposition 5.2.1. (Anneaux de référence) Les ensembles suivants ont une structure d'anneau

- $(\mathbb{Z},+,.),(\mathbb{R},+,.),(\mathbb{Q},+,.),(\mathbb{C},+,.)$
- $(\mathbb{K}[X],+,.)$
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,.)$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- les anneaux de congruence modulo $n(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ (programme SPE)

Remarque 5.2.1 les éléments de A ne sont pas forcément inversibles pour la loi ″.″.

Proposition 5.2.2. (Groupe des inversibles d'un anneau) L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe pour la loi ″.″.

Exemple 5.2.1

- dans $\mathbb{Z}$, les seuls inversibles sont ± 1.
- dans $\mathbb{K}[X]$ les inversibles sont les polynômes constants non nuls
- dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les inversibles sont les matrices inversibles, c'est-à-dire $GL_n(\mathbb{K})$.
- dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{3}$ est inversible car $33 = 9 \equiv 1 \bmod 4$ donc $\overline{33} = \overline{1}$, mais $\overline{2}$ n'est pas inversible.

Proposition 5.2.3. (Règles de calcul) Soit $(A,+,.)$ un anneau. Soit a et b dans A.

- $a.0_A = 0_A = 0_A$

- $a.(-b) = (-a).b = -a.b$

- Formule du binôme de Newton : si a et b commutent ($a.b = b.a$),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$$

Définition-Proposition 5.2.4. (Sous-anneau) On dit qu'un ensemble B est un sous-anneau de l'anneau $(A, +, .)$ si :

- $(B, +)$ sous groupe de $(A, +)$.

- B contient l'élément unité 1_A de A

- B est stable par produit (pour la loi ".") L'ensemble $(B, +, .)$ est alors un anneau.

Exercice 5.21. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \mid \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss. Démontrer que $(\mathbb{Z}[i], +, .)$ est un anneau, puis déterminer ses éléments inversibles.

Remarque 5.2.2. L'anneau des entiers de Gauss est par exemple utile pour prouver le théorème des deux carrés. Tout comme $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$, il dispose d'une division euclidienne, on parle d'anneau euclidien. Une égalité comme $5 = (1-2i)(1+2i)$ montre alors que 5 n'est pas un nombre premier dans $\mathbb{Z}[i]$.

Définition 5.2.2. (Anneau intègre) Un anneau A est intègre s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in A^2, (x.y = 0 \Rightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0)).$$

Remarquons qu'il s'agit de la fameuse propriété apprise au collège : si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul.

Exemple 5.2.2.

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre

- L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre puisqu'il existe des matrices nilpotentes non nulles.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pas intègre

- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ non intègre car $\overline{22} = \overline{0}$

Remarque 5.2.3 si on peut définir la notion de morphisme d'anneau.

5.3 Notion de corps

Définition 5.3.1. (Corps) Un corps est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.

Proposition 5.3.1. (Corps de référence) Les ensemble suivants sont des corps :

$$(\mathbb{Q}, +, .), (\mathbb{R}, +, .), (\mathbb{C}, +, .).$$

Remarque 5.3.1. L'année prochaine, vous verrez que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement, si n est un nombre premier.

Proposition 5.3.2 Tout corps est intègre.

Chapitre 6

Espace vectoriel réel

6.1 Structure d'espace vectoriel réel

6.1.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 6.1.1. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont des suites finies de n termes réels :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

Définition 6.1.2. On peut définir sur $\mathbb{R}^n$ une loi de composition interne, l'addition, notée + par :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : X + Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Propriétés. de l'addition

$\Rightarrow$ Elle est associative : $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n, X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$

$\Rightarrow$ Elle est commutative : $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, X + Y = Y + X$

$\Rightarrow$ Elle a un élément neutre : $0_n = (0, 0, \ldots, 0), \forall X \in \mathbb{R}^n / X + 0_n = 0_n + X = X$

$\Rightarrow$ Tout élément X a un opposé noté $-X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) / X + (-X) = 0_n$

Définition 6.1.3. On peut aussi définir sur $\mathbb{R}^n$ une loi de composition externe, multiplication par un réel, noté "." ou parfois sans signe, par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n : \alpha.X = \alpha X = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Propriétés de la multiplication par un réel

$\Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n : 1.X = X$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n : (\alpha + \beta) \cdot X = \alpha \cdot X + \beta \cdot X$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot (X + Y) = \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n : (\alpha\beta) \cdot X = \alpha \cdot (\beta \cdot X)$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le note $(\mathbb{R}^n, +, .)$.

6.1.2 Espace vectoriel réel

Définition 6.1.4.

— Un ensemble E, muni d'une loi de composition interne $" + "$ (qui a deux éléments de E fait correspondre un élément de E) et d'une loi de composition externe $"."$ (qui à un élément de $\mathbb{R}$ et à un élément de E fait correspondre un élément de E) ayant les huit propriétés énoncées précédemment est appelé espace vectoriel réel.

— Ses éléments sont appelés vecteurs. On le note $(\mathbf{E}, +, .)$.

Exemples 6.1.1.

1) $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est un e.v.r., où les lois $" + "$ et $"."$ sont définies dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2 x_3), \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{cases} x + y = (x_1, x_2 x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ \alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3) \end{cases}$$

2) $(IF(\mathbb{R}), +, .)$est un e.v.r., où les lois $" + "$ et $"."$ sont définies dans $IF(\mathbb{R})$ par : $\forall f, g \in F(IR), \forall \alpha \in IR$, on a :

$$\begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) & \forall x \in IR \\ (\alpha.f)(x) = \alpha f(x) & \forall x \in IR \end{cases}$$

6.1.3 Propriétés

— Si $(E, +,)$ un espace vectoriel réel, alors $\forall \alpha, \beta \in IR, \forall x, y \in E$, on a :

1) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$

2) $0_{IR} \cdot x = 0_E$

3) $\alpha.x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E$

4) $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha.x)$

5) $(\alpha - \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) - (\beta \cdot x)$

6) $\alpha \cdot (x - y) = (\alpha \cdot x) - (\alpha \cdot y)$

6.2 Sous espaces vectoriels

6.2.1 Définition et propriétés

Définition 6.2.1. Un sous ensemble F d'un espace vectoriel E est dit sous espace vectoriel (s.e.v.) de E ssi :

1) $F \neq \phi$

2) F est stable pour " + " : $(\forall x, y \in F \quad x + y \in F)$

3) F est stable pour "." : $(\forall (\alpha, x) \in \mathbb{I}F \quad \alpha.x \in F)$

ssi :

1) $F \neq \phi$

2) $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in IR^2 \quad \alpha.x + \beta.y \in F$

Exemples 6.2.1.

1) $(P(\mathbb{R}), +,)$ (1'ensemble des polynômes de degré $\leq n$) est un s.e.v. de $(F(IR), +, .)$.

2) $(IR\{0\}, +,.) et (\{0\} IR, +,.)\, sont\, des\, s.e.v.de\, (IR^2, +, .)$.

Propriétés 6.2.1. Si E est un espace vectoriel, alors :

1) Tout sous espace vectoriel de E est un espace vectoriel.

2) L'intersection de n sous espaces vectoriels de E est un espace vectoriel.

3) $(\{0_E\}, +, .)$ est un sous espace vectoriel de E.

4) 0_E appartient à tous les sous espaces vectoriels de E.

6.2.2 Intersection de sous espaces vectoriels

Théorème 6.2.1. L'intersection de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E est un sous espace vectoriel de E.

Remarque 6.2.1. La réunion de deux sous espaces vectoriels n'est en général pas un sous espace vectoriel.

Théorème 6.2.2. L'intersection de plusieurs sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E est un sous espace vectoriel de E.

6.2.3 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 6.2.2. Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.

- La somme des sous espaces vectoriels E_1 et E_2, notée par $E_1 + E_2$, est égale à :

$$E_1 + E_2 = \{x \in E / \quad \exists\, (x_1, x_2) \in E_1 E_2 / x = x_1 + x_2\}$$

- La somme directe des sous espaces vectoriels E_1 et E_2, notée par $E_1 \oplus E_2$, est égale à :

$$E_1 \oplus E_2 = \{x \in E / \quad \exists!\, (x_1, x_2) \in E_1 E_2 / x = x_1 + x_2\}$$

- Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors les sous espaces vectoriels E_1 et E_2 sont dits sous espaces supplémentaires de E.

Théorème 6.2.3. Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E alors $E_1 + E_2$ et $E_1 \oplus E_2$ sont aussi des sous espaces vectoriels de E.

Théorème 6.2.4. Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $E = E_1 \oplus E_2$

2) $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Exemple 6.2.2.

— $E = F(IR) : E = E_1 \oplus E_2$, avec

* $E_1 = \{f \in E / f(x) = f(-x) \quad \forall x \in IR\}$ (ensemble des fonctions paires)

* $E_2 = \{f \in E / f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in IR\}$ (ensemble des fonctions impaires)

— Pour montrer que $E = E_1 \oplus E_2$, il suffit de vérifier que $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

En effet :

- $E = E_1 + E_2$:

* Soit $f \in E$. On pose $\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$

* On a :

$$\begin{cases} f_1(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_1(x) & \Rightarrow f_1 \in E_1 \\ f_2(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f_2(x) & \Rightarrow f_2 \in E_2 \\ \text{et} \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x) & \end{cases}$$

* Donc : $\forall f \in E \quad \exists\, (f_1, f_2) \in E_1 E_2 / f = f_1 + f_2$

* D'où : $E = E_1 + E_2$

- $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$:

* Si $f_0 \in E_1 \cap E_2$, alors : $\begin{cases} f_0(x) = f_0(-x) & \forall x \in IR \quad (f_0 \in E_1) \\ f_0(x) = -f_0(-x) & \forall x \in IR \quad (f_0 \in E_2) \end{cases}$

* Donc : $f_0 = O_E, \quad (f_0(x) = 0 \quad \forall x \in IR)$

* D'où : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

6.3 Combinaison linéaire - système générateur

6.3.1 Combinaison linéaire

Définition 6.3.1. Dans un espace vectoriel E, on appelle une combinaison linéaire de n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$, tout vecteur u de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \quad \text{avec}\,(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in IR^n$$

Théorème 6.3.1. L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel de E.

6.3.2 Système générateur

Définition 6.3.2.

* Dans un espace vectoriel E, on dit qu'un système de n vecteurs $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est un système générateur de E (ou que les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont des vecteurs générateurs de E) si tout vecteur u de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$:

$$(\forall u \in E) \quad (\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in IR) \quad /u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

* Le système $\{u_1, \cdots, u_n\}$ s'appelle aussi partie ou famille génératrice de E.
* On dit aussi que le système $\{u_1, \cdots, u_n\}$ engendre E ou que E est engendré par le système $\{u_1, \cdots, u_n\}$.
* On note $E =< u_1, \cdots, u_n >$ ou $E = \text{Vect}\,\{u_1, \cdots, u_n\}$

Remarque 6.3.1.

— Le sous espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ est engendré par les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$: $\quad E_n = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \alpha_i \in IR, u_i \in E\} = \langle u_1, \cdots, u_n >$

Exemple 6.3.1 :

— $IR\{0\} = \langle u_1, u_2 \rangle$, avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0)$:

$$\forall (x, 0) \in IR\{0\}, \quad \exists \alpha, \beta \in IR \quad /(x, 0) = \alpha \cdot (1, 0) + \beta \cdot (-1, 0) = (\alpha - \beta, 0)$$

il suffit de prendre par exemple $\alpha = x$ et $\beta = 0$

6.3.3 Système libre - système lié

Définition 6.3.3.

- n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairement indépendants (le système $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est un système libre) si : $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$
- n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairement dépendants (ole système $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est un système lié) s'ils ne sont pas linéairement indépendants :

$$\exists\, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq (0, \cdots, 0) \quad / \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$$

Exemples 6.3.2.

- Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 0)$ de IR^3 sont linéairement indépendants.
- Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$ de IR^3 sont linéairement dépendants.

Théorème 6.3.2.

- Un système de vecteurs est lié ssi un des vecteurs du système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système.
- Si un des vecteurs d'un système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système alors tout vecteur de ce système est combinaison linéaire des autres vecteurs du système.

Propriétés 6.3.1.

1) Le vecteur 0_E n'appartient à aucun système libre de E.

2) $\forall u \in E / u \neq 0_E$, le système $\{u\}$ est libre.

3) Tout système de vecteurs extrait d'un système libre est libre.

4) Tout système de vecteurs contenant un système lié est lié.

6.3.4 Ordre et rang d'un système de vecteurs

Définition 6.3.4.

* L'ordre d'un système est le nombre de vecteurs du système.
* Le rang d'un système est égal au plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de ce système.

Exemples 6.3.3. $S_1 = \{(2,1),(1,1),(0,-1)\}$

— L'ordre de S_1 est égal à 3 .

— Le rang de S_1 est égal à 2 car :

- Les vecteurs $(2,1),(1,1)$ et $(0,-1)$ sont linéairement dépendants ($(2,1) = 2.(1,1)+(0,-1)$), ce qui implique que rang $(S_1) < 3$.
- Les vecteurs $(2,1)$ et $(1,1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique que rang $(S_1) = 2$.

Propriétés 6.3.2.

1) Un système de vecteurs est libre ssi son rang est égal à son ordre.

2) Dans un système lié de rang r, les vecteurs libres extraits en nombre r sont dits vecteurs principaux, les autres sont dits non principaux et sont combinaison linéaire des premiers.

3) Le rang d'un système de vecteurs est égal à la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs.

6.3.5 Base d'un espace vectoriel

Définition 6.3.5. Une base d'un espace vectoriel E c'est tout système libre de vecteurs générateurs de E

Exemples 6.3.4.

1) $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de IR^2

2) $\{1,0),(0,1),(1,1)\}$ n'est pas une base de IR^2.

3) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de IR^3 : on l'appelle la base canonique de IR^3.

4) En général, $\{(1,0,\cdots 0),\cdots,(0,\cdots,1,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)\}$ est la base canonique de IR^n.

Théorème 6.3.3. Un système de vecteurs $\{u_1,\cdots,u_n\}$ est une base de \$E\$ ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\cdots,u_n$:

$$(\forall u \in E) \quad (\exists! \alpha_1,\cdots,\alpha_n \in IR) \quad /u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

6.3.6 Espace vectoriel de dimension fini

Définition 6.3.6.

* Un espace vectoriel réel est dit de dimension finie s'il admet une base constituée d'un nombre fini n de vecteurs.
* Ce nombre n s'appelle la dimension de l'espace. On note $\dim E = n$.

Exemples 6.3.5.

* IR^n est un espace vectoriel réel de dimension n.

Propriétés 6.3.3. Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1) Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.

2) L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.

3) L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.

4) Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.

5) Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus$m = n$, alors$F \equiv E$.

6) Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E, alors :

— $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

— $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Théorème 6.3.4. Soit E un espace vectoriel réel de dimension fini.

* Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $E, E = E_1 \oplus E_2$, alors $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.
* Si $B_1 = \{u_1, \cdots, u_p\}$ et $B_2 = \{v_1, \cdots, v_q\}$ sont deux bases respectives de E_1 et E_2, alors $B = \{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ est une base de E.

Théorème 6.3.5. Soit E un espace vectoriel réel de dimension fini. Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E, de bases respectives $B_1 = \{u_1, \cdots, u_p\}$ et $B_2 = \{v_1, \cdots, v_q\}$.

Si $B = \{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ est une base de E alors $E = E_1 \oplus E_2$.

Chapitre 7

Applications Linéaires

7.1 Définitions et généralités

7.1.1 Définitions

Définition 7.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels réels. On dit qu'une application f de E vers F est une application linéaire ssi :

1) $\forall (x, y) \in E^2 : \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall (\alpha, y) \in IRE : \quad f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$

ssi $\forall (\alpha, \beta) \in IR^2, \forall (x, y) \in E^2 : \quad f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

Définition 7.1.2. Soient E et F deux espaces vectoriels réels, et f une application linéaire de E vers F.

* On dit que f est un endomorphisme ssi $E = F$.

* On dit que f est un isomorphisme ssi f est bijective.

* On dit que f est un automorphisme ssi $E = F$ et f est bijective.

Exemples 7.1.1

1) L'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers$\mathbb{R}$ par $f((x, y)) = x + y$ est une application linéaire.

2) L'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par $f((x, y)) = (y, x)$ est un automorphisme.

Définition 7.1.3. (égalité) Deux applications linéaires f et g définies de E vers F sont égales, $f \equiv g$, ssi

$$\forall x \in E : f(x) = g(x)$$

7.1.2 Propriétés

Expression analytique d'une application linéaire

Théorème 7.1.1. Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux espaces vectoriels réels de dimensions finis. Toute application linéaire de $(E,+,.)$ vers $(F,+,.)$ est complètement déterminée par la donnée$ de l'image d'une base

$$B = \{u_1, \cdots, u_p\} \text{ de } (E,+,.) : \text{Si } x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i \text{ alors } f(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(u_i).$$

Définition 7.1.4. (expression analytique)

L'écriture $f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$, où $a_i x_i f(u_i)$, s'appelle l'expression analytique de f relativement à la base B.

Autres propriétés

* Soient E et F deux espaces vectoriels réels. Si f est une application linéaire de E vers F, alors :

1) $f(0_E) = 0_F : \quad \forall x \in E, \quad f(0_E) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0_F$

2) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x) : \quad f(-x) = f(0_E - x) = f(0_E) - f(x) = 0_F - f(x) = -f(x)$

3) $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in IR^n, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n : \quad f(\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(x_n)$

7.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 7.2.2. L'ensemble $L(E,F)$ des applications linéaires définies de E vers F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel réel.

7.2.1 Addition

* Si f et g sont deux applications linéaires, définies de E vers F, alors l'application $f+g$, définie de E vers F par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, est une application linéaire.

7.2.2 Multiplication par un scalaire

* Si f est une application linéaire définie de E vers F et α un réel, alors l'application $(\alpha.f)$ définie de E vers F par $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ est une application linéaire.

7.2.3 Composition de deux applications linéaires

* Soient E, F et G trois espaces vectoriels réels.
  — Si f est une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G, alors l'application $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G.

7.3 Image et image réciproque par une application linéaire

* Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f est une application linéaire de E vers F.

Définition 7.3.1.

* Soit A un sous ensemble de E. On appelle l'image de A par f, et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\} = \{y \in F/\exists x \in A : f(x) = y\}$$

* Soit B un sous ensemble de F. On appelle l'image réciproque de B par f, et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$$

Théorème 7.3.1.

* Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F.

* Si B est un sous espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E.

Théorème 7.3.2

* L'image d'un système générateur d'un sous espace vectoriel A de E est un système générateur du sous espace vectoriel $f(A)$ de F.
* L'image par f d'un système lié est un système lié.
* Si l'image par f d'un système est libre alors ce système est libre.

7.4 Noyau et image d'une application linéaire

* Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f est une application linéaire de E vers F.

Définition 7.4.1.

* On appelle l'image de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image de E par f :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x)/x \in E\} = \{y \in F/\exists x \in E : f(x) = y\}$$

* On appelle le noyau de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E/f(x) = 0_F\}$$

Théorème 7.4.1.

* $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F.
* $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Théorème 7.4.2.

* $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de F engendré par l'image d'une base quelconque de E

7.5 Applications linéaires injectives et surjectives

* E un espace vectoriel réel de dimension n et F un espace vectoriel réel de dimension p.
* f une application linéaire de E vers F.

Théorème 7.5.1

* f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
* f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$
* f est bijective, $\dim E = \dim F$ ssi f est injective ssi f est surjective

Corollaire 7.5.4

* Si l'application linéaire f est injective alors $\dim E \leq \dim F$.
* Si l'application linéaire f est surjective alors $\dim E \geq \dim F$.
* Si l'application linéaire f est bijective alors $\dim E = \dim F$.

7.6 Rang d'une application linéaire

Définition 7.6.1. Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini et soit f une application linéaire de E vers F.

On appelle le rang de l'application linéaire f, et on note $rg(f)$, la dimension de l'image de f : $rg(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$

Théorème 7.6.1. Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini.

* Si f est une application linéaire de E vers F, alors :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + rg(f).$$

Théorème 7.6.2. Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini. Si f est une application linéaire de E vers F, alors :

* f est injective ssi $rg(f) = \dim E$
* f est surjective ssi $rg(f) = \dim F$
* f est bijective ssi $rg(f) = \dim E = \dim F$

Bibliographie

[1] BENAISSA CHERIF Amin, Mathématiques 1, Cours et Exercices Corrigés, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran- M. Boudiaf Faculté des Mathématiques et Informatique

[2] Bouchelaghem Fayçal, ALGÈBRE RAPPELS ET EXERCICES RESOLUS, Ecole esst annaba.

[3] Baba-Hamed.C, Benhabib. K, Algèbre 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985

[4] A. Hitta, Cours d'Algèbre et Exercices Corriges, Edition OPU, Algérie, 2006

[5] K. Allab, Éléments d'Analyse, Fonction d'une variable réelle, Edition OPU, Algérie, 1984.

[6] M. H. Mortad, Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D, Edition Dar el Bassair, Algérie, 2012.

[7] X. A. Dussau, J. Esterle, F. Zarouf et R. Zarouf, Cours d'algèbre linéaire, ESTIA 1e Année Mathématiques, Edition 2008

[8] Stéphane BALAC,Frédéric STURM, Algèbre et analyse, Cours de mathematiques de premiere année avec exercices corigées, INSA de Lyon 2003.