

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté : **Sciences et Technologie**
Département : **Génie Mécanique**

Laboratoire de domiciliation : **Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux (LMANM)**

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Domaine : **Sciences et Technologie** Filière : **Génie Mécanique**
Spécialité : **Génie Mécanique et Matériaux Avancés**

Présentée par

FARAH Imed

Intitulée

**Comportement dynamique des dalles de roulement orthotropes multi-travées
sous la sollicitation des véhicules à essieux tandem et tridem**

Soutenue le : 23/10/2022

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Université	
Mr BEZAZI Abderrezak	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Président
Mr REZAIGUIA Abdelouahab	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Rapporteur
Mr GUEDRI Abdelmoumene	Professeur	Univ. M.C. Messaadia Souk Ahras	Examineur
Mr KELAIAIA Redha	Professeur	Univ. 20 Aout 1955 Skikda	Examineur
Mr GUENFOUD Salah	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Invité

إهداء

إلى منبت الخير والتضحية والإيثار والدي الكريم من رحل عن عالمنا، وما زال
دوي نصائحه يوجهني.

إلى رمز التفاني والإخلاص أُمي الحبيبة أطال الله في عمرها.

إلى زوجتي الغالية رفيقة درب من ملأت حياتي بالتحدي، وتخطي الصعاب.

إلى أبنائي أحمد و لينة فلذات الأكباد أنار الله طريقهما.

إلى إخوتي و أخواتي و كل العائلة الكريمة.

إلى كل أساتذتي و كل من علمني و أنار دربي.

إلى كل أصدقائي و كل من هو عزيز على قلبي.

أهديكم أطروحتي متمنيا من الله عز و جل أن يوفقنا لما يحبه و يرضاه.

Remerciements

Tout d'abord, Je tiens à remercier Pr. Abdelouahab REZAIGUIA d'avoir accepté d'être mon encadreur et pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à exprimer à Pr. Salah GUENFOUD, toute ma gratitude pour toute son aide, ces conseils, et son soutien durant ce temps du travail et qui m'a apporté beaucoup de savoir.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Pr. Abderrezak BEZAZI, qui malgré ses multiples occupations a accepté d'examiner ce travail et de présider le Jury de cette thèse.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance au Pr. Abdelemoumene GUEDRI et le Pr. Ridha KELAIAIA pour avoir accepté d'être examinateurs de cette étude. Je les remercie également de faire partie du jury de cette thèse.

Je tiens à remercier sincèrement mes collègues Hamza GHERDAOUI, Toufik BENMEDAKHENE, Rida HAMEL et Belgacem FISSAH qui m'ont beaucoup aidé durant la réalisation de cette thèse.

Je tiens également à remercier très sincèrement ma mère, ma femme, mes frères et mes sœurs, mes amis, qui m'ont beaucoup soutenu durant la réalisation de cette thèse.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Le phénomène de l'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules mobiles est très complexe dans la réalité car plusieurs facteurs entre en jeu. Les facteurs les plus importants intervenant dans cette interaction dynamique sont : la dalle de roulement, le véhicule comme source d'excitation et l'état de la chaussée comme interface entre le véhicule et la dalle de roulement. C'est un sujet d'extrême importance qui a fait l'objet de réflexion auparavant et continu d'être d'actualité, vu le nombre d'ouvrages réalisés, l'augmentation du trafic routier et l'augmentation du tonnage par essieu. Les véhicules traversant les dalles de roulement à grandes vitesses peuvent engendrer des effets dynamiques importants. Ces effets doivent être étudiés en simulant effectivement les réponses dynamiques des dalles de roulement et des véhicules.

Dans ce contexte, nous avons étudié le comportement dynamique des dalles de roulement des ponts routiers multi-travées à supports élastiques, sous la sollicitation des camions à essieux tandem et tridem. Ce travail est intéressant et ambitieux car, il concerne une structure d'importance majeure que sont les dalles de roulement. Il ne peut que contribuer dans la compréhension des phénomènes dus aux charges dynamiques mobiles, résonances, amplification dynamique et autres.

Dans cette étude, la dalle de roulement est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées à supports élastiques. Le profil de la chaussée est modélisé par une densité spectrale de puissance. Le camion est modélisé par quatre modèles dynamiques discrets tridimensionnels à essieux tandem et tridem dont deux modèles sont avec semi-remorques.

Les équations de mouvement de chaque modèle sont obtenues en appliquant la loi fondamentale de la dynamique. L'équation de mouvement de la dalle de roulement est résolue en utilisant la méthode de superposition modale en bénéficiant des propriétés d'orthogonalité des modes propres pour obtenir à

la fin un système d'équations modales découplées. Les équations de mouvement du système dalle de roulement-camion sont couplées. Ils sont intégrés numériquement par la méthode de Newmark avec un processus de calcul itératif.

Nous avons élaboré deux principaux programmes en langage FORTRAN capables de simuler le passage du camion sur la dalle de roulement. Les fréquences propre de la dalle de roulement sont calculées appart en utilisant le logiciel MATHEMATICA. Des résultats concernant les fréquences et les modes propres d'une dalle de roulement orthotrope à deux travées, sont présentés et comparés avec le code de calcul ANSYS et la littérature. D'autres résultats de plusieurs simulations numériques de passage d'un camion à onze degrés de liberté sur une dalle de roulement à deux travées sont présentés et interprétés et comparées avec ceux d'un camion à neuf degrés de liberté.

Mots clés : Comportement dynamique / Dalle de roulement / Camion / Interaction dynamique / Supports élastiques / Essieux tandem et tridem.

Abstract

The dynamic interaction phenomenon between bridge decks and moving trucks is very complex in reality because several factors come into play. The most important factors involved in this dynamic interaction are: the bridge deck, the truck as excitation source and the state of the roadway as an interface between the truck and the road surface. This is an extremely important subject that has been the subject of reflection before and continues to be topical, given the number of works carried out, the increase in road traffic and the increase in tonnage per axle. Vehicles crossing road slabs at high speeds can cause significant dynamic effects. These effects must be effectively studied by simulating the dynamic responses of bridge deck and truck.

In this context, we studied the dynamic behavior of multi-span bridge deck with elastic supports, under the solicitation of truck with tandem and tridem axles. This work is interesting and ambitious because it concerns a structure of major importance that is the bridge deck. It can only contribute to understand the phenomena due to mobile dynamic loads, resonances, dynamic amplification and others.

In this study, the bridge deck is modeled by a multi-span orthotropic thin plate with elastic supports. The pavement profile is modeled by a power spectral density. The truck is modeled by four three-dimensional discrete dynamic models with tandem and tridem axles of which two models are with semi-trailers.

The equations of motion for each model are obtained by applying the dynamic fundamental law. The equation of motion of the bridge deck is solved using the modal superposition method, taking advantage of the orthogonality properties of the mode shapes to obtain at the end a decoupled modal equations system. The equations of motion of the bridge deck-truck system are coupled. They are numerically integrated by Newmark's method with an iterative calculation process.

We have developed two main programs in FORTRAN language capable to simulate the passage of the truck on the bridge deck. The natural frequencies of the bridge deck are calculated apart using the MATHEMATICA software. Results concerning the frequencies and the mode shapes of an orthotropic two spans bridge deck are presented and validated with the ANSYS calculation software and the literature. Other results of several numerical simulations of passage of a truck with eleven degrees of freedom on a bridge deck with two spans are presented and interpreted and compared with those of a truck with nine degrees of freedom.

Keywords: Dynamic behavior / Bridge deck / Truck / Dynamic interaction / Elastic supports / Tandem and tridem axles.

الملخص

تعتبر ظاهرة التفاعل الديناميكي بين ألواح الطرقات والمركبات المتحركة معقدة للغاية وذلك لوجود عدة عوامل مؤثرة في هذا التفاعل. من بين أهم هذه لعوامل نذكر: لوح الطريق، المركبة كمصدر للتحريض وحالة الطريق التي تعتبر واجهة بين السيارة وسطح الطريق. هذا البحث كان موضوع اهتمام من قبل ولا يزال لحد الآن و ذلك لعدد الأشغال التي تم تنفيذها والزيادة في حركة المرور على الطرقات وكذلك في حمولة المركبات لكل محور. يمكن أن تسبب المركبات التي تعبر ألواح الطرقات بسرعات عالية تأثيرات ديناميكية كبيرة. يجب دراسة هذه التأثيرات من خلال محاكاة فعالة تسمح بمعرفة التجاوب الديناميكي لألواح الطرقات والمركبات.

في هذا السياق، قمنا بدراسة السلوك الديناميكي لألواح الطرقات للجسور متعددة المسارات الممتدة ذات الدعامات المرنة تحت تأثير الشاحنات ذات المحاور الثنائية والمحاور الثلاثية. هذا العمل طموح لأنه يتعلق ببنية ذات أهمية كبرى وهي ألواح الطرقات. يمكن لهذا البحث أن يساهم في فهم الظواهر الناتجة و التي تسبب فيها الحمولات الديناميكية المتحركة ، الرنين، التضخيم الديناميكي وغيرها. في هذه الدراسة ، يمثل لوح الطرقات بواسطة صفيحة رقيقة غير متجانسة متعددة المسارات الممتدة مسندة على دعامات مرنة. يتم نمذجة جانبية سطح الطريق بواسطة كثافة طيفية للاستطاعة. تم تمثيل الشاحنة من خلال أربعة نماذج ديناميكية منفصلة ثلاثية الأبعاد مع محاور ثنائية (مترادفة) و ثلاثية (مترادفة) منها نموذجان بنصف مقطورة.

تم الحصول على معادلات الحركة لكل نموذج من خلال تطبيق القانون الأساسي للديناميكا. يتم حل معادلة الحركة لوح الطريق باستخدام طريقة التراكب النمطي الاهتزازي، مع الاستفادة من خصائص التماثل النمطي للنظام المهتز للحصول في النهاية على نظام من المعادلات النمطية الاهتزازية المنفصلة. تقترن معادلات الحركة لنظام الشاحنة ولوح الطريق ثم يتم دمجها رقمياً بواسطة طريقة Newmark مع عملية حساب تكرارية.

لقد قمنا بتطوير برنامجين رئيسيين بلغة FORTRAN قادرين على محاكاة المرور للشاحنة على لوح الطريق. يتم حساب الاهتزازات الخاصة للوح بشكل منفصل باستخدام برنامج MATHEMATICA. النتائج المتعلقة بالاهتزازات الخاصة بلوح الطريق غير المتجانس بمسارين ممتدين يتم تقديمها والتحقق من صحتها باستخدام برمجية ANSYS والأدبيات. يتم عرض وتفسير النتائج الأخرى للعديد من المحاكاة الرقمية لمرور شاحنة ذات أحد عشرة درجة من الحرية على لوح بمسارين ممتدين ومقارنتها بتلك الخاصة بشاحنة ذات تسع درجات من الحرية.

الكلمات المفتاحية: السلوك الديناميكي / لوح الطريق / الشاحنة / التفاعل الديناميكي / الدعامات المرنة / المحاور الثنائية والثلاثية.

Table des matières

Résumé en français.....	i
Résumé en anglais.....	iii
Résumé en arabe.....	v
Table des matières.....	vi
Principales notations et symboles.....	x
Liste des figures.....	xii
Liste des tableaux.....	xvii
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Recherche bibliographique	3
1.1 Etat de l’art.....	3
1.2 Nature des vibrations des dalles de roulement	9
1.3 Caractéristiques d’une dalle de roulement	11
1.4 Caractéristiques d’un véhicule	12
1.5 Caractéristiques d’un profil de la chaussée	14
1.6 Facteur d’amplification dynamique	14
1.6.1 Définitions.....	14
1.6.1 Importance du Facteur d’Amplification Dynamique.....	16
1.7 Fréquence de passage et vitesse critique	16
1.8 Interaction dynamique	16
1.9 Méthodes de résolution des problèmes d’interaction dynamique	18
1.10 Facteurs importants influençant l’amplification dynamique.....	20
1.11 Conclusion	20
Chapitre 2 : Détermination des fréquences et des modes propres d’une dalle de roulement orthotropes multi-travées à supports rigides	21
2.1 Introduction.....	21
2.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement orthotropes à supports rigides.....	21

2.2.1 Fréquences et modes propres des poutres multi-travées à supports rigides.....	23
2.2.1.1 Cas d'une poutre à deux travées	23
2.2.1.2 Cas d'une poutre à trois travées.....	24
2.2.1.3 Généralisation au cas d'une poutre à multi- travées.....	26
2.2.2 Fréquences et modes propres d'une dalle de roulement orthotrope libre-libre.....	27
2.3 Exemples numériques	30
2.3.1 Cas d'une dalle roulement à deux travées	30
2.3.2 Cas d'une dalle roulement à trois travées	38
2.4 Conclusion	44
Chapitre 3 : Détermination des fréquences et des modes propres des dalles de roulement orthotropes multi-travées à support élastiques.....	45
3.1 Introduction.....	45
3.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement orthotropes multi-travées.....	45
3.2.1 Fréquences et modes propres des poutres multi-travées à supports élastiques.....	46
3.2.1.1 Cas d'une poutre à une seule travée	47
3.2.1.2 Cas d'une poutre à deux travées	47
3.2.1.3 Cas d'une poutre à trois travées	49
3.2.1.4 Généralisation au cas d'une poutre multi-travées	50
3.3 Exemples de validation numérique	51
3.3.1 Cas d'une poutre à une seule travée	51
3.3.2 Cas d'une poutre à deux travées	53
3.4 Conclusion.....	54
Chapitre 4 : Développement de modèles analytiques de véhicules tridimensionnels à essieux tandem et tridem.....	55
4.1 Introduction.....	55
4.2 Hypothèses simplificatrices de modélisation.....	55
4.3 Systèmes de suspensions et de liaisons à essieux tandem	56

4.4	Systèmes de suspensions et de liaisons des essieux tridem	58
4.5	Modèles de camion à essieux tandem	58
4.5.1	Modèle à neuf degrés de liberté	58
4.5.1.1	Schéma du modèle	58
4.5.1.2	Schéma d'équilibre dynamique	59
4.5.1.3	Equations du mouvement	60
4.5.2	Modèle à onze degrés de liberté	64
4.5.2.1	Schéma du modèle	64
4.5.2.2	Schéma d'équilibre dynamique	64
4.5.2.3	Equations du mouvement	65
4.6	Modèles de camion semi-remorque à essieux tandem et tridem	68
4.6.1	Modèle à dix-huit degré de liberté	68
4.6.1.1	Schéma du modèle	68
4.6.1.2	Schéma d'équilibre dynamique	68
4.6.1.3	Equations du mouvement	74
4.6.2	Modèle à vingt degré de liberté	81
4.6.2.1	Schéma d'équilibre dynamique	86
4.6.2.2	Equations du mouvement	88
4.7	Conclusion	94
	Chapitre 5 : Modélisation de la dalle de roulement du pont, du profil de la	
	chaussée et résolution des équations de mouvement	96
5.1	Introduction.....	96
5.2	Modélisation de la dalle de roulement	96
5.2.1	Modèle mathématique de la dalle de roulement	96
5.2.2	Equation de mouvement	97
5.2.2	Résolution de l'équation de mouvement	97
5.3	Modélisation du profil de la chaussée	98
5.4	Intégration numérique des équations du mouvement couplées dalle de roulement-camion	102
5.5	Algorithme de résolution	103
5.6	Conclusion	105

Chapitre 6 : Analyse des réponses dynamiques	106
6.1 Introduction.....	106
6.2 Caractéristiques de la dalle de roulement	108
6.3 Caractéristique des modèles de véhicule	108
6.4 Caractéristiques du profil de la chaussée	110
6.5 Définition du facteur d'amplification dynamique (FAD).....	110
6.6 Réponses dynamique dalle de roulement et camion	112
6.7 Facteur d'Amplification Dynamique (FAD).....	117
6.8 Influence de la vitesse sur le facteur d'amplification dynamique	118
6.9 Influence du profil de la chaussée le facteur d'amplification dynamique	121
6.10 Influence de la masse du véhicule le facteur d'amplification dynamique	125
6.11 Influence du modèle de véhicule	129
6.12 Conclusion	131
Conclusion générale	132
Références bibliographiques	134
Annexe 1 : Complément du paragraphe 2.2.1 du chap. 2	138
Annexe 2 : Calcul d'une dalle orthotrope équivalente au tablier	141
Annexe 3 : Complément du paragraphe 3.2.1 du chap. 3	143
Annexe 4 : Complément du chapitre 4	146

Principales notations et symboles

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$	Excentricités
a_{ij}	Amplitudes modales
β_i, β_{li}	Paramètres de fréquences
A_r, B_r, C_r et D_r	Constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites et de continuités
b	Largeur de la dalles de roulement
h	Epaisseur de la dalle de roulement
l	Longueur de la dalles de roulement
ρ	Masse volumique de la dalle de roulement
D_x, D_y	Rigidités de flexion la dalles de roulement selon x et y
D_{xy}	Rigidité de torsion du pont
E	Module d'élasticité
E_x, E_y	Modules d'élasticité selon x et y respectivement
ν, ν_{xy}, ν_{yx}	Coefficients de Poisson
FAD	Facteur d'Amplification Dynamique
G_{xy}	Module de cisaillement
H	Rigidité équivalente la dalle de roulement
b_l, m_l, n_l, s	Caractéristiques de la section de la poutre raidisseur
f_{ij}	Fréquences modales de la dalles de roulement
α, β	Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark
M_{ij}	Masses modales
K_{ij}	Rigidités modales
C_{ij}	Amortissements modaux
F_{ij}	Forces modales
c_{pi}	Amortissement dans le pneu i du camion
c_{si}	Amortissement dans la suspension i du camion
k_{pi}	Rigidité dans le pneu i du camion
k_{si}	Rigidité dans la suspension i du camion
$[M_v]$	Matrice de masse du camion
$[C_v]$	Matrice d'amortissement du camion

$[K_v]$	Matrice de rigidité du camion
Δt	Pas du temps
ϕ_{ij}	Modes propres de la dalle de roulement
φ_i	Modes propres de la dalle de roulement selon x
g	Accélération de la pesanteur
ε	Tolérance de convergence
z_v, α_v, θ_v	Le brandissement, le tangage et le roulis du camion respectivement
m_i	Masses des roues i avec essieux
m_v, I_{θ_v}	Masse et moment d'inertie du bloc du camion respectivement
m_L, I_{θ_L}	Masse et moment d'inertie de la barre pivotante respectivement
$I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$	Moments d'inertie de tangage et de roulis du bloc rigide du camion respectivement
w	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont
w_i	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont au point de contact i
A_r	Coefficient de rugosité spectrale
r_i	Rugosité du profil statique au point de contact i
$\{Z_v\}$	Vecteur des degrés de liberté du véhicule
$\{F_g\}$	Vecteur des forces de pesanteur
$\{F^{int}\}$	Vecteur des forces d'interaction en chaque point de contact i
F_{pk}^{int}	Force d'interaction entre la $k^{ème}$ roue du véhicule et la dalle de roulement du pont
ω_{ij}	Pulsations propres de la dalle de roulement du pont
ω_{sk}	Nombre d'ondes
ω_{s0}	Fréquence de discontinuité
θ_k	Variable aléatoire
Ω_i	Fréquences de passage
q_{ij}	Déplacements généralisés (coordonnées modales)
k_l, k_l, k_l	Rigidités des appuis élastiques de la poutre
l	Longueur du pont

Liste des figures

Figure 1.1 : Véhicule modélisé avec un système masses - ressorts –amortisseurs à 2 ddl	10
Figure 1.2 : Différents Eléments caractérisant les dalles de roulement	11
Figure 1.3 : Différents Eléments caractérisant les véhicules	13
Figure 1.4 : Profil statique d'un pont.....	14
Figure 1.5 : Réponse statique et dynamique	15
Figure 1.6 : Modélisation de l'interaction dynamique dalle-roue d'un véhicule et évaluations des déplacements relatifs	17
Figure 1.7 : Représentation de la force d'interaction à un point de contact i	17
Figure 1.8 : Différentes procédures pour la résolution des problèmes d'interaction dynamique dalle de roulement /véhicule	19
Figure 2.1 : Modèle mathématique de la dalle de roulement multi-travées à supports rigides.....	22
Figure 2.2 : Poutre à deux travées en appuis simples rigides.....	23
Figure 2.3 : Poutre à trois travées en appuis simples rigides.....	25
Figure 2.4 : Poutre multi-travées en appuis simples rigides.....	26
Figure 2.5 : Tablier du pont.....	31
Figure 2.6 : Section transversale du Tablier	31
Figure 2.7 : Caractéristiques de la section du raidisseur.....	31
Figure 2.8 : Graphe du polynôme caractéristique de la matrice (2.15)	32
Figure 2.9 : Graphes du polynôme caractéristique de la matrice (2.49) pour différents valeurs de i	33
Figure 2.10 : Huit premiers modes propres de la poutre à deux travées à supports rigides	33
Figure 2.11 : Différents Modèle éléments finis conçu dans ANSYS pour calculer les fréquences et les modes propres de la dalle de roulement orthotrope à deux travées	35
Figure 2.12 : Six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par la présente approche	36

Figure 2.13 : Six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par ANSYS.....	37
Figure 2.14 : Graphe du polynôme caractéristique de la matrice du système (2.45).....	39
Figure 2.15 : huit premiers modes propres de la poutre à trois travées	39
Figure 2.16 : Graphes du polynôme caractéristique de la matrice (2.78) pour différents valeurs de i	40
Figure 2.17 : Huit premiers modes propres calculés par la présente approche	42
Figure 2.18 : Huit premiers modes propres calculés par ANSYS.....	43
Figure 3.1 : Coupe longitudinale d'un ouvrage avec appareils d'appuis.....	45
Figure 3.2 : Modèle mathématique de la dalle de roulement multi-travées à supports élastiques.....	46
Figure 3.3 : Modèle mathématique de la poutre multi-travées à support élastiques.....	46
Figure 3.4 : Poutre à une seule travée à supports élastiques.....	47
Figure 3.5 : Poutre à deux travées à supports élastiques.....	48
Figure 3.6 : Poutre à trois travées à supports élastiques	50
Figure 3.7 : Graphe de l'équation aux fréquences du déterminant de la matrice du système (3.9).....	51
Figure 3.8 : Influence de la rigidité des supports sur les quatre premiers modes propres de la poutre à une seule travée	52
Figure 3.9 : Graphe de l'équation aux fréquences du déterminant de la matrice du système (3.19).....	53
Figure 3.10 : Influence de la rigidité du support intermédiaire sur les quatre premiers modes propres de la poutre à deux travées	54
Figure 4.1 : Quelque système de suspensions des essieux tandem.....	56
Figure 4.2 : Premier type d'essieux tandem et son modèle mathématique.....	57
Figure 4.3 : Deuxième type d'essieux tandem et son modèle mathématique.....	57
Figure 4.4 : Troisième type d'essieux tandem et son modèle mathématique.....	58
Figure 4.5 : Système de suspensions à essieux tridem.....	58
Figure 4.6 : Modèle de véhicule tridimensionnel à neuf ddl.....	62

Figure 4.7 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des	63
Figure 4.8 : Modèle de véhicule tridimensionnel à onze ddl.....	66
Figure 4.9 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des	67
Figure 4.10 : Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 18 ddl, vue de face.....	69
Figure 4.11 : Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 18 ddl, vue de droite.....	70
Figure 4.12 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de face	71
Figure 4.13 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de droite	72
Figure 4.14 : Forces et mouvement agissants sur l'essieu tandem.....	77
Figure 4.15 : Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 20 ddl, vue de face.....	82
Figure 4.16 : Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 20 ddl, vue de droite	83
Figure 4.17 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments du modèle à 20 ddl, vue de face.....	84
Figure 4.18 : Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de droite	85
Figure 5.1 : Dalle de roulement modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées à supports élastiques.....	96
Figure 5.2 : Variation de l'amplitude de la Densité Spectrale de Puissance pour Plusieurs valeurs de A_r	99
Figure 5.3 : Différents profils de la chaussée générés à partir de l'expression (5.13) pour plusieurs valeurs de A_r	101
Figure 5.4 : Algorithme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule ...	103
Figure 6.1 : Dalle de roulement à deux travées reposant sur des appareils d'appui élastiques	107
Figure 6.2 : Définition couramment utilisée du Facteur d'amplification dynamique (FAD), point 3, $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m ³ /cycle, trois trajectoires.....	111

Figure 6.3 : Définition adoptée du Facteur d'amplification dynamique (FAD), point 3, $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trois trajectoires.....	112
Figure 6.4 : Déplacement vertical de la dalle de roulement au milieu de la travée 1 (point 3), $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.....	113
Figure 6.5 : Déplacement vertical de la dalle de roulement au milieu de la travée 2 (point 8), $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.....	113
Figure 6.6 : Déplacement vertical du masses des roues droites du camion, $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.....	114
Figure 6.7 : Déplacement vertical du masses des roues gauches du camion, $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.....	114
Figure 6.8 : Comparaison des forces d'interaction exercées par les roues avant et arrière droites du camion, $v = 60 \text{ km/h}$, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.....	115
Figure 6.9 : Influence de la vitesse de passage du camion sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au point 3, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m^3/cycle , trajectoire bord.....	116
Figure 6.10 : Influence de la vitesse de passage du camion sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au point 8, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m^3/cycle , trajectoire bord	116
Figure 6.11 : Influence du profil de la chaussée sur la force d'interaction d'une roue avant du camion, trajectoire intermédiaire, $v = 60 \text{ km/h}$	117
Figure 6.12 : FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire bord.....	117
Figure 6.13 : FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire intermédiaire	118
Figure 6.14 : FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire du centre	118
Figure 6.15 : Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire bord	119
Figure 6.16 : Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire	119
Figure 6.17 : Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire	120

Figure 6.18 : Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire du centre	120
Figure 6.19 : Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 2, trajectoire du centre	121
Figure 6.20 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire bord, $v = 40$ km/h.	122
Figure 6.21 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire bord, $v = 40$ km/h	122
Figure 6.22 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 40$ km/h.	123
Figure 6.23 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 40$ km/h.	123
Figure 6.24 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 60$ km/h.	124
Figure 6.25 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 60$ km/h.	124
Figure 6.26 : Influence du profil de la chaussée sur le FAD au milieu de la travée 1, $m_v = 24000$ kg, trajectoire intermédiaire.	125
Figure 6.27 : Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 1, trajectoire bord, $v = 40$ km/h.	126
Figure 6.28 : Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 2, trajectoire bord, $v = 40$ km/h.	127
Figure 6.29 : Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 60$ km/h.	127
Figure 6.30 : Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 60$ km/h.	128
Figure 6.31 : Influence de la masse du véhicule sur le FAD au milieu de la travée 1, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m ³ /cycle, trajectoire intermédiaire.	128
Figure 6.32 : Influence du modèle de véhicule sur la force d'interaction sous la roue 2, $v_x = 80$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m ³ /cycle, trajectoire intermédiaire.	129

- Figure 6.33** : Influence du modèle de véhicule sur la force d'interaction sous la roue 2, $v_x = 100$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire intermédiaire..... 130
- Figure 6.34** : Influence du modèle de véhicule sur le déplacement au centre le la travée 1, $v_x = 80$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire intermédiaire 130

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Types de sections transversales	12
Tableau 2.1 : Valeurs des paramètres de fréquences β_i et β_{I_i}	32
Tableau 2.2 : Comparaison des fréquences propres (Hz) de la dalle de roulement	35
Tableau 2.3 : Valeurs des paramètres de fréquences β_i et β_{I_i} pour la dalle à 3 travées ...	38
Tableau 2.4 : Comparaison des fréquences propres de la dalle de roulement	41
Tableau 3.1 : Paramètres de fréquences $\left(\beta_{I_1} l_1 = \sqrt{\omega_{I_1}^2 \sqrt{EI/\rho A}}\right)$	52
Tableau 3.2 : Fréquences propres de la poutre $f_i = \beta_i^2 \sqrt{EI/\rho A} / 2\pi$ en [Hz].....	53
Tableau 5.1 : Valeurs expérimentales de A_r selon l'état de la chaussée.....	99
Tableau 6.1 : Données des caractéristiques mécaniques et géométriques de la dalle de roulement	108
Tableau 6.2 : Paramètres des modèles de véhicules.....	109
Tableau 6.3 : Valeurs expérimentales de A_r selon l'état de la chaussée	110
Tableau 6.4 : Trajectoires utilisées pour la simulation.....	112

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Le passage des camions à grandes vitesses sur les dalles de roulement des ponts routiers peut engendrer des effets dynamiques importants et doit être étudiée en simulant effectivement le déplacement de la dalle de roulement et du camion. Ce dernier aspect, lié au fonctionnement des dalles de roulement, a fait l'objet de réflexions auparavant et continue d'être d'actualité. Le problème de l'amplification des efforts pour des effets dynamiques reste sensible et préoccupant du fait de l'augmentation du trafic routier, tant sur le plan des intensités et de la fréquence de passages, que sur celui des vitesses de circulation. Dans ce contexte, nous présentons une modélisation vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont de la chaussée multi-travées, à supports élastiques, lors du passage d'un camion avec la prise en compte de l'interaction dynamique dalle – camion et des irrégularités aléatoires du profil de la chaussée.

Dans le premier chapitre, nous avons fait une recherche bibliographique de plusieurs articles publiés récemment dans le domaine. Nous avons expliquée la nature des vibrations des dalles de roulement et leurs caractéristiques, les caractéristiques des camions et du profil de la chaussée. Nous avons donnée une définition du Facteur d'Amplification Dynamique et de son importance dans la conception des dalles de roulement. A la fin du chapitre, nous avons expliquée le phénomène d'interaction dynamique dalle-camion et les méthodes de résolution existent dans la littérature.

Au chapitre deux, nous avons présenté une méthode semi-analytique pour calculer les fréquences et les modes propres d'une dalle de roulement orthotrope multi-travées à support rigides. Ce travail, réalisé auparavant, est très intéressant pour le développement du troisième chapitre. Cette méthode est basée sur l'approche modale et tient compte du couplage intermodal, généralement négligé dans la littérature. A la fin du chapitre, nous avons présenté et comparé les résultats de deux exemples numériques avec ANSYS. Une excellente concordance est observée.

Pour étudier les vibrations d'une dalle de roulement d'un pont de la chaussée multi-travées, reposant sur des appareils d'appui, nous avons commencé au chapitre trois par le calcul des fréquences et des modes propres d'une dalle de roulement multi-travées à supports élastiques. La même approche développée dans le deuxième chapitre est utilisée ici. Deux exemples numériques sont présentés et comparés. Une excellente concordance est observée.

Au quatrième chapitre, nous avons développé les équations du mouvement de quatre modèles tridimensionnels de camion. Deux modèles à essieux tandem à neuf et à onze degrés de liberté respectivement et deux autres modèles semi-remorques à essieux tandem et tridem à dix-huit et vingt degrés de liberté respectivement. C'est un travail original de cette thèse. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations de mouvement de différents modèles sont obtenues en utilisant la méthode de Newton.

Au cinquième chapitre, nous avons étudié le phénomène de l'interaction dynamique de la dalle de roulement et du camion avec la prise en compte du profil de la chaussée. La dalle est modélisée par une plaque orthotrope multi-travées à supports élastiques linéaires. Le profil de la chaussée est modélisé par une densité spectrale de puissance, caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire. A la fin du chapitre, nous avons présenté la méthode d'intégration numérique de Newmark pour la résolution des équations de mouvement couplées. Le calcul s'effectue en utilisant un processus itératif. Sur la base de la modélisation et l'algorithme proposés pour résoudre les équations du mouvement couplées dalle-camion d'une manière découplée, nous avons élaboré deux principaux programmes de calcul en langage FORTRAN.

Finalement le chapitre six est focalisé sur l'analyse des réponses dynamique d'une dalle de roulement orthotrope à deux travées à supports élastiques, sollicitée par le passage de deux modèles de camions à neuf et à onze degrés de liberté. Dans cet exemple, nous avons présenté les réponses dynamiques de la dalle et du camion, nous avons étudié notamment l'influence de la vitesse de passage, de l'état de la chaussée, de la masse du camion et du type de camion sur le facteur d'amplification dynamique et les forces d'interactions.

CHAPITRE 1

Recherche bibliographique

Chapitre 1

Recherche bibliographique

1.1 Etat de l'art

La compréhension des vibrations libres des dalles de roulement des ponts routiers multi-travées est une étape essentielle pour étudier les vibrations forcées sous la sollicitation de chargement mobile. Plusieurs types de sections de tablier de ponts routiers ont été homogénéisés avec précision par des plaques orthotropes avec des propriétés équivalentes [1,2]. Parmi celles-ci, nous mentionnons les premières importantes contributions de Timoshenko et Woinowsky [3] et Leissa [4] sur les plaques rectangulaires continues, les plaques sur fondations élastiques et la flexion des plaques anisotropes.

Plus récemment, Zhu et Law [5] ont identifiés des charges mobiles sur une poutre d'Euler-Bernoulli multi-travées, continue sur des appuis élastiques. Dans ce travail, chaque appui élastique a été modélisé par une rigidité verticale et une rigidité torsionnelle. Pour quantifier les charges en mouvement, une méthode basée sur la superposition modale a été combinée avec une technique de régularisation en utilisant différents types de réponses mesurées. Les auteurs ont conclu que la rigidité verticale de l'appui influe fortement sur les charges identifiées lorsque la rigidité en flexion de la poutre est faible.

Lin et Chang [6] ont adopté une méthode hybride analytique/numérique pour étudier la vibration libre d'une poutre de Timoshenko à plusieurs travées, continue sur les appuis, simplement supportée aux extrémités avec des appuis intermédiaires élastiques. Dans ce travail, deux séries d'équations du mouvement ont été écrites pour chaque travée : l'une pour le déplacement vertical et l'autre pour la pente. L'application des conditions aux limites et de continuités aboutie à un polynôme caractéristique dont le degré n'augmente pas avec l'augmentation du nombre d'appuis intermédiaires.

Li, et al [7] ont développé une méthode analytique pour déterminer les fréquences et les modes propres d'une plaque mince isotrope rectangulaire à une seule travée dont tous les bords sont des appuis élastiques uniformément distribués. Le déplacement vertical de la plaque est exprimé par une combinaison de plusieurs développements en série de Fourier, qui satisfont à la fois l'équation du mouvement et les conditions aux limites sur tous les bords. Cette méthode générale s'applique à une grande variété de cas classiques, comme démontrer, avec un grand accord, la modélisation par éléments finis précédemment publiée par Takabatake et Nagared [8]. Li et al, ont affirmé que cette méthode pouvait être étendue à des points restreints non uniformes, des supports partiels et des combinaisons de ceux-ci.

Takabatake et Nagareda [8] ont développé une méthode analytique simplifiée pour analyser les flèches statiques, les vibrations libres et forcées d'une plaque rectangulaire mince isotrope avec des poutres sur tous les bords. Les conditions aux limites d'une plaque supportée par des poutres de bord (telles que précédemment résolues par Vinson [9]) ont été

remplacées par des bords retenus élastiquement par des rigidités en translation et en rotation. Ils ont utilisé la méthode Galerkin pour l'analyse statique de la plaque. Un bon accord a été observé lorsque l'approximation de forme fermée a été comparée à un modèle éléments finis.

Cheung et Zhou, ont aussi étudié les vibrations libres de plaques rectangulaires minces orthotropes avec des appuis élastiques intermédiaires linéaires dans les deux directions et des ressorts de torsion sur les bords. Cette étude est basée sur des fonctions de poutres statiques le long des directions x et y dans la méthode de Rayleigh-Ritz. Notons que cette décomposition n'a pas pris en compte le couplage intermodal causé par les dérivées mixtes qui apparaissent dans la formulation des conditions de bord libre des plaques comme le montre Gorman et Garibaldi [11].

Une approche semi-analytique pour déterminer les fréquences et les modes propres d'une plaque orthotrope multi-travées avec des supports linéaires rigides a été introduite par Rezaiguia et Laefer [12] et Rezaiguia et al. [13], basé sur la superposition modale avec la prise en compte du couplage intermodal. La comparaison des fréquences et des modes propres avec les résultats de la méthode des éléments finis donne une erreur inférieure à 2%. Cette approche a été utilisée pour étudier l'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules mobiles.

Ma, et al [14] ont étudié l'interaction dynamique des ponts routiers poutres à caisson multi-travées avec un camion HS20-44 à onze degrés de liberté pour identifier les Facteurs d'Amplification Dynamique (FAD) de 15 ponts poutres. Ce dernier est influencé par de nombreux paramètres, notamment la rugosité de la route, les interactions véhicule/dalle de roulement et la vitesse de passage. Les résultats indiquent que les FAD augmentent considérablement lorsque des phénomènes de résonance se produisent. La résonance véhicule/dalle de roulement est étroitement liée à la fréquence fondamentale du véhicule, à la fréquence fondamentale de la dalle et à la fréquence de perturbation causée par le mouvement vertical du véhicule. La vitesse de déplacement exerce une influence importante sur la résonance. Dans la plupart des cas, la valeur max du FAD est obtenue dans la plage de vitesses de 40 à 60 km/h. La résonance véhicule/dalle de roulement peut être causée par les deux premiers modes propres de la dalle de roulement. Les formules empiriques utilisées dans les codes de calcul pour la conception des ponts actuels ne tiennent pas compte de l'influence de la résonance et de la vitesse de déplacement sur les FAD des dalles de roulement des ponts routiers. Le FAD maximal peut dépasser 1,7.

Oliva et al [15] ont présenté une méthode couplée pour étudier l'interaction dynamique véhicule/pont routier dans laquelle des modèles d'éléments finis sont utilisés pour la structure, des modèles dynamiques discrets pour les véhicules et l'interaction sont représentées au moyen d'un contact avec la méthode de pénalité linéaire. Ce modèle peut reproduire les non-linéarités de la structure, du véhicule et de l'interaction dynamique. Il a été implémenté dans un logiciel commercial d'éléments finis existant. En ce qui concerne les irrégularités de la route, une méthodologie pour générer des profils la route est développée et une expression pour la fonction de cohérence des revêtements routiers, qui simplifie la génération de tels profils, est proposée. Ces méthodes sont appliquées à deux ponts différents. Les résultats montrent la pertinence de considérer une définition de surface complète lorsque la réponse

dynamique des ponts routiers et des véhicules est analysée. Une attention particulière est également accordée aux vibrations du véhicule car elles sont également influencées par la surface de la route.

Yin et al [16] ont présenté une méthode pour analyser la réponse aléatoire non stationnaire des ponts en utilisant l'équivalence d'une technique de covariance. Pour cela, ils ont utilisé un modèle du véhicule à deux essieux et analysé trois modèles de ponts typiques. Les résultats numériques ont indiqué que l'amplitude de réponse aléatoire non stationnaire des roues est proportionnelle à la vitesse du véhicule. Ils ont également montré que l'utilisation d'un processus stationnaire pour modéliser le profil de la route à différentes vitesses peut à la fois sous-estimer et surestimer les effets dynamiques.

Dans l'article de Harris et al [17] une nouvelle approche pour minimiser les réponses dynamiques des dalles de roulement ponts à courte portée lors du passage de véhicules est présentée. La réduction est obtenue grâce au réglage du coefficient d'amortissement de la suspension du véhicule juste avant le passage à niveau. Il est montré qu'un seul coefficient d'amortissement optimal peut être déterminé pour une vitesse donnée et tout profil routier spécifié. Cette approche peut faciliter la mise en œuvre puisque l'amortissement optimal est sélectionné en amont du pont et qu'il n'est pas nécessaire de faire varier en continu le coefficient d'amortissement lors de la traversée.

Tarighi et Wang [18] ont étudié l'influence des camions longs combinés sur le facteur d'impact d'une chaussée. Le facteur d'impact du pneu ici est plus important et il peut être utilisé comme indicateur de la contrainte exercée sur la chaussée. Dans cette recherche, trois types différents de camions plus longs combinés à sept, huit et neuf axes ont été modélisés et les résultats ont comparés avec celles des camions simples. Les équations de mouvement des différents camions ont été dérivées et ces camions ont été soumis à différentes conditions de surface de la route. La réponse dynamique des camions due à l'irrégularité de la surface de la route a été calculée et comparée aux résultats des autres types de camions tels que les camions à simples et les camions à remorques. De plus, les effets d'un seul choc sur la route, lorsque différents camions circulent, ont été étudiés. Les résultats présents peuvent également préparer la première étape pour étudier les effets des camions lourds plus long sur les ponts routiers. Les résultats de cette étude montrent que les facteurs d'impact des pneumatiques dus au passage des camions plus long sur les chaussées sont quasiment dans la même fourchette que les autres types de camions de sorte que la prise en charge des camions plus long ne nécessite pas de considérations particulières en ce qui concerne les chaussées.

Les dalles de roulement en Polymère à Fibres Renforcés (FRP) deviennent plus populaires et il est nécessaire de comprendre leur comportement. Les caractéristiques des dalles de roulement en FRP (telles que la masse, la rigidité et l'amortissement) sont très différentes de celles des dalles de roulement en béton traditionnels. Zhang et Cai, [19] ont étudié la réponse dynamique des dalles de roulement multi-travées en FRP sous la sollicitation d'un camion tridimensionnel HS20-44. La méthode des éléments finis est utilisée pour étudier la répartition de la charge et la réponse dynamique sur la dalle. L'interaction dynamique est obtenue dans le domaine temporel en considérant la rugosité de la chaussée

comme une excitation verticale du camion à cause de la vitesse. La répartition de la charge et la réponse dynamique de la dalle FRP est comparée avec celle d'une dalle en béton.

Une défaillance importante des ponts due à l'effondrement complet des piles a été observée lors de chaque événement sismique majeur. Roy et Dash [20], ont étudié le comportement dynamique d'un pont poutres continues précontraint avec appareils d'appui en caoutchouc de plomb (LRB). Une analyse temporelle modale et non linéaire modale ont été effectuées avec et sans appareil d'appui. Un modèle élastique simple a été appliqué pour modéliser les différents composants du pont. Les piliers et les têtes de pieu sont modélisés comme des éléments rigides. Les cinq premiers modes propres, les caractéristiques modales, le décalage des périodes de temps, le cisaillement de la base, le déplacement de la superstructure et l'accélération de la dalle sont présentés. Les modifications du cisaillement de la base sont également étudiées en raison du décalage de la période de temps conformément aux codes disponibles. L'avantage qui peut être dérivé de l'utilisation de l'appareil d'appui d'isolement dans la réponse dynamique du pont a été quantifié dans cet article avec l'incorporation de l'effet de consolidation du sol qui peut se produire pendant les tremblements de terre.

L'effet dynamique des véhicules mobiles sur les ponts est généralement traduit par un facteur d'impact dans de nombreux codes de conception. En raison de la dégradation de la surface de la route des ponts existants, des études ont montré que les facteurs d'impact calculés à partir des mesures expérimentales pourraient être supérieurs aux valeurs spécifiées dans les codes de conception qui ciblent principalement la conception de nouveaux ponts. Deng et Cai [21], ont développé un modèle dynamique couplé pont- véhicule 3D pour simuler l'interaction dynamique entre un pont et des véhicules et étudie le facteur d'impact pour les ponts multi-poutres en béton. Ils ont étudié l'influence de la longueur de la portée du pont, de la vitesse de passage du véhicule et de l'état de la surface de la route sur le facteur d'impact. Des tests expérimentaux sont ensuite effectués sur les facteurs d'impact. Ils ont constaté que les facteurs d'impact obtenus pour le même état de surface de la route suivent la distribution khi carrée [21]. Enfin, des expressions simples pour le calcul des facteurs d'impact sont proposées et peuvent être utilisées avec confiance considérable et vérifiées pour cinq états de chaussée différents. Les expressions proposées pour le facteur d'impact peuvent être utilisées comme une modification des spécifications AASHTO lorsqu'il s'agit de ponts courts et de ponts anciens avec un mauvais état de la chaussée pour lesquels les spécifications AASHTO peuvent sous-estimer le facteur d'impact.

Les ponts poutres sont les plus populaires dans le monde. Bien que beaucoup d'efforts ont été faits pour étudier le facteur d'impact des ponts simplement appuyés en raison de la charge des véhicules, moins de travaux ont été signalés sur les ponts continus. De plus, la plupart des recherches précédentes sur les facteurs d'impact se sont concentrées sur l'effet du moment fléchissant, alors que très peu d'études se sont concentrées sur l'effet de cisaillement. Deng et al [22], ont réalisé des simulations numériques pour étudier les facteurs d'impact dynamiques des ponts simplement appuyés et continus traversés par un véhicule mobile à 12 degrés de liberté. Les facteurs d'impact dynamiques pour le moment de cisaillement et de flexion ont été étudiés. Des résultats intéressants ont été obtenus concernant les relations entre les facteurs d'impact dynamiques des ponts simplement appuyés et continus à la fois pour le

moment de cisaillement et de flexion. Ces résultats peuvent être utilisés comme références supplémentaires pour les codes de conception.

Des études antérieures ont montré que les facteurs d'impact dynamiques des ponts causés par le freinage des véhicules peuvent dépasser ceux prescrits dans les codes de conception des ponts. Alors que des modèles simples de véhicules et de ponts ont été utilisés dans la plupart des études précédentes, un modèle tridimensionnel couplé véhicule-pont a été développé par Deng et al [23], pour étudier les facteurs d'impact dynamiques des ponts dus au freinage des véhicules. Ce modèle est capable de traiter des structures de pont plus complexes que la plupart des modèles existants dans la littérature et peut produire des résultats plus raisonnables. Des effets dynamiques considérables ont été observés sur les réponses du pont ainsi que sur les forces de contact entre le pont et le véhicule dues au freinage du véhicule. Les effets de plusieurs paramètres importants, y compris la position de freinage du véhicule, le taux de décélération, la vitesse initiale du véhicule et l'état de la surface de la route, sur les facteurs d'impact dynamiques ont été étudiés. De plus, une comparaison a été faite entre les facteurs d'impact dynamiques causés par le freinage et l'accélération du véhicule.

Yu et al [24], ont étudié l'effet d'impact local des charges des véhicules sur les dalles de tablier des ponts poutres à caissons en béton précontraint. Un modèle couplé pont-véhicule a été adopté pour calculer les facteurs d'impact locaux et globaux. Les facteurs d'impact locaux et globaux obtenus ont été comparés et une relation entre le facteur d'impact et trois paramètres importants, notamment l'état de la surface de la route, la vitesse du véhicule et la longueur de la portée du pont, a été étudiée. Les résultats ont montré qu'il n'y avait pas de forte corrélation entre les facteurs d'impact globaux et locaux ; cependant, les facteurs d'impact locaux étaient bien corrélés avec l'état de la surface de la route et la longueur de la travée du pont. Une discussion sur les dispositions d'impact dans différents codes de pont a également été présentée. Les effets de plusieurs paramètres importants, y compris la position de freinage du véhicule, le taux de décélération, la vitesse initiale du véhicule et l'état de la surface de la route, sur les facteurs d'impact dynamiques ont été étudiés.

Zhong et al [25], ont étudié l'influence de l'existence d'une précontrainte dans les ponts sur les réponses dynamiques des ponts et des véhicules qui les traversent. Dans cet article, le pont est modélisé comme une poutre continue avec une précontrainte excentrique, et un modèle de demi-véhicule à 4 degrés de liberté est utilisé pour représenter le véhicule traversant le pont. Un nouveau modèle pont-véhicule tenant compte de l'effet de précontrainte est créé par le principe des travaux virtuels pour étudier les ponts précontraints et les réponses d'interaction du véhicule. L'exactitude et la précision du modèle sont validées avec les résultats de la littérature et le logiciel d'élément finis Abaqus. Sur la base du modèle créé, des simulations numériques ont été menées à l'aide de la méthode d'intégration de Newmark pour effectuer une étude paramétrique sur les effets du nombre de travées de pont, de la longueur de la travée, de l'excentricité et de l'amplitude de la précontrainte. Il est démontré que la précontrainte a un effet significatif sur l'accélération verticale maximale des véhicules, ce qui peut fournir un bon indice pour détecter le changement de précontrainte.

Dans l'article de Li et al [26], la propriété dynamique d'un pont à poutres hybrides de forme spéciale avec des arcs en tubes d'acier remplis de béton est étudiée sur la base de méthodes expérimentales et numériques, en particulier sous des véhicules en mouvement. Avant la construction de ce pont, un essai dynamique sur le terrain a été effectué. Un modèle d'éléments finis tridimensionnel raffiné est construit pour représenter la propriété mécanique structurelle complexe du pont. Le modèle de vibration couplé véhicule-pont avec un modèle

de véhicule à 16 DDL est établi pour simuler le comportement dynamique du pont avec des véhicules en mouvement. Le modèle éléments finis est mis à jour et le modèle véhicule-pont du pont est vérifié, en tirant parti des données mesurées susmentionnées. Le résultat indique que le modèle numérique véhicule-pont proposé peut reproduire fidèlement la réponse mesurée et peut être utilisé pour simuler le comportement dynamique du pont dans diverses conditions. L'effet d'impact, le confort de conduite et des piétons et l'analyse des paramètres associés pour le pont avec des véhicules en mouvement sont étudiés par des simulations numériques et des tests expérimentaux. Les résultats indiquent que la formule du facteur d'impact des normes de conception sous-estime considérablement l'effet d'impact dynamique, ce qui peut avoir une influence défavorable sur la sécurité du pont. Plusieurs conclusions sont tirées pour ce pont, et des recherches supplémentaires nécessaires pour ce nouveau type de pont sont discutées.

Nunia et al [27], ont étudié l'effet de la vitesse du véhicule, de l'état de la rugosité de la surface de la route et de la longueur de la portée du pont sur le facteur d'impact. La réponse dynamique d'un pont simplement supporté chargé de véhicules indien de classe A et de classe B est prisent en compte pour l'étude. Pour simplifier, les véhicules sont modélisés par une série de systèmes masses-ressorts-amortisseurs mobile. L'interaction entre le pont et le véhicule est réalisée en couplant l'équation du mouvement en utilisant la force d'interaction au point de contact de la roue et du pont. L'équation couplée du mouvement est résolue à l'aide de la méthode de Newmark. Le modèle est validé avec la littérature. Le véhicule se déplace à une vitesse constante entre 20 et 100 km/h. L'excitation causée par la présence de la rugosité de la surface de la route à différentes vitesses de véhicule sur la réponse du pont avec des longueurs de portée variant entre 20 et 100 m est étudiée. Des études paramétriques sont également menées en utilisant le rapport de fréquence. Les auteurs ont observé que la réponse du pont soumis au véhicule de classe A est 40% supérieure à la réponse du pont soumis au véhicule de classe B. Il est également observé à partir de l'étude paramétrique que la réponse du pont devient critique lorsque le véhicule se déplace à la vitesse de résonance et l'amplitude augmente avec la dégradation de l'état de la surface de la route.

Une méthode entièrement couplée pour reproduire l'interaction dynamique véhicule routier-pont a été présentée par Oliva et al [28], dans laquelle des modèles d'éléments finis sont utilisés pour la structure, des modèles dynamiques discret à plusieurs degrés de liberté pour les véhicules et l'interaction est représentée au moyen d'un contact avec la méthode de pénalité linéaire. Ce modèle peut reproduire les non-linéarités de la structure, du véhicule et de l'interaction et a été implémenté dans un logiciel commercial d'éléments finis existant. En ce qui concerne les irrégularités de la route, une méthodologie pour générer des paires de profils parallèles sur la même route est développée et une expression pour la fonction de cohérence des revêtements routiers, qui simplifie la génération de tels profils, est proposée. Ces méthodes sont appliquées à deux ponts différents. Les résultats montrent la pertinence de considérer une définition de surface complète lorsque la réponse dynamique des ponts routiers et des véhicules est analysée. Le comportement dynamique induit par le trafic sur les ponts est le principal problème de cette étude ; une attention particulière est également accordée aux vibrations du véhicule car elles sont également influencées par la description de la surface de la route. Les capacités du modèle de décollement sont illustrées en considérant une bosse sur la surface du pont.

1.2 Nature des vibrations des dalles de roulement

La compréhension du phénomène d'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules revient à bien détailler la représentation de la charge qui s'exerce sur la dalle par le véhicule et réciproquement. Une description détaillée de la nature des vibrations générées dans les dalles de roulement par le passage des véhicules est présentée dans la thèse de doctorat de Claude Brouquet [29].

Considérons en premier lieu, la situation où un véhicule mobile représenté par une force constante traversant une poutre simple à une vitesse constante v . La poutre est caractérisée par la portée, la rigidité, l'amortissement et la masse linéaire. À chaque instant t , la force mobile se trouve à l'abscisse $x = vt$ le long de la poutre et provoque une déformée différente. Pour passer d'un état déformé à un autre durant un intervalle de temps Δt , chaque élément infinitésimal de la poutre subit une accélération. En plus des forces élastiques, la poutre est donc sollicitée par des forces d'inertie et des forces d'amortissement. Les forces d'inertie causent des oscillations de la poutre qui, après le passage de la force mobile, retrouve peu à peu sa position de repos par l'entremise des forces d'amortissement [29].

La situation décrite ci-dessus correspond au cas où la masse du véhicule mobile est très faible devant de la masse de la poutre. Dans le cas contraire, les effets d'inertie liés à la masse mobile doivent être pris en compte surtout à grande vitesse de roulement. Cette masse mobile, lors de son parcours sur la poutre, modifie les fréquences et modes de la poutre en régime forcé [29].

Considérant en deuxième lieu qu'un véhicule traversant une dalle de roulement parfaitement lisse avec une vitesse constante. Le véhicule est idéalisé par un modèle dynamique mobile à deux degrés de liberté (Fig.1.1). Au fur et à mesure que le véhicule progresse sur la dalle, cette dernière subit une déformation différente. Ceci provoque un déplacement relatif différent des extrémités des ressorts et des amortisseurs du véhicule, et par la suite l'amplitude de la force d'interaction développée sous chaque pneu est modifiée. Sous ces nouvelles sollicitations, la dalle de roulement se déforme de nouveau et occupe une autre forme d'équilibre dynamique, et elle modifie de nouveau l'amplitude de la force d'interaction sous chaque pneu, et ainsi de suite. Ce processus d'équilibre dynamique se poursuit jusqu'à ce que le véhicule quitte complètement la dalle de roulement qui revient au repos à cause de son amortissement.

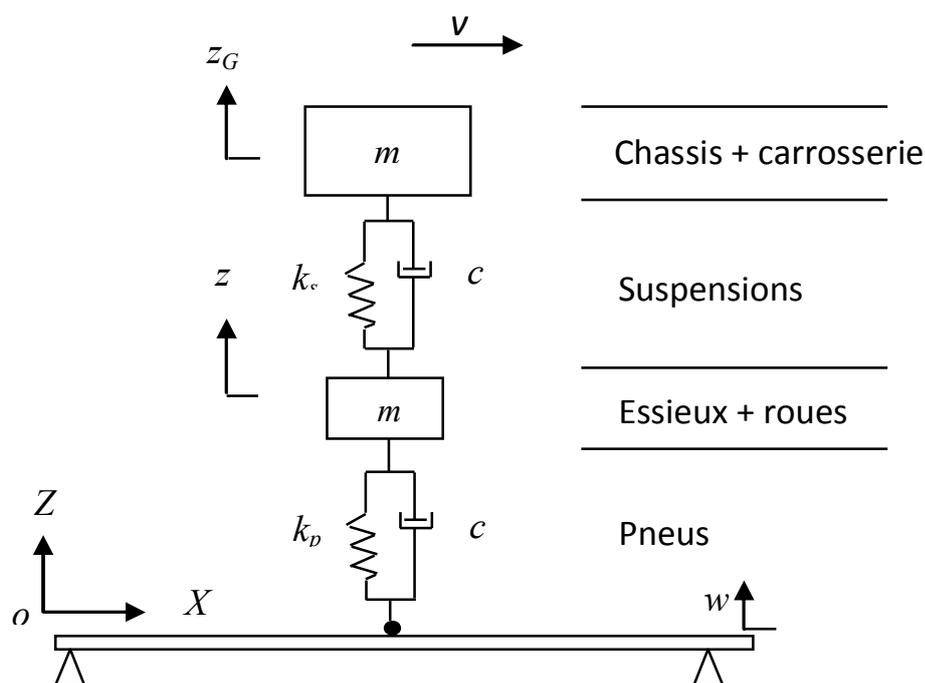


Fig. 1.1. Véhicule modélisé avec un système masses - ressorts –amortisseurs à 2 ddl

Supposons maintenant qu'un véhicule modélisé par un modèle dynamique tridimensionnel à plusieurs degrés de liberté traversant une dalle de roulement avec une vitesse constante, et qu'il reste en contact permanent avec une chaussée non parfaitement lisse. Au fur et à mesure que le véhicule progresse sur la dalle de roulement, cette dernière subit une déformation et la forme de la dalle alors modifiée. Ceci provoque un déplacement relatif des extrémités des ressorts et des amortisseurs du véhicule, et par la suite l'intensité de la force d'interaction développée sous chaque pneu est modifiée. Sous ces nouvelles conditions, la dalle de roulement se déforme de nouveau et occupe une autre configuration d'équilibre, et elle modifie de nouveau l'intensité de la force d'interaction de chaque pneu et ainsi de suite. En plus des forces d'inerties et d'amortissements, les irrégularités de la chaussée perturbent le mouvement du véhicule à chaque instant par l'intermédiaire des suspensions. Ce processus d'ajustement de la position des masses en vibration du véhicule et de la dalle se poursuit jusqu'à la sortie du véhicule de la dalle de roulement qui revient au repos à cause de l'amortissement.

La situation réelle est similaire à celle décrite ci-dessus avec, en plus, d'autres sources d'excitation pouvant affecter la vibration du véhicule. Les conditions initiales de vibration des véhicules à l'approche de la dalle de roulement, la présence d'autres véhicules simultanément sur la dalle de roulement, les forces causées par l'accélération, le freinage ou l'action du vent sont des facteurs qui génèrent une variation de l'intensité des charges appliquées sur la dalle de roulement. Le véhicule et la dalle de roulement sont considérés comme deux systèmes vibratoires couplés [29].

1.3 Caractéristiques d'une dalle de roulement

On sait que chaque dalle de roulement a un comportement dynamique particulier à cause de sa géométrie particulière dont les principales caractéristiques sont : la masse, la rigidité et l'amortissement.

La masse est un facteur important pour calculer les fréquences de vibration de la dalle de roulement. Elle comporte les masses de : la structure porteuse, le revêtement, les parapets, les trottoirs et de tous les autres équipements de dalle de roulement.

Le type de matériau, les dimensions et le type de section de la dalle de roulement déterminent la rigidité de cette dernière.

L'amortissement caractérise la dissipation d'énergie lors des vibrations d'une dalle de roulement. On distingue l'amortissement matériel et l'amortissement structural. La différence dépend essentiellement de la manière dont les limites sont fixées entre chacun. L'amortissement matériel correspond aux pertes d'énergie au niveau moléculaire dans le matériau. L'amortissement structural est de nature principalement frictionnel et correspond à l'énergie dissipée aux interfaces entre les parties distinctes d'une structure, telles que les joints, les appuis, les liaisons. L'amortissement global est généralement de type visqueux, c'est-à-dire que l'amplitude de vibration diminue d'une manière exponentielle avec le nombre de cycles. L'amortissement diminue les oscillations surtout en hautes fréquences. [29].

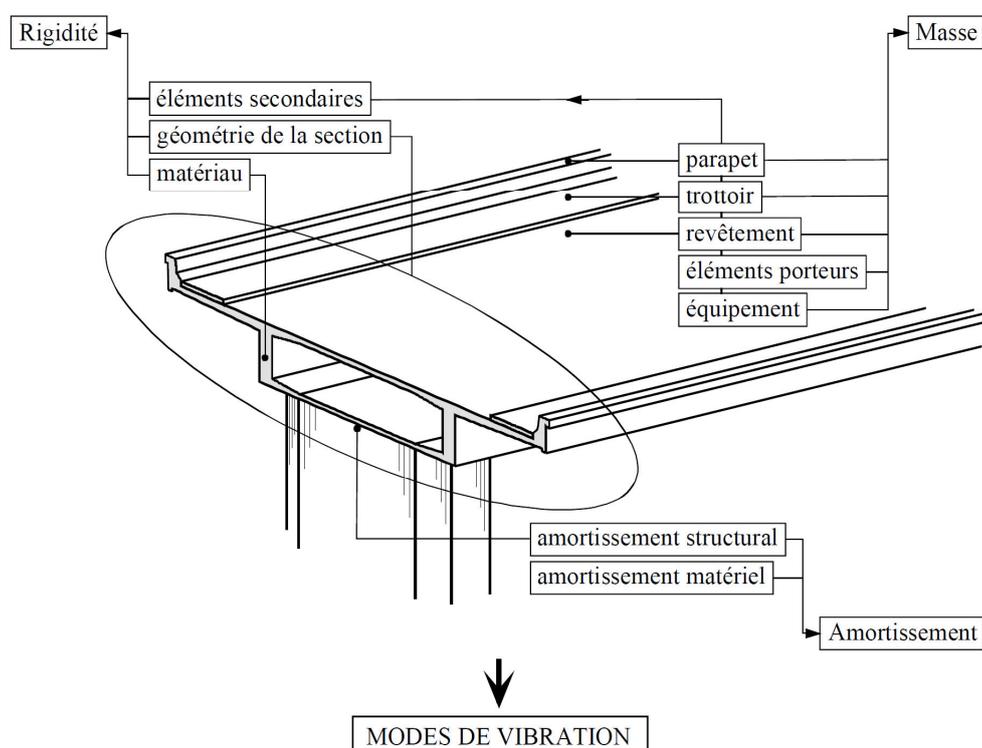


Fig. 1.2. Différents éléments caractérisant les dalles de roulement [21]

Les principales catégories des dalles de roulement sont illustrées dans le tableau 1.1. On distingue les dalles planes d'épaisseurs constantes ou variables, les dalles de section ouvertes, les dalles à caisson à sections constantes ou variables, des dalles composites,... etc.

La plupart des dalles de roulement sont orthotropes à cause de la nature orthotropique de leurs composantes (dalle, grillage,...etc.) Les dalles de roulement sont regroupées dans quatre différents types selon leurs sections transversales (Tableau 1.1). Le type de section transversale est dépendant de la portée des ponts. Les ponts de courte portée, ou les ponts de portées inférieures à 25 m, tels que les ponts-cadre des passages inférieurs sont formés de dalle dont les sections pleines. Pour les ponts de portées plus longues, entre 30 et 70 m, les dalles à section caisson dont la hauteur de la section est constante, sont bien adaptées. Les portées plus importantes sont franchies avec des dalles qui ont des sections à hauteurs variables [29]. Les dalles de roulement en formes de caissons sont les plus résistants à la flexion.

La plupart des tabliers des ponts peuvent être homogénéisés à des plaques orthotropes avec des propriétés équivalentes [30].

Type de section transversale	
Section pleine	
Section ouverte	
Section à caisson à hauteur constante	
Section à caisson à hauteur variable	
Section composite	

Tableau 1.1. Types de sections transversales

1.4 Caractéristiques d'un véhicule

Dans le cadre d'une étude sur le comportement dynamique des dalles de roulement, les véhicules qui retiennent le plus l'attention sont les poids lourds à cause de leur masse élevée. La connaissance de leur comportement dynamique est donc essentielle.

La géométrie des poids lourds définit le nombre et l'espacement des essieux et influence la répartition des masses. Ces paramètres déterminent la position et l'intensité des charges statiques appliquées sur la dalle.

Les systèmes de suspensions des véhicules sont classés dans deux catégories principales qui sont d'une part, les systèmes composés de lames d'acier et d'autre part, les systèmes pneumatiques. Les suspensions à lames d'acier sont les plus répandues, mais la tendance actuelle est plutôt favorable aux systèmes pneumatiques qui sont opérationnelles pour toutes intensités de l'amplitude des vibrations.

Les pneus influencent également les mouvements vibratoires des véhicules. Ils sont caractérisés par le nombre et la disposition des bandes de caoutchouc qui les constitue ainsi que la pression d'air de gonflage, ces caractéristiques influencent la rigidité et l'amortissement des pneus.

L'ensemble des paramètres cités ci-dessus déterminent les propriétés modales du véhicule (Figure 1.3), on distingue quatre types d'oscillations caractérisant le mouvement du véhicule lorsque ce dernier roule sur une chaussée:

- Le bondissement

Le bondissement correspond au mouvement vertical de la masse du véhicule.

- Le tangage

Le tangage est le mouvement du véhicule autour d'un axe perpendiculaire à son axe longitudinal et ses effets sont couplés à ceux des oscillations verticales (bondissement).

- Le roulis

Le roulis représente le balancement de la masse du véhicule autour de son axe longitudinal et provient de l'effet de roulement.

- Le sautellement

Le sautellement caractérise le mouvement vertical des essieux.

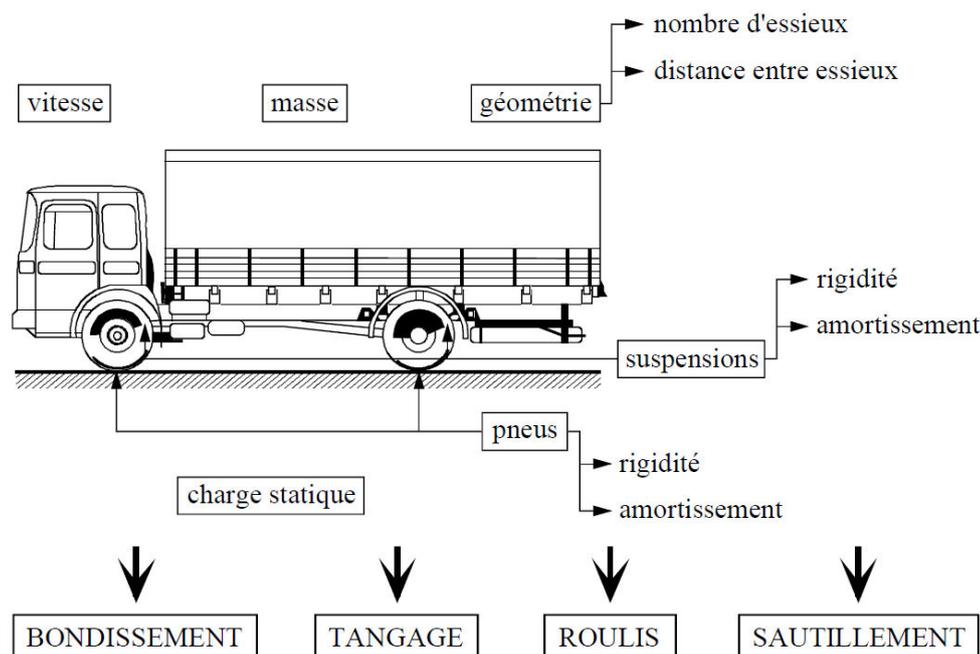


Fig.1.3. Différents éléments caractérisant les véhicules [21]

Il faut également mentionner comme éléments importants, le nombre et la vitesse des véhicules circulant sur le pont. Le nombre de véhicules qui chargent simultanément la dalle de roulement modifie le comportement vibratoire de cette dernière. La vitesse détermine la durée du régime de vibrations forcées auquel la dalle est soumise.

1.5 Caractéristiques d'un profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est un élément d'un grand intérêt pour l'étude du comportement dynamique une dalle de roulement. On distingue le profil statique qui représente les irrégularités de la chaussée en fonction de la position et le profil dynamique qui correspond aux déflexions causées par les charges appliquées sur le pont. Le profil statique est déterminé par le profil en long de la route auquel est superposé les dénivellations aux appuis, les tassements différentiels des fondations ou les défauts d'alignement des travées, les contre flèches, les flèches dues aux effets différés et la rugosité du revêtement (Figure 1.4). Ces différentes composantes proviennent des tolérances de construction, des conditions d'exploitation ou des effets du temps. Les irrégularités du profil statique de la chaussée ont pour effet d'induire et d'entretenir les oscillations de la charge sur le système de suspension du véhicule.

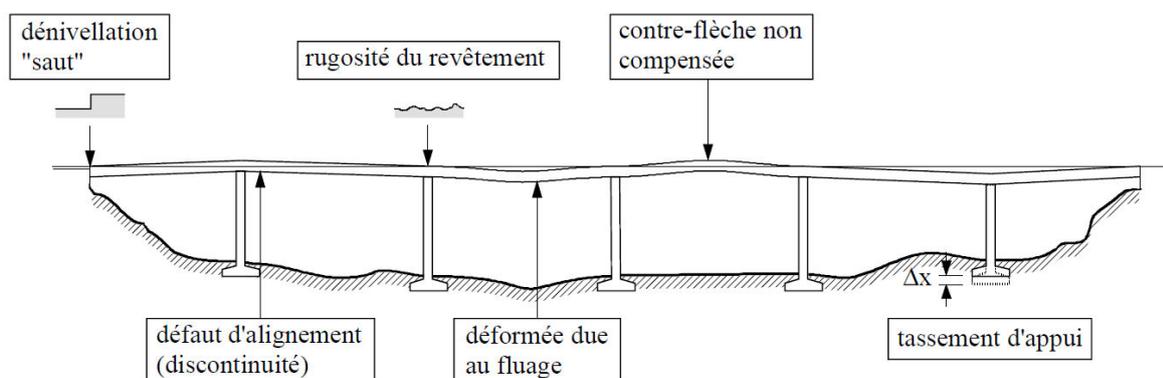


Fig.1.4. Profil statique d'un pont [21]

1.6 Facteur d'amplification dynamique FAD [21]

1.6.1 Définitions

Le Facteur d'Amplification Dynamique (FAD) est un paramètre très important dans l'analyse et la conception des dalles de roulement des ponts routiers. C'est une valeur qui majore les effets statiques d'une dalle de roulement causés par la charge statique d'un véhicule mobile, pour tenir compte des effets dynamiques provoqués par le passage de ce même véhicule. Cette définition est quelque peu différente selon les auteurs et les pays.

L'Amplification Dynamique résultant du passage d'un véhicule sur une dalle de roulement est donnée par :

$$AD = \frac{R_{dyn} - R_{sta}}{R_{sta}}$$

Où R_{dyn} est la réponse dynamique maximum (déplacement, effort tranchant, moment fléchissant, ...), R_{sta} est la réponse statique maximum.

Le facteur $1+AD$ représente le FAD qui est le rapport entre la réponse dynamique sur la réponse statique :

$$FAD = \frac{R_{dyn}}{R_{sta}}$$

La notion du facteur d'Impact ou d'incrément dynamique exprimé en pour-cent est également utilisée dans la littérature :

$$I(\%) = \left(\frac{R_{dyn}}{R_{sta}} - 1 \right) \times 100\%$$

Des divergences plus marquées existent dans la définition des facteurs d'amplification dynamique calculés à partir d'un enregistrement des réponses statiques et dynamiques d'une structure. La réponse statique utilisée pour définir le facteur d'amplification dynamique est, dans certain cas, celle obtenue à l'instant t_{dyn} où la réponse dynamique maximale est obtenue, ou encore à l'instant t_{sta} où la réponse statique maximale est obtenue.

Les réponses maximales statiques et dynamiques ne surviennent généralement pas pour une même position de la charge (Fig.1.5). De plus, la section critique où se produit la réponse statique maximale n'est pas nécessairement la même que celle où se produit la réponse dynamique maximale le long du pont. Les réponses statiques obtenues par le traitement des réponses dynamiques au moyen d'une série de filtres créent encore de nouvelles distinctions entre les définitions du facteur d'amplification dynamique [29].

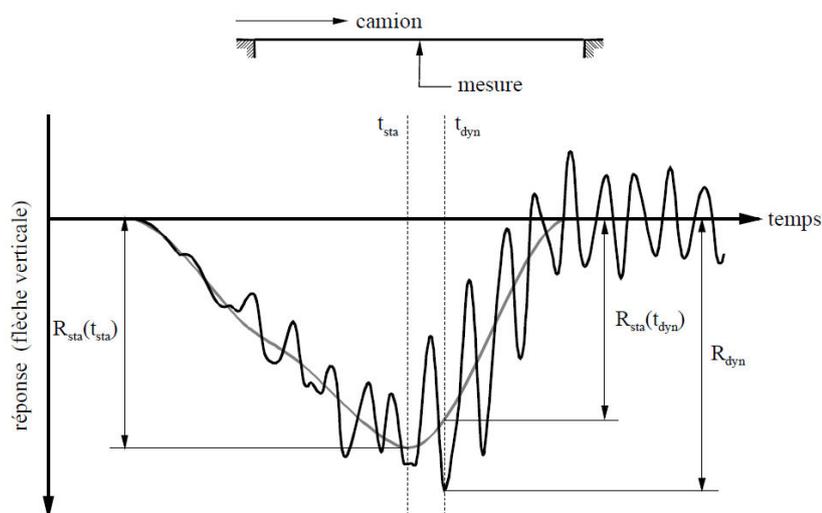


Fig.1.5. Réponse statique et dynamique

1.6.2 Importance du facteur d'amplification dynamique

L'importance du facteur d'Amplification dynamique peut être résumé dans les points suivants :

- Présenter les effets dynamiques dans les dalles de roulement qui sont provoqués par le passage des véhicules. Ces effets sont déterminés par rapport à une référence statique,
- Déterminer la sensibilité des dalles de roulement aux sollicitations dynamiques provoquées par le trafic routier,
- Définir les endroits jugés importants sur les dalles de roulement selon un chargement donné,
- Déterminer quelles sont les types des dalles de roulement les plus sensibles aux sollicitations dynamiques.

1.7 Fréquence de passage et vitesse critique

La première fréquence de passage est définie comme étant la fréquence de circulation d'un mobile à une vitesse constante v sur une dalle de longueur L . cette fréquence s'exprime par [29]:

$$\Omega_1 = \frac{\pi v}{L}$$

Le paramètre de vitesse S , utilisé pour exprimer la réponse de l'interaction dynamique dalle de roulement / véhicule, est défini comme étant le rapport de la fréquence de circulation (d'excitation) du véhicule mobile et la première fréquence propre de la dalle ω_l [29]:

$$S = \frac{\pi v}{L\omega_1}$$

La première vitesse critique de passage d'un véhicule sur une dalle de roulement c'est la vitesse qui correspond au maximum de déplacement verticale de la dalle. Elle est déterminée en égalisant la première fréquence de passage à la première fréquence propre de la structure $\Omega_l = \omega_l$, avec $\omega_l = 2\pi f_l$. Dans ce cas, la première vitesse critique s'écrit alors :

$$v_{1,cr} = 2Lf_1$$

1.8 Interaction dynamique

Considérons une roue d'un véhicule mobile sur une dalle de roulement avec la prise en compte des irrégularités de la chaussée (Fig.1.6). Le pneu peut être modélisé par un ressort de raideur k_{pi} et un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c_{pi} . La masse de la roue avec essieu est notée m_i , z_i est le déplacement vertical de la masse m_i , w_i et r_i sont respectivement le déplacement vertical de la dalle et l'irrégularité de la chaussée évalués au point de contact i .

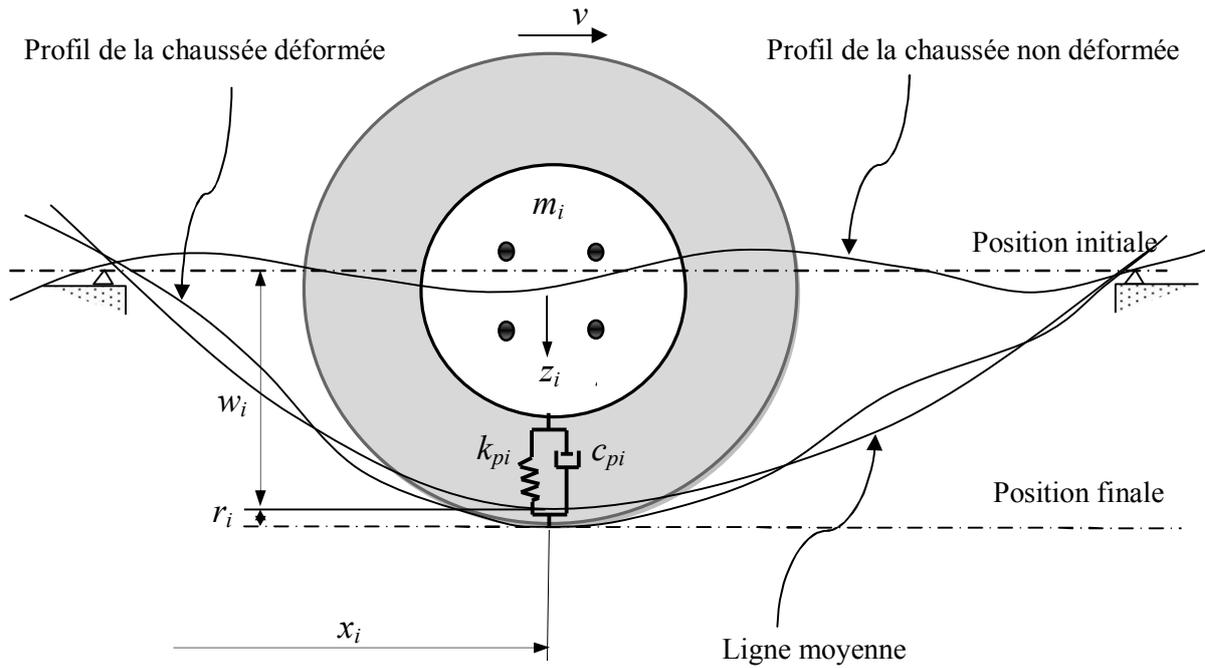


Fig.1.6. Modélisation de l'interaction dynamique dalle-roue d'un véhicule et évaluations des déplacements relatifs.

La force d'interaction entre la roue du véhicule et la dalle de roulement au point de contact i est exprimée par (Fig.1.7) :

$$\begin{aligned}
 F_{pi}^{int} &= k_{pi} (z_i - (w_i + r_i)) + c_{pi} (\dot{z}_i - (\dot{w}_i + \dot{r}_i)) \\
 &= k_{pi} [z_i - (w_i + r_i)] + c_{pi} \left[\dot{z}_i - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) \right]_{x_i, y_i, t}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

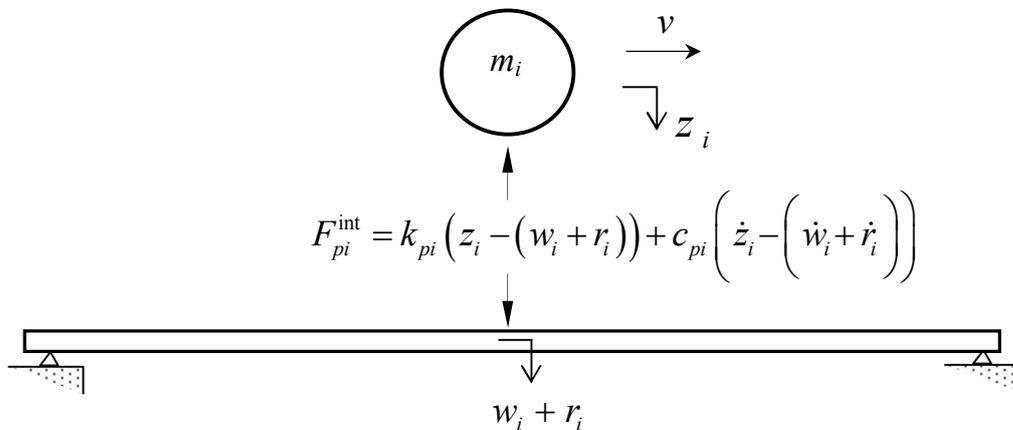


Fig.1.7. Représentation de la force d'interaction à un point de contact i .

1.9 Méthodes de résolution des problèmes d'interaction dynamique

Il y a deux méthodes de simuler l'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile (Fig.1.8) [30]. La première est basée sur une méthode itérative découplée, dans laquelle chaque système d'équations de mouvement pour la dalle de roulement et pour le véhicule est résolu séparément et un processus de calcul itératif à chaque pas de temps est nécessaire pour chercher l'équilibre dynamique entre la dalle de roulement et les pneus du véhicule. La deuxième méthode consiste à coupler les équations du mouvement du véhicule avec ceux de la dalle de roulement et de construire ainsi un super-système d'équations. La solution est obtenue à chaque pas du temps sans aucune itération. Cette méthode présente des avantages et des inconvénients. Parmi les avantages, on peut citer : le temps de calcul est réduit en comparaison avec la méthode itérative découplée; mise en place numérique facile; mémoire de stockage réduite; aucune factorisation de la matrice globale; aucune itération dans le procédé de calcul. Cependant, les principaux inconvénients sont : la projection modale dans le sous-espace est indispensable, et si les haute fréquences de la dalle de roulement participent dans la réponse, ceci créera un problème dans la réponse dynamique; cette méthode est bien adaptée seulement pour un nombre de véhicules moins important présentant en même temps sur la dalle (cette remarque s'applique également à la méthode itérative découplée).

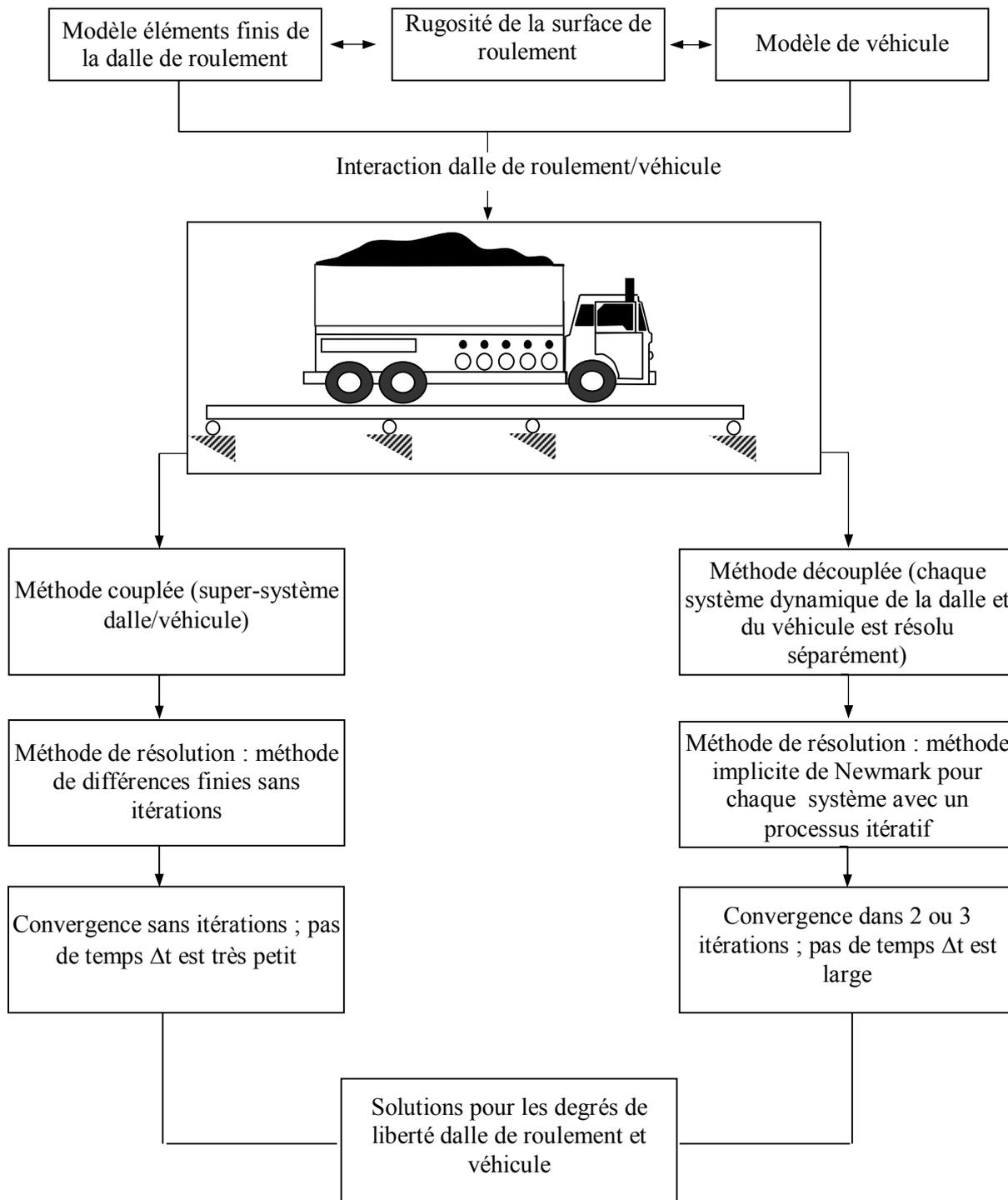


Fig.1.8. Différentes procédures pour la résolution des problèmes d’interaction dynamique dalle de roulement /véhicule.

1.10 Facteurs importants influençant l'amplification dynamique

Les principaux paramètres et leur influence ont été établis sur la base des essais expérimentaux et des analyses numériques effectués par le passé.

Les imperfections de la chaussée et les irrégularités sont désignées comme étant le facteur principal influençant la réponse du pont. Les facteurs d'amplification dynamique sont dépendants de type véhicule où chaque camion avec sa géométrie, sa masse, ses suspensions, ses pneus, sa position sur le pont et sa vitesse est excité différemment par le profil de la chaussée.

Le poids du véhicule influence les facteurs d'amplification dynamique. Dans la plupart du temps l'augmentation de la masse du véhicule entraîne une diminution des facteurs d'amplification dynamique, cependant, dans certaines situations difficiles à identifier, l'inverse se produit. Les véhicules simples génèrent des facteurs d'amplification dynamique plus importants que ceux produits par les véhicules articulés.

Les facteurs d'amplification dynamique obtenus à partir de points de mesure éloignés de la position du véhicule sont plus grands que pour les points de mesure placés directement sous la charge du véhicule.

1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une recherche bibliographique de plusieurs articles publiés récemment. Nous avons présenté la nature des vibrations des dalles de roulement et leurs caractéristiques, les caractéristiques des camions et du profil de la chaussée. La définition du Facteur d'Amplification Dynamique et de son importance dans la conception des dalles de roulement sont également présentés. A la fin du chapitre, nous avons expliqué le phénomène d'interaction dynamique dalle-camion et les méthodes de résolution existantes dans la littérature.

CHAPITRE 2

Détermination des fréquences et des modes
propres d'une dalle de roulement orthotropes
multi-travées à supports rigides

Chapitre 2

Détermination des fréquences et des modes propres d'une dalle de roulement orthotropes multi-travées à supports rigides

2.1 Introduction

L'étude du comportement dynamique des dalles de roulement des ponts routiers sous la sollicitation des véhicules mobiles commence par la détermination des fréquences et des modes propres de vibration de la dalle de roulement. La plupart des dalles de roulement sont orthotropes à cause de la nature orthotropique de leurs éléments. Plusieurs types de sections des dalles de roulement peuvent être homogénéisés à des plaques orthotropes. Aussi la théorie des plaques orthotropes joue un rôle important dans l'analyse statique et dynamique des dalles de roulement. Il existe trois méthodes pour l'analyse dynamique des dalles de roulement : la méthode des éléments finis, la méthode des bandes finies et la méthode basée sur la théorie des plaques orthotropes.

Dans ce chapitre, on présente une approche semi-analytique permettant de déterminer les fréquences et les modes propres d'une dalle de roulement orthotrope multi-travées à supports rigides. Cette approche est basée sur la méthode modale dont la particularité réside dans la décomposition de la fonction définissant les modes propres. Elle tient compte aussi du couplage intermodal généralement négligé dans la littérature. Les avantages de l'approche proposée sont nombreux notamment sa simplicité de mise en œuvre, sa rapidité et sa précision. Des exemples d'application numériques sont présentés afin d'illustrer la fiabilité de l'approche proposée.

2.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement orthotropes à supports rigides

La dalle de roulement est modélisée par une plaque rectangulaire mince de matériau orthotrope, de longueur l , de largeur b , d'épaisseur h et de masse volumique ρ (**Fig. 2.1**). Tous les appuis sont rigides et perpendiculaires aux bords libres, Les vibrations libres sans

amortissement de la dalle de roulement sont régies par l'équation différentielle homogène suivante :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1), $w(x, y, t)$ est le déplacement vertical de la dalle de roulement, $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion suivant la direction x , $D_y = D_x E_y / E_x$ est la rigidité de flexion suivant la direction y , $H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$ est la rigidité de flexion équivalente, ν_{xy} et ν_{yx} sont les rapports de Poisson selon les directions x et y respectivement, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ est la rigidité de torsion, G_{xy} est le module de cisaillement, E_x et E_y sont les modules d'Young selon les directions x et y respectivement.

En utilisant la méthode modale, le déplacement vertical de la dalle de roulement en vibration libre s'écrit [31] :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} W_{ij}(x, y) e^{J \omega_{ij} t} \quad (2.2)$$

Avec ω_{ij} et $W_{ij}(x, y)$ sont respectivement, les pulsations et les modes propres de la dalle de roulement multi-travées, a_{ij} sont les amplitudes modales et $J = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire.

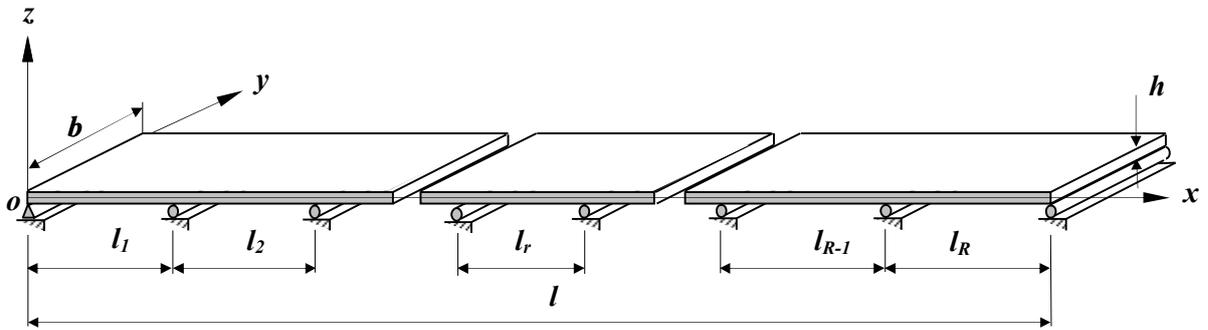


Fig. 2.1. Modèle mathématique de la dalle de roulement multi-travées à supports rigides

On remplace l'expression (2.2) dans l'équation (2.1), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[D_x \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial y^4} - \rho h \omega_{ij}^2 W_{ij} \right] e^{J \omega_{ij} t} = 0 \quad (2.3)$$

Pour déterminer les modes propres de la dalle de roulement, on doit donc résoudre l'équation spatiale suivante :

$$D_x \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial y^4} - \rho h \omega_{ij}^2 W_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

Dans la présente étude, on considère que selon la direction x , les modes propres de la dalle de roulement sont ceux d'une poutre multi-travées en appuis simples rigides notée $\varphi_i(x)$ et selon la direction y , les modes propres sont présentées par une fonction $h_{ij}(y)$ vérifiant les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$ de la dalle de roulement pour tenir compte le couplage intermodal [31] :

$$W_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y) \quad (2.5)$$

2.2.1 Fréquences et modes propres des poutres multi-travées à supports rigides

2.2.1.1 Cas d'une poutre à deux travées

La détermination des fréquences et des modes propres d'une poutre a deux travées consiste à déterminer les modes propres de chaque travée avec la prise en compte les conditions aux limites et de continuité au niveau de l'appui intermédiaire. L'expression du mode propre dans la travée r est donnée par (on omet l'indice i) :

$$\varphi_r(x_r) = A_r \sin \beta x_r + B_r \cos \beta x_r + C_r sh \beta x_r + D_r ch \beta x_r \quad ; \quad r = 1, 2 \quad (2.6)$$

Avec A_r , B_r , C_r et D_r sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites et de continuités .

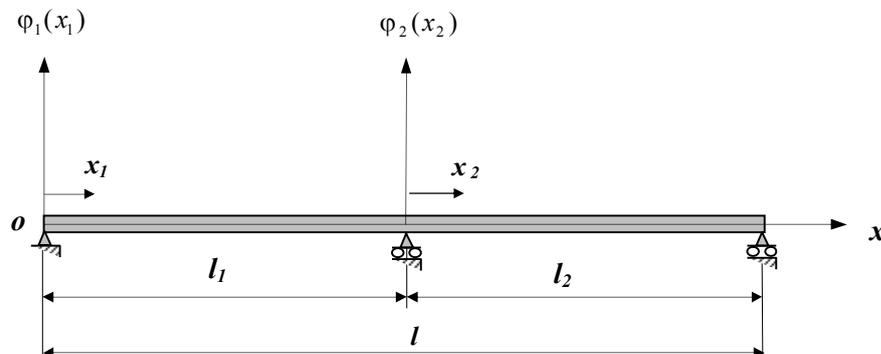


Fig.2.2. Poutre à deux travées en appuis simples rigides

A l'extrémité gauche de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nuls :

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2.7)$$

$$-EI \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2.8)$$

Pour assurer la continuité, le moment fléchissant et la pente de la travée gauche au niveau de l'appui intermédiaire doivent être égaux à celui de la travée droite et les déplacements doivent être nuls :

$$EI \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = EI \frac{d^2\varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (2.9)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} \quad (2.10)$$

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=l_1} = 0 \quad (2.11)$$

$$\varphi_2 \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.12)$$

A l'extrémité droite de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nuls :

$$\varphi_2 \Big|_{x_2=l_2} = 0 \quad (2.13)$$

$$-EI \frac{d^2\varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=l_2} = 0 \quad (2.14)$$

Remplaçons les conditions (2.7) jusqu'à (2.14) dans l'expression (2.6), après simplification et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[F]\{A\} = \{0\} \quad (2.15)$$

Avec les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'**annexe 1**.

Pour une solution non triviale, il faut que le déterminant de la matrice du système (2.15) égal a zéro ce qui permet d'obtenir l'équation aux fréquences. Les racines de cette équation sont les paramètres de fréquences $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n$. L'utilisation du logiciel de calcul « mathematica » nous permet de tracer les graphes de l'équation aux fréquences et de déterminer les valeurs de β_i .

2.2.1.2 Cas d'une poutre à trois travées

La détermination des fréquences et des modes propres d'une poutre à trois travées (fig. 2.3) s'effectue de la même manière qu'une poutre à deux travées.

Le mode propre d'ordre r dans la travée d'ordre r est donné par la même expression précédente (2.6) pour $r = 1, 2, 3$.

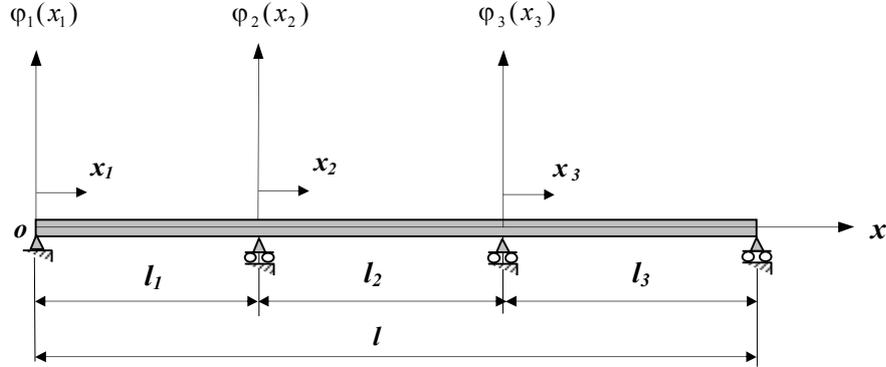


Fig. 2.3. Poutre à trois travées en appuis simples rigides

A l'extrémité gauche de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nuls :

$$\varphi_1|_{x_1=0} = 0 \quad (2.16)$$

$$-EI \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}|_{x_1=0} = 0 \quad (2.17)$$

Les conditions de continuité et les déplacements au niveau des deux appuis intermédiaires sont illustrés comme suit :

$$EI \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}|_{x_1=l_1} = EI \frac{d^2\varphi_2}{dx_2^2}|_{x_2=0} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=l_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2}|_{x_2=0} \quad (2.19)$$

$$\varphi_1|_{x_1=l_1} = 0 \quad (2.20)$$

$$\varphi_2|_{x_2=0} = 0 \quad (2.21)$$

$$EI \frac{d^2\varphi_2}{dx_2^2}|_{x_2=l_2} = EI \frac{d^2\varphi_3}{dx_3^2}|_{x_3=0} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx_2}|_{x_2=l_2} = \frac{d\varphi_3}{dx_3}|_{x_3=0} \quad (2.23)$$

$$\varphi_2|_{x_2=l_2} = 0 \quad (2.24)$$

$$\varphi_3|_{x_3=0} = 0 \quad (2.25)$$

A l'extrémité droite de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nul :

$$\varphi_3 \Big|_{x_3=l_3} = 0 \quad (2.26)$$

$$-EI \frac{d^2 \varphi_3}{dx_3^2} \Big|_{x_3=l_3} = 0 \quad (2.27)$$

Remplaçons les conditions (2.16) jusqu'à (2.27) dans l'expression (2.6), après simplification et regroupement, on obtient le système (2.15). Les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'annexe 1.

2.2.1.3 Généralisation au cas d'une poutre à multi- travées

Pour déterminer les fréquences et modes propres d'une poutre multi- travées (Fig. 2.4), il est nécessaire de déterminer les fréquences et les modes propres de chaque travée. L'expression du mode i dans la travée r est donnée par (on omet l'indice i) :

$$\varphi_r(x) = A_r \sin \beta x_r + B_r \cos \beta x_r + C_r \operatorname{sh} \beta x_r + D_r \operatorname{ch} \beta x_r \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (2.28)$$

Avec A_r , B_r , C_r et D_r sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites et de continuités et R est le nombre de travées.

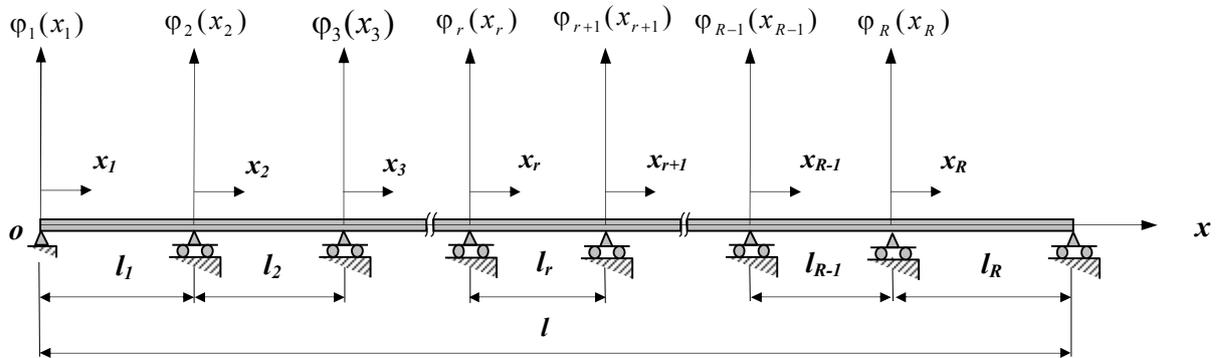


Fig. 2.4. Poutre multi-travées en appuis simples rigides

Les conditions aux limites et de continuités sont les suivantes :

A l'extrémité gauche de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nul :

$$\varphi_1(x_1) \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2.29)$$

$$-EI \frac{d^2 \varphi_1(x_1)}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2.30)$$

Les conditions de continuité et les déplacements au niveau des deux appuis intermédiaires sont illustrés comme suit :

$$EI \frac{d^2 \varphi_{r-1}(x_R)}{dx_{r-1}^2} \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = EI \frac{d^2 \varphi_r(x_r)}{dx_r^2} \Big|_{x_r=0}, \quad r = 2, \dots, R \quad (2.31)$$

$$\frac{d\varphi_{r-1}(x_r)}{dx_{r-1}} \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = \frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r} \Big|_{x_r=0}, \quad r = 2, \dots, R \quad (2.32)$$

$$\varphi_{r-1}(x_r) \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = 0, \quad r = 2, \dots, R \quad (2.33)$$

$$\varphi_{r-1}(x_r) \Big|_{x_r=0} = 0, \quad r = 2, \dots, R \quad (2.34)$$

A l'extrémité droite de la poutre, le déplacement et le moment fléchissant doivent être nuls :

$$\varphi_R(x_r) \Big|_{x_r=l_R} = 0 \quad (2.35)$$

$$-EI \frac{d^2 \varphi_R(x_R)}{dx_R^2} \Big|_{x_R=l_R} = 0 \quad (2.36)$$

Remplaçons les conditions (2.29) jusqu'à (2.36) dans l'expression (2.6), après simplification et regroupement, on obtient le système (2.15). Les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'**annexe 1**.

2.2.2 Fréquences et modes propres d'une dalle de roulement orthotrope libre-libre

L'équation différentielle (2.4) doit être vérifiée quelque soit x mais sa résolution pour chaque valeur de x est pratiquement impossible. Pour cette raison nous proposons de remplacer l'expression (2.5) dans (2.4) puis multiplions par $\varphi_i(x)$ et intégrons sur la longueur de la dalle de roulement :

$$D_y \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} \int_0^l \varphi_i^2 dx + 2H \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} \int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx + \left(D_x \beta_i^4 - \rho h \omega_i^2 \right) h_{ij} \int_0^l \varphi_i^2 dx = 0 \quad (2.37)$$

Divisons (2.37) par $D_y \int_0^l \varphi_i^2 dx$, on obtient ($\varphi_i'' = -\beta_i^2 \varphi_i$) :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \frac{2H}{D_y} \frac{d^2 h_{ij} \beta_i^2}{dy^2} + \left(\frac{D_x \beta_i^4 - \rho h \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (2.38)$$

$$\text{Avec : } \beta_{1i} = \beta_i \sqrt{\int_0^l \psi_i \varphi_i dx / \int_0^l \varphi_i^2 dx} \quad (2.39)$$

La solution générale de l'équation différentielle (2.38) est sous la forme suivante

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (2.40)$$

Remplaçons (2.40) dans (2.38) nous obtenons :

$$s_{ij}^4 - \frac{2H\beta_{1i}^2}{D_y} s_{ij}^2 + \frac{D_x \beta_i^4 - \rho h \omega_{ij}^2}{D_y} = 0 \quad (2.41)$$

Les racines de (2.41) sont :

$$s_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H\beta_{1i}^2 + \sqrt{H^2\beta_{1i}^4 - D_y(D_x\beta_i^4 - \bar{m}\omega_{ij}^2)}} = \pm r_{1ij} \quad (2.42)$$

$$s_2 = \pm J \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H\beta_{1i}^2 - \sqrt{H^2\beta_{1i}^4 - D_y(D_x\beta_i^4 - \bar{m}\omega_{ij}^2)}} = \pm Jr_{2ij}$$

Les paramètres de fréquences r_{1ij} et r_{2ij} sont liés par les pulsations ω_{ij} . Remplaçons (2.42) dans (2.40) et remplaçons les fonctions exponentielles par leurs expressions trigonométriques et hyperboliques, nous obtenons (on omet les indices i et j) :

$$h(y) = C \sin r_2 y + D \cos r_2 y + E \operatorname{sh} r_1 y + F \operatorname{ch} r_1 y \quad (2.43)$$

C , D , E et F sont des constantes d'intégration qui sont déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres de la dalle de roulement $y = 0$ et $y = b$. Sur ces bords, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls ;

$$\begin{aligned} & - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) \right) = 0 \\ & - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0, t) \right) = 0 \\ & - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b, t) \right) = 0 \\ & - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, b, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, b, t) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

En tenant compte des expressions (2.2) et (2.5), après dérivation, les conditions aux limites (2.44) deviennent :

$$\begin{aligned}
 D_y \frac{d^2 h}{dy^2}(0) - \nu_{yx} D_x \beta_1^2 h(0) &= 0 \\
 D_y \frac{d^3 h}{dy^3}(0) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \beta_1^2 \frac{dh}{dy}(0) &= 0 \\
 D_y \frac{d^2 h}{dy^2}(b) - \nu_{yx} D_x \beta_1^2 h(b) &= 0 \\
 D_y \frac{d^3 h}{dy^3}(b) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \beta_1^2 \frac{dh}{dy}(b) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

En appliquant les conditions aux limites (2.45) à l'expression (2.43), on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \theta \\ \gamma & 0 & \chi & 0 \\ \alpha \sin r_2 b & \alpha \cos r_2 b & \theta sh r_1 b & \theta chr_1 b \\ \gamma \cos r_2 b & -\gamma \sin r_2 b & \chi chr_1 b & \chi shr_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -D_y r_2^2 - \nu_{yx} D_x \beta_1^2 \\
 \theta &= D_y r_1^2 - \nu_{yx} D_x \beta_1^2 \\
 \gamma &= -D_y r_2^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_2 \beta_1^2 \\
 \chi &= D_y r_1^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_1 \beta_1^2
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

L'annulation du déterminant de la matrice du système (2.46) permet d'aboutir à l'équation aux fréquences propres suivante.

$$2\alpha\theta\gamma\chi(\cos(r_2 b)ch(r_1 b) - 1) + (\theta^2\gamma^2 - \alpha^2\chi^2)\sin(r_2 b)sh(r_1 b) = 0 \tag{2.48}$$

Pour chaque valeur de β_i ($i = 1, \dots, n$), on calcul la valeur de β_{1i} . à l'aide du logiciel « Mathématica », on détermine les racines r_1 ou r_2 de l'équation aux fréquences (2.48). Les expressions (2.42) permettent de calculer les pulsations ω_{ij} .

Pour déterminer les expressions des constantes d'intégration C , D , E et F , on simplifie le système (2.46) par la normalisation de la première composante $C = 1$. On aura donc quatre équations avec trois inconnus. On choisit trois équations parmi les quatre :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \theta \\ 0 & \chi & 0 \\ \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ E \\ F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \sin r_2 b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

D'où on obtient les expressions des constantes D , E et F :

$$D = (\alpha \sin(r_2 b) - \frac{\gamma \theta}{\chi} \sinh(r_1 b)) / \alpha (\cosh(r_1 b) - \cos(r_2 b)) \quad (2.50)$$

$$E = -\gamma / \chi \quad (2.51)$$

$$F = (-\alpha \sin(r_2 b) + \frac{\gamma \theta}{\chi} \sinh(r_1 b)) / (\theta \cosh(r_1 b) - \theta \cos(r_2 b)) \quad (3.52)$$

2.3 Exemples numériques

2.3.1 Cas d'une dalle de roulement à deux travées

Considérons un tablier d'un pont à deux travées égales ; issu de la référence [30] ; constitué d'une dalle de roulement en béton et de cinq poutres raidisseurs en acier (**Figs. 2.5 et 2.6**). La dalle de roulement est de longueur $l = 40 m$; de largeur $b = 11 m$; d'épaisseur $h = 0.2 m$; de masse volumique $\rho = 2300 kg / m^3$; de rapport de Poisson $\nu = 0.33$ et de module d'Young $E = 2.1 \times 10^{10} N / m^2$. Les caractéristiques de la section de chaque poutre raidisseur sont : hauteur de l'âme $n_1 = 1.13 m$; épaisseur de l'âme $m_1 = 0.175 m$; largeur de la semelle $0.55 m$; épaisseur de la semelle $0.18 m$ (**Fig. 2.7**). La distance entre deux raidisseurs adjacents est $b_1 = 2.25 m$. Le rapport de rigidité $s = 0.01255$; le coefficient du moment d'inertie de torsion équivalent $\alpha = 0.3$ [30].

La superstructure du pont est remplacée par une plaque orthotrope mince de propriétés équivalentes suivantes voir (**Annexe 2**) :

Masse volumique $\rho = 4546085 \text{ kg} / \text{m}^3$; épaisseur $h = 0.3358 \text{ m}$; rigidités $D_x = 1.1153523 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2$; $D_y = 1.401919 \times 10^7 \text{ N} / \text{m}^2$; $H = 2.1527522 \times 10^7 \text{ N} / \text{m}^2$; $D_{xy} = 8.450594 \times 10^6 \text{ N} / \text{m}^2$; de rapport de Poisson $\nu_{xy} = 0.33$.

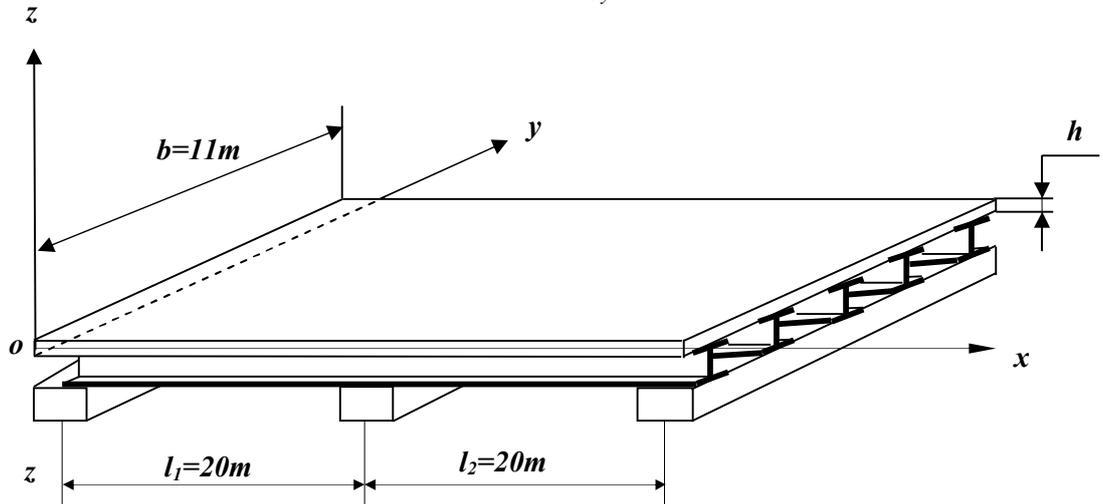


Fig. 2.5 : Tablier du pont

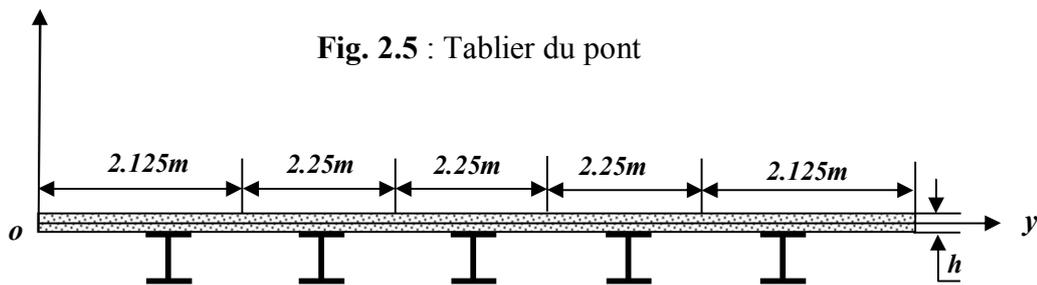


Fig. 2.6. Section transversale du Tablier

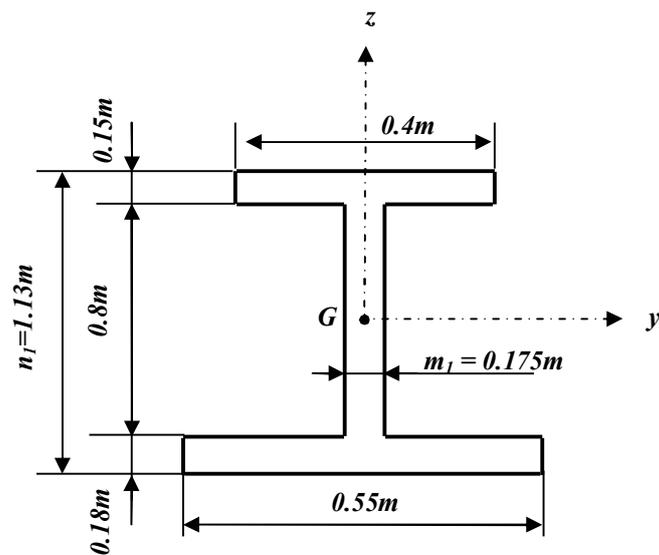


Fig. 2.7. Caractéristiques de la section du raidisseur

Pour calculer les fréquences propres ω_{ij} de la dalle de roulement orthotrope, on calcul tout d'abord les valeurs de β_i , solutions du polynôme caractéristique de la matrice (2.15), en utilisant le logiciel MATHEMATICA (Fig.2.8). Puis on calcul les paramètres de fréquences β_{li} en utilisant l'expression (2.39). Par la suite, on calcul les paramètres de fréquences r_{lij} , solutions du polynôme caractéristique de la matrice (2.49) en utilisant le logiciel MATHEMATICA (Fig.2.9). Finalement, les fréquences propres ω_{ij} sont calculées par l'expression (2.42). Les paramètres de fréquences β_i et β_{li} sont regroupés dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 : Valeurs des paramètres de fréquences β_i et β_{li}

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_i	0.1571	0.1963	0.3141	0.3534	0.4712	0.5105	0.6283	0.6675	0.7853	0.8246
β_{li}	0.1571	0.1767	0.3141	0.3341	0.4712	0.4914	0.6283	0.6485	0.7854	0.8057

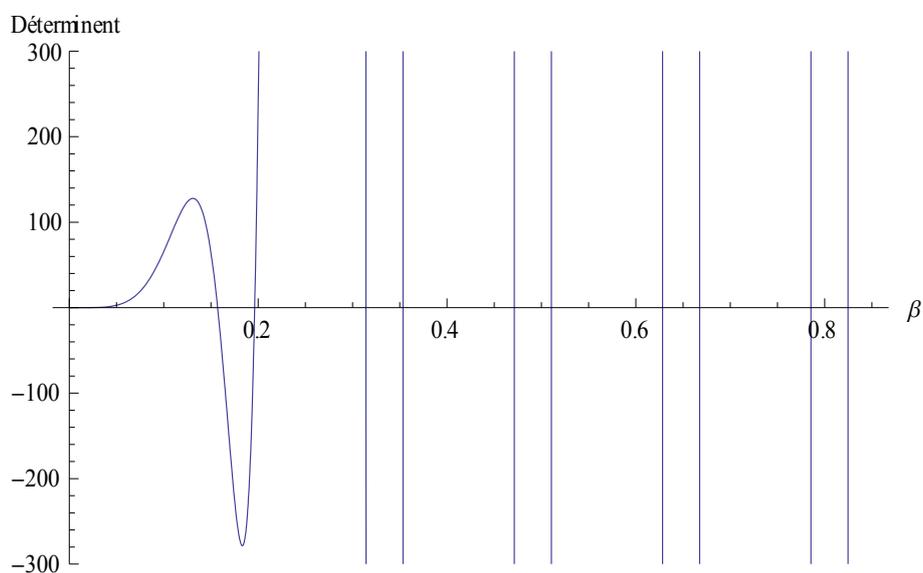


Fig. 2.8. Graphe du polynôme caractéristique de la matrice (2.15)

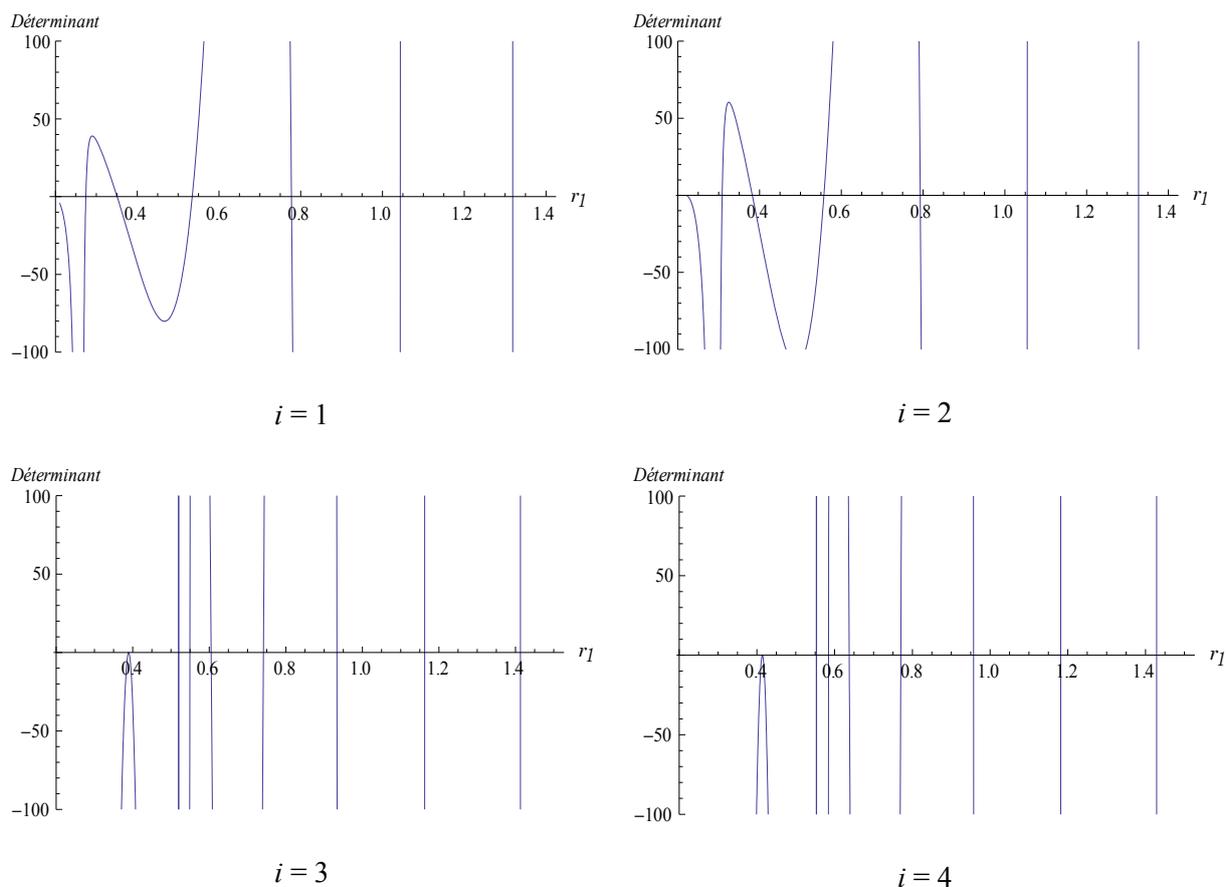
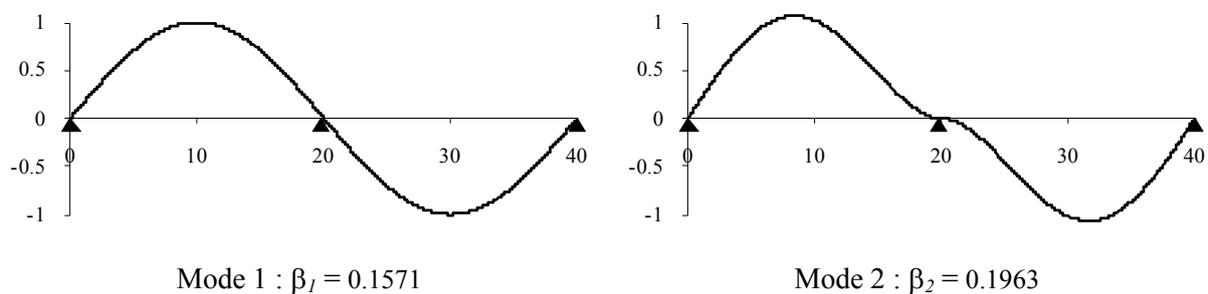


Fig. 2.9. Graphes du polynôme caractéristique de la matrice (2.49) pour différents valeurs de i

La figure 2.10 représente les huit premiers modes propres de la poutre à deux travées à supports rigides.



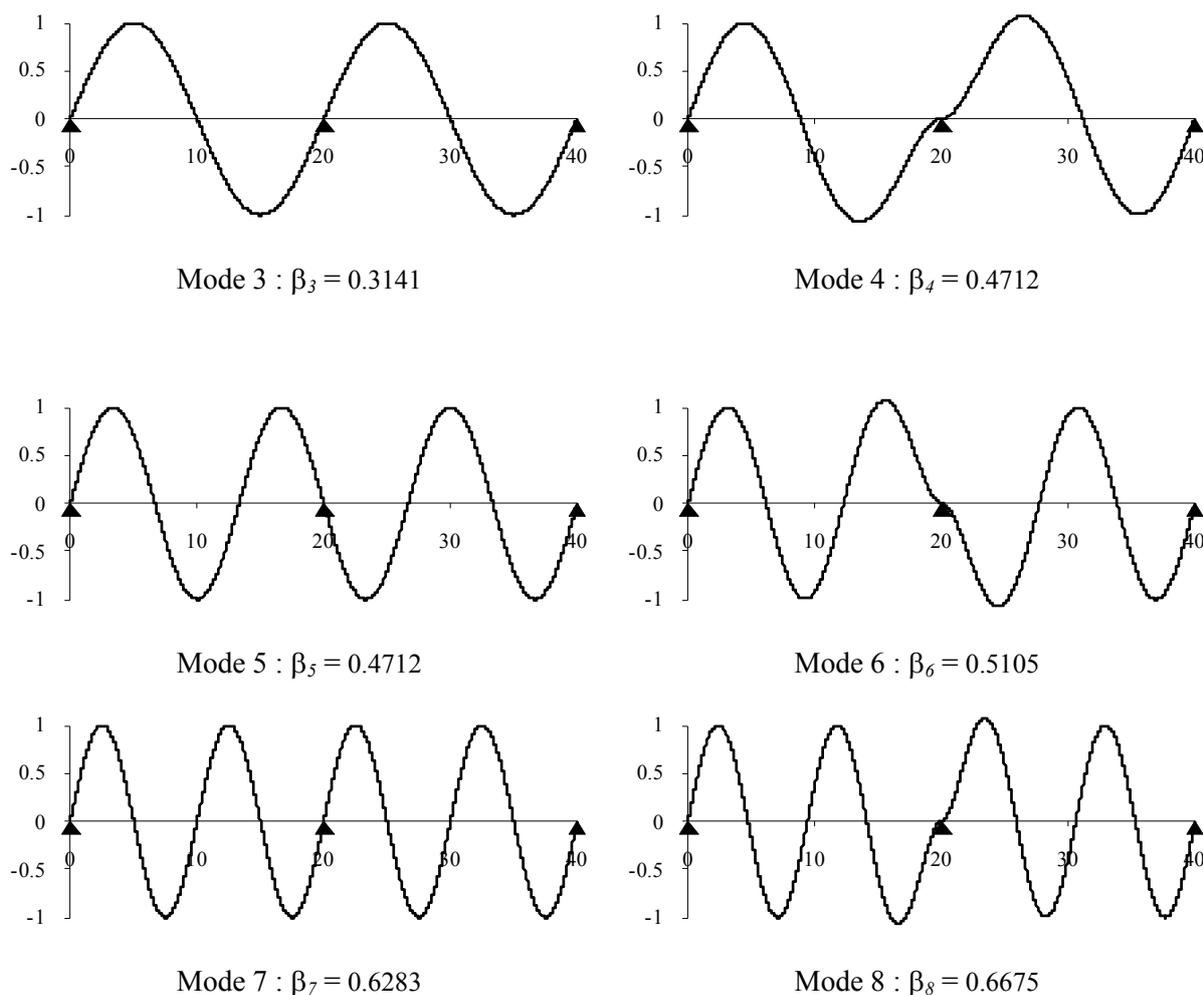


Fig. 2.10. Huit premiers modes propres de la poutre à deux travées à supports rigides

Le tableau 2.2 montre une comparaison entre nos dix premières fréquences propres de la dalle de roulement orthotrope et celles calculées par ANSYS. La dalle de roulement est modélisée par éléments finis de type 'shell 63' à quatre nœud avec six degrés de liberté par nœud (**Fig.2.11**). Nous avons utilisé trois niveaux de maillages 200×55, 240×66 et 280×77 éléments. L'analyse de la comparaison des résultats obtenus montre une bonne concordance pour toutes les fréquences.

Tableau 2.2 : Comparaison des fréquences propres (Hz) de la dalle de roulement.

Numéro du mode	ANSYS			Présente approche
	200×55	240×66	280×77	
1	3.355	3.355	3.355	3.356
2	3.553	3.553	3.553	3.553
3	5.026	5.025	5.024	5.022
4	5.242	5.242	5.242	5.243
5	5.392	5.392	5.392	5.404
6	6.515	6.514	6.513	6.559
7	9.270	9.264	9.260	9.248
8	10.214	10.208	10.204	10.268
9	13.422	13.422	13.423	13.426
10	13.622	13.622	13.623	13.623

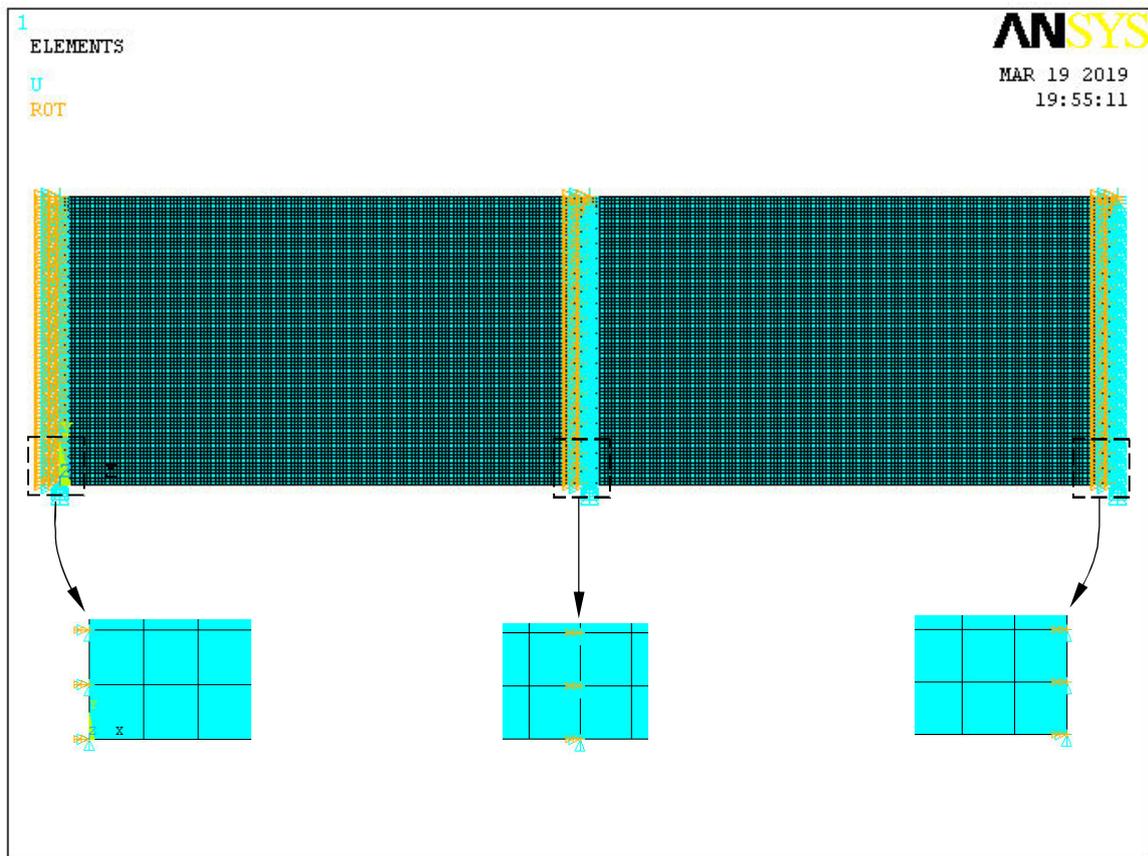
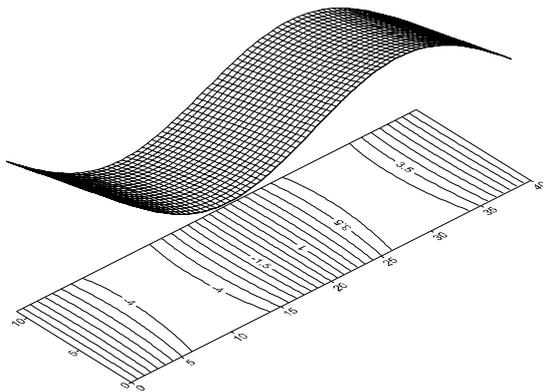


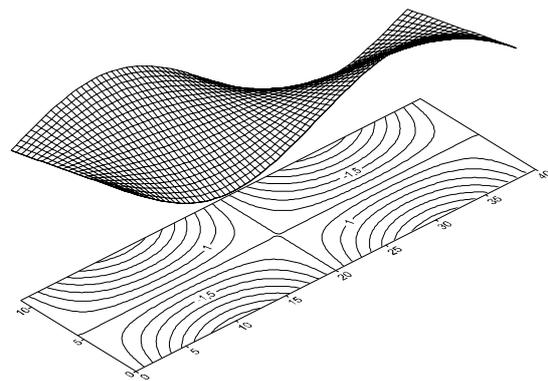
Fig.2.11. Modèle éléments finis conçu dans ANSYS pour calculer les fréquences et les modes propres de la dalle de roulement orthotrope à deux travées

La figure 2.12 représente les six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par la présente approche. Chaque mode est défini par un double indice ij selon x et y

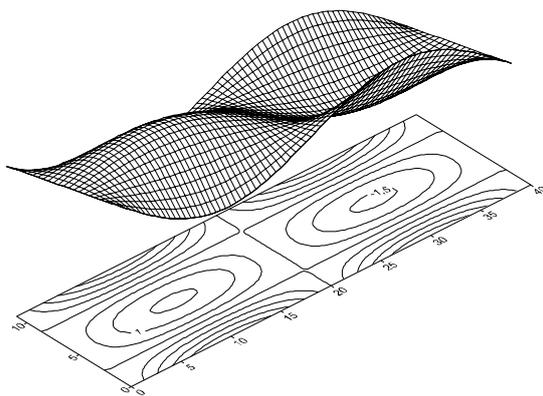
respectivement. Le premier mode de plus basse fréquence $f_{1,1} = 3.356$ Hz est un mode de flexion qui ne présente aucune ligne nodale. Tous les points de la dalle vibrent en phase dans ce mode. Le deuxième en fréquence ($f_{1,2} = 3.553$ Hz) est un mode de torsion qui présente une ligne nodale a $y = 5.5$ m. c'est une caractéristique des solutions qui sont obtenues sous forme de variable séparables d'espace. Notons que les modes de flexion sont de rang $j = 1$. Les autres sont des modes de torsion. Plusieurs modes de torsion apparaissent devant les modes de flexion à cause de la rigidité faible de torsion devant celle de flexion selon x . l'augmentation de l'ordre du mode implique une augmentation dans le nombre des lignes nodales. On constate aussi que les amplitudes max des modes de torsion restent faibles devant les amplitudes max des modes de flexion. La figure 2.13 montre les six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par ANSYS.



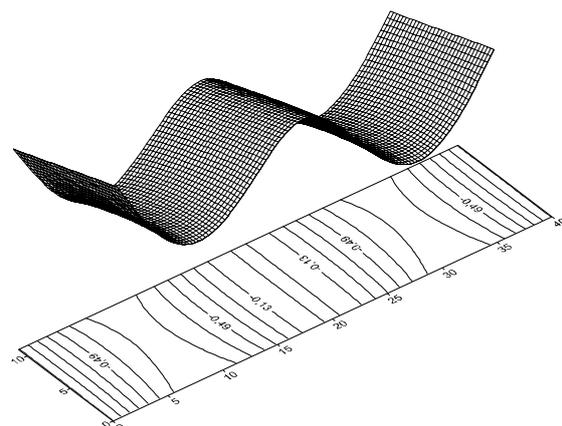
Mode 1,1 : $f_{1,1} = 3.356$ Hz



Mode 1,2 : $f_{1,2} = 3.553$ Hz



Mode 1,3 : $f_{1,3} = 5.022$ Hz



Mode 2,1 : $f_{2,1} = 5.243$ Hz

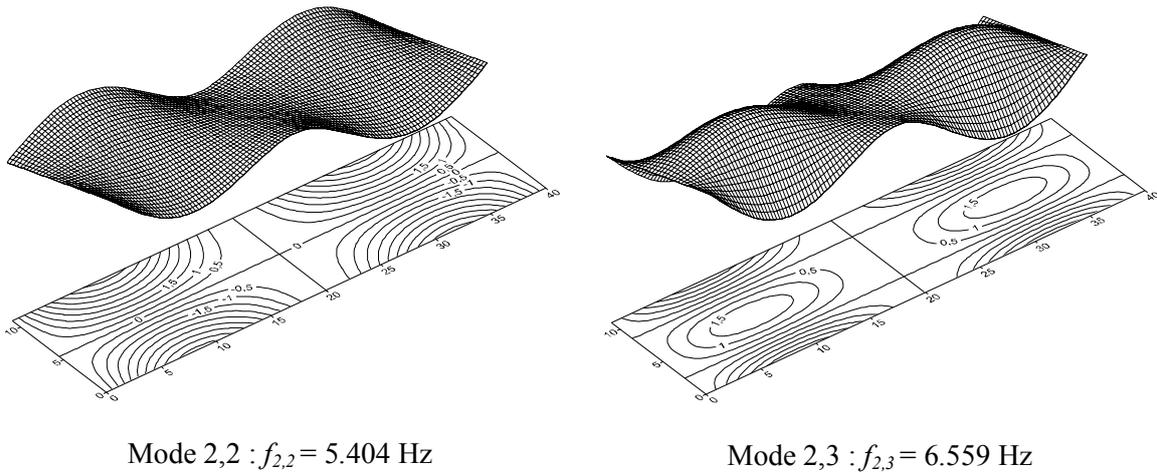
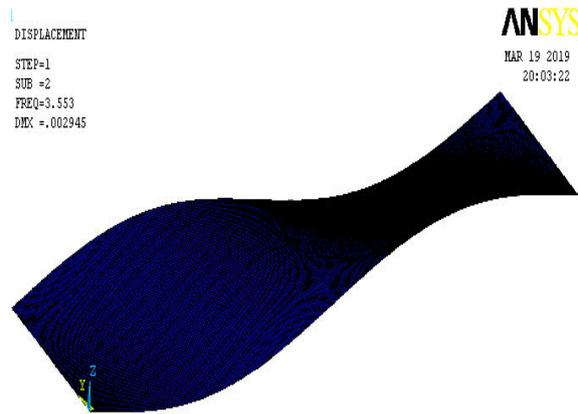


Fig.2.12. Six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par la présente approche



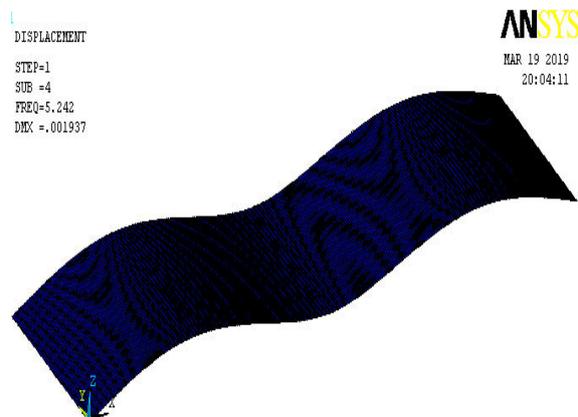
Mode 1,1 : $f_{1,1} = 3.355$ Hz



Mode 1,2 : $f_{1,2} = 3.553$ Hz



Mode 1,3 : $f_{1,3} = 5.024$ Hz



Mode 2,1 : $f_{2,1} = 5.242$ Hz

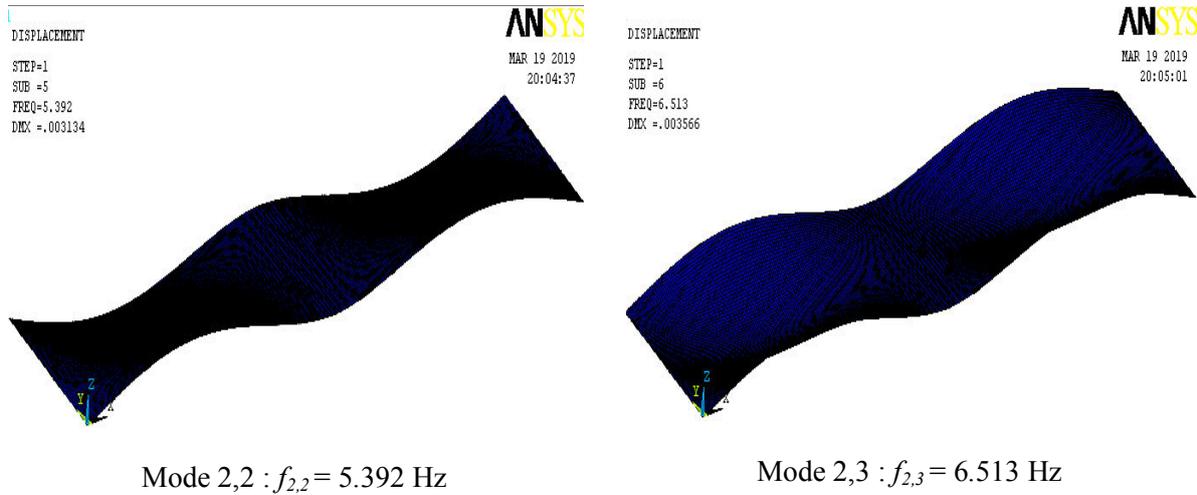


Fig.2.13. Six premiers modes propres de la dalle de roulement calculés par ANSYS

2.3.2 Cas d'une dalle de roulement à trois travées

Considérons le cas d'une dalle de roulement orthotrope à trois travées dont les propriétés équivalentes sont [21] : $l = 78$ m, $l_1 = l_3 = 24$ m, $l_2 = 30$ m, $b = 13.715$ m, $h = 0.21157$ m, $\rho = 3265.295$ kg/m³, $D_x = 2.415 \times 10^9$ Nm, $D_y = 2.1807 \times 10^7$ Nm, $D_{xy} = 1.1424 \times 10^8$ Nm, $\nu_{xy} = 0.3$, $E_x = 3.0576 \times 10^{12}$ N/m², $E_y = 2.7607 \times 10^{10}$ N/m², $G_{xy} = 1.4475 \times 10^{11}$ N/m².

Pour calculer les fréquences propres de la dalle de roulement orthotrope à trois travées, nous avons calculé tout d'abord les valeurs de β_i , racines du déterminant de la matrice du système (2.45), puis en calcul les valeurs de β_{li} en utilisant l'expression (2.69). En calcul par la suite, les racines r_{1ij} ou bien r_{2ij} de l'équation aux fréquences (2.78). Finalement les fréquences propres du pont ω_j sont calculées par les expressions (2.72). Les paramètres de fréquences β_i et β_{li} sont regroupés dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 : Valeurs des paramètres de fréquences β_i et β_{li} pour la dalle à 3 travées

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_i	0.1178	0.1455	0.1614	0.2304	0.2736	0.2857	0.3410	0.4002	0.4128	0.4519
β_{li}	0.1145	0.1368	0.1335	0.2206	0.2679	0.2649	0.3245	0.3981	0.3967	0.4294

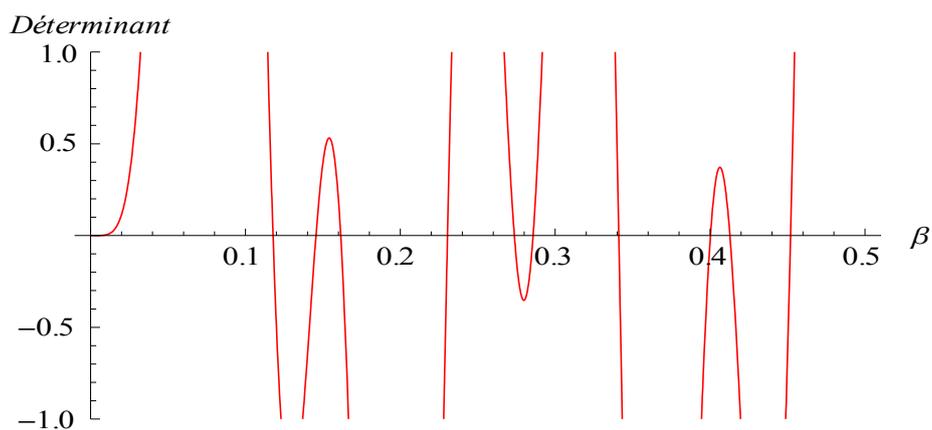
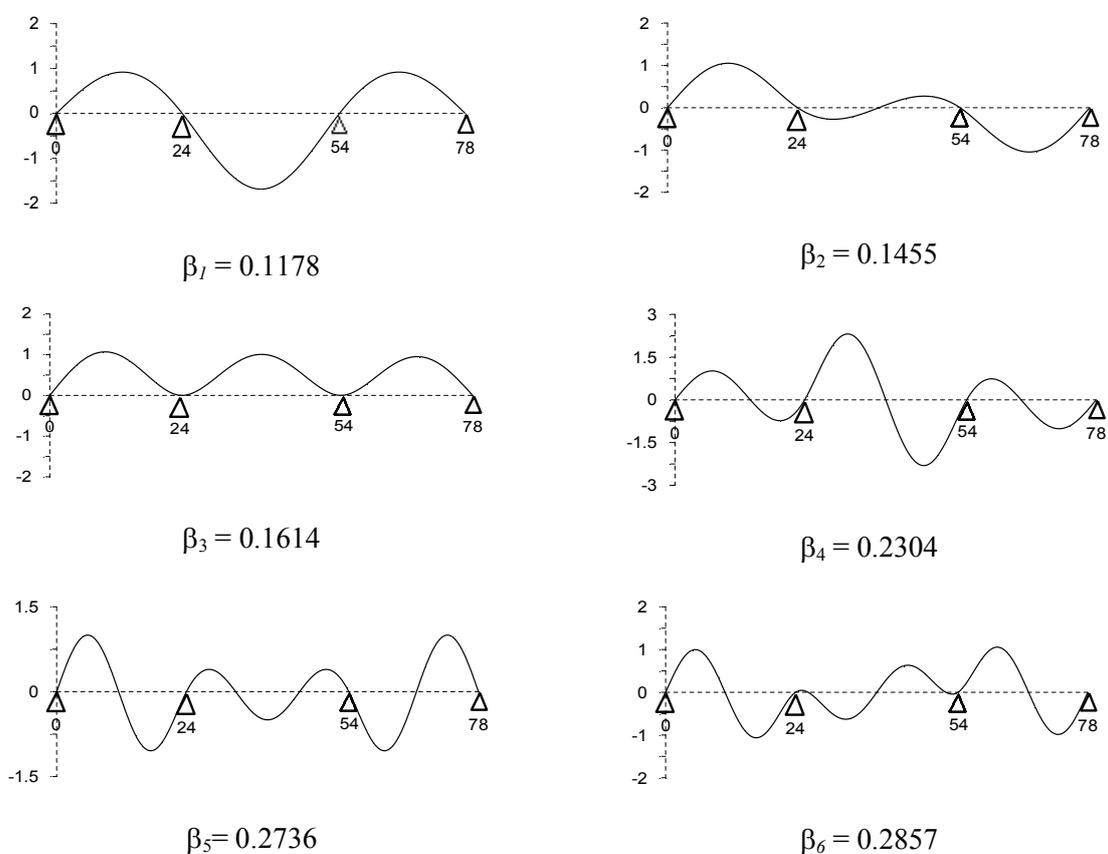


Fig. 2.14. Graphe du polynôme caractéristique de la matrice du système (2.45).

La figure 2.15 montre les huit premiers modes propres de la poutre à trois travées associés à leurs paramètres de fréquences β .



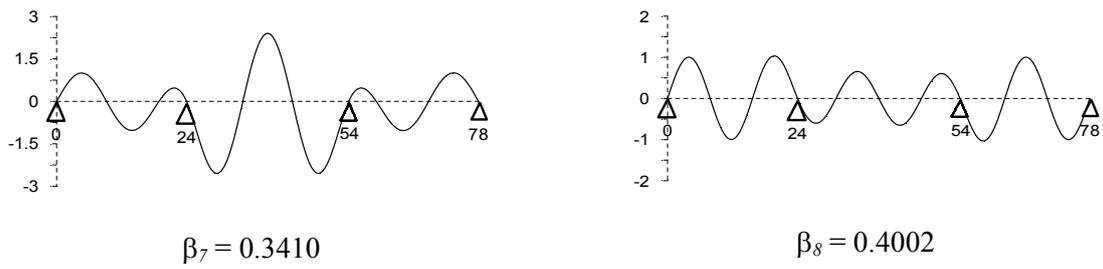


Figure 2.15. Les huit premiers modes propres de la poutre à trois travées

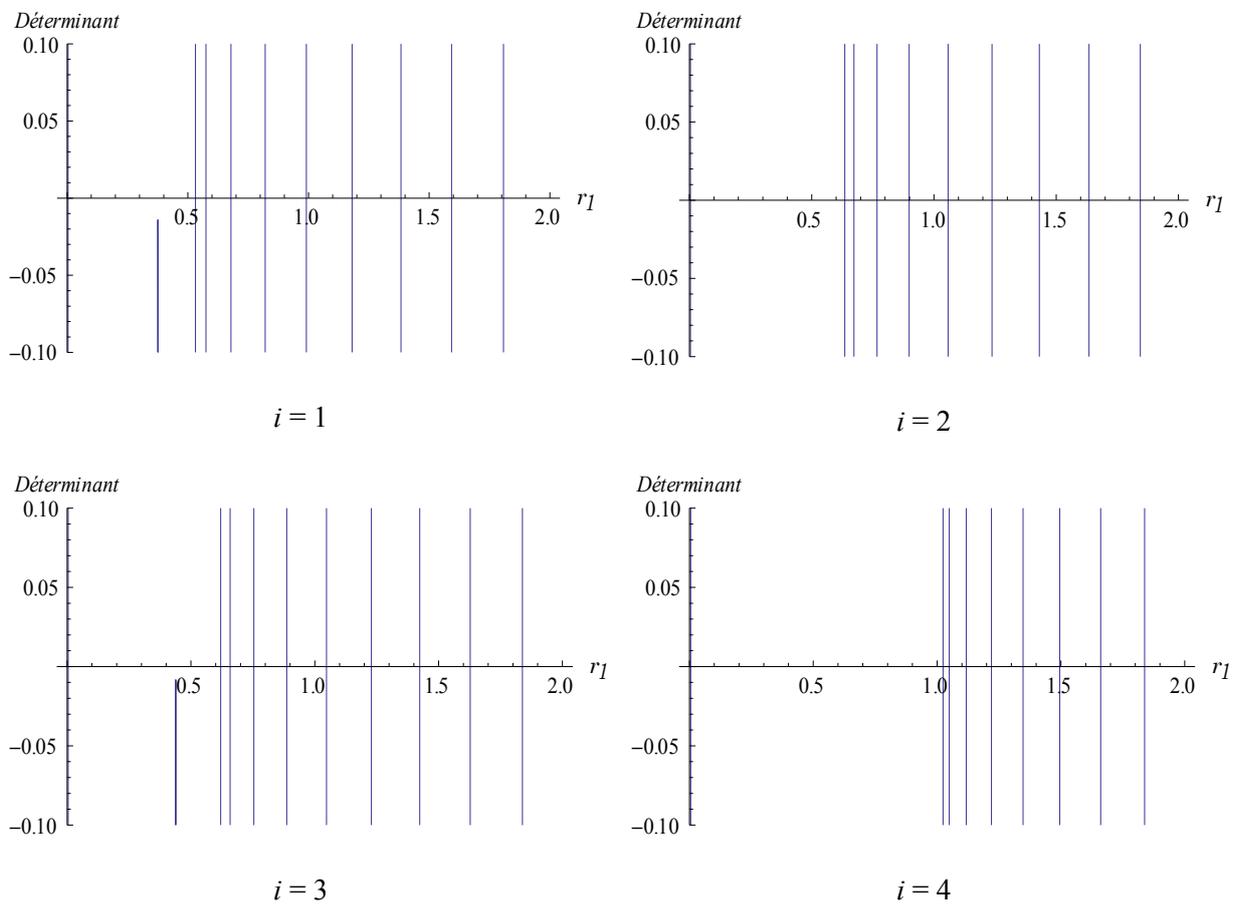


Fig. 2.16. Graphes du polynôme caractéristique de la matrice (2.78) pour différents valeurs de i

Nous comparons les valeurs des dix premières fréquences propres obtenues par la présente approche avec celles calculées par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS. Pour calculer les fréquences et les modes propres par le logiciel d'élément finis

ANSYS, nous avons introduire tout d'abord toutes les propriétés mécaniques et géométriques de dalle de roulement. La dalle de roulement est modélisée par des éléments coques de type 'shell 63' à quatre nœud avec six degrés de liberté par nœud. Nous avons étudié tout d'abord la convergence des fréquences en fonction de la densité du maillage. Nous avons retenu un maillage fin de $468 \times 60 = 28080$ éléments. Le tableau (2.4) résume les différences sur les valeurs des 10 premières fréquences propres. L'analyse de la comparaison des résultats obtenus montre une excellente concordance pour toutes les fréquences.

Tableau 2.4 : Comparaison des fréquences propres de la dalle de roulement

Mode	Ordre des fréquences	Présente approche	ANSYS	Erreur
1	1.1	4.13	4.13	0.00
2	1.2	5.45	5.45	0.00
3	2.1	6.30	6.30	0.00
4	2.2	7.59	7.59	0.00
5	3.1	7.75	7.76	0.01
6	3.2	8.77	8.79	0.02
7	1.3	9.08	9.05	0.03
8	2.3	11.26	11.29	0.03
9	3.3	11.97	12.06	0.09
10	1.4	15.07	15.09	0.02

Les figures 2.17 et 2.18 montrent les huit premiers modes propres de la dalle de roulement étudiée obtenus par la présente approche et par le logiciel ANSYS respectivement. On constate une excellente concordance entre tous les modes.

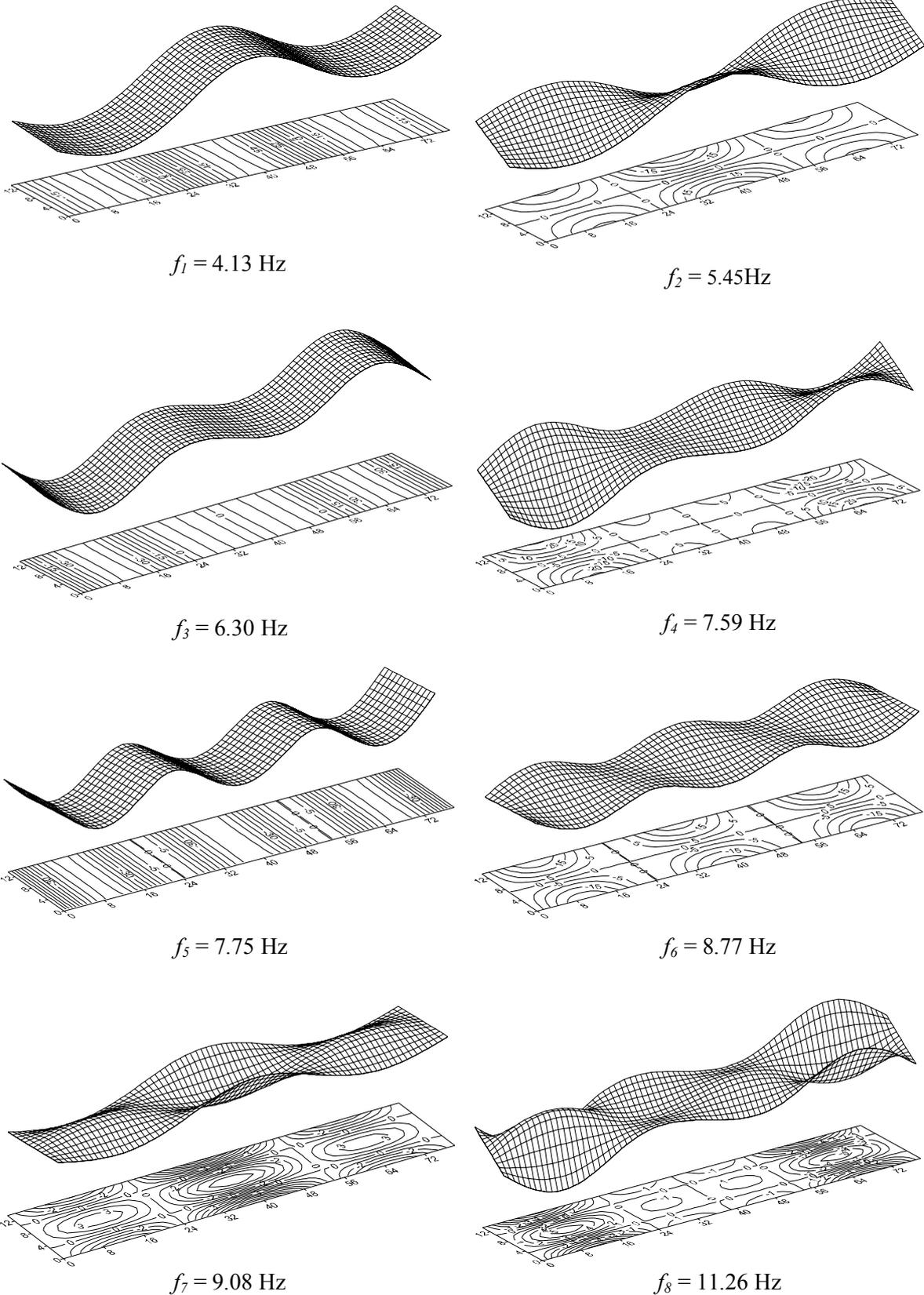
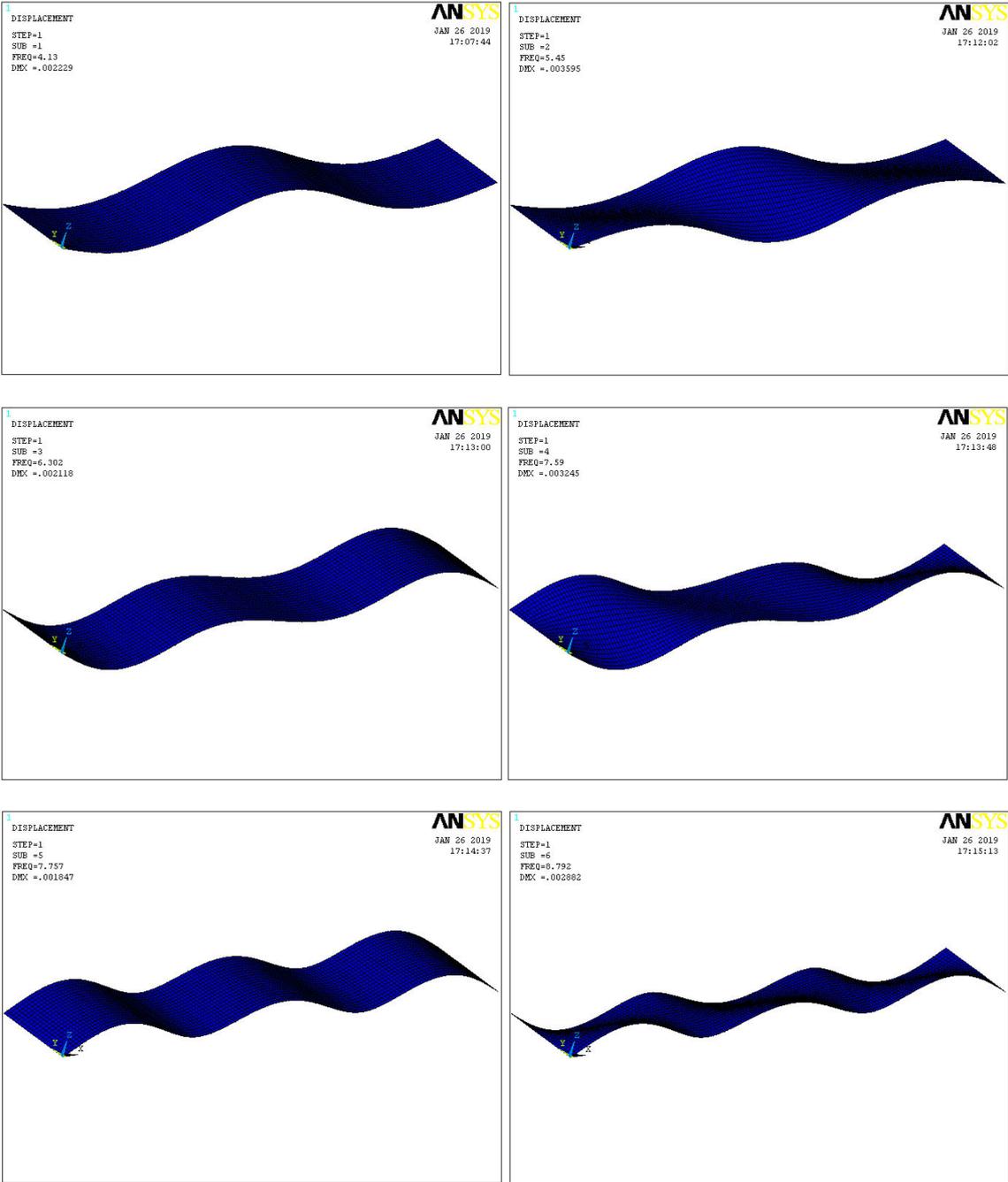


Figure 2.17. Huit premiers modes propres calculés par la présente approche



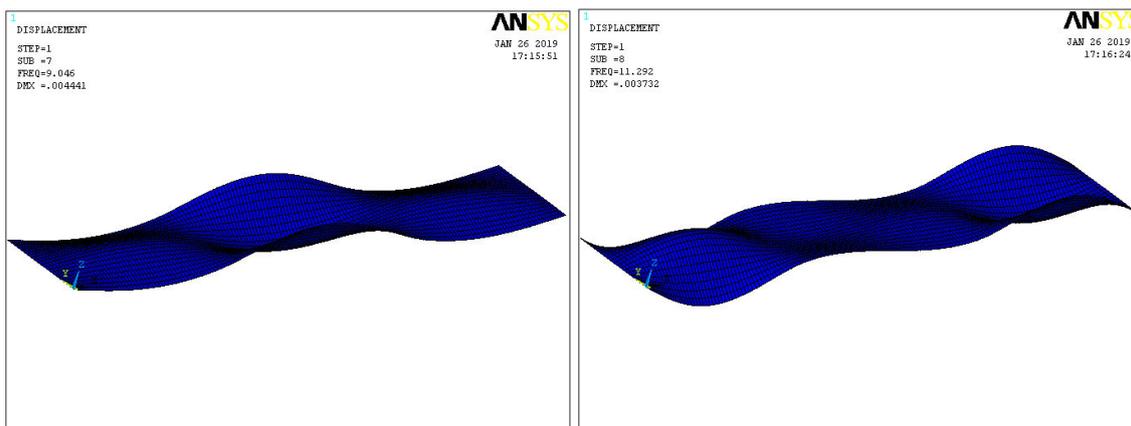


Figure 2.18. Huit premiers modes propres calculés par ANSYS

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode semi-analytique pour calculer les fréquences et les modes propres d'une dalle de roulement orthotrope multi-travées à supports rigides. Ce travail est très intéressant pour le développement du troisième chapitre. Cette méthode est basée sur l'approche modale et tient compte du couplage intermodal, généralement négligé dans la littérature. Les avantages de l'approche proposée sont nombreux notamment sa simplicité de mise en œuvre, sa rapidité et sa précision. Nous avons présenté et comparé les résultats de deux exemples numériques avec ANSYS et la littérature. Une excellente concordance est observée.

CHAPITRE 3

Détermination des fréquences et des modes
propres des dalles de roulement orthotropes
multi-travées à supports élastiques

Chapitre 3

Détermination des fréquences et des modes propres des dalles de roulement orthotropes multi-travées à supports élastiques

3.1 Introduction

Lors de la construction des ponts routiers, un appareil d'appui en élastomère fretté est intercalé entre les poutres raidisseurs et les supports rigides pour apporter plus de souplesse à l'ouvrage (**Fig.3.1**). L'élastomère est généralement en caoutchouc naturel qui présente une bonne résistance à la traction, un excellent allongement à la rupture, un bon comportement aux sollicitations dynamiques, au froid, au vieillissement et une bonne résistance au déchirement. Dans la grande majorité des cas, l'appareil d'appui peut être considéré comme infiniment rigide en direction verticale et infiniment souple en rotation [33]. Il est donc primordial de les prendre en compte dans le modèle dynamique. En théorie, ce matériau peut être modélisé par un modèle dynamique de raideurs et d'amortisseurs. Les rigidités doivent être tenues en compte dans les vibrations libres et les amortisseurs dans les vibrations forcées.

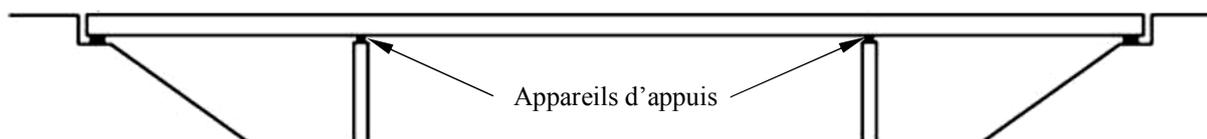


Fig.3.1. Coupe longitudinale d'un ouvrage avec appareils d'appuis

3.2 Fréquences et modes propres des dalles de roulement orthotropes multi-travées à supports élastiques

La dalle de roulement (**Fig.3.2**) est modélisée par une plaque rectangulaire mince d'épaisseur constante h , de matériau orthotrope et de R travées. Les supports sont modélisés par des ressorts élastiques de grandes rigidités k_r , $r = 1, 2, \dots, R+1$. En utilisant la méthode de superposition modale, les vibrations libres harmoniques de la plaque mince sont générées par l'équation différentielle suivante (voir chapitre 2) :

$$D_x \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial y^4} - \omega_{ij}^2 \rho h W_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

Avec $W_{ij}(x, y)$ sont les modes propres de la dalle de roulement décomposés comme suite :

$$W_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y) \quad (3.2)$$

Dans l'expression (3.2), $h_{ij}(y)$ sont les modes propres vérifiant les conditions aux limites aux bords libres de la dalle de roulement, $\varphi_i(x)$ sont modes propres d'une poutre multi-travées à supports élastiques.

Le calcul des fréquences et des modes propres de la dalle de roulement s’effectue de la même manière que dans le chapitre deux. La seule différence réside dans la détermination des paramètres de fréquences β_i et des modes propres $\varphi_i(x)$.

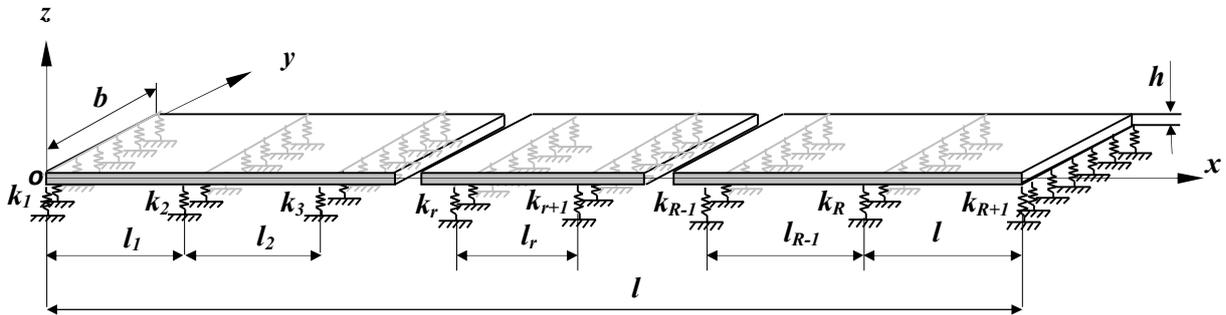


Fig.3.2. Modèle mathématique de la dalle de roulement multi-travées à supports élastiques

3.2.1 Fréquences et modes propres des poutres multi-travées à supports élastiques

Pour déterminer des fréquences et les modes propres d’une poutre multi-travées à supports élastiques (Fig.3.3), il faut déterminer les modes propres pour chaque travée. L’expression du mode i dans la travée r est donnée par :

$$\varphi_{ri}(x_r) = A_{ri} \sin \beta_i x_r + B_{ri} \cos \beta_i x_r + C_{ri} sh \beta_i x_r + D_{ri} ch \beta_i x_r ; r = 1, 2, \dots, R \quad (3.3)$$

A_{ri} , B_{ri} , C_{ri} et D_{ri} sont des constantes à déterminer par l’application des conditions aux limites et de continuités, β_i est un paramètre de fréquence du mode i de la poutre multi-travées.

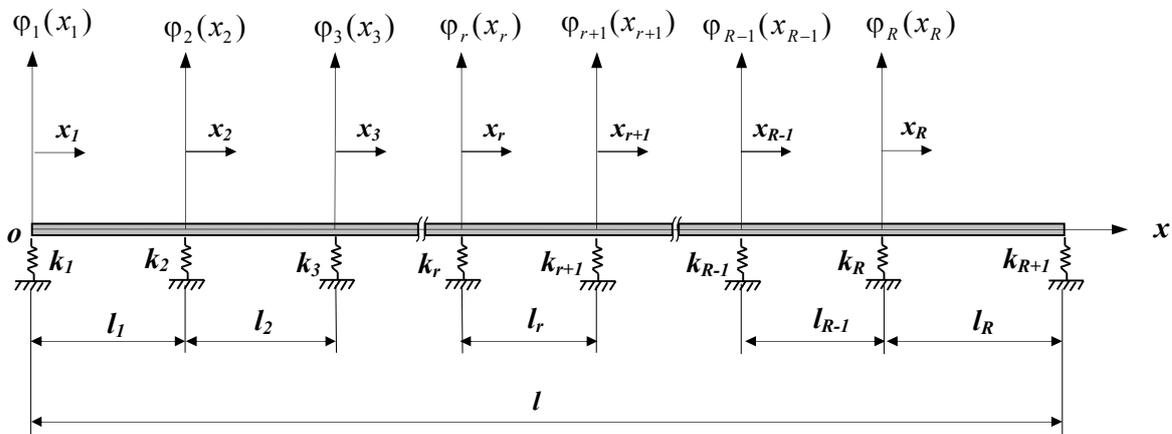


Fig.3.3. Modèle mathématique de la poutre multi-travées à support élastiques

3.2.1.1 Cas d’une poutre à une seule travée

La figure 3.4, montre une poutre à une seule travée à supports élastiques. Le mode propre de la poutre s’écrit (on omet l’indice i) :

$$\varphi_1(x_1) = A_1 \sin \beta x_1 + B_1 \cos \beta x_1 + C_1 sh \beta x_1 + D_1 ch \beta x_1 \quad (3.4)$$

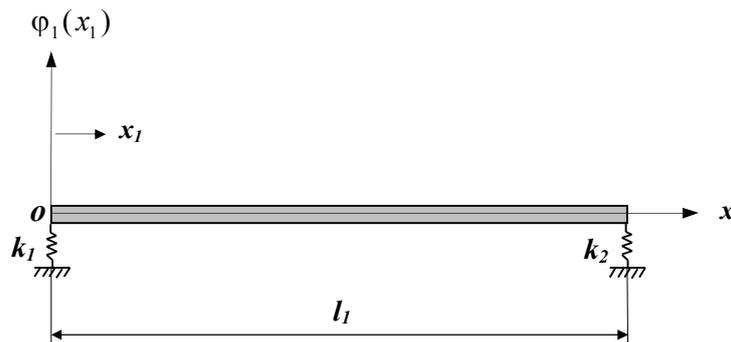


Fig.3.4. Poutre à une seule travée à supports élastiques

Aux extrémités de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_1 \varphi_1(0) \quad (3.5)$$

$$-E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (3.6)$$

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=l_1} = k_2 \varphi_1(l_1) \quad (3.7)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = 0 \quad (3.8)$$

Reportons les quatre conditions aux limites (3.5 à 3.8) dans l'expression (3.4), après regroupement on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} E_x I \beta^3 & -k_1 & -E_x I \beta^3 & -k_1 \\ 0 & E_x I \beta^2 & 0 & -E_x I \beta^2 \\ E_x I \beta^3 \cos \beta l_1 + k_2 \sin \beta l_1 & -E_x I \beta^3 \sin \beta l_1 + k_2 \cos \beta l_1 & -E_x I \beta^3 ch \beta l_1 + k_2 sh \beta l_1 & -E_x I \beta^3 sh \beta l_1 + k_2 ch \beta l_1 \\ E_x I \beta^2 \sin \beta l_1 & E_x I \beta^2 \cos \beta l_1 & -E_x I \beta^2 sh \beta l_1 & -E_x I \beta^2 ch \beta l_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Pour une solution non-triviale du système (3.9), il faut que le déterminant de la matrice soit égal à zéro ce qui permet d'obtenir l'équation aux fréquences. Les racines de cette équation sont les paramètres de fréquences β_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

3.2.1.2 Cas d'une poutre à deux travées

Considérons maintenant le cas d'une poutre à deux travées à supports élastiques (Fig.3.5). Le mode propre i de la poutre dans la travée r s'écrit (on omet l'indice i) :

$$\varphi_r(x_r) = A_r \sin \beta x_r + B_r \cos \beta x_r + C_r sh \beta x_r + D_r ch \beta x_r \quad r = 1, 2 \quad (3.10)$$

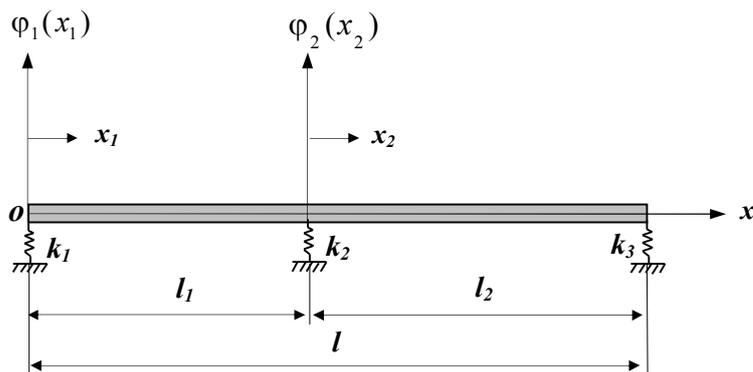


Fig. 3.5. Poutre à deux travées à supports élastiques

A l'extrémité gauche de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_1 \varphi_1 \Big|_{x_1=0} \quad (3.11)$$

$$-E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (3.12)$$

Au niveau de l'appui intermédiaire, l'effort tranchant résultant des deux travées doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support intermédiaire :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=l_1} = k_2 \varphi_1 \Big|_{x_1=l_1} + E_x I \frac{d^3 \varphi_2}{dx_2^3} \Big|_{x_2=0} \quad (3.13)$$

Pour assurer la continuité, le moment fléchissant, le déplacement et la pente de la travée gauche au niveau de l'appui intermédiaire doivent être égaux à celui de la travée droite :

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = E_x I \frac{d^2 \varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (3.14)$$

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=l_1} = \varphi_2 \Big|_{x_2=0} \quad (3.15)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} \quad (3.16)$$

A l'extrémité droite de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_2}{dx_2^3} \Big|_{x_2=l_2} = -k_3 \varphi_2 \Big|_{x_2=l_2} \quad (3.17)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=l_2} = 0 \quad (3.18)$$

Remplaçons les conditions (3.11) jusqu'à (3.18) dans l'expression (3.10), après simplification et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[F]\{A\} = \{0\} \quad (3.19)$$

Avec les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'**annexe 2**.

3.2.1.3 Cas d'une poutre à trois travées

Considérons maintenant le cas d'une poutre à trois travées à supports élastiques (**Fig.3.6**). Le mode propre i de la poutre dans la travée r s'écrit (on omet l'indice i) :

$$\varphi_r(x_r) = A_r \sin \beta x_r + B_r \cos \beta x_r + C_r sh \beta x_r + D_r ch \beta x_r \quad r = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

A l'extrémité gauche de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_1 \varphi_1 \Big|_{x_1=0} \quad (3.21)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (3.22)$$

Les conditions de continuité au niveau des deux appuis intermédiaires sont illustrées comme suit :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=l_1} = k_2 \varphi_1 \Big|_{x_1=l_1} + E_x I \frac{d^3 \varphi_2}{dx_2^3} \Big|_{x_2=0} \quad (3.23)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = E_x I \frac{d^2 \varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (3.24)$$

$$\varphi_1 \Big|_{x_1=l_1} = \varphi_2 \Big|_{x_2=0} \quad (3.25)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} \quad (3.26)$$

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_2}{dx_2^3} \Big|_{x_2=l_2} = -k_3 \varphi_2 \Big|_{x_2=l_2} + E_x I \frac{d^3 \varphi_3}{dx_3^3} \Big|_{x_3=0} \quad (3.27)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=l_2} = E_x I \frac{d^2 \varphi_3}{dx_3^2} \Big|_{x_3=0} \quad (3.28)$$

$$\varphi_2 \Big|_{x_2=l_2} = \varphi_3 \Big|_{x_3=0} \quad (3.29)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx_2} \Big|_{x_2=l_2} = \frac{d\varphi_3}{dx_3} \Big|_{x_3=0} \quad (3.30)$$

A l'extrémité droite de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_3}{dx_3^3} \Big|_{x_3=l_3} = k_4 \varphi_3 \Big|_{x_3=l_3} \quad (3.31)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_3}{dx_3^2} \Big|_{x_3=l_3} = 0 \quad (3.32)$$

Remplaçons les conditions (3.21) jusqu'à (3.32) dans l'expression (3.20), après simplification et regroupement, on obtient le système (3.19). Les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'annexe 2.

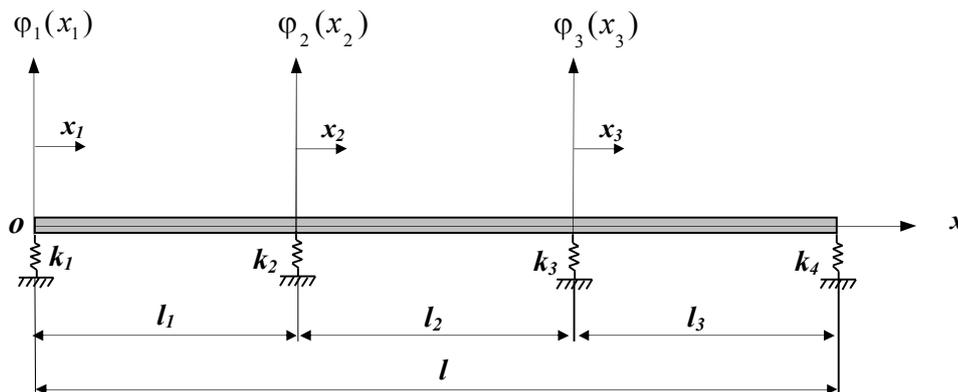


Fig.3.6. Poutre à trois travées à supports élastiques

3.2.1.3 Généralisation au cas d'une poutre multi-travées

La figure 3.3 représente le cas général d'une poutre à R travées à supports élastiques. L'expression du mode i dans la travée r est donnée par (3.3). A l'extrémité gauche de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = - k_1 \varphi_1 \Big|_{x_1=0} \quad (3.33)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (3.34)$$

Les conditions de continuité au niveau des appuis intermédiaires sont illustrées comme suit :

$$E_x I \frac{d^3 \varphi_{r-1}(x_{r-1})}{dx_{r-1}^3} \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = (-1)^r k_r \varphi_{r-1}(x_{r-1}) \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} + EI \frac{d^3 \varphi_r(x_r)}{dx_r^3} \Big|_{x_r=0} \quad (3.35)$$

$$E_x I \frac{d^2 \varphi_{r-1}(x_{r-1})}{dx_{r-1}^2} \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = E_x I \frac{d^2 \varphi_r(x_r)}{dx_r^2} \Big|_{x_r=0} \quad (3.36)$$

$$\varphi_{r-1}(x_{r-1}) \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = \varphi_r(x_r) \Big|_{x_r=0} \quad (3.37)$$

$$\frac{d\varphi_{r-1}(x_{r-1})}{dx_{r-1}} \Big|_{x_{r-1}=l_{r-1}} = \frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r} \Big|_{x_r=0} \quad (3.38)$$

A l'extrémité droite de la poutre, l'effort tranchant doit être égale à la force de rappel dans le ressort qui modélise le support alors que le moment fléchissant doit être nul :

$$E_x I \left. \frac{d^3 \varphi_R(x_R)}{dx_R^3} \right|_{x_R=l_R} = (-1)^{R+1} k_{R+1} \varphi_R(x_R) \Big|_{x_R=l_R} \quad (3.39)$$

$$E_x I \left. \frac{d^2 \varphi_R(x_R)}{dx_R^2} \right|_{x_R=l_R} = 0 \quad (3.40)$$

Remplaçons les conditions (3.33) jusqu'à (3.40) dans l'expression (3.3), après simplification et regroupement, on obtient le système (3.19). Les éléments de la matrice $[F]$ et du vecteur $\{A\}$ sont présentés dans l'annexe 2.

3.3. Exemples de validation numérique

3.3.1. Cas d'une poutre à une seule travée

Concédons une poutre d'Euler Bernoulli à deux supports élastiques (Fig.3.4), dont les caractéristiques sont [24]:

$$EI = 2.5 \times 10^{10} \text{ Nm}^2 ; \rho A = 5 \times 10^3 \text{ kg/m} ; l_1 = 30 \text{ m}$$

La méthode d'obtention des paramètres de fréquences β_i et par conséquent les fréquences propres ($\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{EI/\rho A}$), proposée dans ce chapitre est celle basée sur la recherche d'une solution non triviale du déterminant de la matrice du système (3.9), pour différents conditions aux limites. C'est une équation algébrique non linéaire qui peut être résolue par le logiciel MATHEMATICA présentée sur la figure 3.7, pour des conditions aux limites libre-libre ($k_1 = k_2 = 0 \text{ N/m}$).

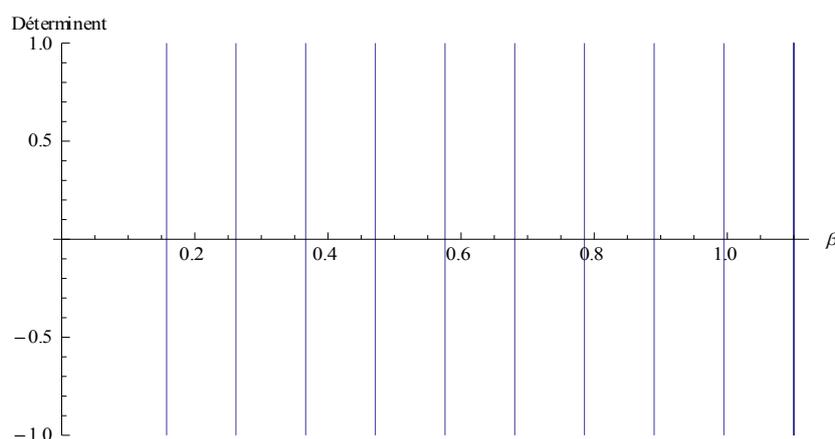


Fig.3.7. Graphe de l'équation aux fréquences du déterminant de la matrice du système (3.9)

Le tableau 3.1 présente une comparaison entre les dix premiers paramètres de fréquences calculés par la présente approche et celle présentés dans la référence [32] pour différentes combinaisons de conditions aux limites. Notons que $\beta_i l_1$ dans notre formulation correspond à β_i de la formulation présentée dans la référence [32]. Une excellente concordance est observée.

Tableau 3.1: Paramètres de fréquences $\left(\beta_i l_1 = \sqrt{\omega_i l_1^2 \sqrt{EI/\rho A}} \right)$

	Ordre de paramètres de fréquences									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simple-Simple	3.142	6.283	9.425	12.566	15.708	18.850	21.991	25.133	28.274	31.416
	3.142	6.283	9.425	12.566	15.708	18.850	21.991	25.133	28.274	31.416
Libre-Libre	0	4.730	7.853	10.996	14.137	17.279	20.420	23.562	26.703	29.845
	0	4.730	7.853	10.996	14.137	17.279	20.420	23.562	26.703	29.845
Simple-Libre	0	3.927	7.069	10.210	13.352	16.493	19.635	22.776	25.918	29.060
	0	3.927	7.069	10.210	13.352	16.493	19.635	22.777	25.918	29.060

Remarque : Les valeurs en **gras** sont celles de la référence [32], Simple-Simple : $k_1=k_2=10^{20}$ N/m, Libre-Libre : $k_1=k_2=0$ N/m.

La figure 3.8 montre l'influence de la rigidité des supports sur les quatre premiers modes propres de la poutre. Pour une rigidité nulle des supports ($k_1=k_2=0$ N/m), on obtient exactement les modes d'une poutre libre-libre. Pour de grande rigidité des supports, les modes propres passent directement vers les modes d'une poutre en appuis simples.

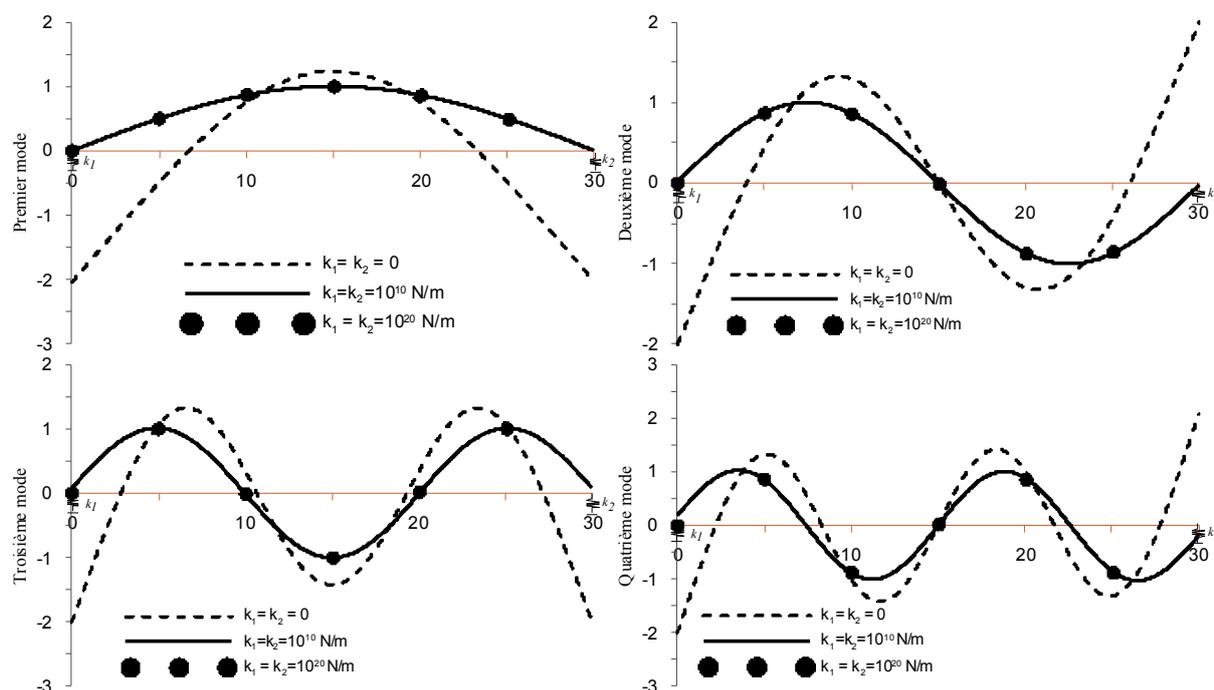


Figure 3.8. Influence de la rigidité des supports sur les quatre premiers modes propres de la poutre à une seule travée

3.3.2. Cas d'une poutre à deux travées

Concédons maintenant une poutre d'Euler-Bernoulli à deux travées identiques à supports élastiques (Fig.3.5) dont les caractéristiques sont issues de la référence [33]. La poutre est de longueur $l = 5$ m; de largeur $b = 0.05$ m; d'épaisseur $h = 0.05$ m; de masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³ ; de rapport de Poisson $\nu = 0.3$ et de module d' Young $E = 2.06 \times 10^{11}$ N/m². La figure 3.9 représente le graphe du déterminant de la matrice du système (3.19) pour $k_1 = k_3 = 10^{20}$ N/m et $k_2 = 0$ N/m.

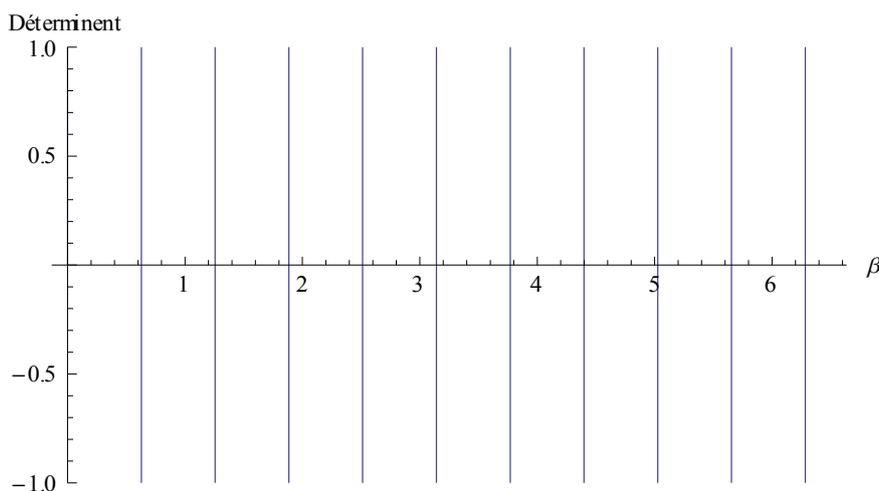


Fig.3.9. Graphe de l'équation aux fréquences du déterminant de la matrice du système (3.19)

Le tableau 3.2 présente une comparaison entre les quatre premières fréquences propres de la poutre, calculées par la présente méthode avec celles présentées dans la référence [35]. Lin et Chang [35] ont utilisés la théorie de la poutre de Timoshenko pour calculer les fréquences et les modes propres d'une poutre continu multi-travées, simplement supportée aux extrémités avec des supports intermédiaires flexibles, en utilisant une méthode hybride analytique/numérique. La comparaison montre une légère différence entre les fréquences cela peut être due aux différences entre la théorie et la méthode (Les valeurs en **gras** sont celles de la référence [35]).

Tableau 3.2 : Fréquences propres de la poutre $f_i = \beta_i^2 \sqrt{EI/\rho A} / 2\pi$ en [Hz].

Ordre des fréquences	$k_2 = 0$ N/m	$k_2 = 10^7$ N/m	$k_2 = 10^8$ N/m	$k_2 = 10^{20}$ N/m
f_1	4.661 -----	18.643 18.738	18.643 18.738	18.643 18.614
f_2	18.642 -----	27.884 28.004	29.000 29.143	29.123 29.122
f_3	41.946 -----	74.570 74.802	74.570 74.802	74.570 74.566
f_4	74.570 -----	80.251 80.317	93.052 93.306	94.377 94.362

La figure 3.10 présente les quatre premiers modes propre de la poutre pour différentes valeurs de rigidité du support intermédiaire k_2 . Les supports extrêmes sont supposés infiniment rigides ($k_1 = k_3 = 10^{20}$ N/m). Pour $k_2 = 0$ N/m, les fréquences et les modes propres sont les mêmes d'une poutre sur deux appuis simples. Lorsque la rigidité k_2 est plus grande, la poutre peut être regardée comme une poutre avec support intermédiaire rigide.

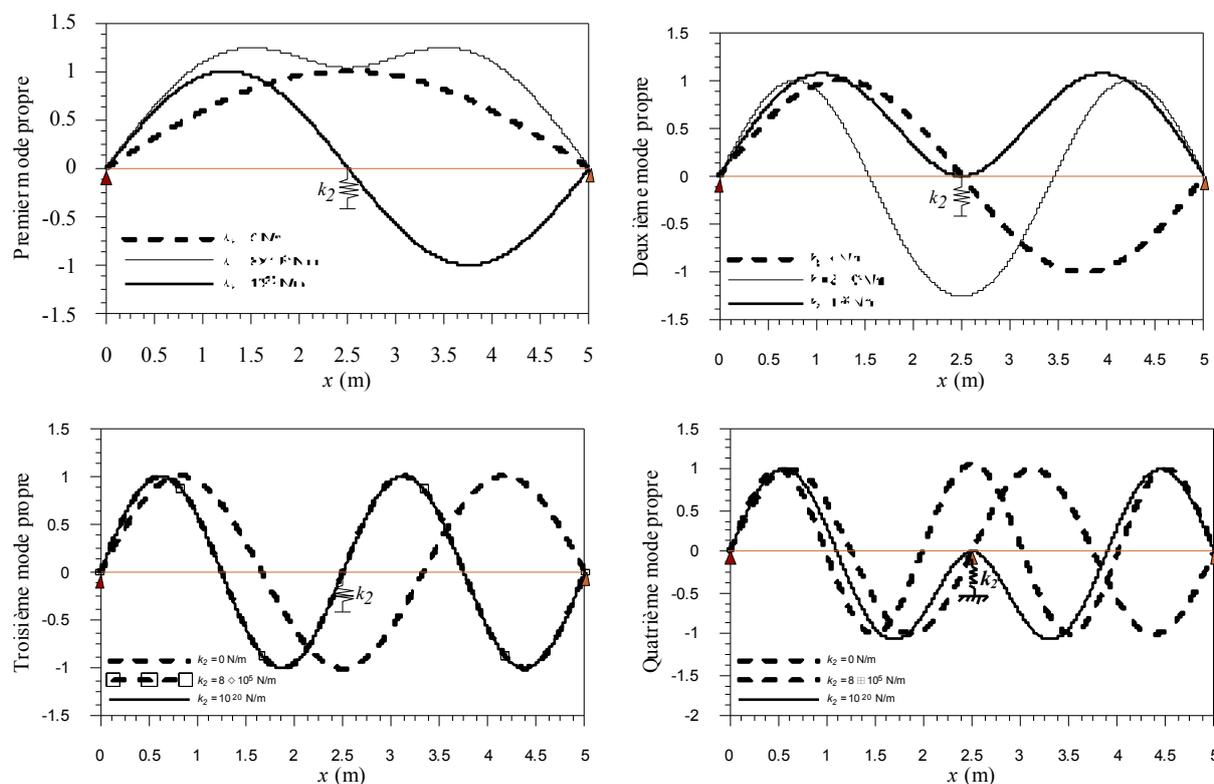


Figure 3.10. Influence de la rigidité du support intermédiaire sur les quatre premiers modes propres de la poutre à deux travées

3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le calcul des fréquences et des modes propres d'une dalle de roulement multi-travées reposant sur des appareils d'appuis. Ces derniers sont modélisés par des ressorts linéaires élastiques. Nous avons utilisé la même approche développée dans le deuxième chapitre. Ce chapitre est intéressant pour étudier les vibrations d'une dalle de roulement d'un pont de la chaussée multi-travées à supports élastiques lors du passage d'un camion. Deux exemples numériques sont présentés et comparés. Une bonne concordance est observée.

CHAPITRE 4

Développement de modèles analytiques de
véhicules tridimensionnels à essieux tandem et
tridem

Chapitre 4

Développement de modèles analytiques de véhicules tridimensionnels à essieux tandem et tridem

4.1 Introduction

Ce chapitre traite de l'obtention des équations de mouvement de modèles de camions tridimensionnels simples et semi-remorques, à essieux doubles (tandem) et triples (tridem) à l'arrière. Ces modèles de véhicules sont utilisés par la suite pour étudier le phénomène d'interaction dynamique entre la dalle de roulement du pont et le camion qui la traverse.

Selon la configuration des essieux tandem à l'arrière, deux modèles de camions tridimensionnels sont développés. Le premier modèle possède neuf degrés de libertés, soit le sauttillement de six groupes de roues ainsi que le bondissement, le tangage et le roulis du bloc rigide du camion. Le deuxième modèle possède onze degrés de liberté, soit le sauttillement de six groupes de roues, la rotation des deux barres pivotantes ainsi que le bondissement, le tangage et le roulis du bloc rigide du camion.

Selon la configuration des essieux tandem et tridem à l'arrière, deux modèles tridimensionnels très réalistes de camions semi-remorque sont proposés et développés. Le premier modèle possède dix-huit degrés de liberté, soit le bondissement et le roulis de six essieux avec roues de l'avant et de l'arrière ainsi que le bondissement, le tangage et le roulis des blocs rigides du véhicule tracteur et de la remorque. Le deuxième modèle possède vingt degrés de liberté, soit le bondissement et les roulis de six essieux avec roues de l'avant et de l'arrière, la rotation des deux barres pivotantes ainsi que le bondissement, le tangage et le roulis des blocs rigides du véhicule tracteur et de la semi-remorque.

Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, les équations discrètes de différents modèles sont obtenues en utilisant la seconde loi de Newton à tout les corps formant les modèles, soit aux roues, aux essieux et aux blocs rigides représentant le camion, le véhicule tracteur et la semi-remorque, car elle est simple est facilement applicable aux cas considérés.

4.2 Hypothèses simplificatrices de modélisation

Pour les quatre modèles tridimensionnels développés, les hypothèses suivantes sont émises pour établir les équations du mouvement.

- Le comportement élastique des différents raideurs et amortisseurs est supposé linéaire, car dans le cas contraire, le problème devient très compliqué ;
- Les cadres des différentes parties des modèles sont supposés infiniment rigides ;

- Chaque attelage en parallèle ressort-amortisseur de la suspension est lié en même point soit au bloc rigide ou à l'essieu. Les déplacements de ces points ne peuvent être que verticalement ;
- Les déplacements suivants x et y , causés par les rotations, sont négligés ;
- Les rotations (tangage et roulis) sont considérées faibles ;
- Pour les deux premiers modèles, les suspensions sont considérées indépendantes, pour les modèles semi-remorque, sont liées par les essieux ;
- Les pneus restent en contact permanent avec la chaussée ;
- Le contact entre le pneu et la chaussée est supposé ponctuel. Le déplacement vertical au point de contact noté k , de coordonnées (x_k, y_k) s'écrit :

$$w_k = w(x_k, y_k, t) + r(x_k, y_k) \quad (4.1)$$

avec $w(x_k, y_k)$ et $r(x_k, y_k)$ sont respectivement le déplacement vertical de la dalle de roulement et la rugosité du profil de la chaussée au point de contact k .

4.3 Systèmes de suspensions et de liaisons à essieux tandem

Les modèles de camions à essieux tandem et tridem représentent fidèlement la distribution des forces d'interaction sur la dalle de roulement. Il existe plusieurs configurations d'essieux tandem pour équiper les camions simples ou semi-remorque. Les trois variantes avec des suspensions à lames d'acier les plus utilisés pour équiper les camions sont présentées sur la figure (4.1).

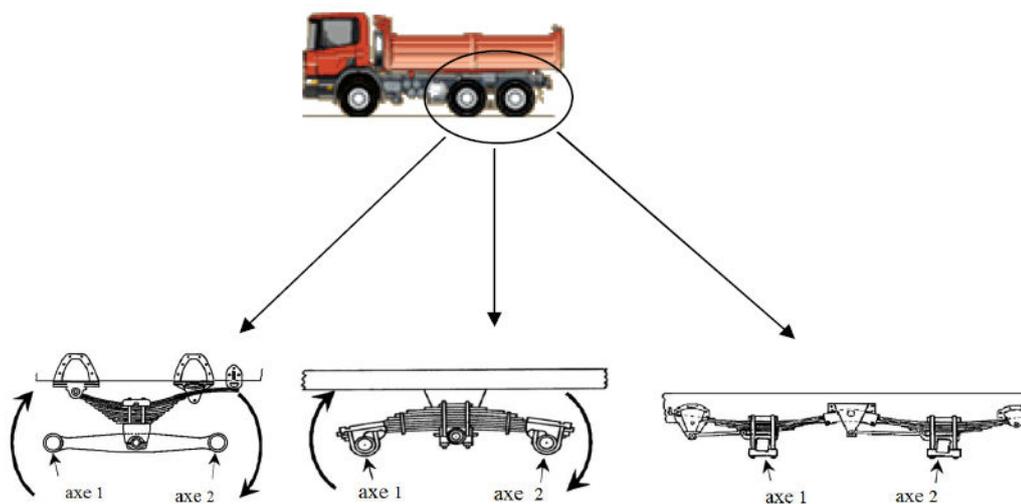


Fig. 4.1. Quelques systèmes de suspension des essieux tandem.

Pour le premier type d'essieux tandem (Fig.4.2), le pivot se déplace essentiellement verticalement par rapport au châssis. Ce mouvement dépend de la flexibilité de la suspension. Dans le modèle mathématique, chaque groupe de lames d'acier est modélisé par un ressort

k_{s2} et un amortisseur visqueux c_{s2} qui représente la suspension et est lié en un même point, d'un coté avec le bloc rigide et de l'autre coté avec la barre pivotante (walking beam). Chaque essieu est divisé en deux parties. Chaque partie est représentée par une masse ponctuelle m_i , y compris la masse de la roue. Les masses m_1 et m_2 sont attachées chacune des extrémités de la barre pivotante. Les pneus des roues de chaque essieu sont modélisés par un montage en parallèle de ressort k_{pi} et d'amortisseur visqueux c_{pi} .

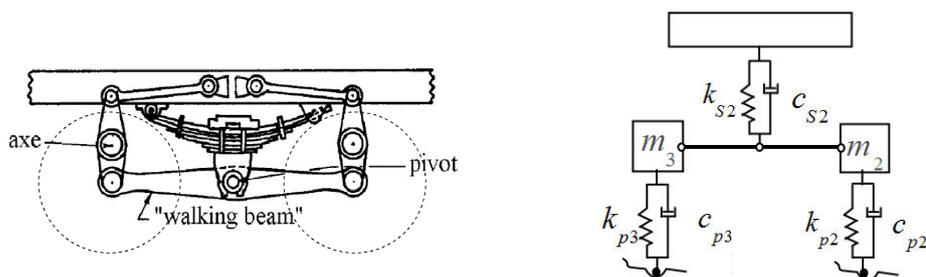


Fig.4.2. Premier type d'essieux tandem et son modèle mathématique.

Dans le deuxième type d'essieux tandem (Fig.4.3), la suspension et la liaison constituent un seul élément aux extrémités duquel sont fixés les axes. Le mouvement de chaque essieu par rapport au châssis est un mouvement de rotation autour du pivot et un déplacement vertical dû à la flexibilité de la suspension. La rotation de l'ensemble est représenté par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse m_L attachée au milieu du châssis. Chaque pneu est présenté par un ressort et amortisseur visqueux en parallèles.

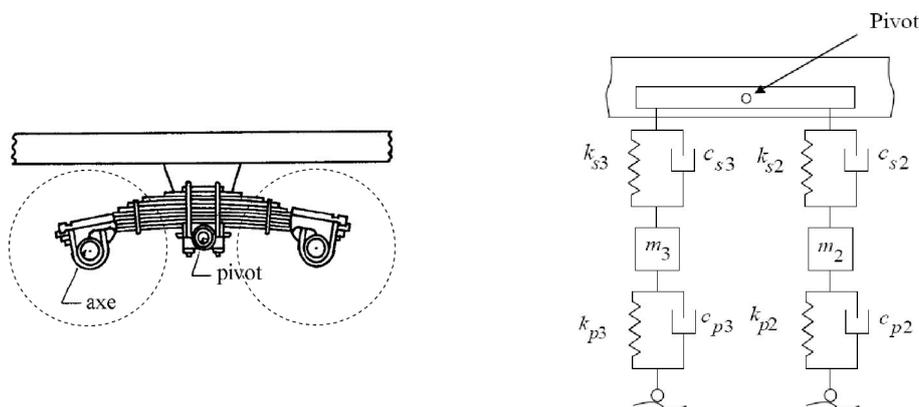


Fig.4.3. Deuxième type d'essieux tandem et son modèle mathématique.

Dans ce dernier type d'essieu tandem (Fig.4.4), chaque essieu est fixé directement dans la suspension à lames d'acier. Chaque suspension est attachée aux extrémités du corps rigide dont la liaison intermédiaire est pivotante. Le mouvement de la suspension est essentiellement vertical. Chaque pneu est modélisé par un ressort et un amortisseur visqueux en parallèle.

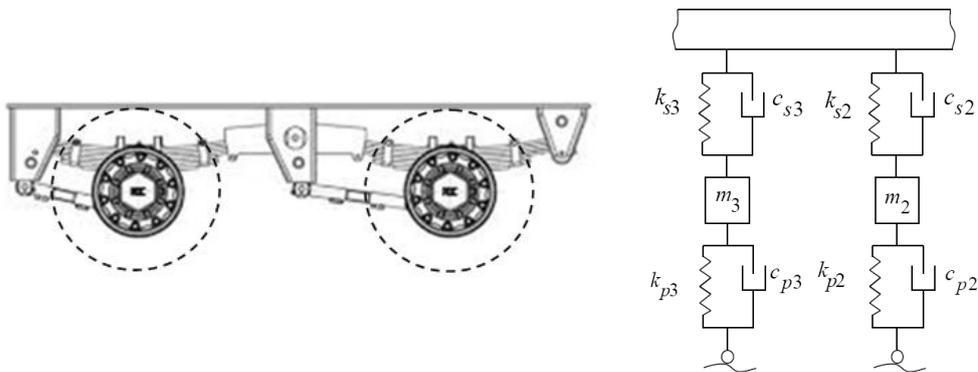


Fig.4.4. Troisième type d'essieu tandem et son modèle mathématique.

4.4 Systèmes de suspensions et de liaisons des essieux tridem

Ce système de suspension à essieux tridem est utilisé pour équiper les camions semi-remorque à l'arrière. Un seul modèle est retenu. Il est similaire au troisième type d'essieux tandem en ajoutant seulement un troisième essieu avec une suspension à lame d'acier (Fig.4.5).

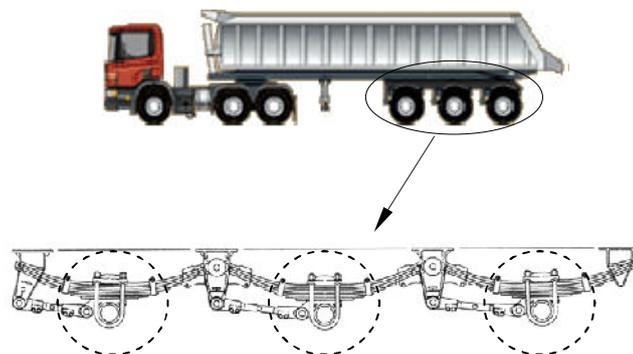


Fig.4.5. Système de suspension à essieu tridem

4.5 Modèles de camion à essieux tandem

4.5.1 Modèle à neuf degrés de liberté

4.5.1.1 Schéma du modèle

Le camion est modélisé par un modèle dynamique masses-ressorts-amortisseurs à neuf degrés de liberté à trois axes (Fig.4.6). Le bloc rigide possède trois degrés soit le

brandissement z_v , le tangage θ_v et le roulis α_v . Le sautellement des masses des roues avec essieux de l'avant et de l'arrière de masses m_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, est présenté par six degrés de liberté : z_1, z_2, \dots, z_6 . Dans la figure 4.6, $m_v, I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$ sont respectivement la masse et les moments d'inertie du bloc rigide, k_{pk}, c_{pk} , $k = 1, 2, \dots, 6$, sont respectivement les rigidités et les amortissements des pneus, k_{si}, c_{si} , $i = 1, 2, \dots, 4$ sont respectivement les rigidités et les amortissements des suspensions avant et arrière.

Le champ de déplacement de ce modèle de camion est défini à chaque instant t par neuf variables indépendantes :

$$\{z_v\} = \{z_v, \theta_v, \alpha_v, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\} \quad (4.2)$$

4.5.1.2 Schéma d'équilibre dynamique

La figure 4.7, représente le bilan des forces et des moments agissant sur le modèle de camion. Les forces d'interaction entre la chaussée et le camion sont les forces dans les pneus:

$$F_{pk}^{int} = k_{pk} [z_k - (w_k + r_k)] + c_{pk} [\dot{z}_k - (\dot{w}_k + \dot{r}_k)] \quad ; \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.3)$$

Avec :

$$\dot{w}_k + \dot{r}_k = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{x_k, y_k} + v \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dr}{dx} \right) \right|_{x_k, y_k} \quad ; \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.4)$$

Dans les expressions (4.3) et (4.4), $w_k = w(x_k, y_k, t)$ est le déplacement vertical de la dalle de roulement au point de contact k , $r(x_k, y_k)$ est la rugosité du profil du chemin de roulement évaluée au point de contact k , $v = \dot{x}$ est la vitesse de passage du camion.

Les forces agissantes dans les suspensions sont exprimées en fonction des déplacements relatifs ainsi que des vitesses de déplacement des roues et du bloc formant le système. Elles sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{s1}(z_{v1} - z_1) + c_{s1}(\dot{z}_{v1} - \dot{z}_1) \\ f_2 &= k_{s2}(z_{v2} - (a_4 z_2 + a_3 z_3)) + c_{s2}(\dot{z}_{v2} - (a_4 \dot{z}_2 + a_3 \dot{z}_3)) \\ f_3 &= k_{s3}(z_{v3} - z_4) + c_{s3}(\dot{z}_{v3} - \dot{z}_4) \\ f_4 &= k_{s4}(z_{v4} - (a_4 z_5 + a_3 z_6)) + c_{s4}(\dot{z}_{v4} - (a_4 \dot{z}_5 + a_3 \dot{z}_6)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour rendre les forces dans les suspensions homogènes avec les degrés de liberté retenus, il faut exprimer les déplacements z_{v1}, z_{v2}, z_{v3} et z_{v4} en fonction de z_v, θ_v et α_v comme suit :

$$\begin{aligned} z_{v1} &= z_v + a_1 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v \\ z_{v2} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v \\ z_{v3} &= z_v + a_1 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v \\ z_{v4} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v \end{aligned} \quad (4.6)$$

On remplace les expressions (4.6) dans (4.5), o obtient :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{s1}(z_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - z_1) + c_{s1}(\dot{z}_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1) \\
 f_2 &= k_{s2}(z_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 z_2 - a_3 z_3) + c_{s2}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3) \\
 f_3 &= k_{s3}(z_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - z_4) + c_{s3}(\dot{z}_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_4) \\
 f_4 &= k_{s4}(z_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 z_5 - a_3 z_6) + c_{s4}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 \dot{z}_5 - a_3 \dot{z}_6)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Le vecteur des forces dues aux efforts de la gravité distribué sur les points de contacts est:

$$\left\{ F_g \right\} = \left\{ m_1 g + m_v g a_1 b_2 ; m_2 g + m_v g a_2 b_2 a_3 ; m_3 g + m_v g a_2 b_2 a_4 ; m_4 g + m_v g a_1 b_1 ; \right. \\
 \left. m_5 g + m_v g a_2 b_1 a_3 ; m_6 g + m_v g a_2 b_1 a_4 \right\}^T \tag{4.8}$$

En rajoutant la contribution statique, le vecteur des forces d'interactions de la dalle agissant sur le camion devient :

$$\left\{ F^{int} \right\} = \left\{ F_g \right\} + \left\{ F_p^{int} \right\} \tag{4.9}$$

Avec :

$$\left\{ F_p^{int} \right\} = \left\{ F_{p1}^{int} , F_{p2}^{int} , F_{p3}^{int} , F_{p4}^{int} , F_{p5}^{int} , F_{p6}^{int} \right\}^T \tag{4.10}$$

4.5.1.3 Equations du mouvement

Les équations du mouvement du modèle de camion à neuf degrés de liberté sont obtenues on appliquant le principe de Newton pour chaque degré de liberté, on obtient :

$$\text{Pour } z_v : \quad m_v \ddot{z}_v + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \tag{4.11}$$

$$\text{Pour } \theta_v : \quad I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v + a_1 s_1 (f_1 + f_3) - a_2 s_1 (f_2 + f_4) = 0 \tag{4.12}$$

$$\text{Pour } \alpha_v : \quad I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v + b_1 s_3 (f_3 + f_4) - b_2 s_3 (f_1 + f_2) = 0 \tag{4.13}$$

$$\text{Pour } z_1 : \quad m_1 \ddot{z}_1 + F_{p1}^{int} - f_1 = 0 \tag{4.14}$$

$$\text{Pour } z_2 : \quad m_2 \ddot{z}_2 + F_{p2}^{int} - a_4 f_1 = 0 \tag{4.15}$$

$$\text{Pour } z_3 : \quad m_3 \ddot{z}_3 + F_{p3}^{int} - a_3 f_2 = 0 \tag{4.16}$$

$$\text{Pour } z_4 : \quad m_4 \ddot{z}_4 + F_{p4}^{int} - f_3 = 0 \tag{4.17}$$

$$\text{Pour } z_5 : \quad m_5 \ddot{z}_5 + F_{p5}^{int} - a_4 f_4 = 0 \tag{4.18}$$

$$\text{Pour } z_6 : \quad m_6 \ddot{z}_6 + F_{p6}^{int} - a_3 f_4 = 0 \tag{4.19}$$

On remplace les expressions des forces (4.3) et (4.7) dans les équations de mouvement (4.11 à 4.19), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\} \quad (4.20)$$

Avec $\{F_v^{\text{int}}\}$ est le vecteur des forces d'interaction appliquées sur le véhicule, $[M_v]$, $[C_v]$, $[K_v]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du camion (voir annexe 4).

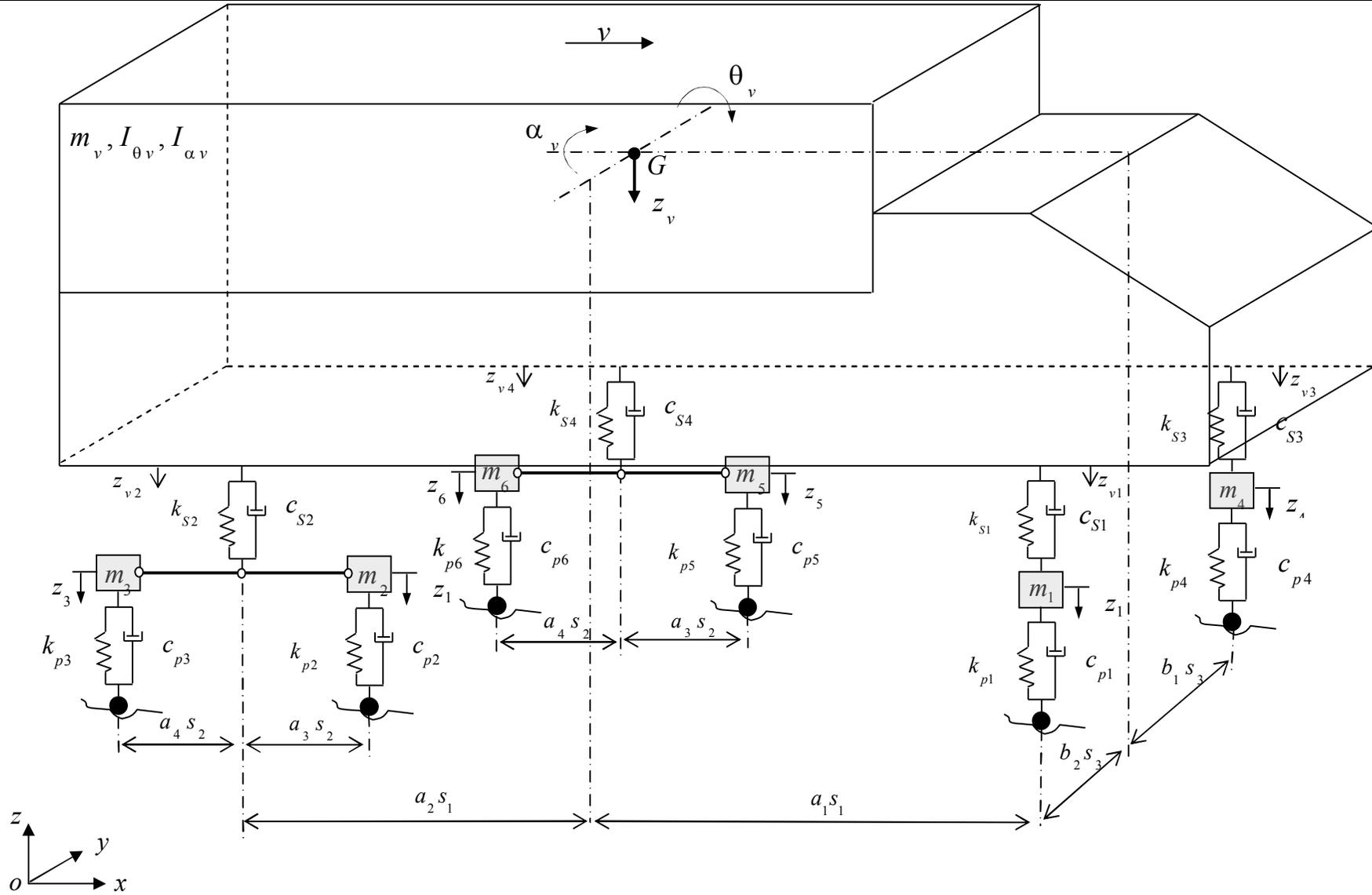


Fig.4.6. Modèle de véhicule tridimensionnel à neuf ddl.

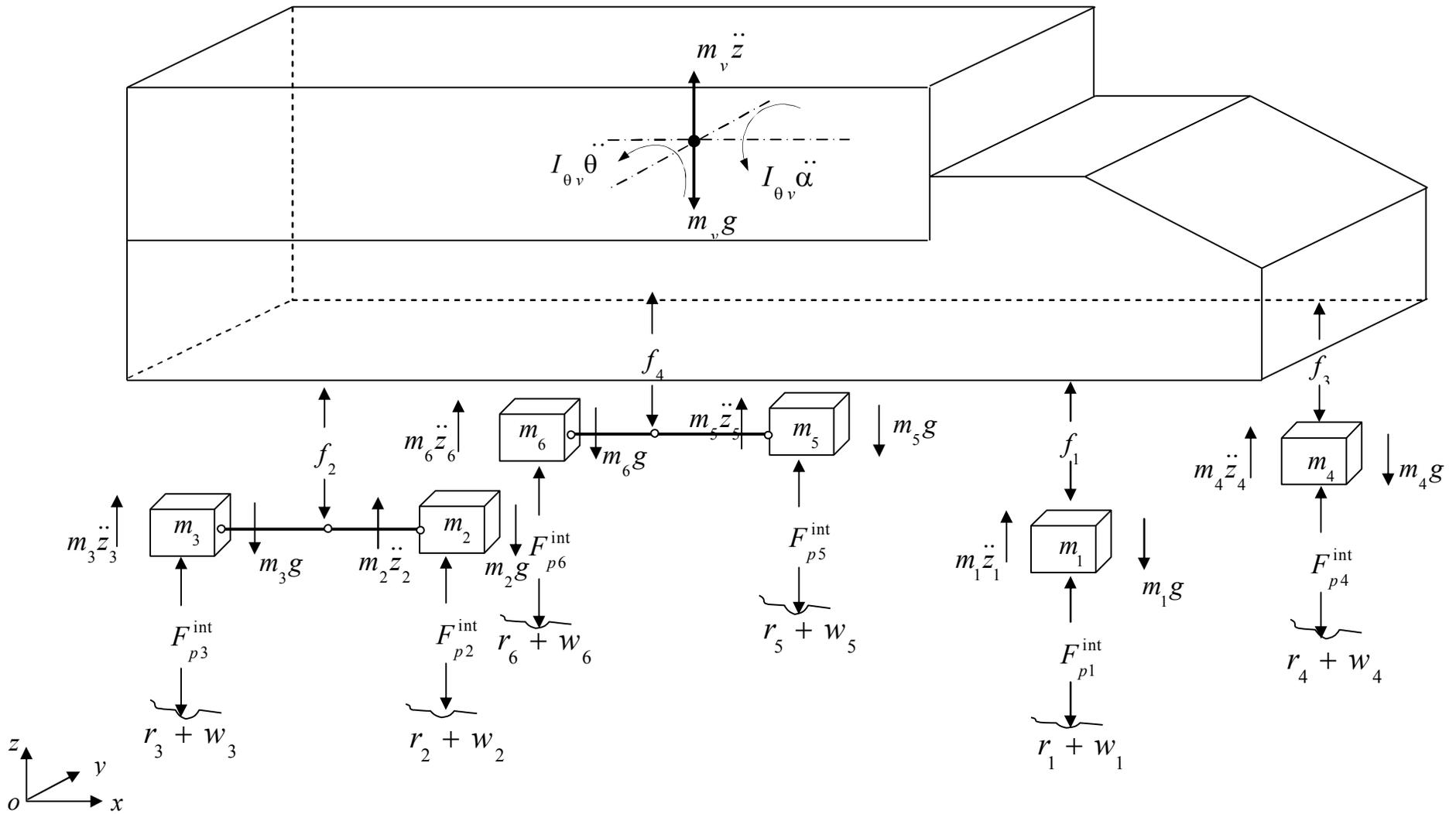


Fig.4.7. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments

4.5.2 Modèle à onze degrés de liberté

4.5.2.1 Schéma du modèle

Le camion est modélisé par un seul modèle dynamique masses-ressorts-amortisseurs à onze degrés de liberté à trois axes (Fig.4.8), conformément au deuxième type d'essieux tandem. Le bloc rigide possède trois degrés de liberté z_v , θ_v , α_v . Le sautilllement des masses m_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ est présenté par six degrés de liberté z_1, z_2, \dots, z_6 . Les rotations des barres pivotantes m_{L1} , m_{L2} sont présentés respectivement par deux degrés de liberté θ_{L1} , θ_{L2} . Le champ de déplacement de ce modèle est défini à chaque instant t par onze variables physiques indépendantes :

$$\{z_v\} = \{z_v, \theta_v, \alpha_v, \theta_{L1}, \theta_{L2}, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}^T \quad (4.21)$$

Dans la figure 4.11, m_{L1} , m_{L2} et $I_{\theta L1}$, $I_{\theta L2}$ représente respectivement les masses et les moments d'inertie des barres pivotantes.

4.5.2.2 Schéma d'équilibre dynamique

Dans la figure 4.9, on présente le bilan des forces et des moments de ce modèle. Les forces dans les suspensions du camion sont exprimées en fonction des déplacements relatifs des extrémités des suspensions :

$$f_i = k_{si}(z_{vi} - z_i) + c_{si}(\dot{z}_{vi} - \dot{z}_i), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.22)$$

Pour rendre les force dans les suspensions homogènes avec les ddl retenus, il faut exprimer les déplacements z_{vi} , $i = 1, 2, \dots, 6$ en fonction de z_v , θ_v et α_v comme suit :

$$\begin{aligned} z_{v1} &= z_v + a_1 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v \\ z_{v2} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v + a_3 s_2 \theta_{L1} \\ z_{v3} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v - a_4 s_2 \theta_{L1} \\ z_{v4} &= z_v + a_1 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v \\ z_{v5} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v + a_3 s_2 \theta_{L2} \\ z_{v6} &= z_v - a_2 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v - a_4 s_2 \theta_{L2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

On remplace les expressions (4.23) dans les expressions des forces des suspensions (4.22), il vient :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{s1}(z_v + a_1 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v - z_1) + c_{s1}(\dot{z}_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1) \\ f_2 &= k_{s2}(z_v - a_2 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v + a_3 s_2 \theta_{L1} - z_2) + c_{s2}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v + a_3 s_2 \dot{\theta}_{L1} - \dot{z}_2) \\ f_3 &= k_{s3}(z_v - a_2 s_1 \theta_v - b_2 s_3 \alpha_v - a_4 s_2 \theta_{L1} - z_3) + c_{s3}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v - b_2 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 s_2 \dot{\theta}_{L1} - \dot{z}_3) \\ f_4 &= k_{s4}(z_v + a_1 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v - z_4) + c_{s4}(\dot{z}_v + a_1 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_4) \\ f_5 &= k_{s5}(z_v - a_2 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v + a_3 s_2 \theta_{L2} - z_5) + c_{s5}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 s_2 \dot{\theta}_{L2} - \dot{z}_5) \\ f_6 &= k_{s6}(z_v - a_2 s_1 \theta_v + b_1 s_3 \alpha_v - a_4 s_2 \theta_{L2} - z_6) + c_{s6}(\dot{z}_v - a_2 s_1 \dot{\theta}_v + b_1 s_3 \dot{\alpha}_v - a_4 s_2 \dot{\theta}_{L2} - \dot{z}_6) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le vecteur des forces dues aux effets de la gravité distribuées sur les points de contacts :

$$\begin{aligned} \left\{ F_g \right\} = & \left\{ m_1 g + m_v g a_1 b_2 ; m_2 g + m_v g a_2 b_2 a_3 + m_{L1} a_3 ; m_3 g + m_v g a_2 b_2 a_4 + m_{L1} a_4 ; \right. \\ & \left. m_4 g + m_v g a_1 b_1 ; m_5 g + m_v g a_2 b_1 a_3 + m_{L2} a_3 ; m_6 g + m_v g a_2 b_1 a_4 + m_{L2} a_4 \right\}^T \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.5.2.3 Equations du mouvement

Les équations du mouvement du modèle de camion à onze ddl sont obtenues en utilisant l'équilibre dynamique des forces et des moments.

$$\text{Pour } z_v : m_v \ddot{z}_v + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0 \quad (4.26)$$

$$\text{Pour } \theta_v : I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v + a_1 s_1 (f_1 + f_4) - a_2 s_1 (f_2 + f_3) = 0 \quad (4.27)$$

$$\text{Pour } \alpha_v : I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v - b_2 s_3 (f_1 + f_2 + f_3) + b_1 s_3 (f_4 + f_5 + f_6) = 0 \quad (4.28)$$

$$\text{Pour } \theta_{L1} : I_{\theta_{L1}} \ddot{\theta}_{L1} + a_3 s_2 f_2 - a_4 s_2 f_3 = 0 \quad (4.29)$$

$$\text{Pour } \theta_{L2} : I_{\theta_{L2}} \ddot{\theta}_{L2} + a_3 s_2 f_5 - a_4 s_2 f_6 = 0 \quad (4.30)$$

$$\text{Pour } z_i : m_i \ddot{z}_i + F_{pi}^{\text{int}} - f_i = 0 ; i = 1, \dots, 6 \quad (4.31-4.36)$$

On remplace les expressions des forces (4.3) et (4.24) dans les équations de mouvement (4.26-4.36), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v] \{ \ddot{Z}_v \} + [C_v] \{ \dot{Z}_v \} + [K_v] \{ Z_v \} = \{ F_v^{\text{int}} \} \quad (4.37)$$

Avec $[M_v]$, $[C_v]$, $[K_v]$ et $\{ F_v^{\text{int}} \}$ sont données dans l'annexe 4.

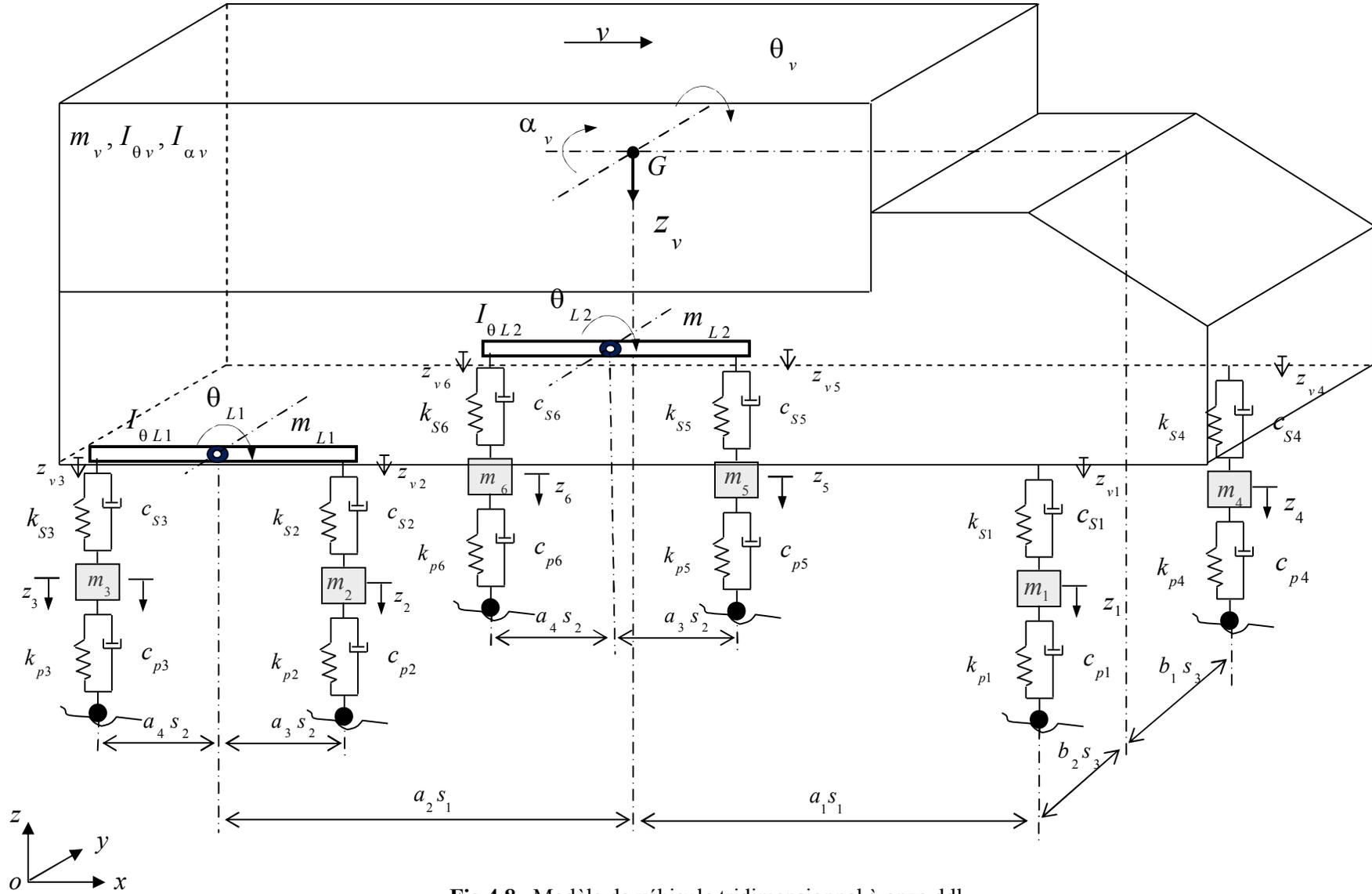


Fig.4.8. Modèle de véhicule tridimensionnel à onze ddl

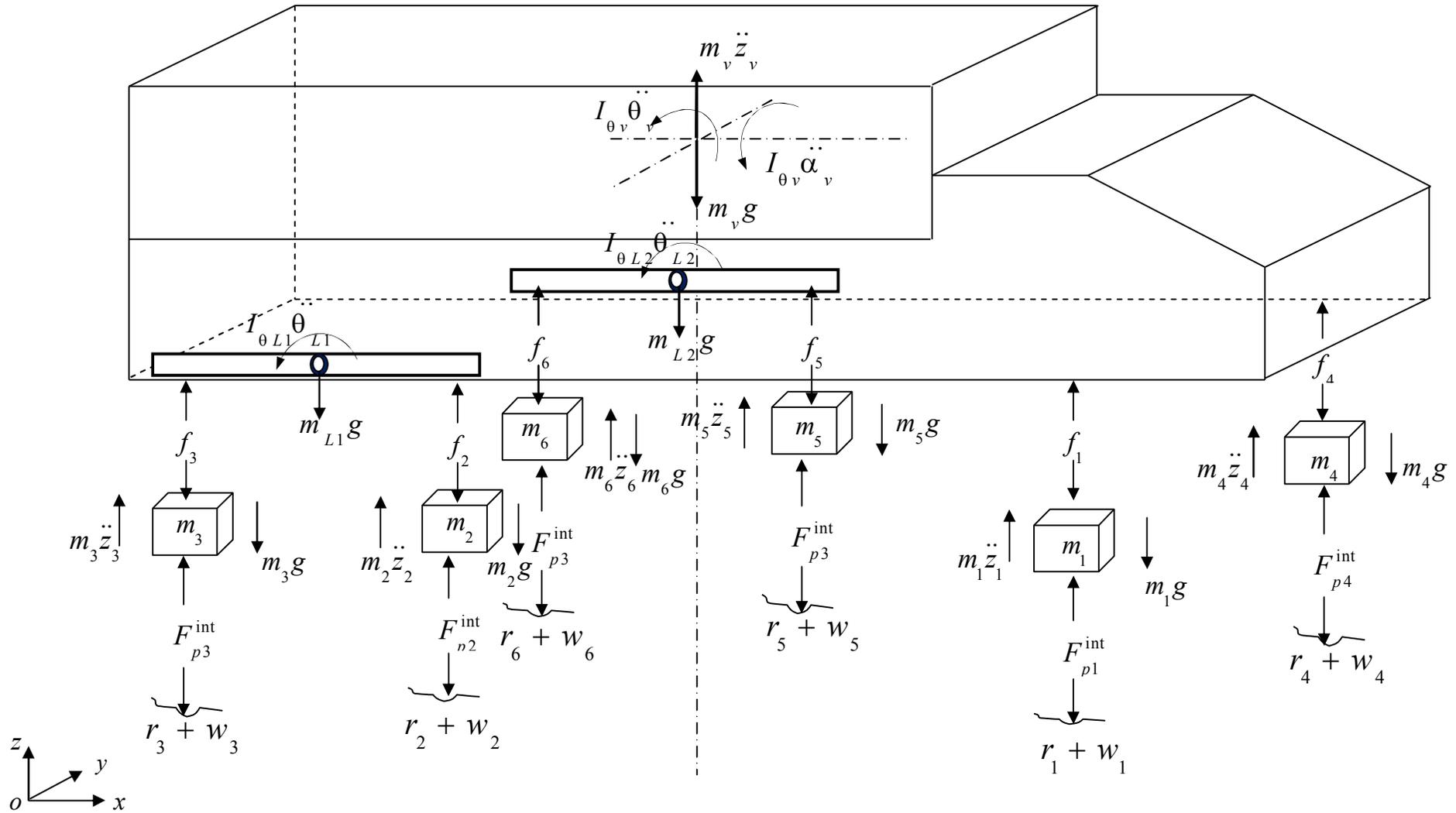


Fig.4.9. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments

4.6 Modèles de camion semi-remorque à essieux tandem et tridem

4.6.1 Modèle à dix-huit degré de liberté

4.6.1.1 Schémas du modèle

Le camion est à six axes composé d'un tracteur et d'une semi-remorque (Fig.4.10 et Fig. 4.11). Le comportement de la remorque est influencé par celui du véhicule tracteur et vis-versa. Les forces sont transmises de l'un à l'autre via une connexion représentant le point d'ancrage situé au centre des structures sur l'axe longitudinale. Ce dernier est représenté par un amortisseur c_e et un ressort k_e mis en parallèle. Les suspensions du véhicule tracteur ou de la semi remorque ne sont plus indépendantes par contre elles sont reliées entre-elles par les essieux. L'essieu tandem du véhicule tracteur est similaire à celui de modèle à neuf degrés de liberté. Le véhicule tracteur possède neuf degrés de liberté : $z_t, \theta_t, \alpha_t, z_1, \alpha_1, z_2, \alpha_2, z_3, \alpha_3$. La semi-remorque possède aussi neuf degrés de liberté : $z_r, \theta_r, \alpha_r, z_4, \alpha_4, z_5, \alpha_5, z_6, \alpha_6$. Le champ de déplacement de ce modèle est défini à chaque instant t par dix-huit variables physiques indépendantes :

$$\{Z_v\} = \{z_t, \theta_t, \alpha_t, z_r, \theta_r, \alpha_r, z_1, \alpha_1, z_2, \alpha_2, z_3, \alpha_3, z_4, \alpha_4, z_5, \alpha_5, z_6, \alpha_6\}^T \quad (4.37)$$

4.6.1.2. Schémas d'équilibre dynamique

Les figures 4.12 et 4.13 représentent le bilan des forces et des moments agissants sur les différentes masses et sur les blocs rigides du modèle. Les forces d'interaction dans les pneus sont :

$$\begin{aligned} F_{p1}^{\text{int}} &= k_{p1}[z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + c_{p1}[\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\ F_{p2}^{\text{int}} &= k_{p2}[z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + c_{p2}[\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\ F_{p3}^{\text{int}} &= k_{p3}[z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + c_{p3}[\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\ F_{p4}^{\text{int}} &= k_{p4}[z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + c_{p4}[\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\ F_{p5}^{\text{int}} &= k_{p5}[z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + c_{p5}[\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\ F_{p6}^{\text{int}} &= k_{p6}[z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + c_{p6}[\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\ F_{p7}^{\text{int}} &= k_{p7}[z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] + c_{p7}[\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\ F_{p8}^{\text{int}} &= k_{p8}[z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] + c_{p8}[\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\ F_{p9}^{\text{int}} &= k_{p9}[z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] + c_{p9}[\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\ F_{p10}^{\text{int}} &= k_{p10}[z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] + c_{p10}[\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\ F_{p11}^{\text{int}} &= k_{p11}[z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] + c_{p11}[\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\ F_{p12}^{\text{int}} &= k_{p12}[z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] + c_{p12}[\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})] \end{aligned} \quad (4.39)$$

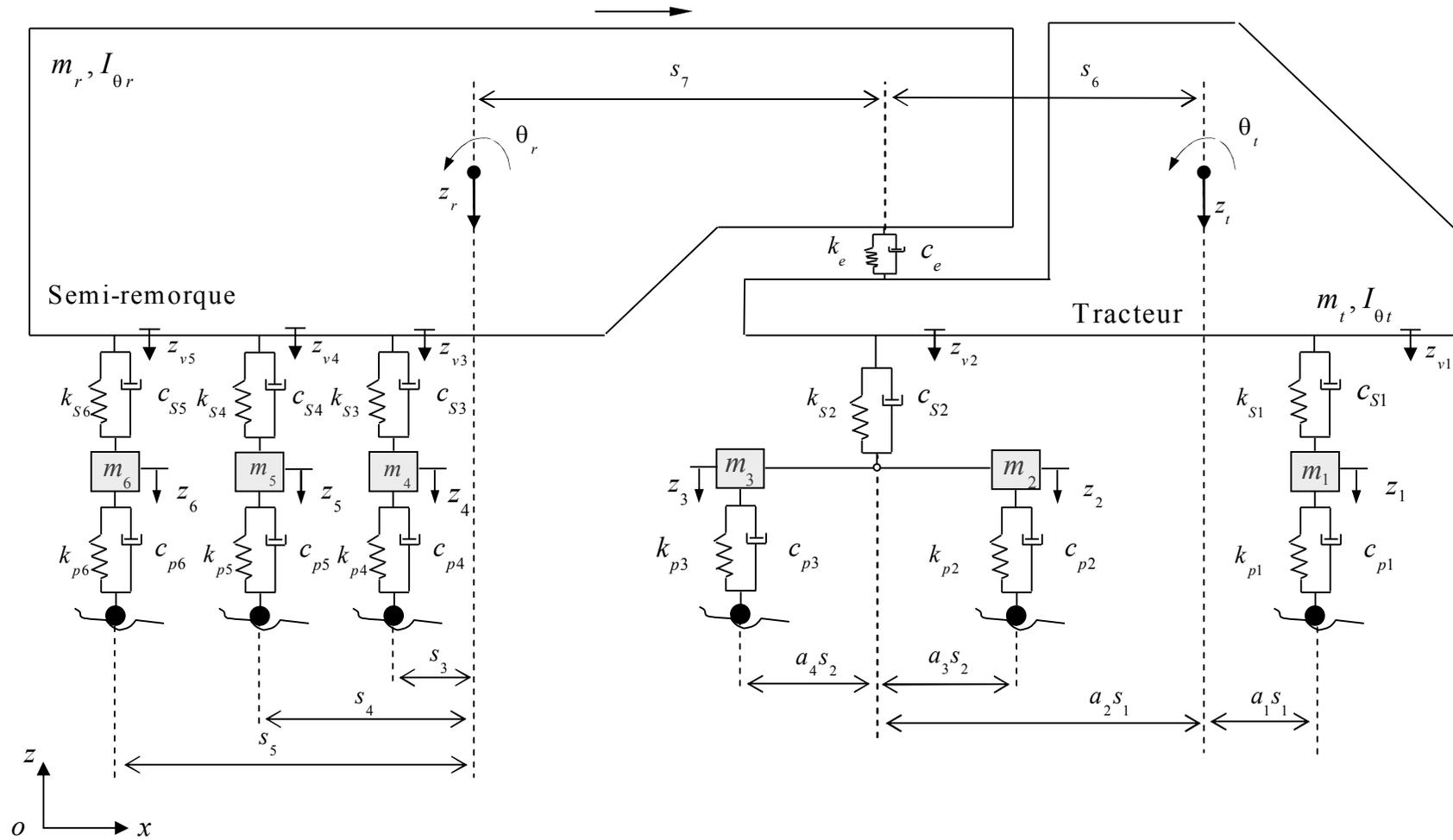


Fig.4.10. Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 18 ddl, vue de face.

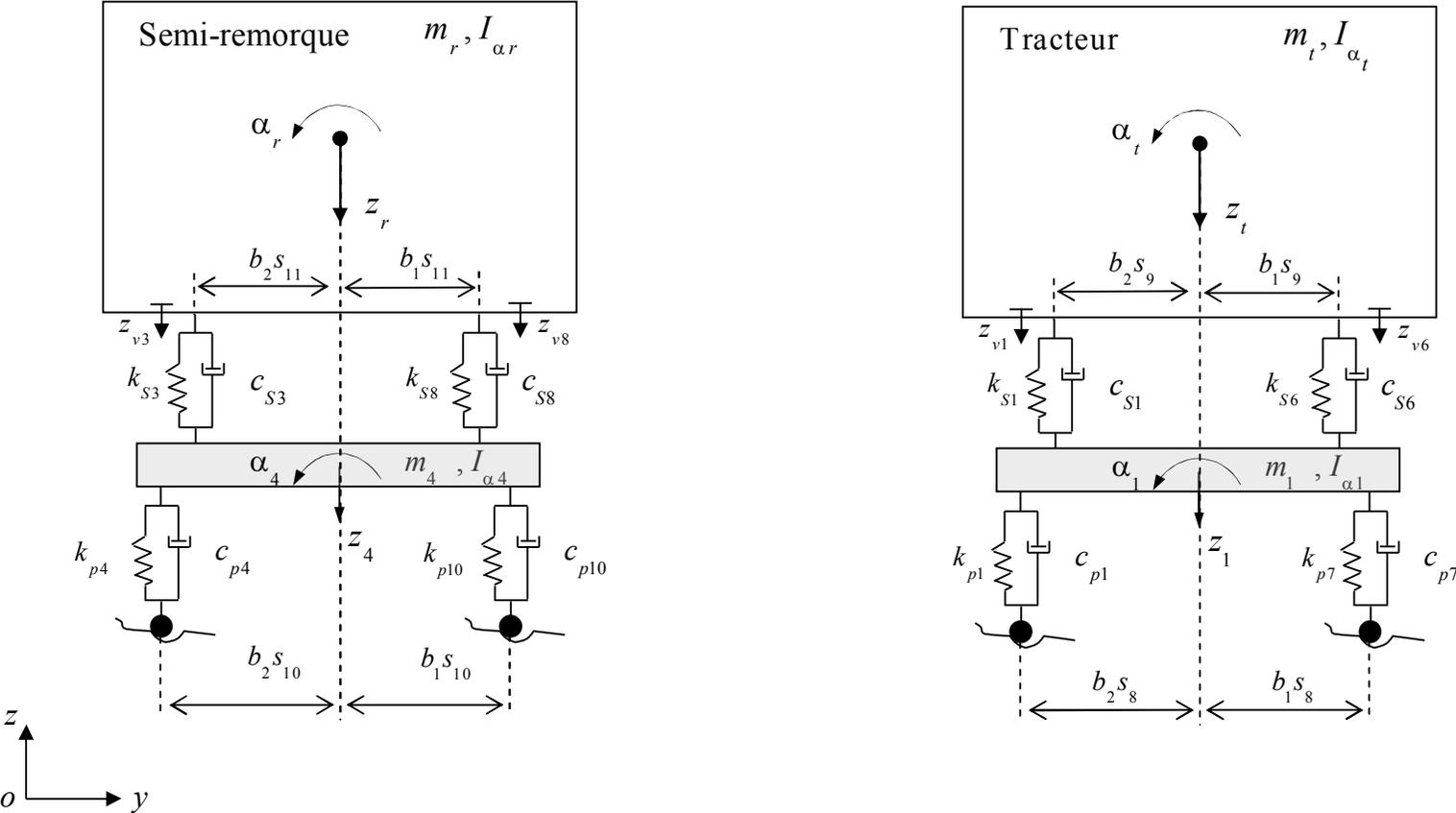


Fig.4.11. Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 18 ddl, vue de droite.

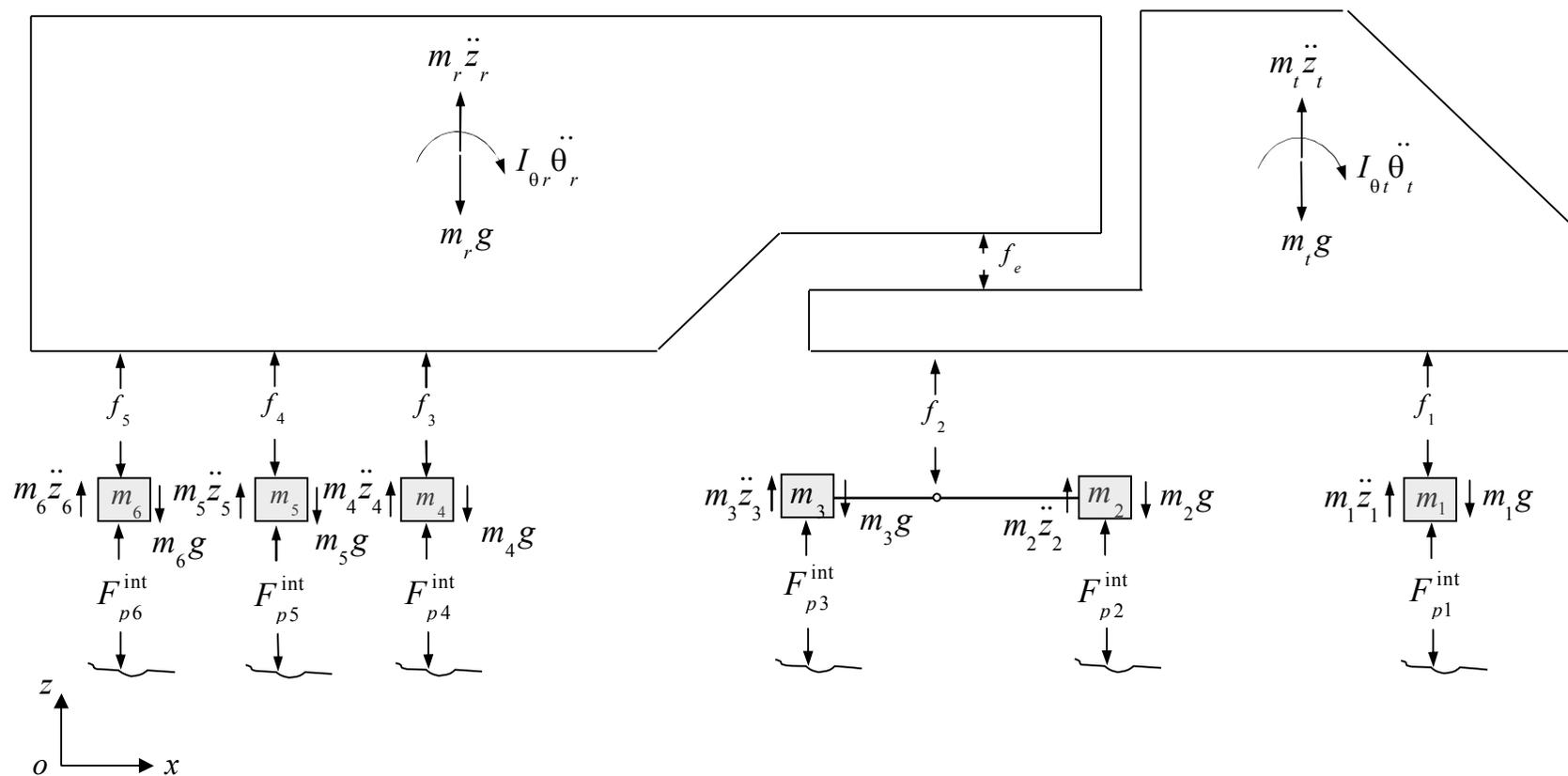


Fig.4.12. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de face.

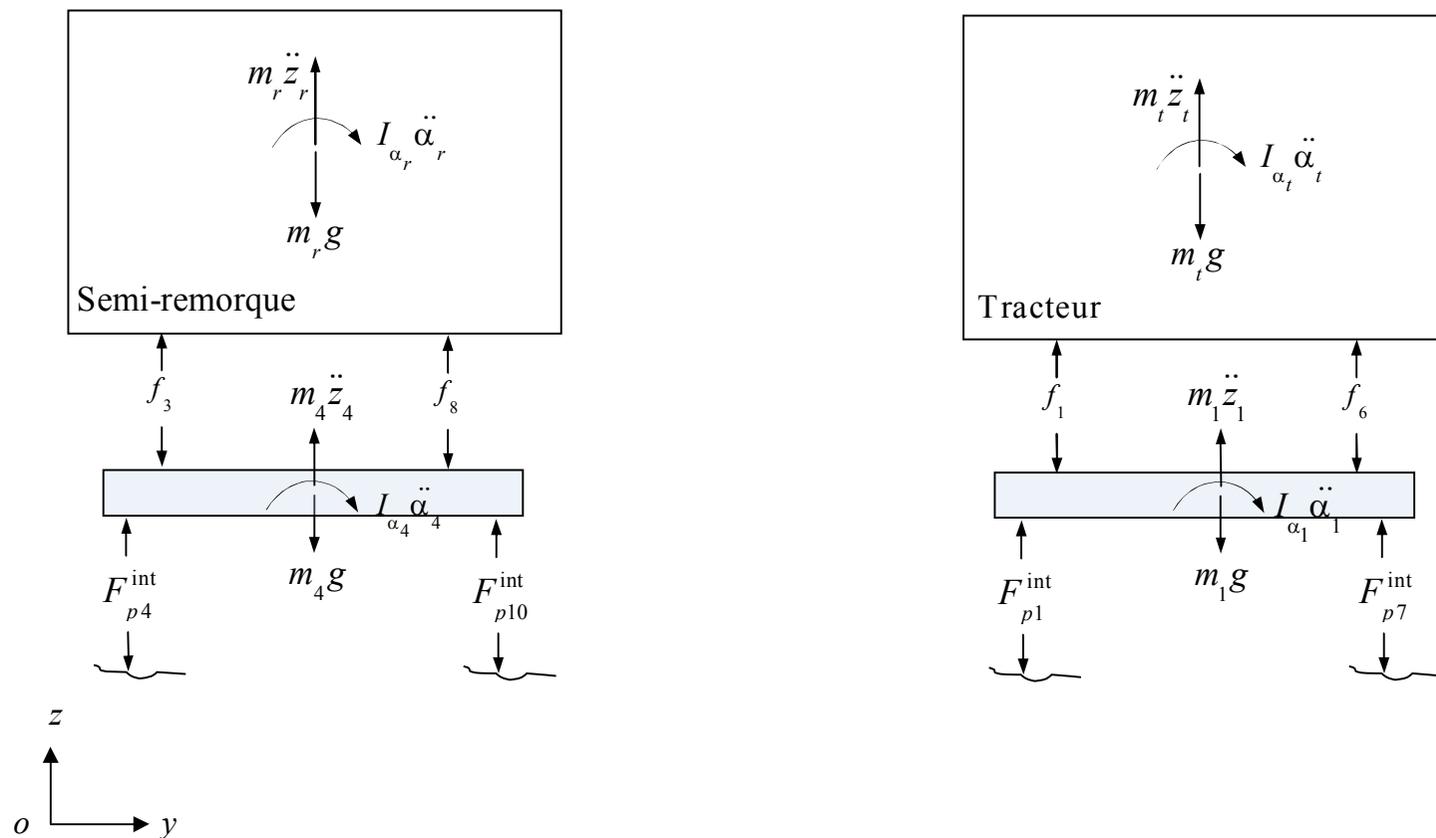


Fig.4.13. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de droite.

Avec :

$$\dot{w}_k + \dot{r}_k = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{x_k, y_k} + v \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dr}{dx} \right) \Big|_{x_k, y_k} ; \quad k=1, \dots, 12 \quad (4.40)$$

Les forces agissantes dans les suspensions sont déterminées en considérant les positions relatives ainsi que les vitesses de déplacement des roues et des cadres formant le système.

Ils sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{s1}[z_{v1} - (z_1 + b_2 s_9 \alpha_1)] + c_{s1}[\dot{z}_{v1} - (\dot{z}_1 + b_2 s_9 \dot{\alpha}_1)] \\ f_2 &= k_{s2}[z_{v2} - (a_4 z_2 + a_3 z_3 + b_2 s_{11}(a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3))] + c_{s2}[\dot{z}_{v2} - (a_4 \dot{z}_2 + a_3 \dot{z}_3 + b_2 s_{11}(a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3))] \\ f_3 &= k_{s3}[z_{v3} - (z_4 + b_2 s_{11} \alpha_4)] + c_{s3}[\dot{z}_{v3} - (\dot{z}_4 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4)] \\ f_4 &= k_{s4}[z_{v4} - (z_5 + b_2 s_{11} \alpha_5)] + c_{s4}[\dot{z}_{v4} - (\dot{z}_5 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5)] \\ f_5 &= k_{s5}[z_{v5} - (z_6 + b_2 s_{11} \alpha_6)] + c_{s5}[\dot{z}_{v5} - (\dot{z}_6 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6)] \\ f_6 &= k_{s6}[z_{v6} - (z_1 - b_1 s_9 \alpha_1)] + c_{s6}[\dot{z}_{v6} - (\dot{z}_1 - b_1 s_9 \dot{\alpha}_1)] \\ f_7 &= k_{s7}[z_{v7} - (a_4 z_2 + a_3 z_3 - b_1 s_{11}(a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3))] + c_{s7}[\dot{z}_{v7} - (a_4 \dot{z}_2 + a_3 \dot{z}_3 - b_1 s_{11}(a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3))] \\ f_8 &= k_{s8}[z_{v8} - (z_4 - b_1 s_{11} \alpha_4)] + c_{s8}[\dot{z}_{v8} - (\dot{z}_4 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4)] \\ f_9 &= k_{s9}[z_{v9} - (z_5 - b_1 s_{11} \alpha_5)] + c_{s9}[\dot{z}_{v9} - (\dot{z}_5 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5)] \\ f_{10} &= k_{s10}[z_{v10} - (z_6 - b_1 s_{11} \alpha_6)] + c_{s10}[\dot{z}_{v10} - (\dot{z}_6 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6)] \end{aligned} \quad (4.41)$$

La force au point d'encrage est fonction des élévations, des vitesses de bondissement, des positions angulaires ainsi que des vitesses de rotation des cadres formant le véhicule tracteur et la semi-remorque. Elle est donc calculée de la manière suivante :

$$f_e = k_e[(z_r - s_7 \theta_r) - (z_t + s_6 \theta_t)] + c_e[(\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r) - (\dot{z}_t + s_6 \dot{\theta}_t)] \quad (4.42)$$

Pour rendre les équations de mouvement homogènes avec les degrés de liberté choisis, il faut exprimer z_i , $i=1, \dots, 10$, en fonction de $z_t, \theta_t, \alpha_t, z_r, \theta_r$ et α_r comme suit :

$$\begin{aligned} z_{v1} &= z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t \\ z_{v2} &= z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t \\ z_{v3} &= z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v4} &= z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v5} &= z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v6} &= z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t \\ z_{v7} &= z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t \\ z_{v8} &= z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r \\ z_{v9} &= z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r \\ z_{v10} &= z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r \end{aligned} \quad (4.43)$$

On remplace (4.43) dans (4.41), on obtient :

$$\begin{aligned}
f_1 &= k_{s1}[z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] + c_{s1}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
f_2 &= k_{s2}[z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
&\quad + c_{s2}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
f_3 &= k_{s3}[z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + c_{s3}[\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
f_4 &= k_{s4}[z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + c_{s4}[\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
f_5 &= k_{s5}[z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + c_{s5}[\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
f_6 &= k_{s6}[z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + c_{s6}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
f_7 &= k_{s7}[z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
&\quad + c_{s7}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
f_8 &= k_{s8}[z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + c_{s8}[\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
f_9 &= k_{s9}[z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + c_{s9}[\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
f_{10} &= k_{s10}[z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + c_{s10}[\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.6.1.3 Equations de mouvement

Les équations de mouvement des blocs rigides suspendues du tracteur et de la semi-remorque ainsi que des masses des essieux avec roues sont déterminées en appliquant la deuxième loi de Newton en translation et en rotation par rapport à leurs centres de masses.

Pour le véhicule tracteur, trois équations de mouvement sont déterminées comme suit :

- *Equation de mouvement pour le bondissement :*

$$m_t \ddot{z}_t + f_1 + f_2 + f_6 + f_7 - f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
&m_t \ddot{z}_t + k_{s1}[z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] + c_{s1}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
&+ k_{s2}[z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - a_4 b_2 s_{11} \alpha_2 - a_3 b_2 s_{11} \alpha_3] \\
&+ c_{s2}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - a_4 b_2 s_{11} \dot{\alpha}_2 - a_3 b_2 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
&+ k_{s6}[z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + c_{s6}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
&+ k_{s7}[z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + a_4 b_1 s_{11} \alpha_2 + a_3 b_1 s_{11} \alpha_3] \\
&+ c_{s7}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + a_4 b_1 s_{11} \dot{\alpha}_2 + a_3 b_1 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
&+ k_e[z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] + c_e[\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t - s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

- *Equation de mouvement pour le tangage :*

$$I_{\theta} \ddot{\theta}_t - a_1 s_1 (f_1 + f_6) + a_2 s_1 (f_2 + f_7) - s_6 f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\theta_t} \ddot{\theta}_t - a_1 s_1 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] \\
 & - a_1 s_1 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & - a_1 s_1 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] \\
 & - a_1 s_1 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + a_2 s_1 k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_2 s_1 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & + a_2 s_1 k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_2 s_1 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - s_6 k_e [z_r - s_7 \theta_r - (z_t + s_6 \alpha_t)] - s_6 c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - (\dot{z}_t + s_6 \dot{\alpha}_t)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_t} \ddot{\alpha}_t + b_2 s_9 f_1 + b_2 s_{10} f_2 - b_1 s_9 f_6 - b_1 s_{10} f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_t} \ddot{\alpha}_t + b_2 s_9 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] \\
 & + b_2 s_9 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + b_2 s_{10} k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + b_2 s_{10} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - b_1 s_9 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] \\
 & - b_1 s_9 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & - b_1 s_{10} k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - b_1 s_{10} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Pour la semi-remorque, trois équations de mouvement sont déterminées comme suit :

- Equation de mouvement pour le bondissement :

$$m_r \ddot{z}_r + f_3 + f_4 + f_5 + f_8 + f_9 + f_{10} + f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_r \ddot{z}_r + k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + k_e [z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] + c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t - s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

- Equation de mouvement pour le tangage :

$$I_{\theta_r} \ddot{\theta}_r + s_3 (f_3 + f_8) + s_4 (f_4 + f_9) + s_5 (f_5 + f_{10}) - s_7 f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_r} \ddot{\theta}_r + s_3 k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + s_3 c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + s_3 k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + s_3 c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + s_4 k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + s_4 c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + s_4 k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + s_4 c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + s_5 k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + s_5 c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + s_5 k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + s_5 c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - s_7 k_e [z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] - s_7 c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t + s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_r} \ddot{\alpha}_r + b_2 s_{11} (f_3 + f_4 + f_5) - b_1 s_{11} (f_8 + f_9 + f_{10}) = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_r} \ddot{\alpha}_r + b_2 s_{11} k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + b_2 s_{11} c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + b_2 s_{11} k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + b_2 s_{11} c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + b_2 s_{11} k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + b_2 s_{11} c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] - b_1 s_{11} c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] - b_1 s_{11} c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] - b_1 s_{11} c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Pour les équations de mouvement des essieux du véhicule tracteur et de la semi-remorque, seul deux équations sont nécessaires pour chaque essieu, puisque les mouvements possibles sont le bondissement et le roulis. Les équations de mouvement pour le premier essieu sont les suivantes :

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_1 \ddot{z}_1 + F_{p1}^{\text{int}} + F_{p7}^{\text{int}} - f_1 - f_6 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & m_1 \ddot{z}_1 + k_{p1} [z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + c_{p1} [\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\ & + k_{p7} [z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] + c_{p7} [\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\ & - k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] - c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\ & - k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] - c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_1} \ddot{\alpha}_1 + b_2 s_8 F_{p1}^{\text{int}} - b_1 s_8 F_{p7}^{\text{int}} - b_2 s_9 f_1 + b_1 s_9 f_6 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & I_{\alpha_1} \ddot{\alpha}_1 + b_2 s_8 k_{p1} [z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + b_2 s_8 c_{p1} [\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\ & - b_1 s_8 k_{p7} [z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] - b_1 s_8 c_{p7} [\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\ & - b_2 s_9 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] - b_2 s_9 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\ & + b_1 s_9 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + b_1 s_9 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pour les essieux 2 et 3, les forces de suspensions sont remplacées par des forces agissantes sur les essieux. Par exemple, f_2 est remplacée par deux force $a_3 f_2$ et $a_4 f_2$ (Fig. 4.14).

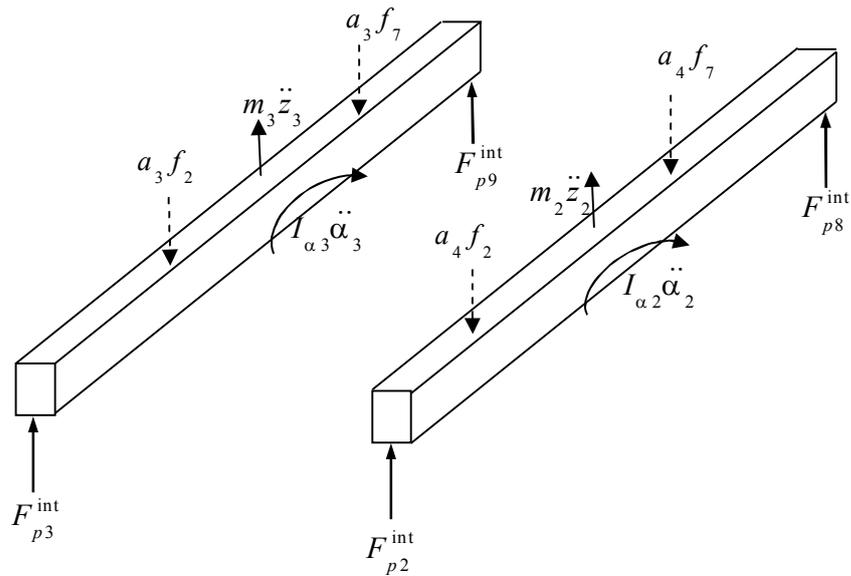


Fig.4.14. Forces et mouvements agissants sur l'essieu tandem

Les équations de mouvement pour le deuxième essieu sont les suivantes :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_2 \ddot{z}_2 + F_{p2}^{\text{int}} + F_{p8}^{\text{int}} - a_4 f_2 - a_4 f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & m_2 \ddot{z}_2 + k_{p2} [z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + c_{p2} [\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\ & + k_{p8} [z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] + c_{p8} [\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\ & - a_4 k_{s2} [z_t + a_2 s_{1t} \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\ & - a_4 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_{1t} \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\ & - a_4 k_{s7} [z_t + a_2 s_{1t} \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\ & - a_4 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_{1t} \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

- *Equation de mouvement pour le roulis :*

$$I_{\alpha_2} \ddot{\alpha}_2 + b_2 s_{10} F_{p2}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p8}^{\text{int}} - a_4 b_2 s_{11} f_2 + a_4 b_1 s_{11} f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & I_{\alpha_2} \ddot{\alpha}_2 + b_2 s_{10} k_{p2} [z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + b_2 s_{10} c_{p2} [\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\ & - b_1 s_{10} k_{p8} [z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] - b_1 s_{10} c_{p8} [\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\ & - a_4 b_2 s_{11} k_{s2} [z_t + a_2 s_{1t} \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\ & - a_4 b_2 s_{11} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_{1t} \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\ & + a_4 b_1 s_{11} k_{s7} [z_t + a_2 s_{1t} \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\ & + a_4 b_1 s_{11} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_{1t} \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Les équations de mouvement pour le troisième essieu sont les suivantes :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_3 \ddot{z}_3 + F_{p3}^{\text{int}} + F_{p9}^{\text{int}} - a_3 f_2 - a_3 f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_3 \ddot{z}_3 + k_{p3} [z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + c_{p3} [\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\
 & + k_{p9} [z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] + c_{p9} [\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\
 & - a_3 k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - a_3 k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_3} \ddot{\alpha}_3 + b_2 s_{10} F_{p3}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p9}^{\text{int}} - a_3 b_2 s_{11} f_2 + a_3 b_1 s_{11} f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_3} \ddot{\alpha}_3 + b_2 s_{10} k_{p3} [z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + b_2 s_{10} c_{p3} [\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p9} [z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] - b_1 s_{10} c_{p9} [\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\
 & - a_3 b_2 s_{11} k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 b_2 s_{11} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & + a_3 b_1 s_{11} k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_3 b_1 s_{11} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Les équations de mouvement pour le quatrième essieu sont:

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_4 \ddot{z}_4 + F_{p4}^{\text{int}} + F_{p10}^{\text{int}} - f_3 - f_8 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_4 \ddot{z}_4 + k_{p4} [z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + c_{p4} [\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\
 & + k_{p10} [z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] + c_{p10} [\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\
 & - k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] - c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & - k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] - c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] = 0
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_4} \ddot{\alpha}_4 + b_2 s_{10} F_{p4}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p10}^{\text{int}} - b_2 s_{11} f_3 + b_1 s_{11} f_8 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_4} \ddot{\alpha}_4 + b_2 s_{10} k_{p4} [z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + b_2 s_{10} c_{p4} [\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p10} [z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] - b_1 s_{10} c_{p10} [\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\
 & - b_2 s_{11} k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] - b_2 s_{11} c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + b_1 s_{11} k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + b_1 s_{11} c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] = 0
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Les équations de mouvement pour le cinquième essieu sont :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_5 \ddot{z}_5 + F_{p5}^{\text{int}} + F_{p11}^{\text{int}} - f_4 - f_9 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_5 \ddot{z}_5 + k_{p5} [z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + c_{p5} [\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\
 & + k_{p11} [z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] + c_{p11} [\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\
 & - k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] - c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & - k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] - c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] = 0
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

- *Equation de mouvement pour le roulis :*

$$I_{\alpha_5} \ddot{\alpha}_5 + b_2 s_{10} F_{p5}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p11}^{\text{int}} - b_2 s_{11} f_4 + b_1 s_{11} f_9 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_5} \ddot{\alpha}_5 + b_2 s_{10} k_{p5} [z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + b_2 s_{10} c_{p5} [\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p11} [z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] - c_{p11} [\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\
 & - b_2 s_{11} k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] - b_2 s_{11} c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + b_1 s_{11} k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + b_1 s_{11} c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] = 0
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Les équations de mouvement pour le dernier essieu sont :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_6 \ddot{z}_6 + F_{p6}^{\text{int}} + F_{p12}^{\text{int}} - f_5 - f_{10} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_6 \ddot{z}_6 + k_{p6} [z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + c_{p6} [\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\
 & + k_{p12} [z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] + c_{p12} [\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})] \\
 & - k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] - c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] - c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_6} \ddot{\alpha}_6 + b_2 s_{10} F_{p2}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p12}^{\text{int}} - b_2 s_{11} f_5 + b_1 s_{11} f_{10} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_6} \ddot{\alpha}_6 + b_2 s_{10} k_{p6} [z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + b_2 s_{10} c_{p6} [\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p12} [z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] - b_1 s_{10} c_{p12} [\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})] \\
 & - b_2 s_{11} k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] - b_2 s_{11} c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + b_1 s_{11} k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + b_1 s_{11} c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Après regroupement, on obtient le système suivant (voir Annexe 4) :

$$[M_v] \{\dot{Z}_v\} + [C_v] \{Z_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\} \tag{4.63}$$

4.6.2 Modèle à vingt degré de liberté

Ce modèle est similaire au modèle précédent de la figure 4.10. La seule différence réside dans l'essieu tandem dont le deuxième type est utilisé (voir Fig.4.3). La rotation est représentée par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse m_{L1} et d'inertie $I_{\theta L1}$, attachée à l'extrémité du corps rigide du véhicule-tracteur (Figs. 4.15 -4.18). La même chose pour l'autre coté. Les rotations des barres pivotantes m_{L1} , m_{L2} sont présentés respectivement par deux degrés de liberté θ_{L1} , θ_{L2} . La flexion de chacun des porte-à-faux formant la suspension est modélisée par un ressort et un amortisseur visqueux liés à chaque extrémité de la barre pivotante et aux essieux deux et trois. Le champ de déplacements de ce modèle de véhicule est défini à l'instant t par 20 variables physiques indépendantes :

$$\{Z_v\} = \left\{ z_t, \theta_t, \alpha_t, z_r, \theta_r, \alpha_r, \theta_{L1}, \theta_{L2}, z_1, \alpha_1, z_2, \alpha_2, z_3, \alpha_3, z_4, \alpha_4, z_5, \alpha_5, z_6, \alpha_6 \right\}^T \tag{4.64}$$

Les équations de mouvement des blocs rigides suspendues du véhicule-tracteur et de la semi-remorque ainsi que des masses des essieux avec roues et des deux barres pivotantes sont déterminées de la même manière que dans le modèle précédent en utilisant la deuxième loi de Newton en translation et en rotation (voir annexe 4).

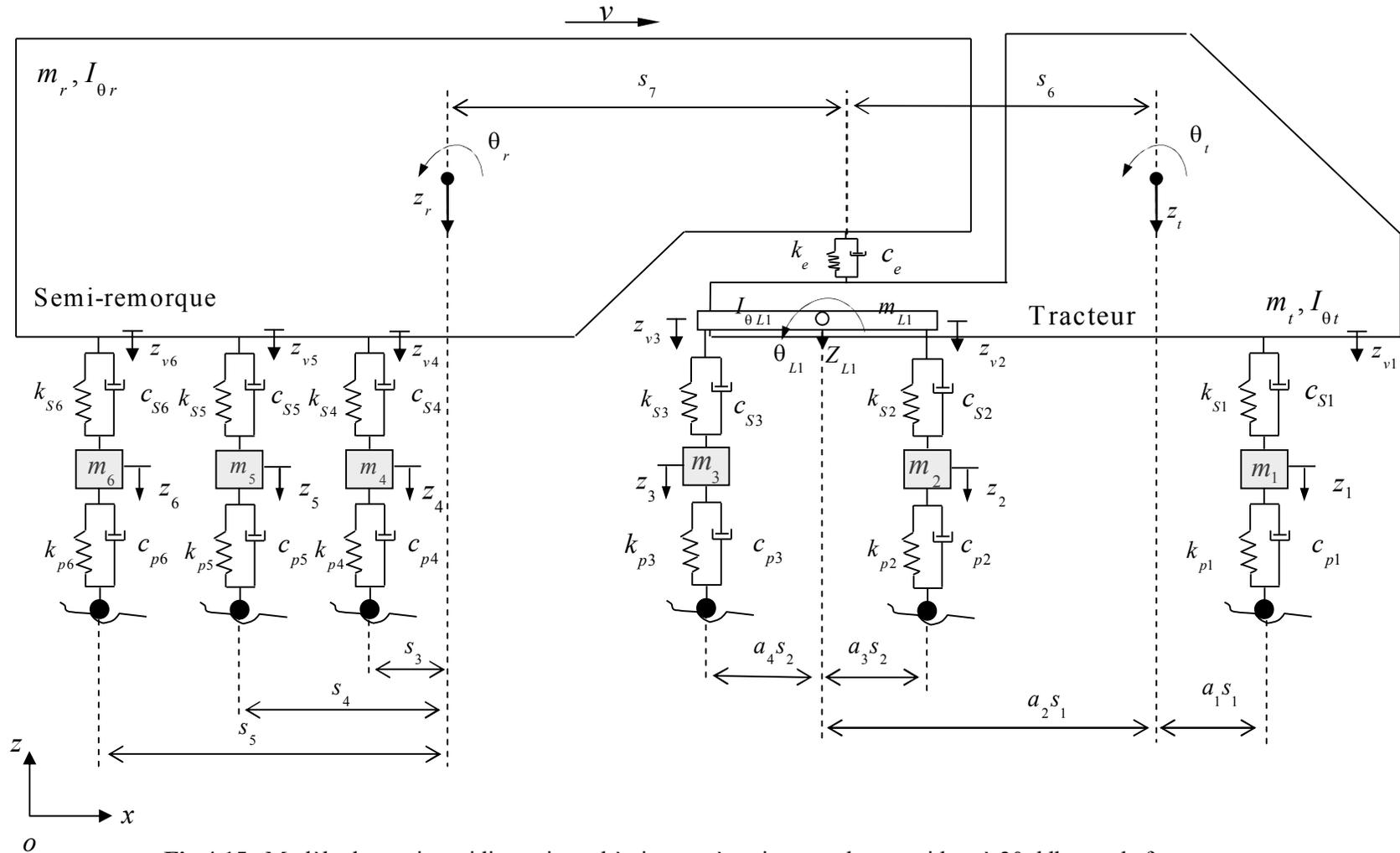


Fig.4.15. Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 20 ddl, vue de face.

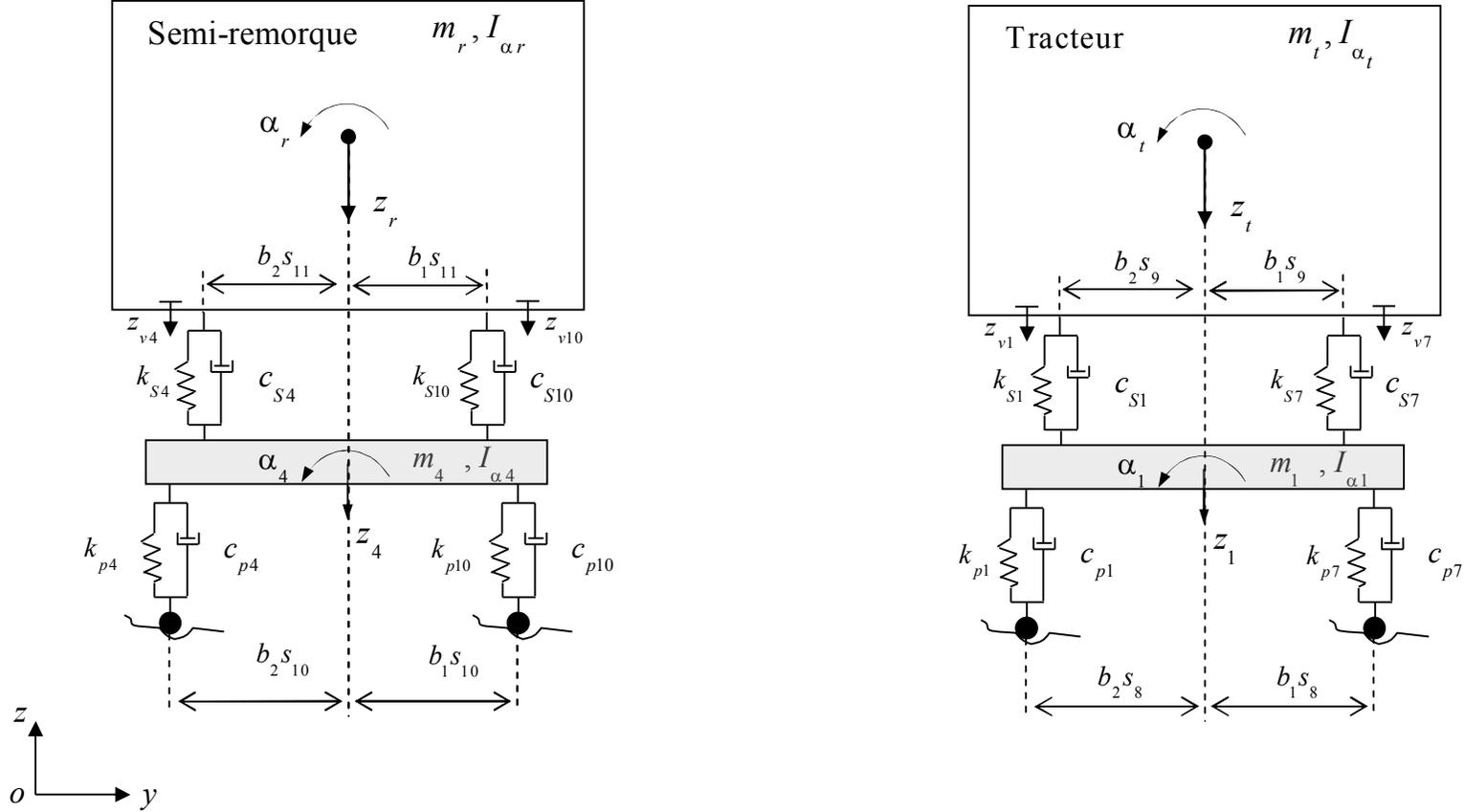


Fig.4.16. Modèle de camion tridimensionnel à six axes à essieux tandem et tridem à 20 ddl, vue de droite.

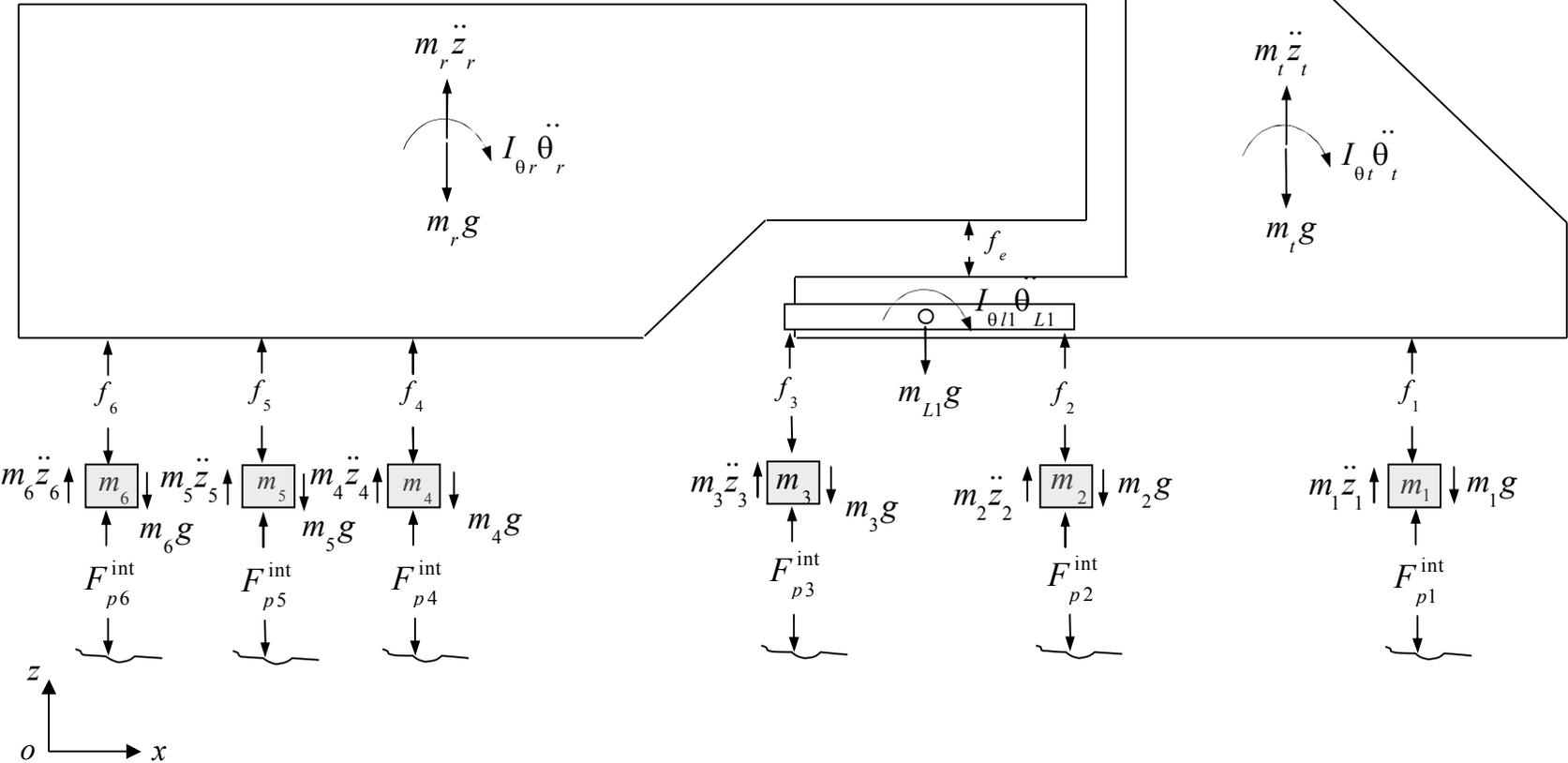


Fig.4.17. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments du modèle à 20 ddl, vue de face.

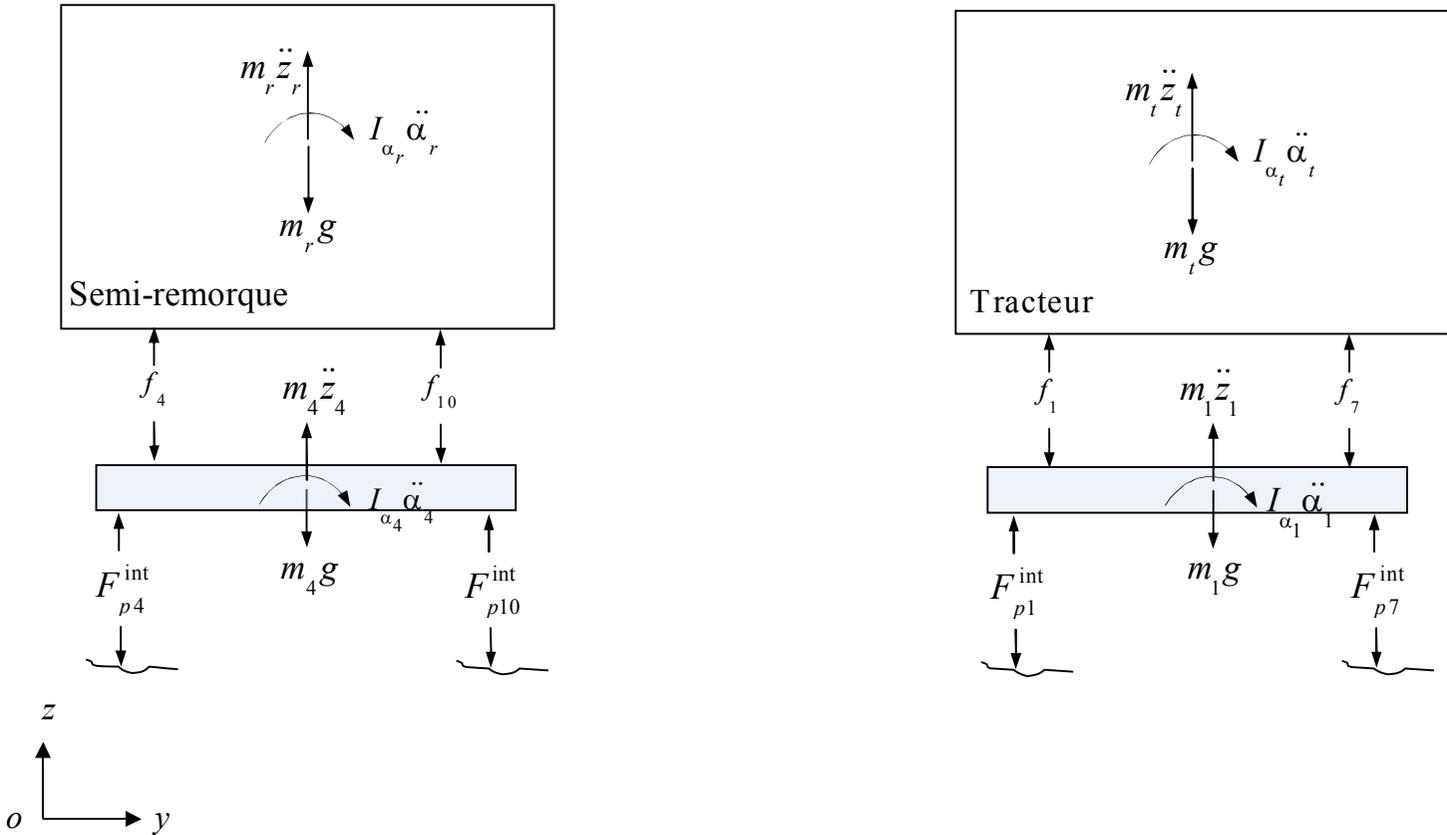


Fig.4.18. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments, vue de droite.

4.6.2.1. Schémas d'équilibre dynamique

Les figures 4.17 et 4.18 représentent le bilan des forces et des moments agissants sur les différentes masses et sur les blocs rigides du modèle. Les forces d'interaction dans les pneus sont :

$$\begin{aligned}
F_{p1}^{\text{int}} &= k_{p1}[z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + c_{p1}[\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\
F_{p2}^{\text{int}} &= k_{p2}[z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + c_{p2}[\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\
F_{p3}^{\text{int}} &= k_{p3}[z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + c_{p3}[\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\
F_{p4}^{\text{int}} &= k_{p4}[z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + c_{p4}[\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\
F_{p5}^{\text{int}} &= k_{p5}[z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + c_{p5}[\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\
F_{p6}^{\text{int}} &= k_{p6}[z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + c_{p6}[\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\
F_{p7}^{\text{int}} &= k_{p7}[z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] + c_{p7}[\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\
F_{p8}^{\text{int}} &= k_{p8}[z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] + c_{p8}[\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\
F_{p9}^{\text{int}} &= k_{p9}[z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] + c_{p9}[\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\
F_{p10}^{\text{int}} &= k_{p10}[z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] + c_{p10}[\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\
F_{p11}^{\text{int}} &= k_{p11}[z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] + c_{p11}[\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\
F_{p12}^{\text{int}} &= k_{p12}[z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] + c_{p12}[\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\text{Avec : } \quad \dot{w}_k + \dot{r}_k = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{x_k, y_k} + v \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dr}{dx} \right) \right|_{x_k, y_k} ; \quad k = 1, \dots, 12 \tag{4.66}$$

Les forces agissantes dans les suspensions sont déterminées en considérant les positions relatives ainsi que les vitesses de déplacement des roues et des cadres formant le système.

Ils sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
f_1 &= k_{s1}[z_{v1} - (z_1 + b_2 s_9 \alpha_1)] + c_{s1}[\dot{z}_{v1} - (\dot{z}_1 + b_2 s_9 \dot{\alpha}_1)] \\
f_2 &= k_{s2}[z_{v2} - (z_2 + b_2 s_{11} \alpha_2)] + c_{s2}[\dot{z}_{v2} - (\dot{z}_2 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_2)] \\
f_3 &= k_{s3}[z_{v3} - (z_3 + b_2 s_{11} \alpha_3)] + c_{s3}[\dot{z}_{v3} - (\dot{z}_3 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_3)] \\
f_4 &= k_{s4}[z_{v4} - (z_4 + b_2 s_{11} \alpha_4)] + c_{s4}[\dot{z}_{v4} - (\dot{z}_4 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4)] \\
f_5 &= k_{s5}[z_{v5} - (z_5 + b_2 s_{11} \alpha_6)] + c_{s5}[\dot{z}_{v5} - (\dot{z}_5 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5)] \\
f_6 &= k_{s6}[z_{v6} - (z_6 + b_2 s_{11} \alpha_1)] + c_{s6}[\dot{z}_{v6} - (\dot{z}_6 + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6)] \\
f_7 &= k_{s7}[z_{v7} - (z_1 - b_1 s_9 \alpha_1)] + c_{s7}[\dot{z}_{v7} - (\dot{z}_1 - b_1 s_9 \dot{\alpha}_1)] \\
f_8 &= k_{s8}[z_{v8} - (z_2 - b_1 s_{11} \alpha_2)] + c_{s8}[\dot{z}_{v8} - (\dot{z}_2 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_2)] \\
f_9 &= k_{s9}[z_{v9} - (z_3 - b_1 s_{11} \alpha_3)] + c_{s9}[\dot{z}_{v9} - (\dot{z}_3 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_3)] \\
f_{10} &= k_{s10}[z_{v10} - (z_4 - b_1 s_{11} \alpha_4)] + c_{s10}[\dot{z}_{v10} - (\dot{z}_4 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4)] \\
f_{11} &= k_{s11}[z_{v11} - (z_5 - b_1 s_{11} \alpha_5)] + c_{s11}[\dot{z}_{v11} - (\dot{z}_5 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5)] \\
f_{12} &= k_{s12}[z_{v12} - (z_6 - b_1 s_{11} \alpha_6)] + c_{s12}[\dot{z}_{v12} - (\dot{z}_6 - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6)]
\end{aligned} \tag{4.67}$$

La force au point d'encrage est fonction des élévations, des vitesses de bondissement, des positions angulaires ainsi que des vitesses de rotation des cadres formant le véhicule tracteur et la semi-remorque. Elle est donc calculée de la manière suivante :

$$f_e = k_e[(z_r - s_7\dot{\theta}_r) - (z_t + s_6\dot{\theta}_t)] + c_e[(\dot{z}_r - s_7\dot{\theta}_r) - (\dot{z}_t + s_6\dot{\theta}_t)] \quad (4.68)$$

Pour rendre les équations de mouvement homogènes avec les degrés de liberté choisis, il faut exprimer z_i , $i=1, \dots, 12$, en fonction de $z_t, \theta_t, \alpha_t, z_r, \theta_r$ et α_r comme suit :

$$\begin{aligned} z_{v1} &= z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t \\ z_{v2} &= z_{l1} - a_3 s_2 \theta_{l1} = z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_3 s_2 \theta_{l1} \\ z_{v3} &= z_{l1} + a_4 s_2 \theta_{l1} = z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t + a_4 s_2 \theta_{l1} \\ z_{v4} &= z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v5} &= z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v6} &= z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r \\ z_{v7} &= z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t \\ z_{v8} &= z_{l2} - a_3 s_2 \theta_{l2} = z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_2 s_{11} \alpha_t - a_3 s_2 \theta_{l2} \\ z_{v9} &= z_{l2} + a_4 s_2 \theta_{l2} = z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_2 s_{11} \alpha_t + a_4 s_2 \theta_{l2} \\ z_{v10} &= z_t + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_t \\ z_{v11} &= z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r \\ z_{v12} &= z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r \end{aligned} \quad (4.69)$$

Avec

$$\begin{aligned} z_{l1} &= z_t + b_2 s_{11} \alpha_t + a_2 s_1 \theta_t \\ z_{l2} &= z_t - b_1 s_{11} \alpha_t + a_2 s_1 \theta_t \end{aligned}$$

On remplace (4.69) dans (4.67), on obtient :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{s1}[z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] + c_{s1}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 f_2 &= k_{s2}[z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_3 s_2 \theta_{11} - z_2 - b_2 s_{11} \alpha_2] \\
 &\quad + c_{s2}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_3 s_2 \dot{\theta}_{11} - \dot{z}_2 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_2] \\
 f_3 &= k_{s3}[z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t + a_4 s_2 \theta_{11} - z_3 - b_2 s_{11} \alpha_3] \\
 &\quad + c_{s3}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t + a_4 s_2 \dot{\theta}_{11} - \dot{z}_3 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
 f_4 &= k_{s4}[z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + c_{s4}[\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 f_5 &= k_{s5}[z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + c_{s5}[\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 f_6 &= k_{s6}[z_t + s_5 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + c_{s6}[\dot{z}_t + s_5 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 f_7 &= k_{s7}[z_t + a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + c_{s7}[\dot{z}_t + a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 f_8 &= k_{s8}[z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_3 s_2 \theta_{12} - z_2 + b_1 s_{11} \alpha_2] \\
 &\quad + c_{s8}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_3 s_2 \dot{\theta}_{12} - \dot{z}_2 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_2] \\
 f_9 &= k_{s9}[z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - z_3 + b_1 s_{11} \alpha_3] + c_{s9}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - \dot{z}_3 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
 f_{10} &= k_{s10}[z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + c_{s10}[\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 f_{11} &= k_{s11}[z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + c_{s11}[\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 f_{10} &= k_{s12}[z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + c_{s12}[\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6]
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

4.6.2.2 Equations de mouvement

Les équations de mouvement des blocs rigides suspendues du tracteur et de la semi-remorque ainsi que des masses des essieux avec roues sont déterminées en appliquant la deuxième loi de Newton en translation et en rotation par rapport à leurs centres de masses.

Pour le véhicule tracteur, trois équations de mouvement sont déterminées comme suit :

- Equation de mouvement pour le bondissement :

$$m_t \ddot{z}_t + f_1 + f_2 + f_3 + f_7 + f_8 + f_9 - f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_t \ddot{z}_t + k_{s1}[z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] + c_{s1}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + k_{s2}[z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - a_4 b_2 s_{11} \alpha_2 - a_3 b_2 s_{11} \alpha_3] \\
 & + c_{s2}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - a_4 b_2 s_{11} \dot{\alpha}_2 - a_3 b_2 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
 & + k_{s6}[z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + c_{s6}[\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + k_{s7}[z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + a_4 b_1 s_{11} \alpha_2 + a_3 b_1 s_{11} \alpha_3] \\
 & + c_{s7}[\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + a_4 b_1 s_{11} \dot{\alpha}_2 + a_3 b_1 s_{11} \dot{\alpha}_3] \\
 & + k_e[z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] + c_e[\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t - s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

- Equation de mouvement pour le tangage :

$$I_\theta \ddot{\theta}_t - a_1 s_1 (f_1 + f_7) + a_2 s_1 (f_2 + f_3 + f_8 + f_9) - s_6 f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\theta_t} \ddot{\theta}_t - a_1 s_1 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] \\
 & - a_1 s_1 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & - a_1 s_1 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] \\
 & - a_1 s_1 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + a_2 s_1 k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_2 s_1 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & + a_2 s_1 k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_2 s_1 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - s_6 k_e [z_r - s_7 \theta_r - (z_t + s_6 \alpha_t)] - s_6 c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - (\dot{z}_t + s_6 \dot{\alpha}_t)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_t} \ddot{\alpha}_t + b_2 s_9 (f_1 + f_2 + f_3) - b_1 s_9 (f_7 + f_8 + f_9) = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_t} \ddot{\alpha}_t + b_2 s_9 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] \\
 & + b_2 s_9 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & + b_2 s_{10} k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + b_2 s_{10} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - b_1 s_9 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] \\
 & - b_1 s_9 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] \\
 & - b_1 s_{10} k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - b_1 s_{10} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Pour la semi-remorque, trois équations de mouvement sont déterminées comme suit :

- Equation de mouvement pour le bondissement :

$$m_r \ddot{z}_r + f_4 + f_5 + f_6 + f_{10} + f_{11} + f_{12} + f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_r \ddot{z}_r + k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + k_e [z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] + c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t - s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

- Equation de mouvement pour le tangage :

$$I_{\theta_r} \ddot{\theta}_r + s_3 (f_4 + f_{10}) + s_4 (f_5 + f_{11}) + s_5 (f_6 + f_{12}) - s_7 f_e = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_r} \ddot{\theta}_r + s_3 k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + s_3 c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + s_3 k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + s_3 c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + s_4 k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + s_4 c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + s_4 k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + s_4 c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + s_5 k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + s_5 c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & + s_5 k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + s_5 c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - s_7 k_e [z_r - s_7 \theta_r - z_t - s_6 \alpha_t] - s_7 c_e [\dot{z}_r - s_7 \dot{\theta}_r - \dot{z}_t + s_6 \dot{\alpha}_t] = 0
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_r} \ddot{\alpha}_r + b_2 s_{11} (f_4 + f_5 + f_6) - b_1 s_{11} (f_{10} + f_{11} + f_{12}) = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_r} \ddot{\alpha}_r + b_2 s_{11} k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] + b_2 s_{11} c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + b_2 s_{11} k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] + b_2 s_{11} c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + b_2 s_{11} k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] + b_2 s_{11} c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] - b_1 s_{11} c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] - b_1 s_{11} c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & - b_1 s_{11} k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] - b_1 s_{11} c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Pour les équations de mouvement des barres pivotantes

$$I_{\theta_{11}} \ddot{\theta}_{11} - a_3 s_2 f_2 + a_4 s_2 f_3 = 0 \tag{4.77}$$

$$I_{\theta_{12}} \ddot{\theta}_{12} - a_3 s_2 f_8 + a_4 s_2 f_9 = 0 \tag{4.78}$$

Pour les équations de mouvement des essieux du véhicule tracteur et de la semi-remorque, seul deux équations sont nécessaires pour chaque essieu, puisque les mouvements possibles sont le bondissement et le roulis. Les équations de mouvement pour le premier essieu sont les suivantes :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_1 \ddot{z}_1 + F_{p1}^{\text{int}} + F_{p7}^{\text{int}} - f_1 - f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & m_1 \ddot{z}_1 + k_{p1} [z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + c_{p1} [\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\ & + k_{p7} [z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] + c_{p7} [\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\ & - k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] - c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\ & - k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] - c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

- *Equation de mouvement pour le roulis :*

$$I_{\alpha_1} \ddot{\alpha}_1 + b_2 s_8 F_{p1}^{\text{int}} - b_1 s_8 F_{p7}^{\text{int}} - b_2 s_9 f_1 + b_1 s_9 f_7 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} & I_{\alpha_1} \ddot{\alpha}_1 + b_2 s_8 k_{p1} [z_1 + b_2 s_8 \alpha_1 - (w_1 + r_1)] + b_2 s_8 c_{p1} [\dot{z}_1 + b_2 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1)] \\ & - b_1 s_8 k_{p7} [z_1 - b_1 s_8 \alpha_1 - (w_7 + r_7)] - b_1 s_8 c_{p7} [\dot{z}_1 - b_1 s_8 \dot{\alpha}_1 - (\dot{w}_7 + \dot{r}_7)] \\ & - b_2 s_9 k_{s1} [z_t - a_1 s_1 \theta_t + b_2 s_9 \alpha_t - z_1 - b_2 s_9 \alpha_1] - b_2 s_9 c_{s1} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 - b_2 s_9 \dot{\alpha}_1] \\ & + b_1 s_9 k_{s6} [z_t - a_1 s_1 \theta_t - b_1 s_9 \alpha_t - z_1 + b_1 s_9 \alpha_1] + b_1 s_9 c_{s6} [\dot{z}_t - a_1 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_9 \dot{\alpha}_t - \dot{z}_1 + b_1 s_9 \dot{\alpha}_1] = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Les équations de mouvement pour le deuxième essieu sont les suivantes :

- *Equation de mouvement du bondissement :*

$$m_2 \ddot{z}_2 + F_{p2}^{\text{int}} + F_{p8}^{\text{int}} - f_2 - f_8 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_2 \ddot{z}_2 + k_{p2} [z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + c_{p2} [\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\
 & + k_{p8} [z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] + c_{p8} [\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\
 & - a_4 k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_4 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - a_4 k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_4 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_2} \ddot{\alpha}_2 + b_2 s_8 F_{p2}^{\text{int}} - b_1 s_8 F_{p8}^{\text{int}} + b_2 s_9 f_2 - b_1 s_9 f_8 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_2} \ddot{\alpha}_2 + b_2 s_{10} k_{p2} [z_2 + b_2 s_{10} \alpha_2 - (w_2 + r_2)] + b_2 s_{10} c_{p2} [\dot{z}_2 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p8} [z_2 - b_1 s_{10} \alpha_2 - (w_8 + r_8)] - b_1 s_{10} c_{p8} [\dot{z}_2 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_2 - (\dot{w}_8 + \dot{r}_8)] \\
 & - a_4 b_2 s_{11} k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_4 b_2 s_{11} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & + a_4 b_1 s_{11} k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_4 b_1 s_{11} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Les équations de mouvement pour le troisième essieu sont les suivantes :

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_3 \ddot{z}_3 + F_{p3}^{\text{int}} + F_{p9}^{\text{int}} - f_3 - f_9 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_3 \ddot{z}_3 + k_{p3} [z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + c_{p3} [\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\
 & + k_{p9} [z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] + c_{p9} [\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\
 & - a_3 k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & - a_3 k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_3} \ddot{\alpha}_3 + b_2 s_8 F_{p3}^{\text{int}} - b_1 s_8 F_{p9}^{\text{int}} + b_2 s_9 f_2 - b_1 s_9 f_9 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_3} \ddot{\alpha}_3 + b_2 s_{10} k_{p3} [z_3 + b_2 s_{10} \alpha_3 - (w_3 + r_3)] + b_2 s_{10} c_{p3} [\dot{z}_3 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p9} [z_3 - b_1 s_{10} \alpha_3 - (w_9 + r_9)] - b_1 s_{10} c_{p9} [\dot{z}_3 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_3 - (\dot{w}_9 + \dot{r}_9)] \\
 & - a_3 b_2 s_{11} k_{s2} [z_t + a_2 s_1 \theta_t + b_2 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 - b_2 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & - a_3 b_2 s_{11} c_{s2} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 - b_2 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] \\
 & + a_3 b_1 s_{11} k_{s7} [z_t + a_2 s_1 \theta_t - b_1 s_{11} \alpha_t - a_4 z_2 - a_3 z_3 + b_1 s_{11} (a_4 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)] \\
 & + a_3 b_1 s_{11} c_{s7} [\dot{z}_t + a_2 s_1 \dot{\theta}_t - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_t - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3 + b_1 s_{11} (a_4 \dot{\alpha}_2 + a_3 \dot{\alpha}_3)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Les équations de mouvement pour le quatrième essieu sont:

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_4 \ddot{z}_4 + F_{p4}^{\text{int}} + F_{p10}^{\text{int}} - f_4 - f_{10} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_4 \ddot{z}_4 + k_{p4} [z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + c_{p4} [\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\
 & + k_{p10} [z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] + c_{p10} [\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\
 & - k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] - c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & - k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] - c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] = 0
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_4} \ddot{\alpha}_4 + b_2 s_{10} F_{p4}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p10}^{\text{int}} + b_2 s_{11} f_4 - b_1 s_{11} f_{10} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_4} \ddot{\alpha}_4 + b_2 s_{10} k_{p4} [z_4 + b_2 s_{10} \alpha_4 - (w_4 + r_4)] + b_2 s_{10} c_{p4} [\dot{z}_4 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p10} [z_4 - b_1 s_{10} \alpha_4 - (w_{10} + r_{10})] - b_1 s_{10} c_{p10} [\dot{z}_4 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_4 - (\dot{w}_{10} + \dot{r}_{10})] \\
 & - b_2 s_{11} k_{s3} [z_r + s_3 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_4 - b_2 s_{11} \alpha_4] - b_2 s_{11} c_{s3} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_4] \\
 & + b_1 s_{11} k_{s8} [z_r + s_3 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_4 + b_1 s_{11} \alpha_4] + b_1 s_{11} c_{s8} [\dot{z}_r + s_3 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_4 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_4] = 0
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Les équations de mouvement pour le cinquième essieu sont :

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_5 \ddot{z}_5 + F_{p5}^{\text{int}} + F_{p11}^{\text{int}} - f_5 - f_{11} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_5 \ddot{z}_5 + k_{p5} [z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + c_{p5} [\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\
 & + k_{p11} [z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] + c_{p11} [\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\
 & - k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] - c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & - k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] - c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] = 0
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_5} \ddot{\alpha}_5 + b_2 s_{10} F_{p5}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p11}^{\text{int}} + b_2 s_{11} f_5 - b_1 s_{11} f_9 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & I_{\alpha_5} \ddot{\alpha}_5 + b_2 s_{10} k_{p5} [z_5 + b_2 s_{10} \alpha_5 - (w_5 + r_5)] + b_2 s_{10} c_{p5} [\dot{z}_5 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_5 + \dot{r}_5)] \\
 & - b_1 s_{10} k_{p11} [z_5 - b_1 s_{10} \alpha_5 - (w_{11} + r_{11})] - c_{p11} [\dot{z}_5 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_5 - (\dot{w}_{11} + \dot{r}_{11})] \\
 & - b_2 s_{11} k_{s4} [z_r + s_4 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_5 - b_2 s_{11} \alpha_5] - b_2 s_{11} c_{s4} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_5] \\
 & + b_1 s_{11} k_{s9} [z_r + s_4 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_5 + b_1 s_{11} \alpha_5] + b_1 s_{11} c_{s9} [\dot{z}_r + s_4 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_5 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_5] = 0
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Les équations de mouvement pour le dernier essieu sont :

- Equation de mouvement du bondissement :

$$m_6 \ddot{z}_6 + F_{p6}^{\text{int}} + F_{p12}^{\text{int}} - f_6 - f_{12} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 & m_6 \ddot{z}_6 + k_{p6} [z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + c_{p6} [\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\
 & + k_{p12} [z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] + c_{p12} [\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})] \\
 & - k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] - c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
 & - k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] - c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

- Equation de mouvement pour le roulis :

$$I_{\alpha_6} \ddot{\alpha}_6 + b_2 s_{10} F_{p2}^{\text{int}} - b_1 s_{10} F_{p12}^{\text{int}} + b_2 s_{11} f_6 - b_1 s_{11} f_{12} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}
& I_{\alpha_6} \ddot{\alpha}_6 + b_2 s_{10} k_{p6} [z_6 + b_2 s_{10} \alpha_6 - (w_6 + r_6)] + b_2 s_{10} c_{p6} [\dot{z}_6 + b_2 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_6 + \dot{r}_6)] \\
& - b_1 s_{10} k_{p12} [z_6 - b_1 s_{10} \alpha_6 - (w_{12} + r_{12})] - b_1 s_{10} c_{p12} [\dot{z}_6 - b_1 s_{10} \dot{\alpha}_6 - (\dot{w}_{12} + \dot{r}_{12})] \\
& - b_2 s_{11} k_{s5} [z_r + s_5 \theta_r + b_2 s_{11} \alpha_r - z_6 - b_2 s_{11} \alpha_6] - b_2 s_{11} c_{s5} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r + b_2 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 - b_2 s_{11} \dot{\alpha}_6] \\
& + b_1 s_{11} k_{s10} [z_r + s_5 \theta_r - b_1 s_{11} \alpha_r - z_6 + b_1 s_{11} \alpha_6] + b_1 s_{11} c_{s10} [\dot{z}_r + s_5 \dot{\theta}_r - b_1 s_{11} \dot{\alpha}_r - \dot{z}_6 + b_1 s_{11} \dot{\alpha}_6] = 0
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Après regroupement, on obtient le système suivant (voir Annexe 4) :

$$\left[\mathbf{M}_v \right] \left\{ \ddot{\mathbf{Z}}_v \right\} + \left[\mathbf{C}_v \right] \left\{ \dot{\mathbf{Z}}_v \right\} + \left[\mathbf{K}_v \right] \left\{ \mathbf{Z}_v \right\} = \left\{ \mathbf{F}_v^{\text{int}} \right\} \tag{4.90}$$

4.7 Conclusion

Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, quatre modèles tridimensionnelles de camions simples et semi-remorque ont été développés selon la configuration des essieux tandem à l'arrière. Les équations de mouvement de ces modèles ont été développées en utilisant simplement la seconde loi de Newton. Les forces dans les éléments du type ressort agissent sur les blocs rigides sont calculées en considérant les élévations des corps ainsi que leurs positions angulaires en tangage et en roulis. Les forces dans les éléments du type amortisseurs sont calculées à partir des vitesses de déplacement des corps, tant en translation qu'en rotation. Trois exemples du mode d'obtention des équations de mouvement ont été présentés afin de bien comprendre la méthode employée. Ces modèles seront utilisés par la suite pour l'étude du phénomène d'interaction entre la dalle de roulement du pont et le véhicule.

CHAPITRE 5

Modélisation de la dalle de roulement du pont, du
profil de la chaussée et résolution des équations
de mouvement

Modélisation de la dalle de roulement du pont, du profil de la chaussée et résolution des équations de mouvement

5.1 Introduction

Il existe trois principales méthodes pour analyser le comportement dynamique des dalles de roulement : la méthode des éléments finis, la méthode des bandes finies et la méthode basée sur la théorie des plaques isotropes ou orthotropes. Plusieurs types de sections des tabliers de ponts de chaussée peuvent être homogénéisés à des plaques orthotropes de propriétés équivalentes.

Dans ce chapitre, la dalle de roulement du pont est modélisée donc par une plaque mince orthotrope multi-travée de propriétés équivalentes, supportée par des supports linéaires élastiques. Les rigidités des appuis sont déjà tenues en compte dans les vibrations libres présentées dans le chapitre 3. La méthode modale est utilisée pour résoudre l'équation de mouvement de la dalle de roulement. La détermination des fréquences et des modes propres de la dalle de roulement est bien détaillée dans le chapitre 3. Le profil de la chaussée est modélisé par une Densité Spectrale de Puissance (DSP), caractérisée par une variable aléatoire et un coefficient de rugosité. Nous avons présenté la méthode d'intégration numérique de Newmark pour la résolution des équations de mouvement couplées en utilisant un processus de calcul itératif.

5.2 Modélisation de la dalle de roulement

5.2.1 Modèle mathématique de la dalle de roulement

La dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées équivalente de longueur l , de largeur b , d'épaisseur h et de masse par unité de surface ρh . Tous les appuis sont supposés élastiques, linéaires et perpendiculaires au largeur de la dalle de roulement (Fig. 5.1). Le comportement des ressorts modélisant les appuis est supposé linéaire. La dalle de roulement est libre au bord $y = 0, y = b$.

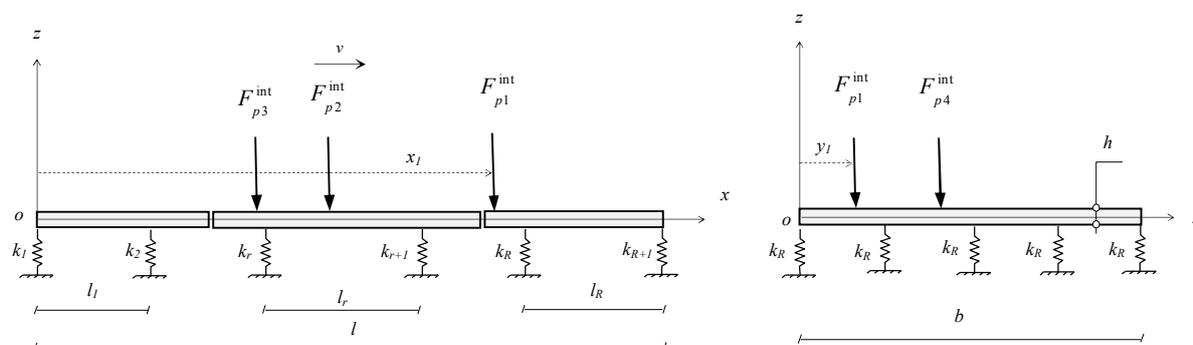


Fig. 5.1. Dalle de roulement modélisée par une plaque mince orthotrope multi-travées à supports élastiques.

5.2.2 Equation de mouvement

L'équation du **mouvement vertical** de la dalle s'écrit alors [31]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{N_f} F_{pk}^{\text{int}} \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) \quad (5.1)$$

Dans l'équation (5.1), $w(x,y,t)$ est le déplacement vertical de la dalle de roulement, ρh est la masse par unité de surface de la dalle de roulement, c est l'amortissement de la dalle de roulement, D_x , D_y et H sont les rigidités équivalentes de la dalle de roulement (voir chap. 3 et annexe 1), F_{pk}^{int} est la $k^{\text{ème}}$ force d'interaction de position (x_k, y_k) , N_f est les nombre de forces d'interaction en action sur la dalle de roulement et δ est l'opérateur de Dirac.

5.2.3 Résolution de l'équation de mouvement

La résolution de l'équation du mouvement (5.1) est basée sur la méthode de superposition modale. On peut exprimer le déplacement vertical de la dalle de roulement comme suit :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (5.2)$$

Avec $\phi_{ij}(x,y)$ sont les modes propres de la dalle de roulement multi-travées à **supports élastiques**, associés aux fréquences propres ω_{ij} et qui sont présentés en détail dans le chapitre 3, $q_{ij}(t)$ sont les variables modales à déterminer. Il faut noter ici que la série (5.2) peut être traquée à des modes n et m susceptibles d'être excités dans la pratique.

Remplaçons l'expression (5.2) dans l'équation (5.1), puis multiplions les deux membres par $\phi_{rs}(x,y)$ et intégrons sur toute la surface de la dalle, on obtient :

$$\begin{aligned} & \rho h \iint_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x,y) \phi_{rs}(x,y) ds \ddot{q}_{ij}(t) + c \iint_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x,y) \phi_{rs}(x,y) ds \dot{q}_{ij}(t) + \\ & D_x \iint_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial x^4} \phi_{rs}(x,y) ds q_{ij}(t) + 2H \iint_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \phi_{rs}(x,y) ds q_{ij}(t) + \\ & D_y \iint_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial y^4} \phi_{rs}(x,y) ds q_{ij}(t) = - \iint_s \sum_{k=1}^{N_f} F_{pk}^{\text{int}} \phi_{rs}(x,y) \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) ds \end{aligned} \quad (5.3)$$

En utilisant les relations d'orthogonalité des modes propres suivantes :

$$\begin{aligned}
 \rho h \iint_s \phi_{ij}(x,y) \phi_{rs}(x,y) ds &= \begin{cases} 0, & \text{pour } i, j \neq r, s \\ M_{ij} = \rho h \iint_s \phi_{ij}^2(x,y) ds, & \text{pour } i, j = r, s \end{cases} \\
 c \iint_s \dot{\phi}_{ij}(x,y) \dot{\phi}_{rs}(x,y) ds &= \begin{cases} 0, & \text{pour } i, j \neq r, s \\ C_{ij} = c \iint_s \dot{\phi}_{ij}^2(x,y) ds = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij}, & \text{pour } i, j = r, s \end{cases} \\
 \iint_s \left[D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial y^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \phi_{rs}(x,y) ds &= \begin{cases} 0, & \text{pour } i, j \neq r, s \\ \omega_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij}, & \text{pour } i, j = r, s \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

et la propriété de l'opérateur de Dirac suivante :

$$-\iint_s \sum_{k=1}^{Nf} F_{pk}^{\text{int}} \phi_{ij}(x,y) \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) ds = -\sum_{k=1}^{Nf} F_{pk}^{\text{int}} \phi_{ij}(x_k, y_k) = F_{ij} \tag{5.5}$$

on obtient l'équation modale suivante :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij}(t) + C_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + K_{ij} q_{ij}(t) = F_{ij}(t) \tag{5.6}$$

Soit en dérivant par $[M_{ij}]^{-1}$

$$\ddot{q}(t) + 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 q_{ij}(t) + \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}(t) \tag{5.7}$$

Avec M_{ij} , C_{ij} , K_{ij} sont les masses les amortissement et les rigidités modaux, F_{ij} sont les forces modales.

5.3 Modélisation du profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est un paramètre très important qui doit être pris en compte dans la modélisation. Les irrégularités de la voie de roulement perturbent d'une manière importante le mouvement vertical du camion en augmentant d'une manière importante l'amplitude des forces d'interaction. Cela provoque un impact important sur la chassée. Il existe deux types d'approches pour définir les caractéristiques probabilistes des irrégularités d'une chaussée : l'approche basée sur la fonction d'auto corrélation et l'approche basée sur la Densité Spectrale. Les mesures expérimentales de plusieurs chaussées des dalles de roulement ont montré que le profil statique $r(x_k)$ peut être considéré comme un processus aléatoire stationnaire gaussien de moyenne nulle [30]. La fonction de Densité Spectrale de Puissance, associée à ce processus est donnée par l'expression [30] :

$$DSP = S_r(\omega_s) = \begin{cases} A_r \left(\frac{\omega_{s0}}{\omega_s} \right)^{-2} & \text{pour } \omega_s < \omega_{s0} \\ A_r \left(\frac{\omega_s}{\omega_{s0}} \right)^{-2} & \text{pour } \omega_s \geq \omega_{s0} \end{cases} \quad (5.8)$$

Avec ω_s est la pulsation spectrale (nombre d'onde) en cycle/m, ω_{s0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s0} = 1/2\pi$) en cycle/m, $A_r(\omega_{s0})$ est un coefficient de rugosité spectrale en cycle/m³ qui caractérise l'état de la chaussée déterminé expérimentalement (Tab 5.1).

Tab. 5.1 : Valeurs expérimentales de A_r selon l'état de la chaussée [30]

Etat de la chaussée	Très bonne	Bonne	Moyenne	Mauvaise
$A_r \times 10^{-6}$ (m ³ /cycle)	$A_r < 5$	$5 < A_r < 20$	$20 < A_r < 80$	$80 < A_r < 256$

La Figure 5.2 représente la variation de la densité spectrale de puissance $S_r(\omega_{s0})$ en fonction de la pulsation spectrale ω_s pour différents états de chaussée. Les fonctions de DSP sont décrites par deux segments de droite dans un graphique où les échelles sont logarithmiques. La fréquence de discontinuité ω_{s0} se situe à $1/2\pi$ cycle/m.

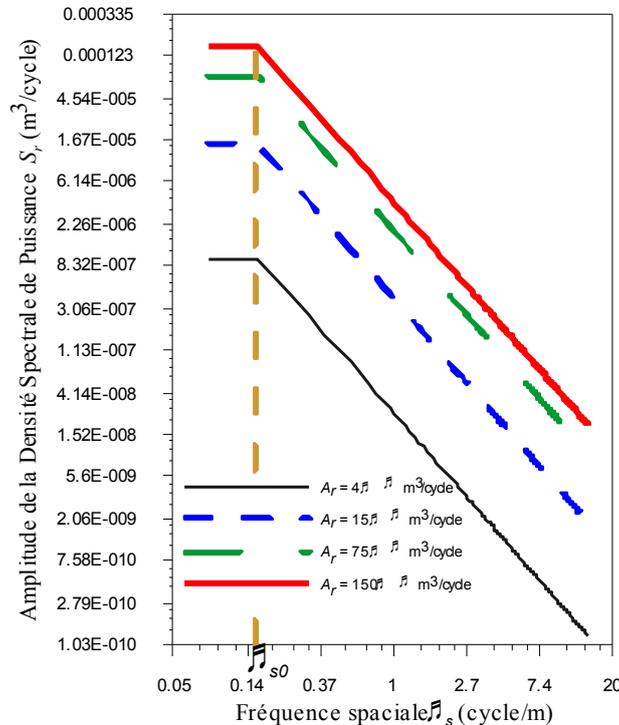


Fig. 5.2. Variation de l'amplitude de la Densité Spectrale de Puissance pour plusieurs valeurs de A_r [36].

En considérant que le profil $r(x)$ de la chaussée est un processus aléatoire stationnaire gaussien de moyenne nulle, de densité spectrale $S_r(\omega_s)$, où l'on exprime dans la base fréquentielle par la transformée de Fourier :

$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega_s) e^{j\omega_s x} d\omega_s \quad (5.9)$$

Où $R(\omega_s)$ est la représentation fréquentielle de $r(x)$. Si l'on utilise un mode de représentation à l'aide des fonctions spectrales réelles, le processus est alors approximé par une discrétisation fréquentielle sur N points à l'aide de la série trigonométrique :

$$r(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\omega_{si} x + \theta_i) \quad (5.10)$$

La phase θ_i est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 2π . D'après [31], on a pour un processus centré de moyenne nulle :

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{4S_r(\omega_{si}) \Delta\omega_s} \quad (5.11)$$

Avec $\omega_{si} = 2\pi i/L_c$ et L_c est la longueur d'échantillonnage qui égale généralement deux fois la longueur de la chaussée.

La transformée de Fourier discrète du signal $r(x)$ est donc définie à chaque point de contact k et pour chaque pulsation ω_{si} et variable aléatoire θ_i par :

$$r(x_k) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4S_r(\omega_{si}) \Delta\omega_s} \cos(\omega_{si} x_k + \theta_i) \quad (5.12)$$

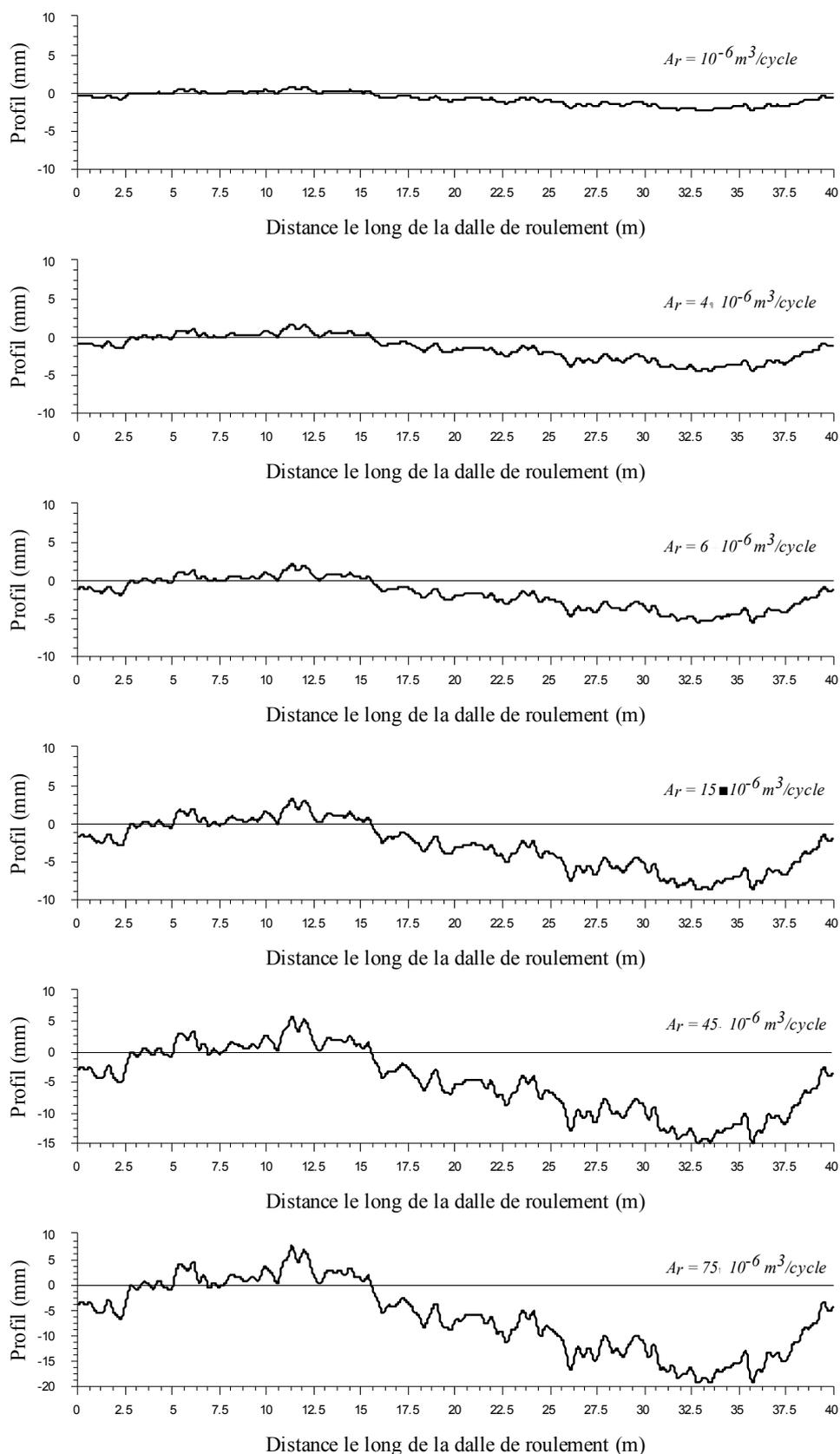
L'expression de la valeur discrète de la DSP est :

$$S_r(\omega_{si}) = A_r \left(\frac{2\pi i}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2} \quad (5.13)$$

On remplace la valeur discrète de la DSP (5.12) dans l'expression (5.11), on obtient :

$$r(x_k) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi i}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2} \frac{2\pi}{L_c}} \cos(\omega_{si} x_k + \theta_i) \quad (5.14)$$

Un profil est présenté pour sept coefficients de rugosité spectrale sur la figure 5.3, sur un tronçon de chaussée de 40 m en utilisant l'expression (5.13).



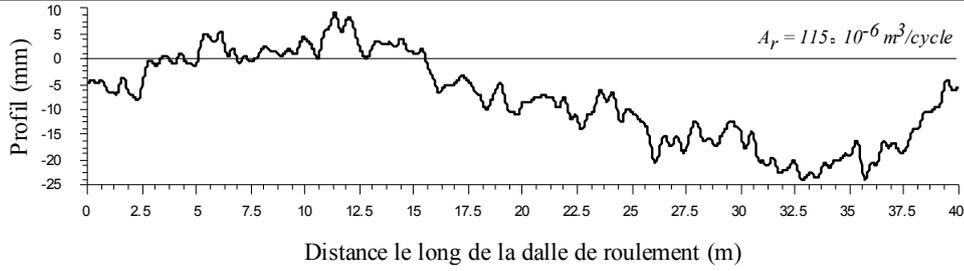


Fig. 5.3. Différents profils de la chaussée générés à partir de l'expression (5.13) pour plusieurs valeurs de A_r .

5.4 Intégration numérique des équations du mouvement couplées dalle de roulement-camion

Pour résoudre les équations du mouvement couplées dalle de roulement - véhicule, nous utilisons la méthode d'intégration de Newmark. A l'instant $t + \Delta t$, l'équation (4.20) qui régie le mouvement du véhicule s'écrit:

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (5.15)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses respectivement sont [23] :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (5.16)$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (5.17)$$

Avec γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt est le pas du temps d'intégration. Remplaçons les expressions (5.16) et (5.17) dans l'équation (5.15), après factorisation on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (5.18)$$

Avec :

$$[S_v] = [M_v] + \gamma \Delta t [C_v] + \beta \Delta t^2 [K_v] \quad (5.19)$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (5.20)$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (5.21)$$

Multiplions l'équation (5.18) par $[S_v]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} \quad (5.22)$$

Avec :

$$\{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1} \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t}; [U_v] = [S_v]^{-1} [C_v]; [V_v] = [S_v]^{-1} [K_v] \quad (5.23)$$

De même, l'équation du mouvement de la dalle de roulement (5.7) utilisée dans le chapitre 5, à l'instant $t+\Delta t$ s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (5.24)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés de la dalle de roulement, à l'instant $t+\Delta t$ sont:

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (5.25)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (5.26)$$

Remplaçons les expressions (5.25) et (5.26) dans l'équation (5.24), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left(\frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{*(t+\Delta t)} \right) / (1 + 2\Delta t \xi_{ij} \omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2) \quad (5.27)$$

Avec :

$$q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}$$

$$\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)}$$

5.5 Algorithme de résolution

- Lecture des données de la dalle de roulement : $l, b, h_c, E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}, c, \rho_c, l_1, l_2$
- Lecture des données du véhicule : $m_k \quad k=1, \dots, 6, m_v, m_{ll}, m_{ll}, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \theta_{ll}, \theta_{l2}, I_{\theta v}, I_{\theta v}, k_{pk}, c_{pk}, k_{sk}, c_{sk}, k=1, 2, \dots, 6$
- Lecture des données de la chaussée : $A_p, \theta_i \quad i=1, \dots, N$
- Lecture des coordonnées du point de calcul du déplacement (x_c, y_c)

Calcul préliminaire

- Calcul de : $D_x, D_y, H, D_{xy}, \bar{m} = \rho h, L_c, \omega_{s0}, \Delta \omega_s$
- Choix du nombre de modes : n, m
- Calcul de ξ_j
- Calcul des fréquences propres $\omega_{ij} \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$
- Calcul des modes propres : $\phi_j(x_c, y_c)$
- Choix de la vitesse de roulement : v_x
- Choix du pas de temps Δt , des paramètres γ, β , et de la tolérance ε
- Calcul des masses, des rigidités et des amortissements modaux de la dalle de roulement: M_{ij}, C_{ij}, K_{ij}
- Calcul des matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du véhicule: $[M_v][C_v],[K_v]$
- Choix des conditions initiales de la dalle de roulement : $\{q\}_0, \{\dot{q}\}_0, \{\ddot{q}\}_0$, Véhicule $\{Z_v\}_0, \{\dot{Z}_v\}_0, \{\ddot{Z}_v\}_0$
- Détermination des positions des roues selon $y : y_k, k=1, \dots, 6$

Pour chaque pas du temps $t = t + \Delta t$:

- Détermination de la position du véhicule sur le pont : $x_k = v_x t_k, k=1, \dots, 6$
- Calcul en chaque point de contact k : $r(x_k), r'(x_k)$
- Calcul des déplacements et vitesses du pont et du véhicule:

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t; \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t$$

$$q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}; \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)}$$

Pour chaque itération : $\bar{k} = \bar{k} + 1$

- Approximation des déplacements, vitesses et accélérations du pont et du véhicule à partir de l'itération précédente
- Calcul en chaque point de contact k : $w(x_k, y_k), \dot{w}(x_k, y_k), \dot{r}(x_k)$
- Calcul du vecteur des forces d'interactions $\{F\}^{\text{int}}$
- Calcul du vecteur $\{F_g\}$
- Résolution par la méthode de Newmark :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F^{\text{int}}\} + \{F_g\}$$
- Calcul des forces d'interactions agissant sur la dalle de roulement en chaque point de contact : $\{F_{pk}^{\text{int}}\} = k_{pk} (\omega_k + r_k - z_k) + c_{pk} (\dot{\omega}_k + \dot{r}_k - \dot{z}_k)$
- Résolution par la méthode de Newmark :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij} + \omega_{ij}^2 q_{ij} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}, \text{ avec } F_{ij} = -\sum_{k=1}^4 F_{pk}^{\text{int}}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k)$$
- Calcul du déplacement de la dalle de roulement :

$$w_c(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x_c, y_c) q_{ij}(t)$$
- Test de convergence : Si non $w_c^{(\bar{k}+1)}(x_c, y_c, t) - w_c^{(\bar{k})}(x_c, y_c, t) \leq \varepsilon$ Si oui alors :
- Calcul des paramètres dynamiques voulus.

Fig. 5.4. Algorithme de résolution de l'interaction dalle de roulement/véhicule.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque mince orthotrope équivalente multi-travées à supports élastiques représentant les appareils d'appui. La dalle est traversée par plusieurs forces qui sont les forces d'interaction entre les pneus et la dalle de roulement. Le profil de la chaussée est modélisé par une DSP, caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire uniformément distribuée en 0 et 2π . L'intégration numérique des équations différentielles du mouvement dalle de roulement-camion est effectuée par la méthode de Newmark. Comme les équations de mouvement sont couplées, une procédure de calcul itératif est utilisée.

CHAPITRE 6

Analyse des réponses dynamiques

Chapitre 6

Analyse des réponses dynamiques**6.1 Introduction**

Ce chapitre est focalisé sur l'analyse des réponses dynamiques de la dalle de roulement et du camion. Pour cela, nous avons élaboré deux programmes en langage FORTRAN, capables de simuler le passage du camion sur la dalle de roulement. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la dalle de roulement et des deux modèles de camion à 9 et à 11 ddl sont présentées. Il faut noter que le tablier du pont est éventuellement remplacé par une plaque mince orthotrope équivalente à support élastiques. Deux définitions du FAD et trois trajectoires du camion sont utilisées pour la simulation et le calcul. Nous avons présenté au départ quelques réponses dynamiques pour la dalle et le camion. Nous avons étudié par la suite, l'influence de plusieurs paramètres sur les réponses dynamique dalle /camion, sur la distribution du FAD sur la dalle et sur les forces d'interactions à savoir : la vitesse de passage, le mode de chargement, la masse du camion, le profil de la chaussée et le modèle du camion. D'après les résultats obtenus, le paramètre le plus important qui influence sur les réponses dynamique, sur le FAD et sur les forces d'interactions est bien le profil de la chaussée.

6.2 Caractéristiques de la dalle de roulement

Les caractéristiques géométriques et mécaniques la dalle de roulement utilisées dans les calculs, sont présentées sur la figure 6.1 et le tableau 6.1. Les points de calcul, variant du 1 jusqu'à 10 sont utilisés pour calculer les Facteurs d'Amplification Dynamique (FAD).

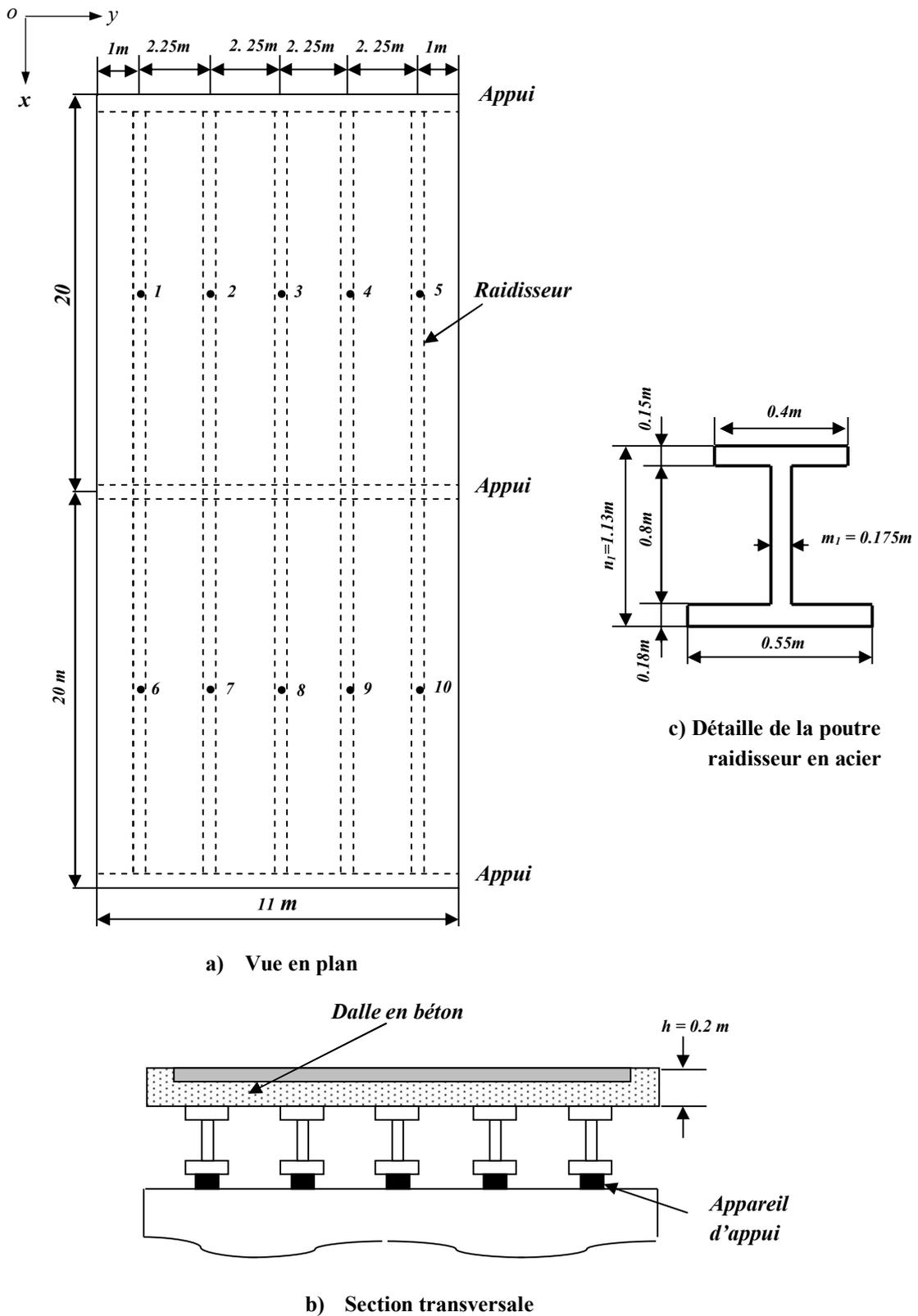


Fig. 6.1. Dalle de roulement à deux travées reposant sur des appareils d'appui élastiques

Tab. 6.1 : Données des caractéristiques mécaniques et géométriques de la dalle de roulement [30]

Dalle de roulement en béton :	
Longueur	40 m
Largeur	11 m
Epaisseur	0.2 m
Module d'élasticité	$2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densité de masse	2300 Kg/m^3
Rapport de Poisson	0.33
Module de cisaillement	$78.9473 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
Raidisseur en acier :	
Nombre	5
Distance entre deux raidisseurs	2.25 m
Hauteur de l'âme	0.8 m
Epaisseur de l'âme	0.175 m
Largeur de semelle	0.55 m
Epaisseur de la semelle	0.18 m
Largeur du sommet	0.4 m
Epaisseur du sommet	0.15 m
Densité de masse de l'acier	7850 Kg/m^3

Le tablier du pont est considéré comme un matériau composite, composé d'une portion de béton (dalle de roulement) et une portion d'acier (poutres raidisseurs). Il est éventuellement remplacé par une plaque orthotrope équivalente (**voir annexe 2**) possédant les caractéristiques suivantes :

$$l = 40 \text{ m}, h = 0.3358, \rho = 4546.085 \text{ Kg/m}^3, \nu_{xy} = 0.33, D_x = 11.153526 \times 10^8 \text{ Nm},$$

$$D_y = 14.01931 \times 10^6 \text{ Nm}, D_{xy} = 8.45047 \times 10^6 \text{ Nm}, H = 2.1527522 \times 10^7 \text{ Nm},$$

6.3 Caractéristique des modèles de véhicule

Deux modèles de véhicule ont été retenus pour le calcul des réponses dynamique : un modèle a essieu tandem à 9 degrés de liberté et un modèle à 11 degrés de liberté. Les

caractéristiques géométriques et mécaniques de ces deux modèles sont présentées dans le tableau 6.2.

Tab.6.2 : Paramètres des modèles de véhicules (Voir Figs. 4.6 et 4.8)

Définition	Paramètre	Modèle 9 ddl	Modèle 11 ddl
Géométrie :			
Emplacement entre l'essieu avant et l'essieu tandem (m)	s_1	5.55	5.55
Emplacement entre les roues de l'essieu tandem (m)	s_2	1.44	1.44
Emplacement entre les roues du même essieu (m)	s_3	1.8	1.8
Excentricités	a_1	0.71	0.71
	a_2	0.29	0.29
	a_3	0.5	0.5
	a_4	0.5	0.5
	b_1	0.5	0.5
	b_2	0.5	0.5
Masses et inerties :			
Du bloc rigide du véhicule (kg)	m_v	24800	24800
De la liaison ente essieux (kg)	$m_{l_1} = m_{l_2}$	-	100
Des roues avec essieu avant (kg)	$m_1 = m_4$	800	800
Des roues avec le premier essieu arrière (kg)	$m_2 = m_5$	1200	1200
Des roues avec le premier essieu arrière (kg)	$m_3 = m_6$	1200	1200
Moment d'inertie de tangage ($kg\ m^2$)	I_{θ_v}	241359	241359
Moment d'inertie de roulis ($kg\ m^2$)	I_{α_v}	34878.46	34878.46
Moment d'inertie de la barre pivotante ($kg\ m^2$)	$I_{\theta_{r1}} = I_{\theta_{r2}}$	-	75
Rigidités :			
Des suspensions avant (N/m)	$k_{s_1} = k_{s_3}$	520000	-
	$k_{s_2} = k_{s_4}$	-	520000
Des essieux tandem (N/m)	$k_{s_2} = k_{s_4}$	2.348×10^6	-
	$k_{s_3} = k_{s_5}$	-	1.174×10^6
	$k_{s_4} = k_{s_6}$	-	1.174×10^6

	$k_{s_3} = k_{s_6}$		
Des pneus avant (N/m)	$k_{p_2} = k_{p_4}$	2×10^6	2×10^6
Des pneus du premier essieu arrière (N/m)	$k_{p_2} = k_{p_5}$	4×10^6	4×10^6
Des pneus du deuxième essieu arrière (N/m)	$k_{p_3} = k_{p_6}$	4×10^6	4×10^6
Amortissements :			
De la suspension avant (Ns/m)	$c_{s_1} = c_{s_3}$ $c_{s_1} = c_{s_4}$	12194 -	- 12194
Des essieux tandem (Ns/m)	$c_{s_1} = c_{s_4}$ $c_{s_2} = c_{s_5}$ $c_{s_3} = c_{s_6}$	40715 - -	- 20357 20357
Des pneus avant (Ns/m)	$c_{p_1} = c_{p_4}$	4000	4000
Des pneus du premier essieu arrière (Ns/m)	$c_{p_2} = c_{p_5}$	6928	6928
Des pneus du deuxième essieu arrière (Ns/m)	$c_{p_3} = c_{p_6}$	6928	6928

6.4 Caractéristiques du profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est modélisé par une densité spectrale de puissance, caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire, uniformément distribuée entre 0 et 2π . Les valeurs expérimentales des coefficients de rugosité spectrale sont données dans le tableau 6.3.

Tableau. 6.3 : Valeurs expérimentales de A_r selon l'état de la chaussée [30]

Etat de la chaussée	Très bonne	Bonne	Moyenne	Mauvaise
$A_r \times 10^{-6}$ (m ³ /cycle)	$A_r < 5$	$5 < A_r < 20$	$20 < A_r < 80$	$80 < A_r < 256$

6.5 Définition du facteur d'amplification dynamique FAD

Le Facteur d'Amplification Dynamique (FAD) est un paramètre important pour représenter les effets dynamiques provoqués dans la dalle de roulement par l'action du trafic à partir des effets statiques [29]. Le FAD est défini comme étant le rapport entre la valeur maximale de la réponse dynamique, pour une trajectoire spécifique du camion, sur la réponse statique maximale pour la même trajectoire (Fig. 6.2).

$$FAD^{(+)} = \frac{R_{DYN\max}^{(+)}}{R_{STA\max}^{(+)}} \quad , \quad FAD^{(-)} = \frac{R_{DYN\max}^{(-)}}{R_{STA\max}^{(-)}} \quad (6.1)$$

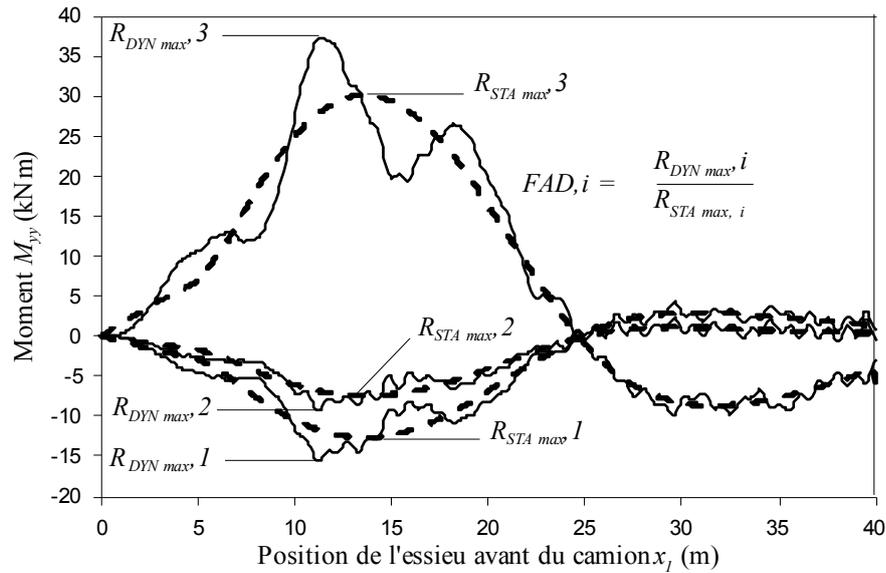


Fig.6.2. Définition couramment utilisée du Facteur d’amplification dynamique (FAD), point 3, $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trois trajectoires.

Les réponses dynamiques peuvent être des déplacements verticaux ou des moments fléchissant. L’utilisation des moments fléchissant est préféré car, elle donne des facteurs un peut basses :

$$M_{yy}(x, y, t) = -(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) + v_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t)) \tag{6.2}$$

L’application de l’équation (6.2) aux effets dans une dalle de roulement conduit souvent à des FAD inférieurs dans les sections déterminées par rapport aux autres sections. En effet, la valeur faible des effets statiques dans les zones peu sollicitées génère des FAD grands [29].

Une autre définition adaptée consiste à utiliser la réponse statique maximale d’enveloppe pour plusieurs trajets du camion. Les FAD sont alors définis par les relations suivantes [29] :

$$FAD_{ENV}^{(+)} = \frac{R_{DYN\ max}^{(+)}}{R_{ENV\ sta}^{(+)}} \quad , \quad FAD_{ENV}^{(-)} = \frac{R_{DYN\ max}^{(-)}}{R_{ENV\ sta}^{(-)}} \tag{6.3}$$

Où $R_{DYN\ max}$ représente pour un point, la valeur maximale de la réponse dynamique pour une trajectoire spécifique du camion. $R_{STA\ max}$ représente pour un point, la valeur sur l’enveloppe déterminé par les réponses statiques obtenues pour toutes les trajectoires, que peut emprunter le camion (Fig.6.3 et Tab.6.3).

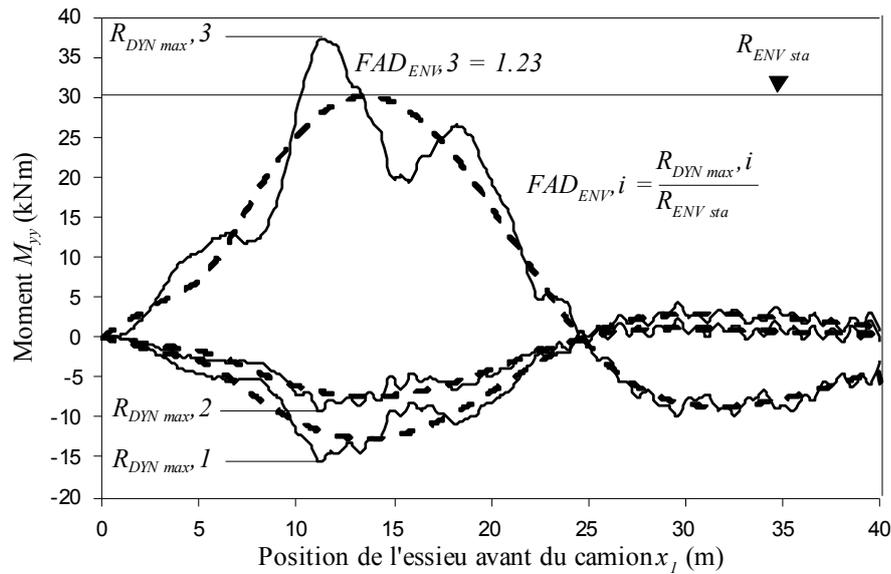


Fig.6.3. Définition adoptée du Facteur d’amplification dynamique (FAD), point 3, $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trois trajectoires

Tab.6.3 : Trajectoires utilisées pour la simulation

Trajectoire	$y_1 = y_2 = y_3$ (m)	$y_4 = y_5 = y_6$ (m)
Bord	1	2.8
Intermédiaire	1.35	3.15
Centre	3.7	5.5

6.6. Réponses dynamique dalle de roulement et camion

Les figures (6.4) et (6.5) représentent le déplacement vertical de la dalle de roulement calculé au centre des travées une et deux (point 3 et point 8) en fonction de la position de l’essieu avant. Le camion traverse la dalle de roulement à une vitesse de roulement $v = 60$ km/h. Le déplacement statique est obtenu lorsque le camion traverse la dalle de roulement à une vitesse de roulement très faible ($v = 10^{-4}$ km/h). Le camion roule sur la trajectoire bord sur une chaussée en bonne état ($A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle). Le déplacement vertical de la dalle de roulement est influencé pendant le parcours de camion sur toute la longueur de la dalle.

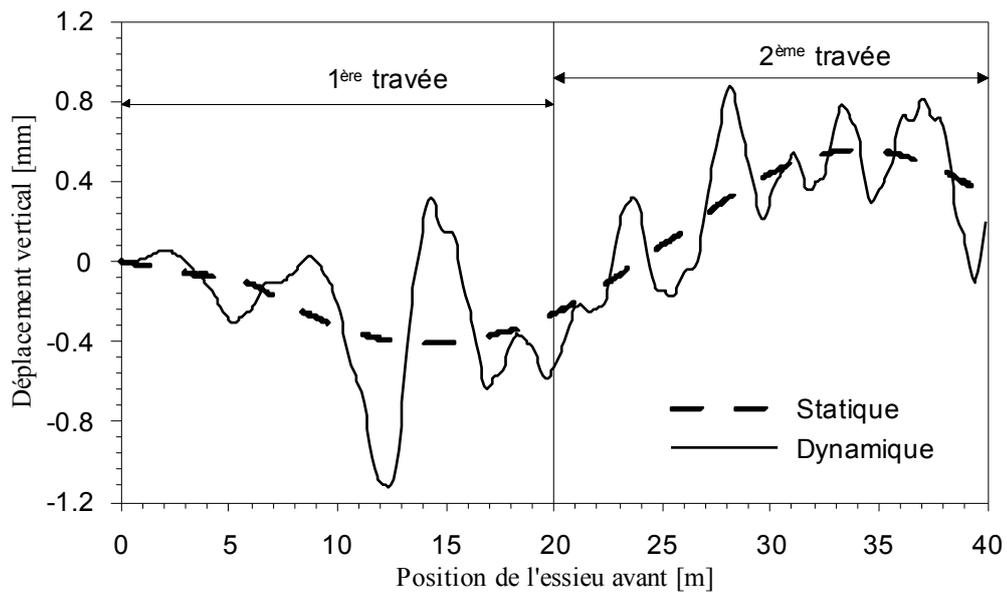


Fig.6.4. Déplacement vertical de la dalle de roulement au milieu de la travée 1 (point 3), $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire bord.

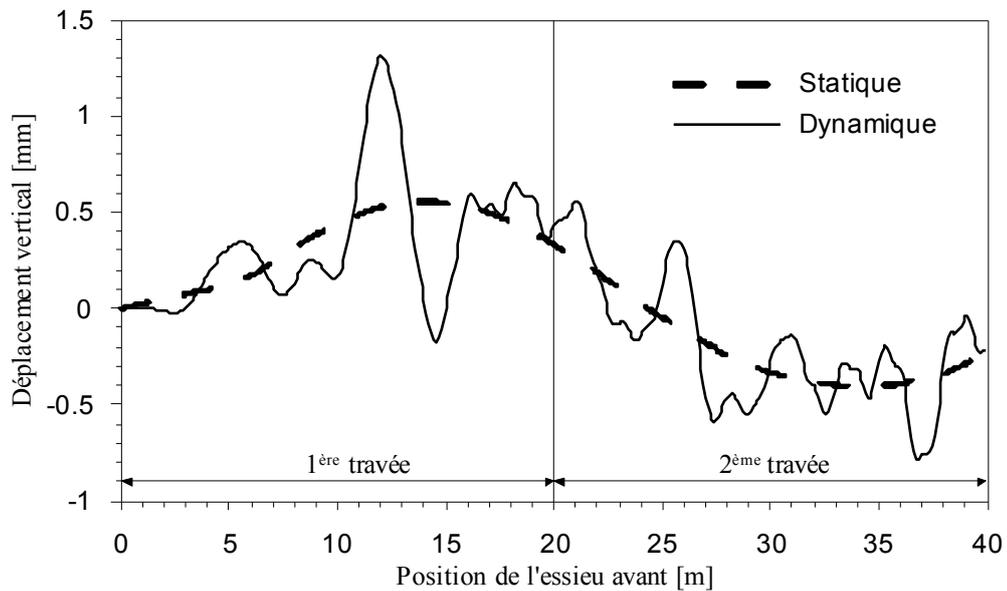


Fig.6.5. Déplacement vertical de la dalle de roulement au milieu de la travée 2 (point 8), $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire bord

Les figures (6.6) et (6.7) illustrent le déplacement vertical des masses des roues droite et gauche respectivement en fonction de la position de l'essieu avant, le camion roule a une vitesse égale a 60 km/h sur une chaussée en très bonne état ($A_r = 4 \times 10^{-6}$ m³/cycle) sur la

trajectoire bord. On constate que les déplacements des masses modélisant l'essieu tandem sont de la même allure. On remarque aussi que les déplacements verticaux des masses des roues avec les essieux avant sont de même allure mais se différencient de ceux des masses des roues avec essieux arrière.

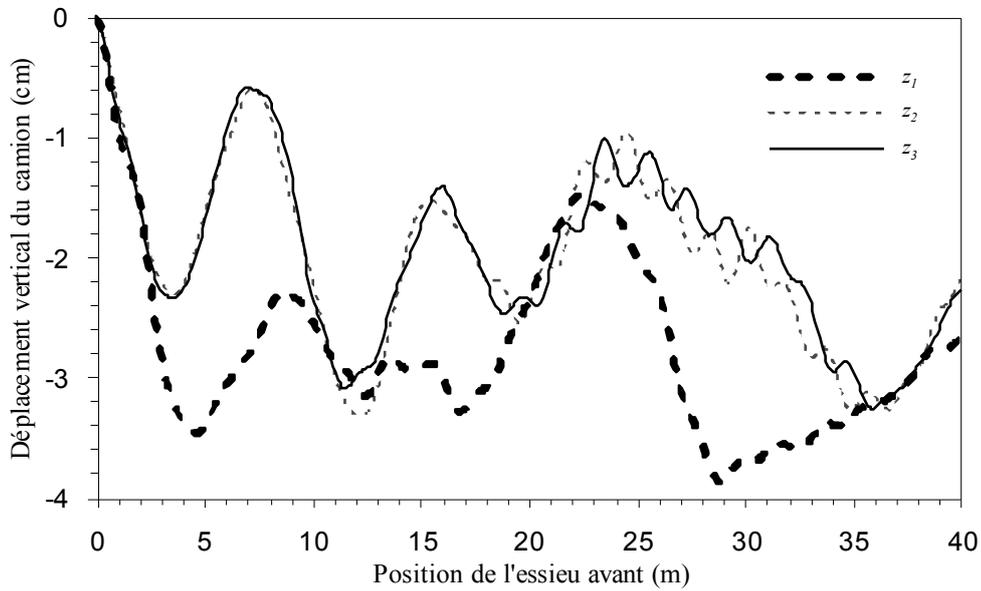


Fig.6.6. Déplacement vertical des masses des roues droites du camion, $v = 60$ km/h, $A_r = 4 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire bord.

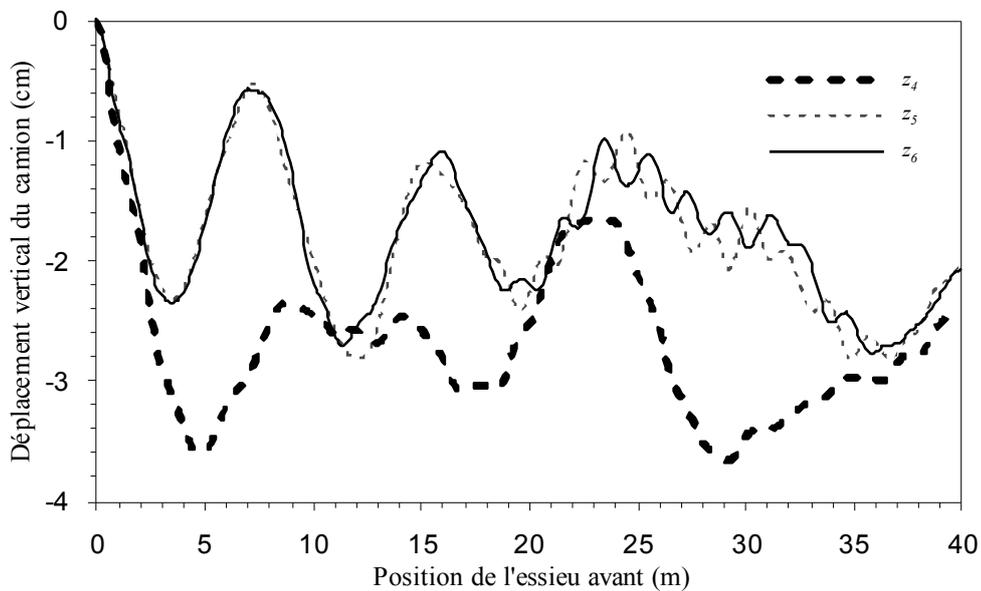


Fig.6.7. Déplacement vertical des masses des roues gauches du camion, $v = 60$ km/h, $A_r = 4 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire bord.

La figure 6.8 montre une comparaison de la variation des forces d'interaction exercées par les roues avant et arrières droites du camion en fonction de la position de l'essieu avant. Le camion roule à une vitesse $v = 60$ km/h sur une chaussée en bonne état ($A_r = 15 \cdot 10^{-6}$ m³/cycle). On constate que la force exercée par les roue avant ou arrière varie en fonction de la position du camion autour d'une valeur moyenne qui correspond à la force statique.

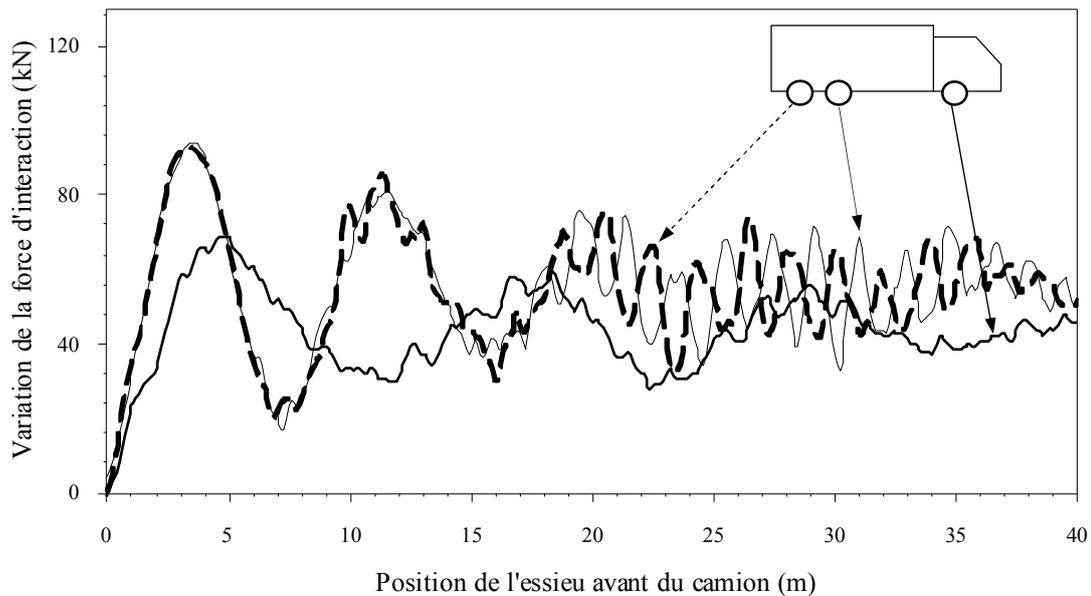


Fig.6.8. Comparaison des forces d'interaction exercées par les roues avant et arrière droites du camion, $v = 60$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire bord.

La figure 6.9 montre l'influence de la vitesse de passage du camion sur la réponse dynamique au centre de la travée de raidisseur 3 (point 3). Le camion traverse la dalle de roulement selon la trajectoire bord avec des vitesses différentes (40, 60 et 80 km/h). D'après cette figure en remarquant que pour une vitesse très faible, la réponse dynamique tend vers la flèche statique. Le maximum du déplacement vertical au milieu de la dalle augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement.

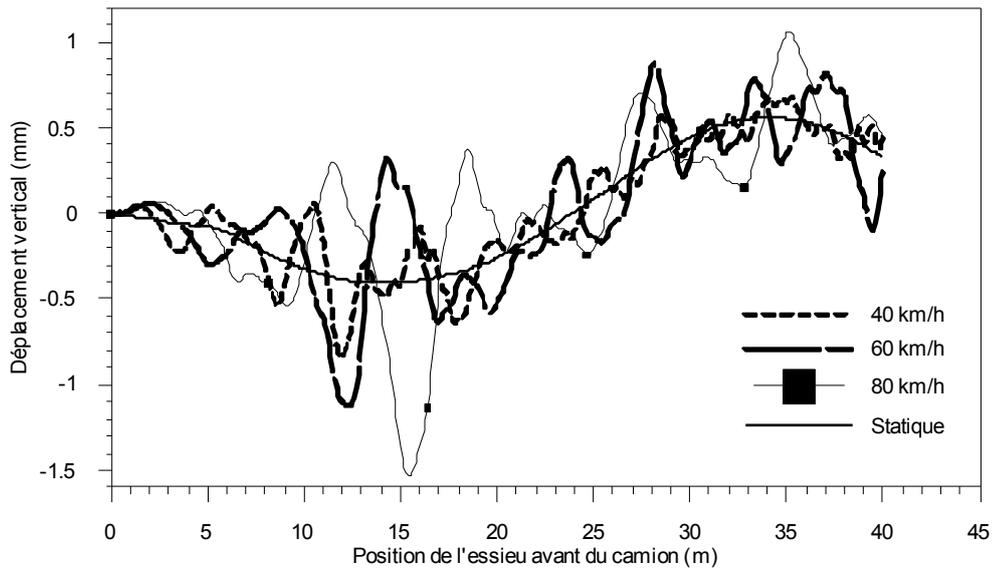


Fig.6.9. Influence de la vitesse de passage du camion sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au point 3, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.

La figure 6.10 montre aussi l'influence de la vitesse de passage du camion sur le déplacement vertical de la dalle de roulement pour les mêmes conditions que la figure 6.9, la même constatation est dégagée.

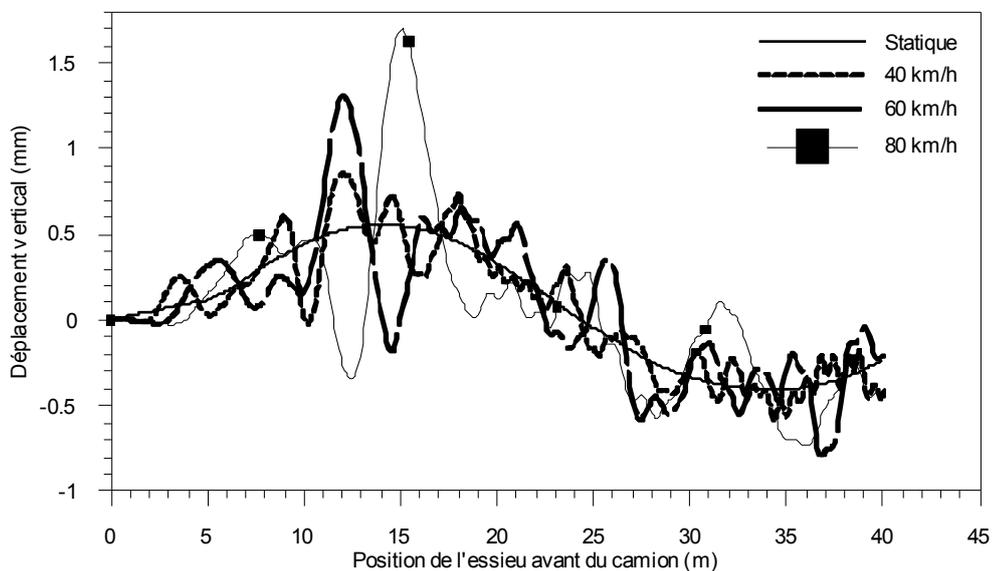


Fig.6.10. Influence de la vitesse de passage du camion sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au point 8, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire bord.

Sur la figure 6.11, nous présentons la variation de la force d'interaction exercée par une roue avant du camion en fonction de la position de l'essieu avant et l'état de la chaussée, le camion roule à une vitesse de 60 km/h sur la trajectoire intermédiaire. On constate que la

variation des amplitudes de la force d'interaction augmente sensiblement avec la dégradation de la chaussée.

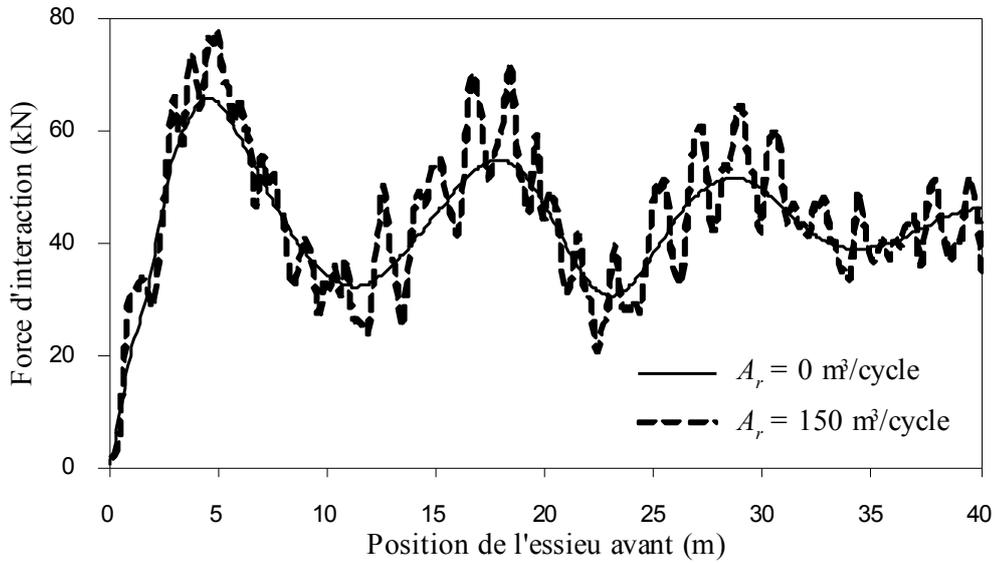


Fig.6.11. Influence du profil de la chaussée sur la force d'interaction d'une roue avant du camion, trajectoire intermédiaire, $v = 60 \text{ km/h}$.

6.7. Facteur d'Amplification Dynamique (FAD)

Les Facteurs d'Amplification Dynamique de la dalle de roulement aux points 1 à 10, sont calculés en utilisant la définition adoptée. Les FAD sont établis avec la valeur maximale atteinte, à chaque point de calcul, en considérant les trois trajectoires et une seule vitesse 40 km/h et un seul profil $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$ (Fig. 6.12, 6.13 et 6.14). On constate que les FAD s'échelonnent entre 1.08 et 1.53.

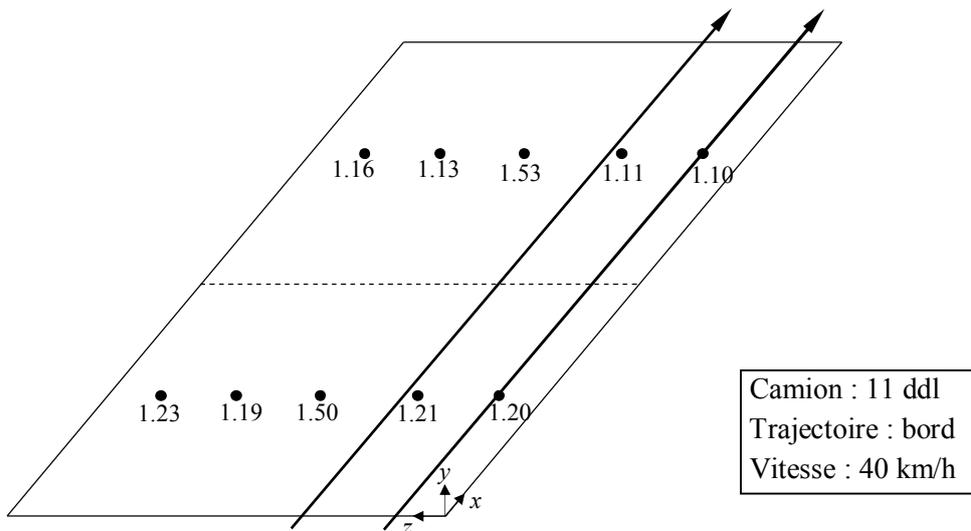


Fig. 6.12. FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire bord.

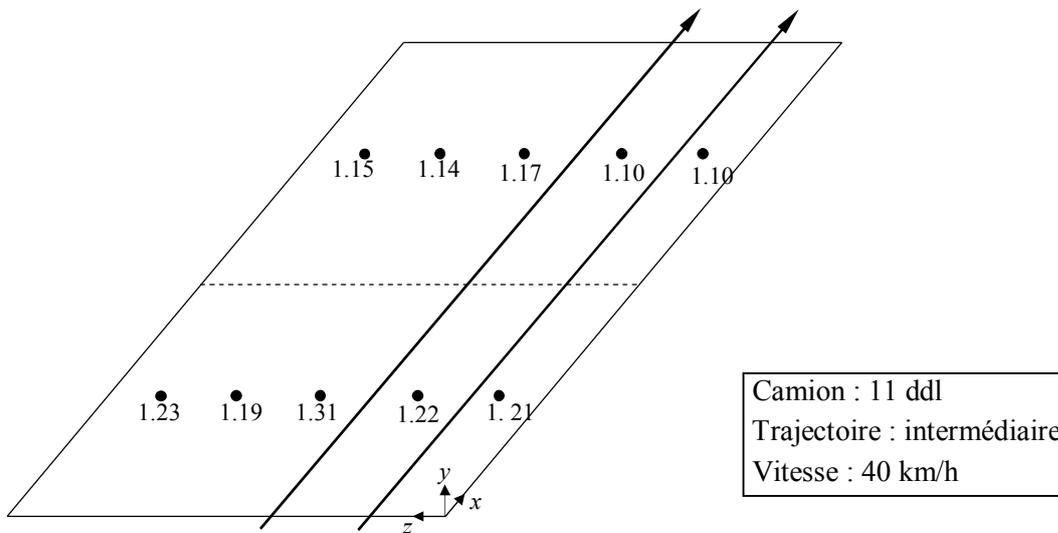


Fig. 6.13. FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire intermédiaire.

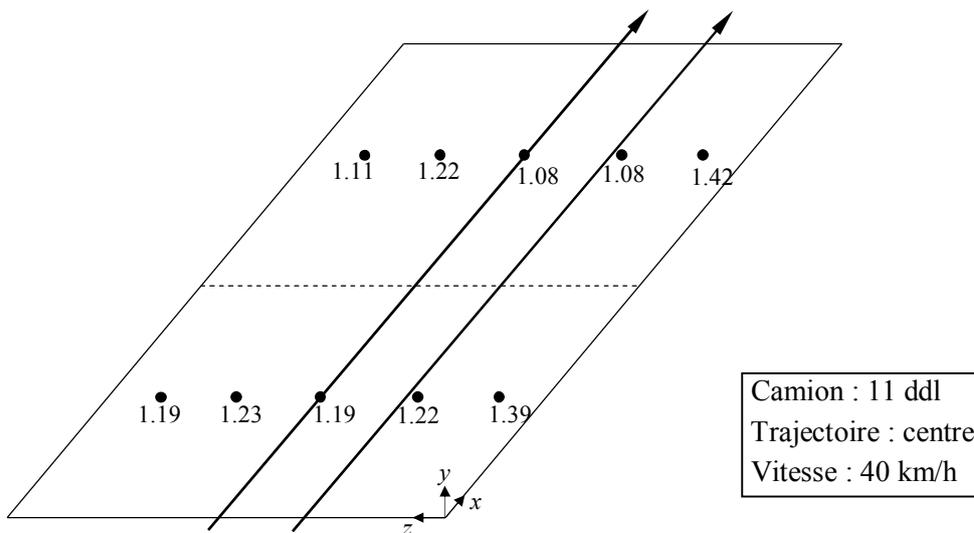


Fig. 6.14. FAD obtenu avec camion 11 ddl roulant sur la trajectoire du centre.

6.8. Influence de la vitesse sur le facteur d'amplification dynamique

L'influence de la vitesse de passage du camion a 11 ddl est montée dans les figures où les FAD à chacune des points de calcul sont calculés pour des vitesses différentes du camion (figs. 6.15 jusqu'à 6.19), pour une trajectoire spécifique, le FAD est défini comme étant le rapport entre la réponse dynamique maximale sur la réponse statique maximale pour la même trajectoire (eq.6.1), le camion roule sur une chaussée en bon état ($A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$), on constate que le FAD augmente légèrement avec l'augmentation de la vitesse, et que

l'influence de la vitesse sur le FAD aux différents points de calcul ne reflète pas une tendance particulière.

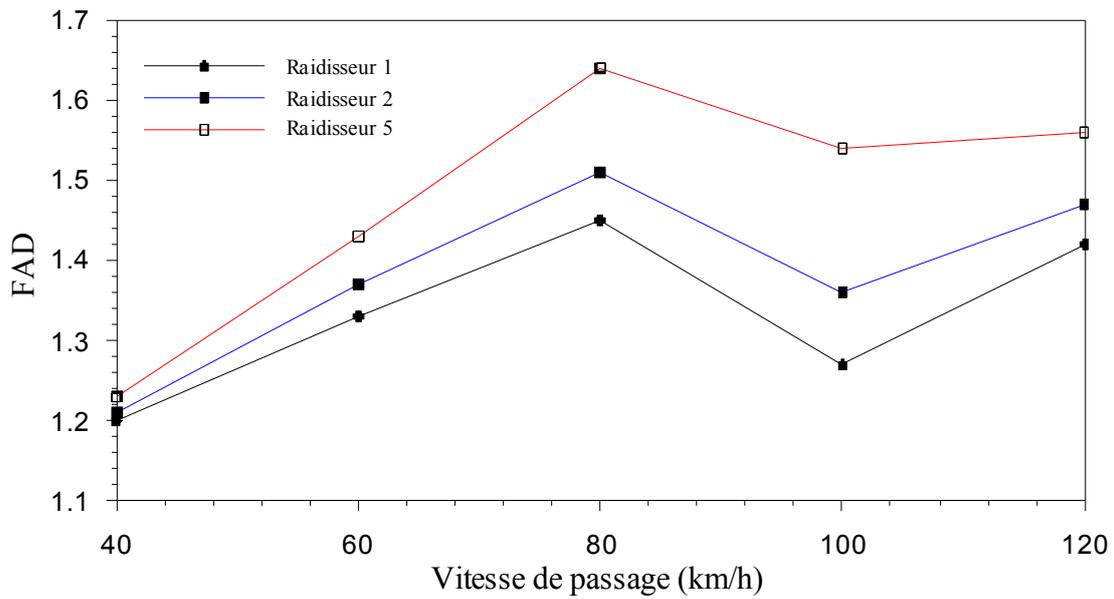


Fig.6.15. Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire bord.

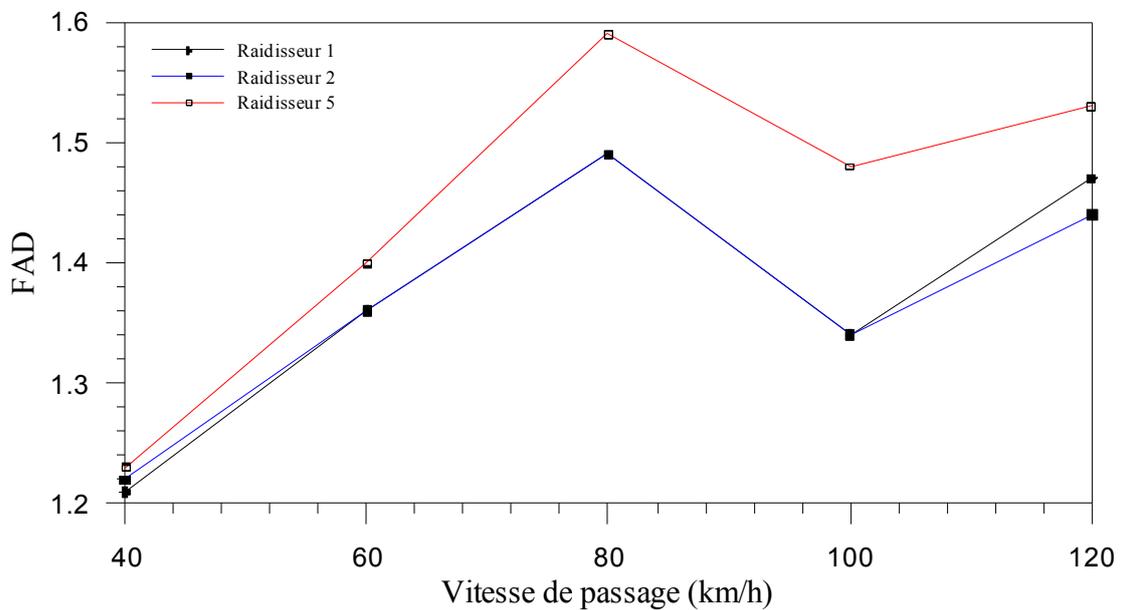


Fig.6.16. Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire.

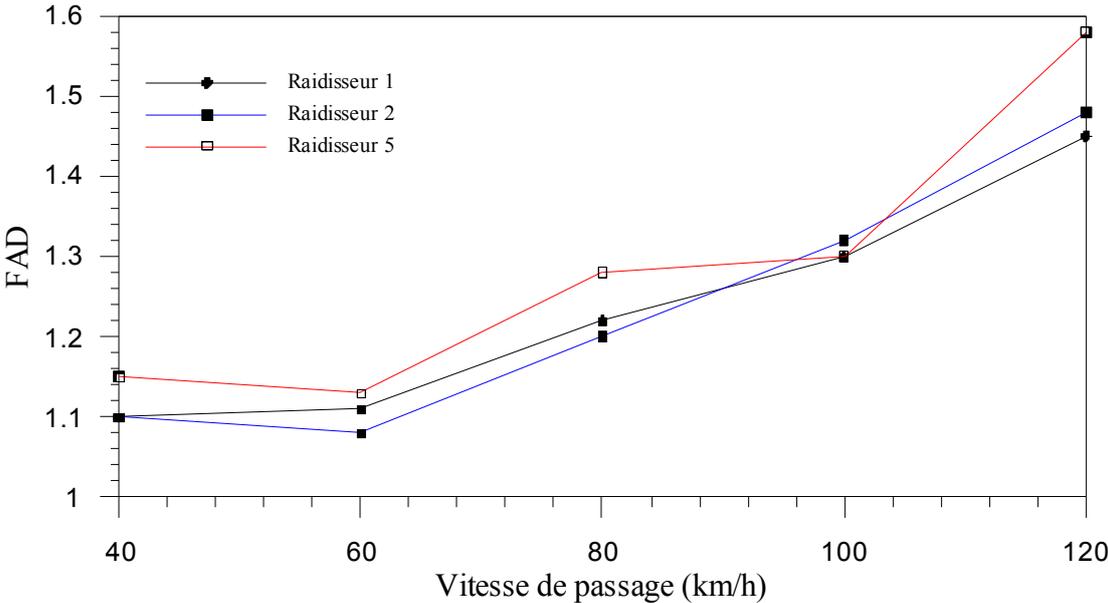


Fig.6.17. Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire.

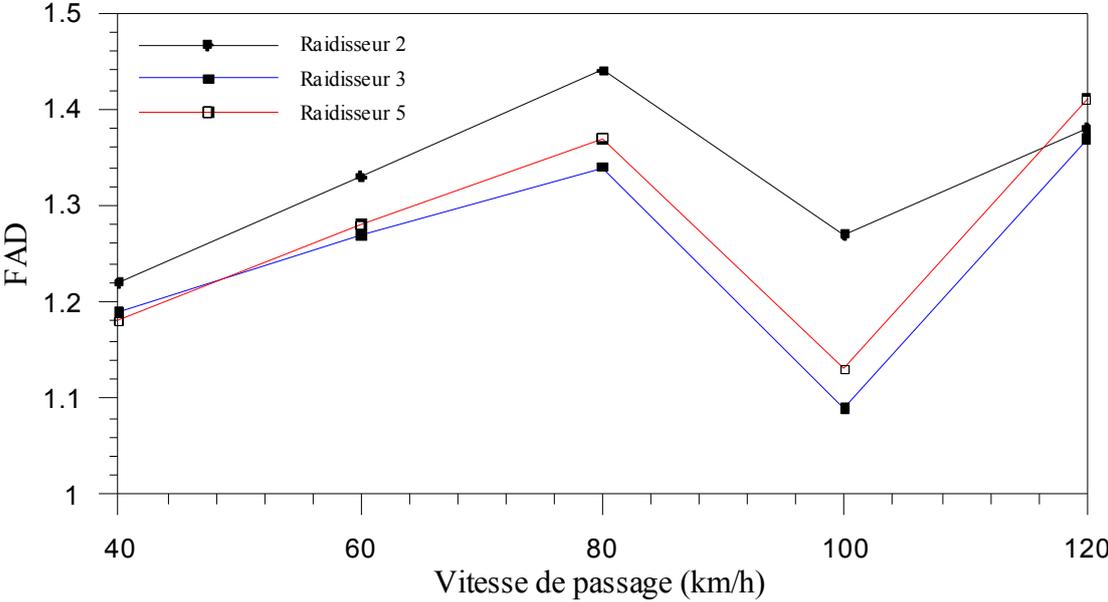


Fig.6.18. Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 1, trajectoire du centre.

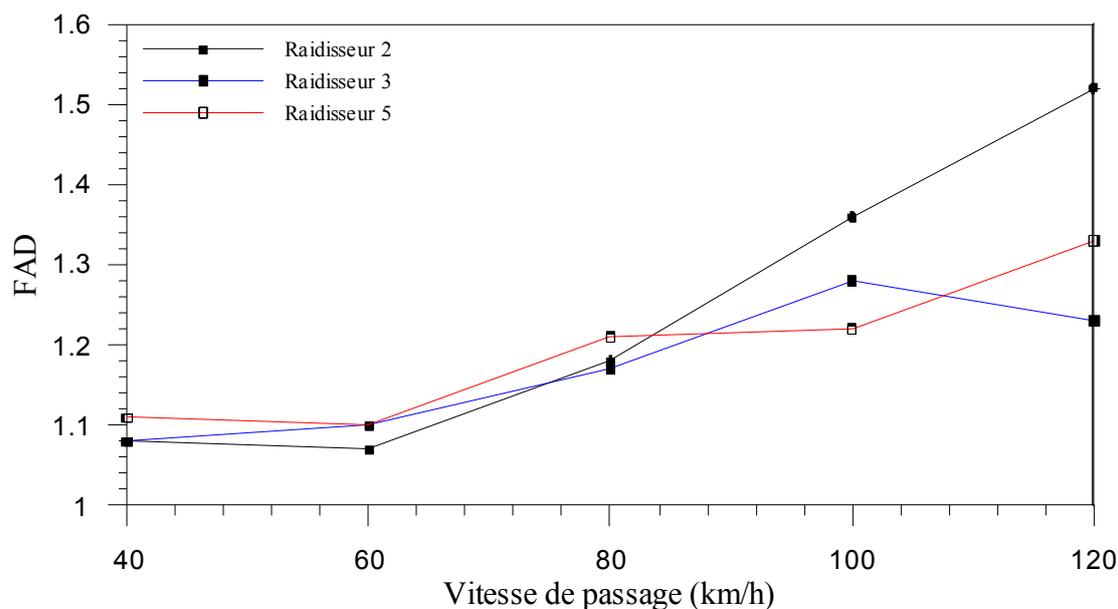


Fig.6.19. Influence de la vitesse de passage sur le FAD, travée 2, trajectoire du centre.

6.9. Influence du profil de la chaussée facteur d'amplification dynamique

Plusieurs simulations numériques sont effectuées pour voir l'influence des irrégularités du profil de la chaussée sur le FAD dans la section intermédiaire des deux travées de la dalle de roulement, les figures (6.20 jusqu'à 6.23) montrent l'influence du profil de la chaussée sur le FAD dans la section intermédiaire de la travée une et deux respectivement, le camion roule sur la trajectoire bord (Fig.6.20 et 6.21) et la trajectoire intermédiaire (Fig.6.22 et 6.23) avec une vitesse de 40 km/h. On constate une augmentation de FAD avec la dégradation du profil de la chaussée, en particulier aux centres des deux travées, cela signifie que l'état de la voie de roulement influe beaucoup sur les forces d'interaction (voir Fig.6.11)

Pour mieux comprendre l'influence interactive de la vitesse de passage et du profil de la chaussée, nous présentons sur les figures 6.24 et 6.25 la variation du FAD dans la section intermédiaire de la travée une et deux respectivement, le camion roule sur la trajectoire intermédiaire avec une vitesse de 60 km/h.

En particulier, le FAD au centre de la travée une pour une chaussée en mauvais état augmente de 1.34 pour une vitesse de 40 km/h (fig.6.24) jusqu'à 1.66 pour une vitesse de 60 km/h (Fig.6.25).

La figure 6.26 représente l'influence du profil de la voie de roulement et la vitesse de passage du camion sur la variation du FAD au milieu de la travée une de la dalle de roulement (milieu du raidisseur 3, point 3), le camion chargé traverse la dalle selon la trajectoire intermédiaire à une vitesse qui varie entre 2 km/h jusqu'à 135 km/h. Trois états de la chaussée sont utilisés : chaussée en très bon état ($A_r = 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$), chaussée du moyen état ($A_r = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$), chaussée en mauvais état ($A_r = 150 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$).

D'après la figure en remarque que l'augmentation de la rugosité de la chaussée entraîne une augmentation de FAD dans la dalle de roulement, et que la valeur max (3.2) corresponde a la valeur critique ($v_{max} = 124 \text{ km/h}$).

On constate aussi une augmentation de FAD d'environ de (20 %).

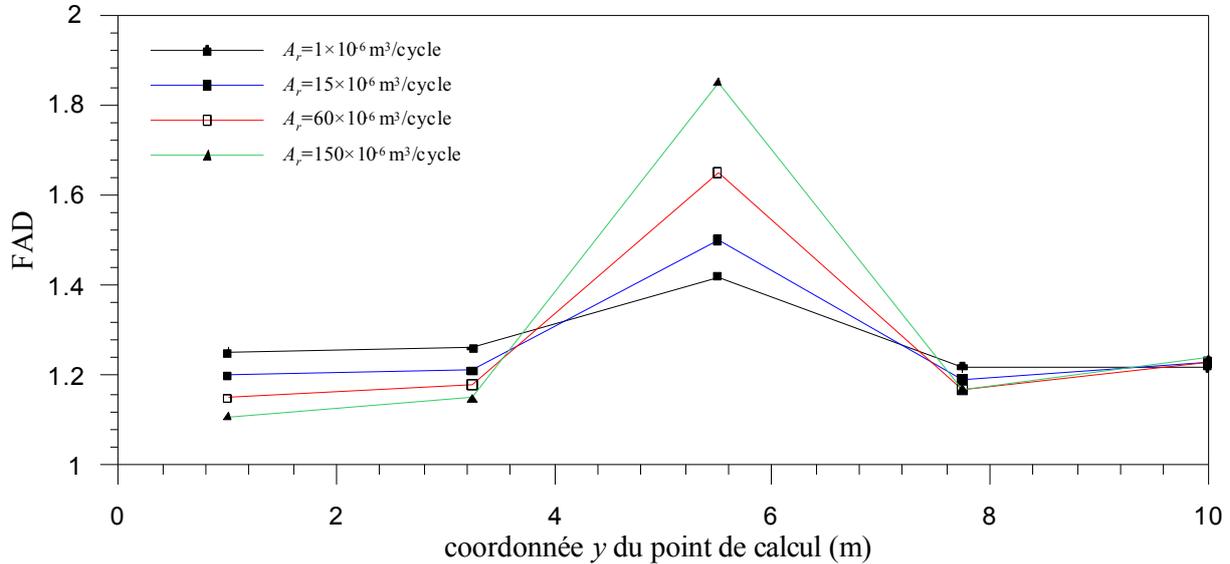


Fig.6.20. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire bord, $v = 40 \text{ km/h}$.

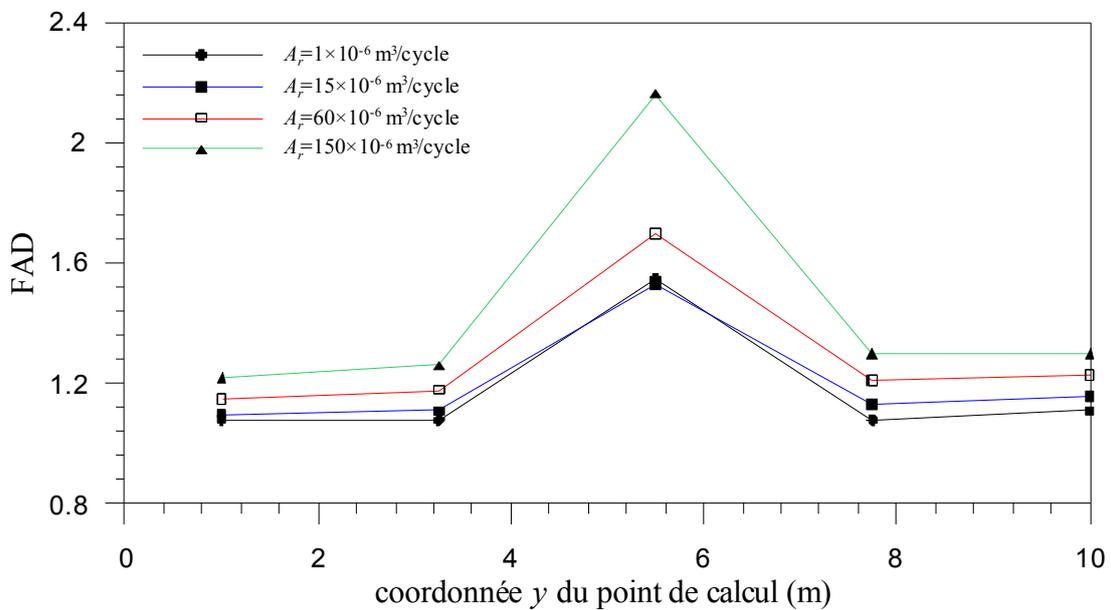


Fig.6.21. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire bord, $v = 40 \text{ km/h}$.

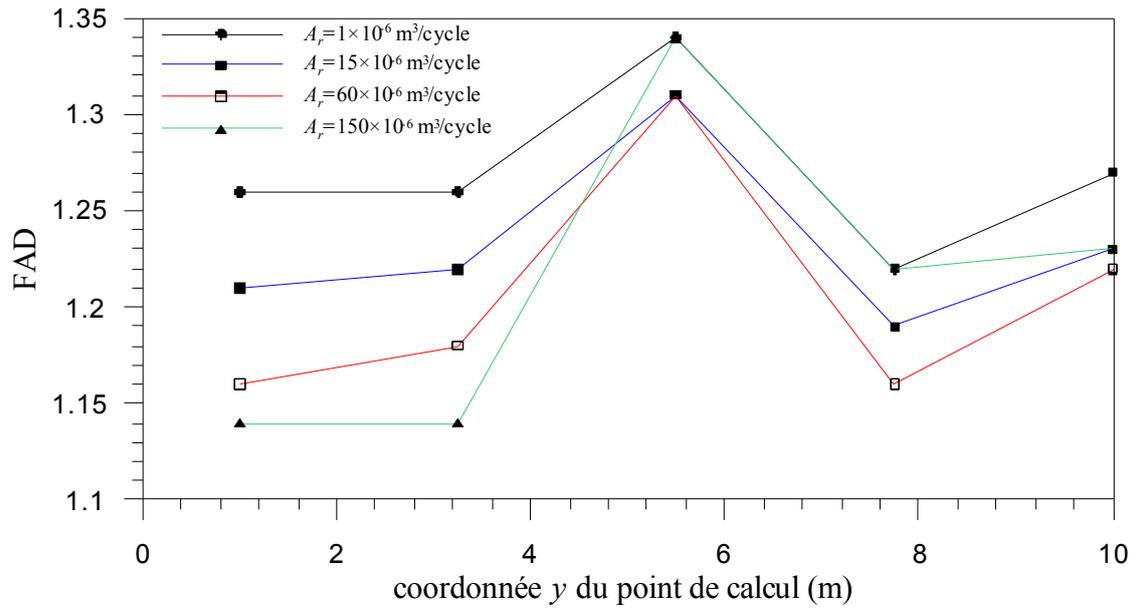


Fig.6.22. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 40$ km/h.

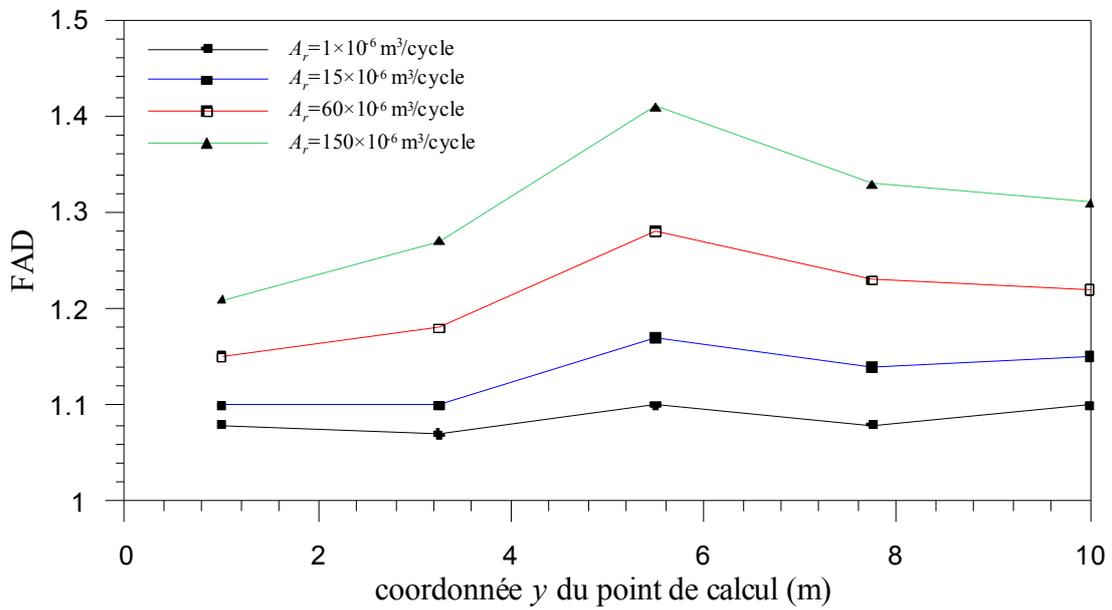


Fig.6.23. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 40$ km/h.

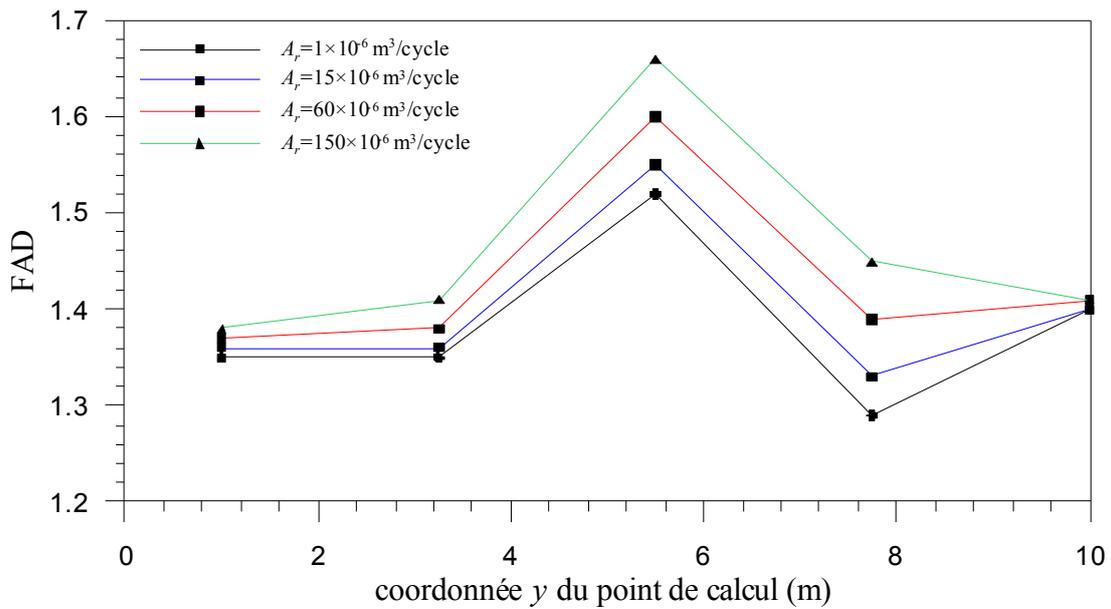


Fig.6.24. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 60 \text{ km/h}$.

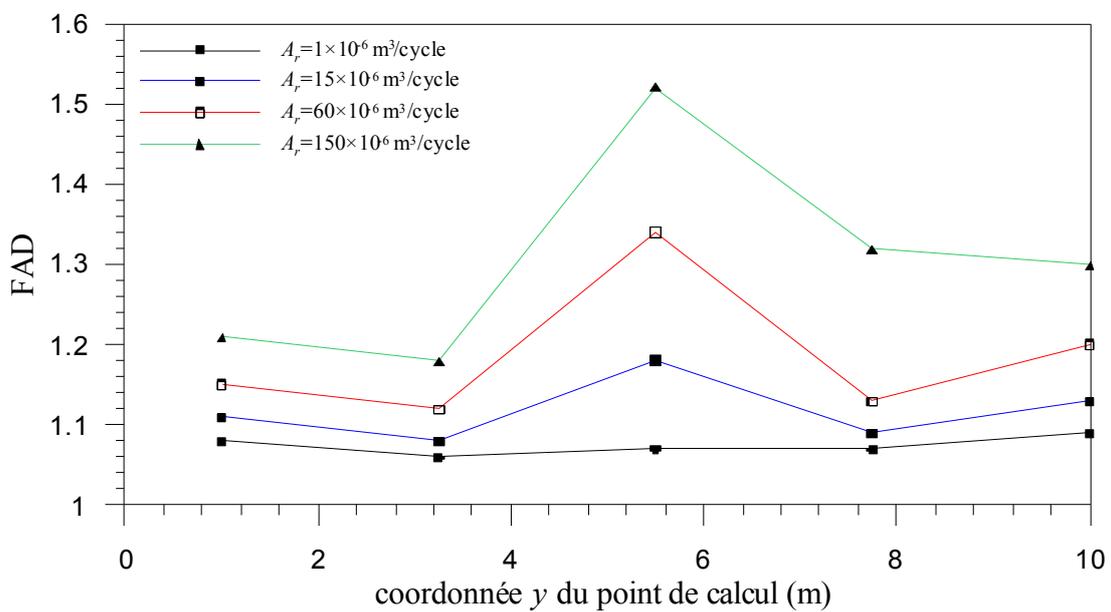


Fig.6.25. Influence du profil de la chaussée sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 60 \text{ km/h}$.

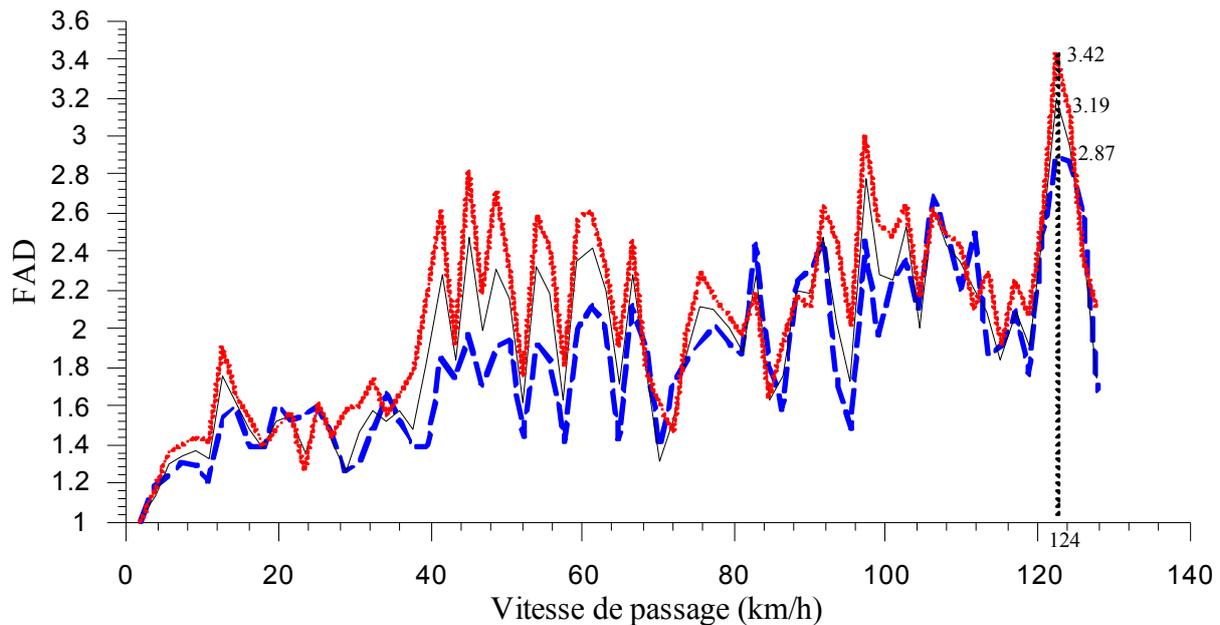


Fig. 6.26. Influence du profil de la chaussée sur le FAD au milieu de la travée 1,
 $m_v = 24000$ kg, trajectoire intermédiaire.

6.10. Influence de la masse du véhicule facteur d'amplification dynamique

La masse m_v , du camion est sans doute, le paramètre lié au camion qui varie le plus. La différence de masse entre le camion vide et chargé, peut entraîner des changements dans le comportement dynamique de la dalle de roulement et du camion. Pour cela, nous présentons dans ce paragraphe, l'influence de la masse sur le FAD deux niveaux de chargement ont été simulés: camion vide ($m_v = 8.2$ tonnes) et camion chargé ($m_v = 24$ tonnes).

Les figures 6.27 et 6.28, présente l'influence de la masse du camion sur le FAD aux sections transversales des travées une et deux respectivement (selon y). Le camion traverse la dalle de roulement à une vitesse de 40 km/h selon la trajectoire bord, les valeurs calculées sont reliées par des droites. En réalité, ces lignes n'ont aucun sens physique, car le FAD ne varie pas linéairement avec un paramètre spécifique. Il dépend de tous les paramètres (profil de la chaussée, vitesse de roulement, masse de camion,...), donc il à un caractère ondulatoire (aléatoire).

On constate que les FAD, obtenus par le camion vide (fig.6.28) sont plus grands que ceux obtenus par le camion chargé, mises à par quelques valeurs isolées. La tendance inverse se produit, pour la travée une, lorsque le camion chargé traverse la dalle (fig.27), mise à par de quelque valeurs isolées.

Les figure 6.29 et 6.30 montrent aussi l'influence de la masse du camion m_v sur le FAD dans les sections transversales des travées une et deux respectivement. Le camion traverse la dalle de roulement selon la trajectoire intermédiaire avec une vitesse de 60 km/h.

Dans ce cas les FAD obtenus pour un camion vide sont plus grands et que les valeurs maximum sont obtenu au milieu de chaque travée.

La figure 6.31 souligne l'influence de la masse et la vitesse de passage du camion sur la variation du FAD au milieu de la travée une de la dalle de roulement (milieu du raidisseur 3, point 3), le véhicule traverse la dalle selon la trajectoire intermédiaire à une vitesse de roulement allons de 2 km/h jusqu'à 135 km/h, la chaussée est considérée en bon état ($A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$), trois niveaux de chargement sont utilisés (camion vide $m_v = 8200 \text{ kg}$, camion chargé $m_v = 24000 \text{ kg}$ et camion surchargé $m_v = 31300 \text{ kg}$).

On constate que :

- La vitesse critique de passage correspondante au maximum du FAD ($FAD = 3.45$) est environs (124 km/h), elle démine légèrement en fonction de l'augmentation de la masse.

Le FAD max diminue avec l'accroissement de la masse du camion, le FAD max résultant du passage du camion vide est plus grand que celui obtenu avec le camion chargé et surchargé.

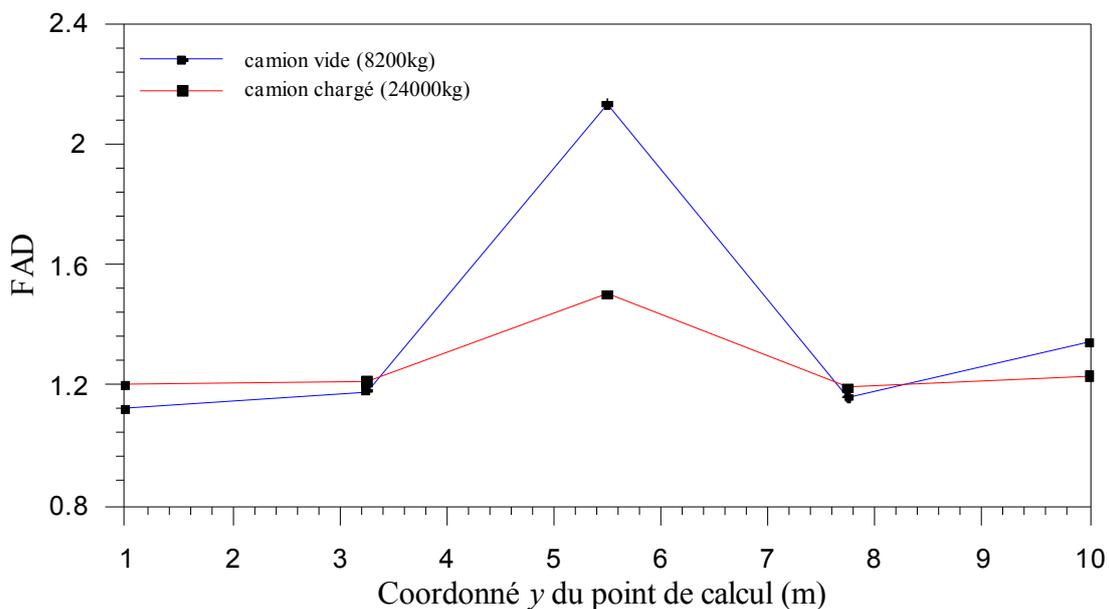


Fig.6.27. Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 1, trajectoire bord, $v = 40 \text{ km/h}$.

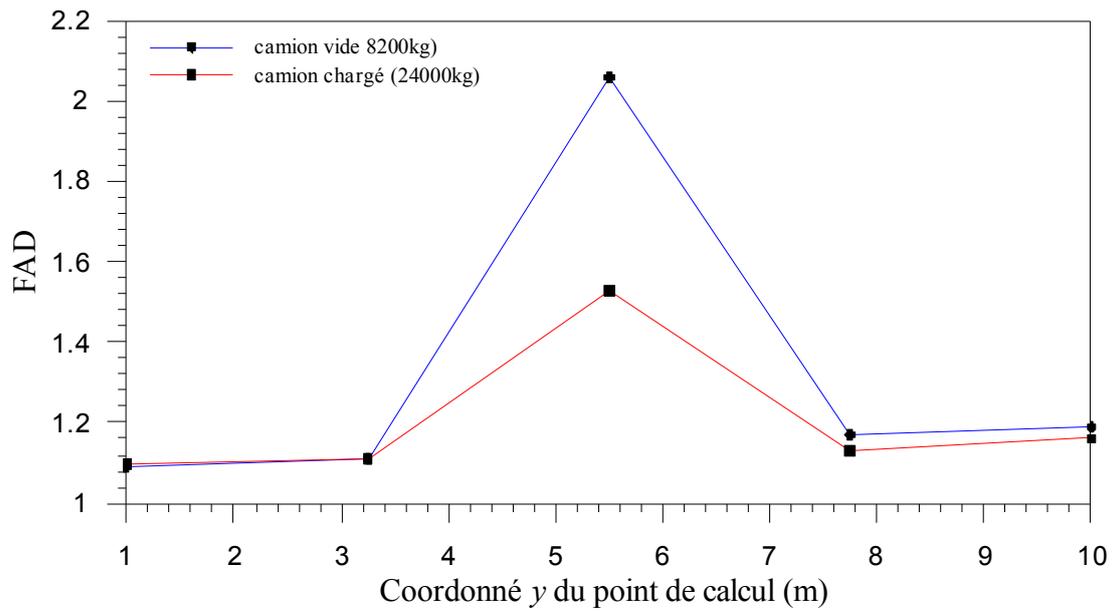


Fig.6.28. Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 2, trajectoire bord, $v = 40$ km/h.

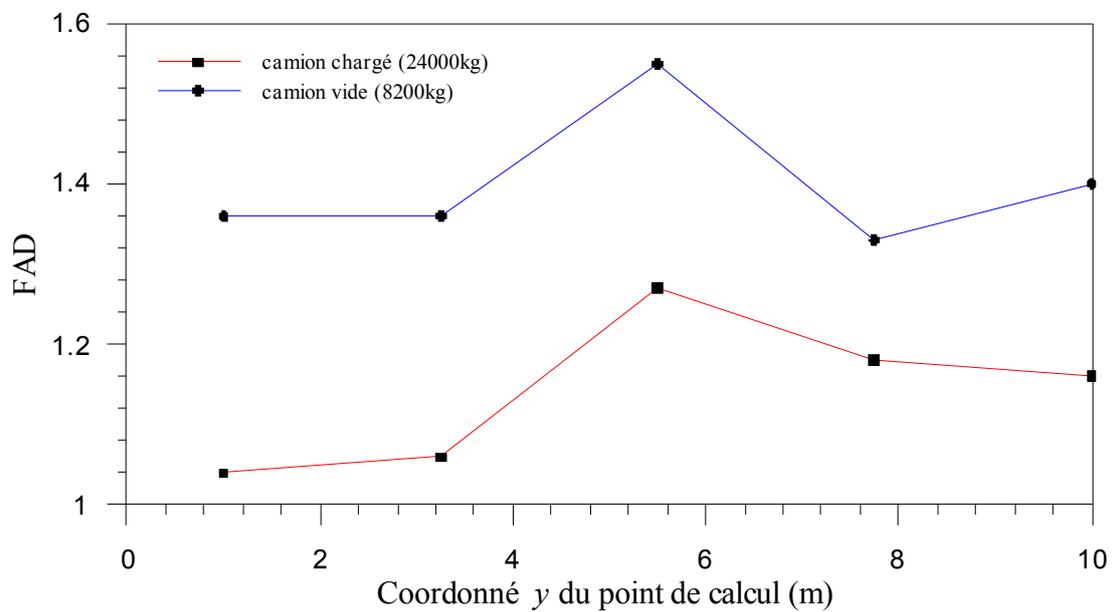


Fig.6.29. Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 1, trajectoire intermédiaire, $v = 60$ km/h.

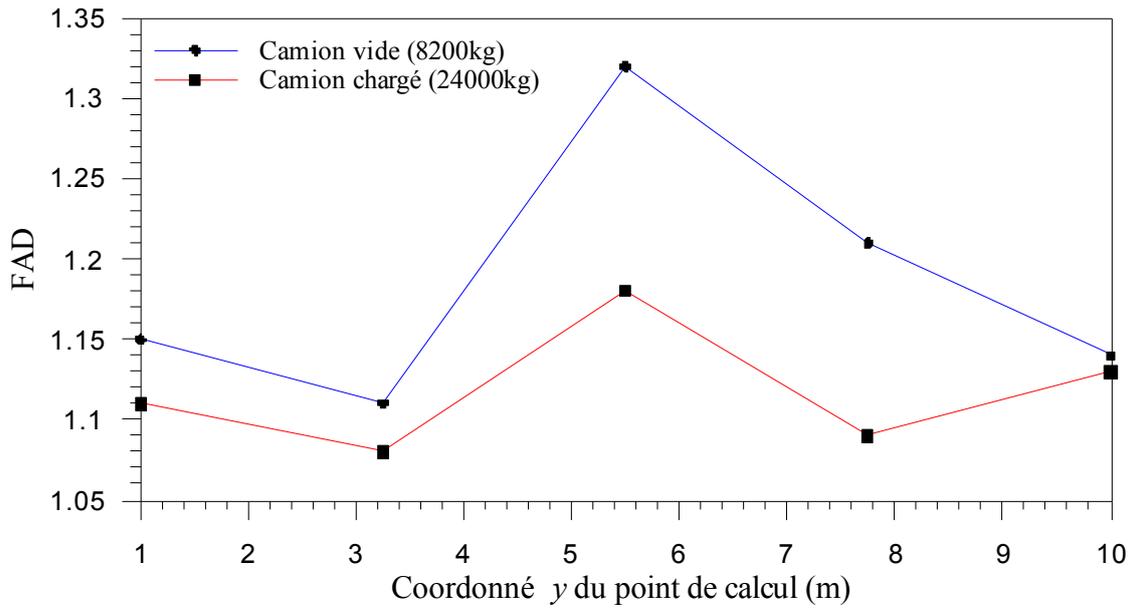


Fig.6.30. Influence de la masse du véhicule sur le FAD, travée 2, trajectoire intermédiaire, $v = 60 \text{ km/h}$

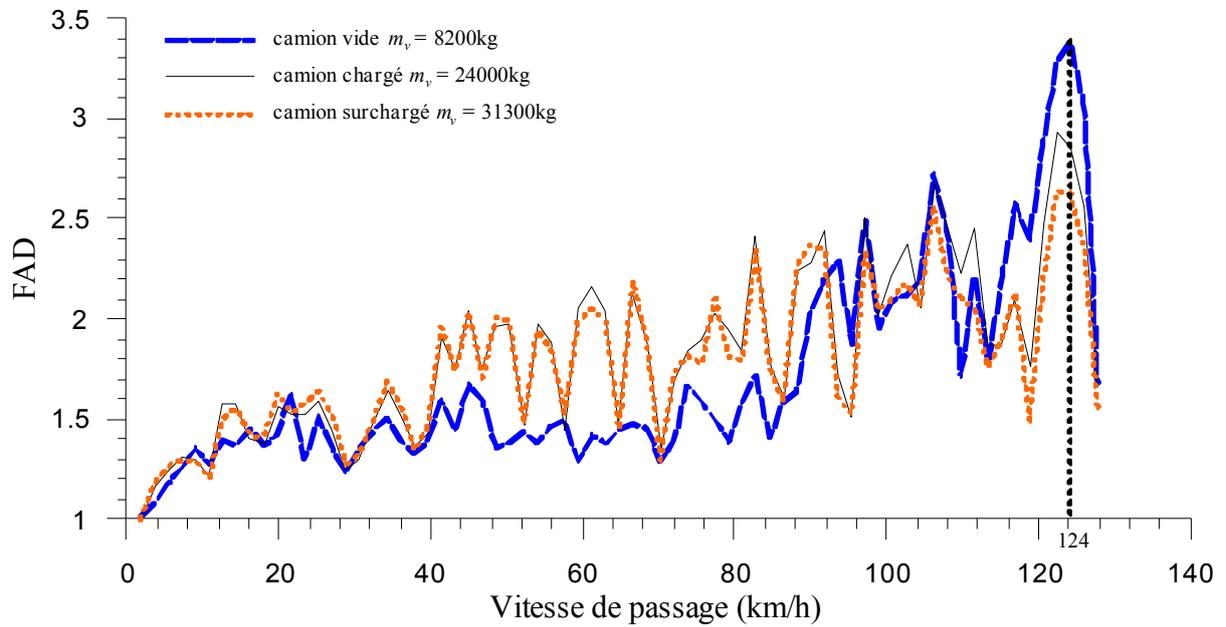


Fig. 6.31. Influence de la masse du véhicule sur le FAD au milieu de la travée 1, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire intermédiaire.

6.11. Influence du modèle de véhicule

Pour voir l'influence du modèle de véhicule, deux modèles à essieux tandem à l'arrière sont retenus : modèle à 9 ddl et modèle à 11 ddl (voir chapitre 4, figures 4.6 et 4.8), les figures 6.32 et 6.33 montrent l'influence du modèle de véhicule sur la force d'interaction sous la roue 2, pour deux vitesses de passage, 80 km/h et 100 km/h respectivement, le camion traverse la dalle selon la trajectoire intermédiaire et la chaussée de bon état ($A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$).

On constate que l'influence du modèle de camion est très faible car nous avons utilisés les mêmes paramètres pour les deux modèles (géométrie, masses, caractéristiques des suspensions).

La figure 6.34 montre l'influence du modèle de véhicule sur le déplacement vertical de la dalle de roulement au centre de la travée une pour les mêmes conditions que la figure 6.32.

On constat que le modèle de véhicule n'a pas d'influence sur le déplacement vertical de la dalle de roulement.

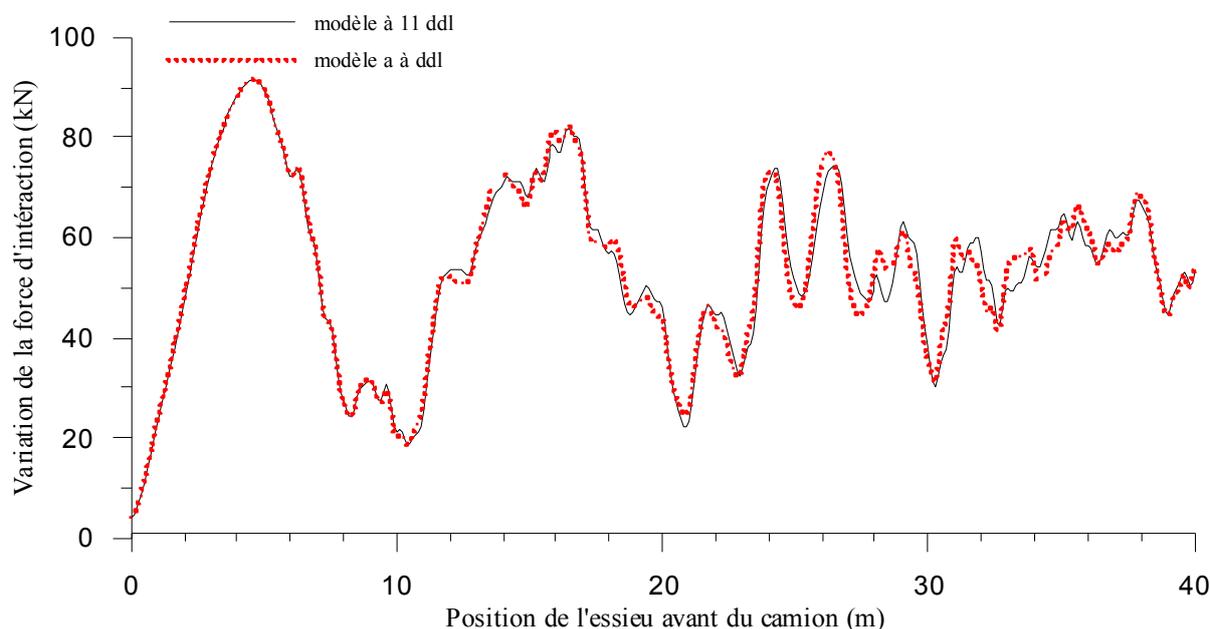


Fig. 6.32. Influence du modèle de véhicule sur la force d'interaction sous la roue 2, $v_x = 80 \text{ km/h}$, travée 1, $m_v = 24000 \text{ kg}$, $A_r = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$, trajectoire intermédiaire.

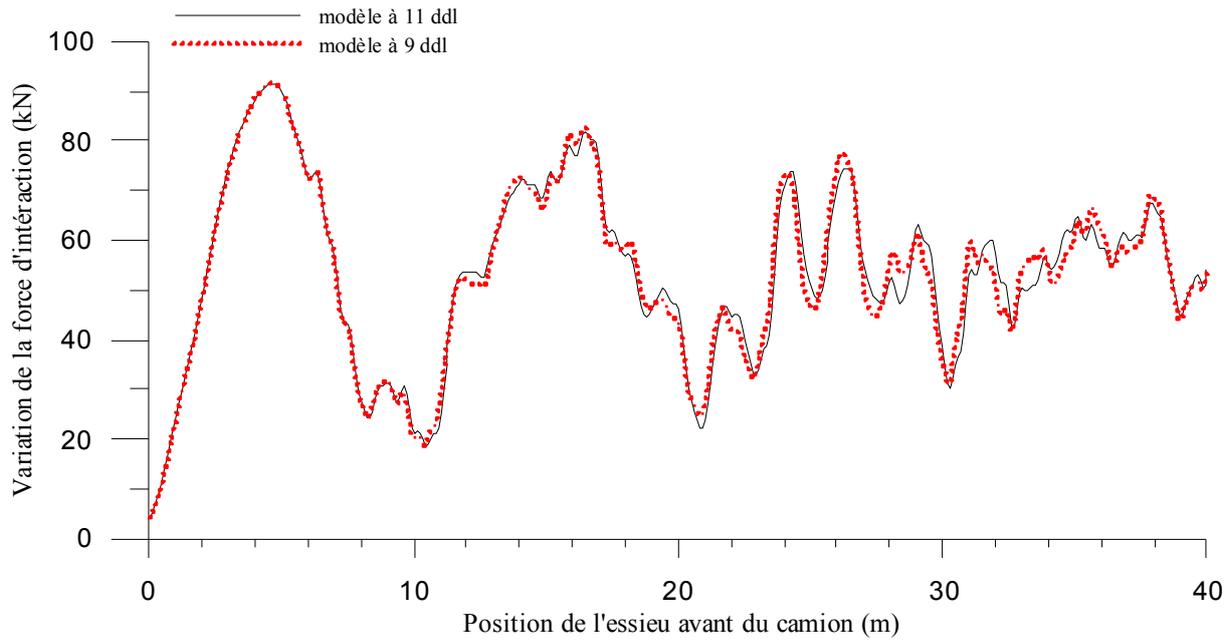


Fig. 6.33. Influence du modèle de véhicule sur la force d'interaction sous la roue 2, $v_x = 100$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire intermédiaire.

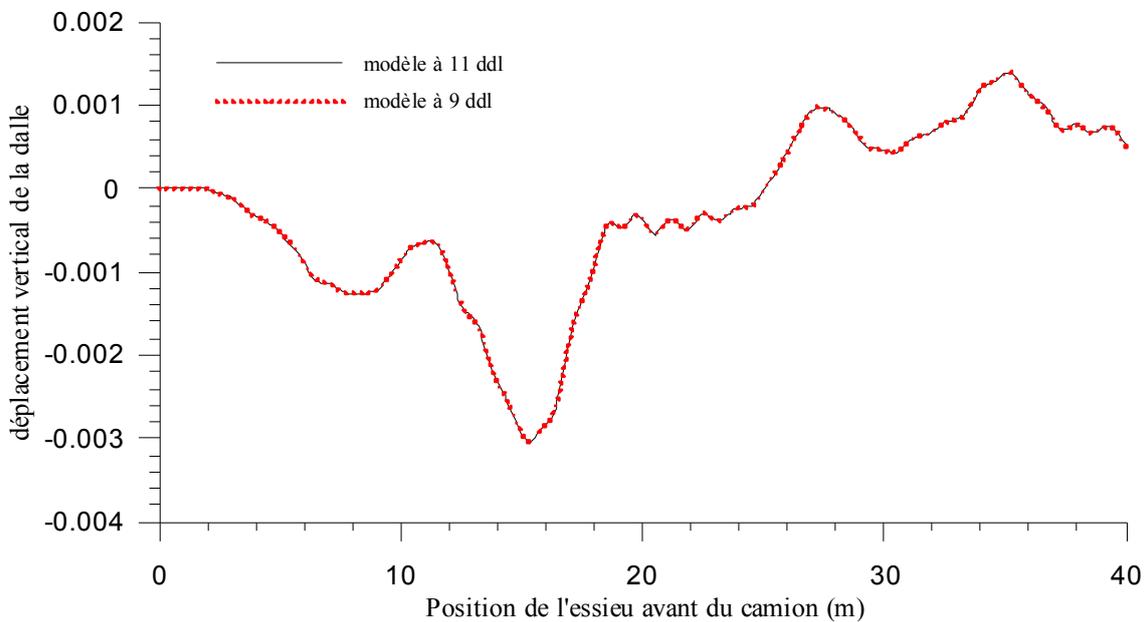


Fig. 6.34. Influence du modèle de véhicule sur le déplacement au centre de la travée 1, $v_x = 80$ km/h, $A_r = 15 \times 10^{-6}$ m³/cycle, trajectoire intermédiaire.

6.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un exemple d'analyse des réponses dynamiques d'une dalle de roulement orthotrope à deux travées à supports élastiques sollicitée par le passage de deux modèles de camions à neuf et à onze degrés de liberté. Dans cet exemple, nous avons présenté les réponses dynamiques de la dalle et du camion. Nous avons étudié par la suite, l'influence de plusieurs paramètres sur les réponses dynamique dalle /camion, sur la distribution du FAD sur la dalle et sur les forces d'interactions à savoir : la vitesse de passage, le mode de chargement, la masse du camion, le profil de la chaussée et le modèle du camion. D'après les résultats obtenus, le paramètre le plus important qui influence sur les réponses dynamique, sur le FAD et sur les forces d'interactions est bien le profil de la chaussée.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Ce travail de recherche avait pour objectif, la modélisation du comportement vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont de la chaussée multi-travées, reposant sur des appareils d'appui, lors du passage d'un camion avec la prise en compte de l'interaction dynamique dalle-camion et des irrégularités du profil de la chaussée. La dalle de roulement est modélisée par une plaque orthotrope équivalente multi-travée, supportée par des appuis linéaires élastiques. Le camion est modélisé par quatre modèles dynamiques mobiles, deux modèles simples à essieux tandem et deux modèles semi-remorques à essieux tandem et tridem. Le profil de la chaussée est modélisé par une fonction aléatoire, caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire. Les équations du mouvement de différents modèles de camion sont obtenues en appliquant la deuxième loi de Newton. L'équation du mouvement différentielle aux dérivées partielles de la dalle de roulement est résolue par la méthode de décomposition modale. Les équations couplées du mouvement dalle – camion, sont intégrées numériquement par la méthode de Newmark. Un algorithme de résolution des équations de mouvement couplées d'une manière découplée est utilisé avec un calcul itératif.

Sur la base de ces modélisations, nous avons élaboré deux principaux programmes en langage FORTRAN, capables de simuler le passage du camion sur la dalle de roulement. Le calcul des fréquences et des modes propres de la dalle de roulement multi – travées à supports rigides et élastiques est effectué par une approche semi – analytique, basée sur la méthode modale et tien compte du couplage intermodale.

Plusieurs exemples numériques sont présentés et comparés. Sur la base des résultats obtenues et l'analyse de ces résultats, présentées aux chapitres deux, trois et six de cette thèse, nous avons tiré les conclusions suivantes :

1. La comparaison des fréquences et des modes propres montre une excellente concordance avec les résultats de la bibliographie et de la simulation numérique sur le logiciel de calcul dynamique des structures ANSYS.
2. La distribution du FAD sur une dalle de roulement ne reflète pas une tendance particulière. On peut obtenir des FAD élevés dans des endroits où le déplacement est faible.
3. Les développements effectués permettraient d'implanter facilement les deux autres modèles de camions semi – remorque dans les programmes développés à condition d'avoir les données. Les modèles de camions à trois essieux avec des essieux tandem et tridem simulent fidèlement la position des roues sur les dalles des ponts ainsi que le mouvement de ce type d'essieux.

4. Le paramètre le plus important qui influe sur les réponses dynamiques, sur le FAD et sur les forces d'interactions est le profil de la chaussée.
5. Le FAD max diminue avec l'accroissement de la masse du camion. Le FAD max résultant du passage du camion vide est plus grand que celui obtenu avec le camion chargé et surchargé.
6. Le FAD dépend du trajet emprunté par le camion et la vitesse de passage.
7. Pour une vitesse de passage très faible, la réponse dynamique de la dalle de roulement tend vers son flèche statique.
8. Le maximum du déplacement vertical au milieu de la dalle augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement jusqu'à une vitesse critique.
9. Dans le cas étudié ici, le FAD est maximal à 124 km/h environ. Cette vitesse est considérée comme une vitesse critique.
10. L'utilisation des modèles de camion simple à neuf et à onze degrés de liberté, donnent presque les mêmes résultats. Leurs influence est très faible sur le FAD et sur les forces d'interaction.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] B. Bakht, L.G. Jaeger, **Bridge Analysis Simplified**, McGraw-Hill (1985), New York
- [2] J.F. Davalos P. Qiao L. Shan, **Advanced Fiber-reinforced Polymer (FRP) Composites for use in Civil Engineering**, In *Advanced civil infrastructure materials: Science, mechanics and applications ed.* Wu, H.C., New York: E-Publishing Inc. (2006) 118-202.
- [3] S.P. Timoshenko, K.S. Woinowsky, **Theory of Plates and Shells**, McGraw-Hill Book Company, New York (1959).
- [4] A. W. Leissa, *Vibration of plates*, Acoustical Society of America, 1993.
- [5] X.Q. Zhu, S.S. Law, **Moving load identification on multi-span continuous bridges with elastic bearings**, *Mechanical Systems and Signal Processing* **20** (2006) 1759–1782.
- [6] H.P. Lin, S.C. Chang, **free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints**, *Journal of Sound and Vibration*, **281** (2005), 155-169.
- [7] W.L. Li, X. Zhang, J. Du, Z. Liu, **An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports**, *Journal of Sound and Vibration*, **321** (2009), 254-269.
- [8] H. Takabatake, Y. Nagareda, **A simplified analysis of elastic plate with edge beams**, *Journal of Computer and Structures*, **70** (1999), 129-139.
- [9] J.R.Vinson, **The behavior of thin walled structures: beams, plates, and shells**, Dordrecht Kluwer, 1989.
- [10] Y.K. Cheung, D. Zhou, **Vibrations of rectangular plates with elastic intermediate line-supports and edge constraints**, *Journal of Thin-Walled Structures*, **37** (2000) 305-331.

-
- [11] D.J. Gorman, L. Garibaldi, **Accurate analytical type solutions for free vibration frequencies and mode shapes of multi-span bridge decks: the span-by-span approach**, *Journal of Sound and Vibration*, **290** (2006), 321-336.
- [12] A. Rezaiguia, D.F. Laefer, **Semi-analytical determination of natural frequencies and mode shapes of multi-span bridge decks**, *Journal of Sound and Vibration* **328** (2009) 291-300.
- [13] A. Rezaiguia, Y. Fisli, S. Ellagoune, D.F. Laefer, N. Ouelaa, **Extension of Semi-analytical approach to determine natural frequencies and mode shapes of multi-span orthotropic bridge deck**, *Journal of Structural Engineering and Mechanics* **43** (2012) 71-87.
- [14] L. Ma, W. Zhang, W.S. Han, J.X. Liu, **Determining the dynamic amplification factor of multi-span continuous box girder bridges in highways using vehicle-bridge interaction analyses**, *Engineering Structures* **181** (2019) 47–59.
- [15] J. Oliva, J.M. Goicolea, P. Antolin, M. A. Astiz, **Relevance of a complete road surface description in vehicle–bridge interaction dynamics**, *Engineering Structures* **56** (2013) 466–476.
- [16] X. Yin, Z. Fang, C.S. Cai, L. Deng, **Non-stationary random vibration of bridges under vehicles with variable speed**, *Engineering Structures*, **32** (2010) 2166–2174.
- [17] N.K. Harris, E.J. Obrien, A. Gonzalez, **Reduction of bridge dynamic amplification through adjustment of vehicle suspension damping**, *Journal of Sound and Vibration*, **302** (2007) 471-485.
- [18] A. Tarighi, T. Wang, **Dynamic Modeling of Long Combination Vehicles**, *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, **17, No 1** (2014) 330-345.
- [19] Y. Zhang, C.S. Cai, **Load distribution and dynamic response of multi-girder bridges with FRP decks**, *Engineering Structures* **29** (2007) 1676–1689.
- [20] S.S. Roy, S.R. Dash, **Dynamic behavior of multi span continuous girder bridge with isolation bearings**, *International Journal of Bridge Engineering (IJBE)*, Vol. 06, No. 2, (2018) 01-23.

-
- [21] L. Deng, C.S. Cai, **Development of dynamic impact factor for performance evaluation of existing multi-girder concrete bridges**, *Engineering Structures*, **32** (2010) 21-31.
- [22] L. Deng, W. He and Y. Shao, **Dynamic Impact Factors for Shear and Bending Moment of Simply Supported and Continuous Concrete Girder Bridges**, *American Society of Civil Engineers ASCE* (2015).
- [23] L. Deng, F. Wang and W. He, **Dynamic Impact Factors for Simply-Supported Bridges Due to Vehicle Braking**, *Advances in Structural Engineering Vol. 18 No. 6* (2015) 791-801.
- [24] Y. Yu, L. Deng, W. Wang and CS. Cai, **Local impact analysis for deck slabs of prestressed concrete box-girder bridges subject to vehicle loading**, *Journal of Vibration and Control* (2015).
- [25] H. Zhong, M. Yang, Z. J. Gao, **Dynamic responses of prestressed bridge and vehicle through bridge- vehicle interaction analysis**, *Engineering Structures*, **87** (2015) 116-125.
- [26] Y. Li, C.S. Cai, Y. Liu, Y. Chen, J. Liu, **Dynamic analysis of a large span specially shaped hybrid girder bridge with concrete-filled steel tube arches**, *Engineering Structures*, **106** (2016) 243-260.
- [27] B. Nunia, T. Rahman, S. Choudhury, P. Janardhan, **Effect of vehicle speed and road surface roughness on the impact factor of simply supported bridges due to IRC Class A and B loading**, *SN Applied Sciences*, **2**, 923 (2020)
- [28] J. Oliva, J. M. Goicolea, P. Antolín, M. Astiz, **Relevance of a complete road surface description in vehicle–bridge interaction dynamics**, *Engineering Structures*, **56** (2013) 466-476
- [29] C. Broquet, **Comportement des dalles de roulement des routes en béton sollicitées par le trafic routier**. Thèse PhD, Ecole Polytechnique Fédéral de Lausanne, 1999, 170 p.
- [30] K. Henchi, **Analyse dynamique des ponts par éléments finis sous les sollicitations des véhicules mobiles**, thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne, 1995.
- [31] A. Rezaiguia, **Modélisation du comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage des véhicules**, Thèse de doctorat, Université d'Annaba, 2008.

-
- [32] X.Q. Zhu, S.S. Law, **Dynamic behavior of orthotropic rectangular plate under moving loads**, Journal of Engineering Mechanics, 129, N° 1, pp 79-87, 2003
- [33] Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes, **Appareils d'appuis en élastomère fretté**, Ministère de l'écologie du développement et de l'aménagement durable, République Française, 2007
- [34] X.Q. Zhu, S.S. Law, **Moving load identification on multi-span continuous bridges with elastic bearings**, Mechanical Systems and Signal Processing **20** (2006) 1759–1782.
- [35] H.P. Lin, S.C. Chang, **free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints**, Journal of Sound and Vibration, **281** (2005), 155-169
- [36] Sollicitations aléatoires, principes et applications industrielles, IPSI, Vol. 18, N°1 (1994)

ANNEXES

Annexe 1

Complément du paragraphe 2.2.1 du chap. 2

Les éléments du vecteur $\{A\}$ et de la matrice $[F]$ sont les suivants :

2.1. Cas d'une poutre à deux travées

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2\}^T$$

$$f_{11} = 0 ; f_{12} = 1 ; f_{13} = 0 ; f_{14} = 1 ; f_{15} = f_{16} = f_{17} = f_{18} = 0$$

$$f_{11} = 0 ; f_{12} = -1 ; f_{13} = 0 ; f_{14} = 1 ; f_{15} = f_{16} = f_{17} = f_{18} = 0$$

$$f_{31} = -\sin \beta l_1 ; f_{32} = -\cos \beta l_1 ; f_{33} = sh\beta l_1 ; f_{34} = ch\beta l_2 ; f_{35} = 0 ; f_{36} = 1 ; f_{37} = 0 ; f_{38} = -1$$

$$f_{41} = \cos \beta l_1 ; f_{42} = -\sin \beta l_1 ; f_{43} = ch\beta l_1 ; f_{44} = sh\beta l_1 ; f_{45} = -1 ; f_{46} = 0 ; f_{47} = -1 ; f_{48} = 0$$

$$f_{51} = \sin \beta l_1 ; f_{52} = \cos \beta l_1 ; f_{53} = sh\beta l_1 ; f_{54} = ch\beta l_1 ; f_{55} = f_{56} = f_{57} = f_{58} = 0$$

$$f_{61} = f_{62} = f_{63} = f_{64} = f_{65} = 0 ; f_{66} = 1 ; f_{67} = 0 ; f_{68} = 1$$

$$f_{71} = f_{72} = f_{73} = f_{74} = 0 ; f_{75} = \sin \beta l_2 ; f_{76} = \cos \beta l_2 ; f_{77} = sh\beta l_2 ; f_{78} = ch\beta l_2$$

$$f_{81} = f_{82} = f_{83} = f_{84} = 0 ; f_{85} = -\sin \beta l_2 ; f_{86} = -\cos \beta l_2 ; f_{87} = sh\beta l_2 ; f_{88} = ch\beta l_2$$

2.2. Cas d'une poutre à trois travées

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3\}^T$$

$$f_{11} = 0 ; f_{12} = 1 ; f_{13} = 0 ; f_{14} = 1 ; f_{15} = f_{16} = f_{17} = f_{18} = f_{19} = f_{1.10} = f_{1.11} = f_{1.12} = 0$$

$$f_{21} = 0 ; f_{22} = -1 ; f_{23} = 0 ; f_{24} = 1 ; f_{25} = f_{26} = f_{27} = f_{28} = f_{29} = f_{2.10} = f_{2.11} = f_{2.12} = 0$$

$$f_{31} = -\sin \beta l_1 ; f_{32} = -\cos \beta l_1 ; f_{33} = sh\beta l_1 ; f_{34} = ch\beta l_2 ; f_{35} = 0 ; f_{36} = 1 ; f_{37} = 0 ;$$

$$f_{38} = -1 ; f_{39} = f_{3.10} = f_{3.11} = f_{3.12} = 0$$

$$f_{41} = \cos \beta l_1 ; f_{42} = -\sin \beta l_1 ; f_{43} = ch\beta l_1 ; f_{44} = sh\beta l_2 ; f_{45} = -1 ; f_{46} = 0 ; f_{47} = -1 ;$$

$$f_{48} = f_{49} = f_{4.10} = f_{4.11} = f_{4.12} = 0$$

$$f_{51} = \sin \beta l_1 ; f_{52} = \cos \beta l_1 ; f_{53} = sh\beta l_1 ; f_{54} = ch\beta l_1 ;$$

$$f_{55} = f_{56} = f_{57} = f_{58} = f_{59} = f_{5.10} = f_{5.11} = f_{5.12} = 0$$

$$f_{61} = f_{62}, \dots, f_{65} = 0 ; f_{66} = 1 ; f_{67} = 0 ; f_{68} = 1 ; f_{6.9} = f_{6.10} = f_{6.11} = f_{6.12} = 0$$

$$f_{71} = f_{72} = f_{73} = f_{74} = 0 ; f_{75} = -\sin \beta l_2 ; f_{76} = -\cos \beta l_2 ; f_{77} = sh\beta l_2 ; f_{78} = ch\beta l_2 ;$$

$$f_{79} = 0 ; f_{7.10} = 1 ; f_{7.11} = 0 ; f_{7.12} = -1$$

$$f_{81} = f_{82} = f_{83} = f_{84} = 0 ; f_{85} = \cos \beta l_2 ; f_{86} = -\sin \beta l_2 ;$$

$$f_{87} = ch\beta l_2 ; f_{88} = sh\beta l_2 ; f_{89} = -1 ; f_{8.10} = 0 ; f_{8.11} = -1 ; f_{8.12} = 0$$

$$f_{91} = f_{92} = f_{93} = f_{94} = 0 ; f_{95} = \sin \beta l_2 ; f_{96} = \cos \beta l_2 ; f_{97} = sh\beta l_2 ; f_{98} = ch\beta l_2 ;$$

$$f_{99} = f_{9.10} = f_{9.11} = f_{9.12} = 0$$

$$f_{10.1} = f_{10.2}, \dots, f_{10.9} = 0 ; f_{10.10} = 1 ; f_{10.11} = 0 ; f_{10.12} = 1$$

$$f_{11.1} = f_{11.2}, \dots, f_{11.8} = 0 ; f_{11.9} = \sin \beta l_3 ; f_{11.10} = \cos \beta l_3 ;$$

$$f_{11.11} = sh\beta l_3 ; f_{11.12} = ch\beta l_3$$

$$f_{12.1} = f_{12.2}, \dots, f_{12.8} = 0 ; f_{12.9} = -\sin \beta l_3 ; f_{12.10} = -\cos \beta l_3 ;$$

$$f_{12.11} = sh\beta l_3 ; f_{12.12} = ch\beta l_3$$

3.3. Cas d'une poutre multi-travées :

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_R, B_R, C_R, D_R\}^T$$

$$f_{12} = 1 ; f_{14} = 1$$

$$f_{22} = -1 ; f_{24} = 1$$

Pour $r = 2, 3, \dots, R$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+1} = -\sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+2} = -\cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+3} = sh\beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+4} = ch\beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+6} = 1$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+8} = -1$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+1} = \cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+2} = -\sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+3} = ch\beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+4} = sh\beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+5} = -1$$

$$f_{4(r-2)+4, 4(r-2)+7} = -1$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+1} = \sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+2} = \cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+3} = \operatorname{sh} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+4} = \operatorname{ch} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+6} = 1$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+8} = 1$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+1} = \sin \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+2} = \cos \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+3} = \operatorname{sh} \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+4} = \operatorname{ch} \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+1} = -\sin \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+2} = -\cos \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+3} = \operatorname{sh} \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+4} = \operatorname{ch} \beta l_R$$

Le reste des éléments f_{ij} sont égales à zéro

Annexe2

Calcul d'une dalle orthotrope équivalente au tablier

Le tablier du pont de la figure1 est considéré comme un matériau composite, composé d'une dalle en béton et de 5 poutres raidisseurs en acier. Il peut être remplacé par une dalle orthotrope en utilisant la notion des fractions volumiques et massiques au sein d'un matériau composite. Les caractéristiques du tablier sont :

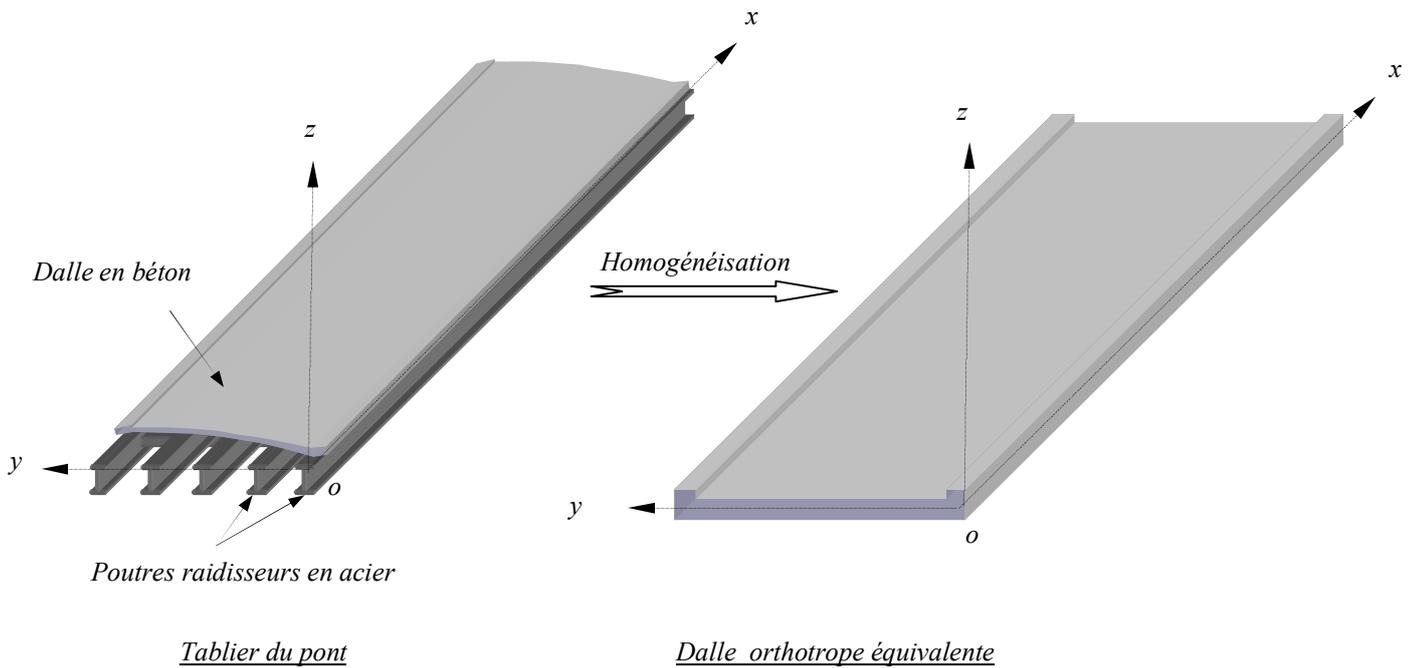


Fig.1 : Modélisation du tablier du pont par une dalle orthotrope équivalente

Masse et volume de la dalle de roulement en béton :

$$M_b = \rho_b l b h = 2300 \times 40 \times 11 \times 0.2 = 202400 \text{ kg}$$

$$V_b = \frac{M_b}{\rho_b} = 88 \text{ m}^3$$

Section, masse et volume d'une poutre raidisseur :

$$S_r = 0.4 \times 0.15 + 0.55 \times 0.18 + 0.175 \times 0.8 = 0.299 \text{ m}^2$$

$$M_r = \rho_r S_r l = 7850 \times 0.299 \times 40 = 93886 \text{ kg}$$

$$V_r = \frac{M_r}{\rho_r} = 11.96 \text{ m}^3$$

Fractions volumiques des constituants :

- *Fraction volumique du béton :*

$$v_b = \frac{V_b}{V_c} = \frac{\text{volume du béton}}{\text{volume du composite}} = 0.5953$$

- *Fraction volumique de l'acier :*

$$v_a = \frac{V_a}{V_c} = \frac{\text{volume de l'acier}}{\text{volume du composite}} = 0.4047$$

Avec V_c est le volume du composite qui est égale à :

$$V_c = V_b + 5V_r = 147.8 \text{ m}^3$$

Caractéristiques de la dalle orthotrope équivalente :

- *Masse volumique :*

$$\rho_c = \rho_b v_b + \rho_a v_a = 4546.085 \text{ kg/m}^3$$

- *Epaisseur :*

$$h_c = \frac{M_c}{\rho_c l b} = 0.336 \text{ m}$$

Avec M_c est la masse du composite qui est égale à :

$$M_c = M_b + 5M_r = 668840 \text{ kg}$$

- *Rigidités :*

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-S\nu^2)} + \frac{EI}{b_1} = 11.153526 \times 10^8 \text{ Nm}$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-S\nu^2)} = 14.019312 \times 10^6 \text{ Nm}$$

$$H = \nu D_y + \frac{Gh^3}{6} + \frac{Gm_1^3 n_1}{b_1} \alpha = 21.527522 \times 10^6 \text{ Nm}$$

$$D_{xy} = (H - \nu D_y) / 2 = 84.50574 \times 10^5 \text{ Nm}$$

- *Rapports de Poisson :*

$$\nu_{xy} = 0.33 ; \quad \nu_{yx} = \frac{D_y}{D_x} \nu_{xy} = 0.00417$$

- *Modules d'Young :*

$$E_x = \frac{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})D_x}{h_c^3} = 35.235221 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ; \quad E_y = E_x \frac{D_y}{D_x} = 44.572545 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

- *Module de cisaillement :*

$$G_{xy} = \frac{12D_{xy}}{h_c^3} = 26.73312 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

Annexe 3

Complément du paragraphe 3.2.1 du chap. 3

Les éléments du vecteur $\{A\}$ et de la matrice $[F]$ sont les suivants :

3.1. Cas d'une poutre à deux travées

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2\}^T$$

$$f_{11} = E_x I \beta^3; f_{12} = -k_1; f_{13} = -E_x I \beta^3; f_{14} = -k_1; f_{15} = f_{16} = f_{17} = f_{18} = 0$$

$$f_{21} = 0; f_{22} = E_x I \beta^2; f_{23} = 0; f_{24} = -E_x I \beta^2; f_{25} = f_{26} = f_{27} = f_{28} = 0$$

$$f_{31} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_1 + k_2 \sin \beta l_1; f_{32} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_1 + k_2 \cos \beta l_1$$

$$f_{33} = -E_x I \beta^3 ch \beta l_1 + k_2 sh \beta l_1; f_{34} = -E_x I \beta^3 sh \beta l_1 + k_2 ch \beta l_1$$

$$f_{35} = -E_x I \beta^3; f_{36} = 0; f_{37} = E_x I \beta^3; f_{38} = 0$$

$$f_{41} = E_x I \beta \sin \beta l_1; f_{42} = E_x I \beta \cos \beta l_1; f_{43} = -E_x I \beta sh \beta l_1;$$

$$f_{44} = -E_x I \beta ch \beta l_1; f_{45} = 0; f_{46} = -E_x I \beta; f_{47} = 0; f_{48} = E_x I \beta$$

$$f_{51} = \sin \beta l_1; f_{52} = \cos \beta l_1; f_{53} = sh \beta l_1; f_{54} = ch \beta l_1$$

$$f_{55} = 0; f_{56} = -1; f_{57} = 0; f_{58} = -1$$

$$f_{61} = \cos \beta l_1; f_{62} = -\sin \beta l_1; f_{63} = ch \beta l_1; f_{64} = sh \beta l_1;$$

$$f_{65} = -1; f_{66} = 0; f_{67} = -1; f_{68} = 0$$

$$f_{71} = 0; f_{72} = 0; f_{73} = 0; f_{74} = 0; f_{75} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_2 - k_3 \sin \beta l_2;$$

$$f_{76} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_2 - k_3 \cos \beta l_2; f_{77} = -E_x I \beta^3 ch \beta l_2 - k_3 sh \beta l_2;$$

$$f_{78} = -E_x I \beta^3 sh \beta l_2 - k_3 ch \beta l_2$$

$$f_{81} = 0; f_{82} = 0; f_{83} = 0; f_{84} = 0; f_{85} = E_x I \beta \sin \beta l_2;$$

$$f_{86} = E_x I \beta \cos \beta l_2; f_{87} = -E_x I \beta sh \beta l_2; f_{88} = -E_x I \beta ch \beta l_2$$

3.2. Cas d'une poutre à trois travées

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3\}^T$$

$$f_{11} = E_x I \beta^3; f_{12} = -k_1; f_{13} = -E_x I \beta^3; f_{14} = -k_1; f_{15} = f_{16} = \dots = f_{1,12} = 0$$

$$f_{21} = 0; f_{22} = E_x I \beta^2; f_{23} = 0; f_{24} = -E_x I \beta^2; f_{25} = f_{26} = \dots = f_{2,12} = 0$$

$$f_{31} = -E_x I \beta^3 \cos \beta l_1 - k_2 \sin \beta l_1; f_{32} = E_x I \beta^3 \sin \beta l_1 - k_2 \cos \beta l_1; f_{33} = E_x I \beta^3 ch \beta l_1 - k_2 sh \beta l_1$$

$$f_{34} = E_x I \beta^3 sh \beta l_1 - k_2 ch \beta l_1; f_{35} = E_x I \beta^3; f_{36} = 0; f_{37} = -E_x I \beta^3; f_{38} = f_{39} = \dots = f_{3,12} = 0$$

$$f_{41} = -E_x I \beta^2 \sin \beta l_1 ; f_{42} = -E_x I \beta^2 \cos \beta l_1 ; f_{43} = E_x I \beta^2 sh \beta l_1 ; f_{44} = E_x I \beta^2 ch \beta l_1 ; f_{45} = 0$$

$$f_{46} = E_x I \beta^2 ; f_{47} = 0 ; f_{48} = -E_x I \beta^2 ; f_{49} = f_{4,10} = f_{4,11} = f_{4,12} = 0$$

$$f_{51} = \sin \beta l_1 ; f_{52} = \cos \beta l_1 ; f_{53} = sh \beta l_1 ; f_{54} = ch \beta l_1 ; f_{55} = 0 ; f_{56} = -1 ; f_{57} = 0 ; f_{58} = -1$$

$$f_{59} = f_{5,10} = \dots = f_{5,12} = 0$$

$$f_{61} = \cos \beta l_1 ; f_{62} = -\sin \beta l_1 ; f_{63} = ch \beta l_1 ; f_{64} = sh \beta l_1 ; f_{65} = -1 ; f_{66} = 0 ; f_{67} = -1$$

$$f_{68} = f_{69} = \dots = f_{6,12} = 0$$

$$f_{71} = f_{72} = f_{73} = f_{74} = 0 ; f_{75} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_2 - k_3 \sin \beta l_2 ; f_{76} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_2 - k_3 \cos \beta l_2$$

$$f_{77} = -E_x I \beta^3 ch \beta l_2 - k_3 sh \beta l_2 ; f_{78} = -E_x I \beta^3 sh \beta l_2 - k_3 ch \beta l_2 ; f_{79} = -E_x I \beta^3 ; f_{7,10} = 0$$

$$f_{7,11} = E_x I \beta^3 ; f_{7,12} = 0$$

$$f_{81} = f_{82} = f_{83} = f_{84} = 0 ; f_{85} = E_x I \beta^2 \sin \beta l_2 ; f_{86} = E_x I \beta^2 \cos \beta l_2 ; f_{87} = E_x I \beta^2 sh \beta l_2$$

$$f_{88} = E_x I \beta^2 ch \beta l_2 ; f_{89} = 0 ; f_{8,10} = E_x I \beta^2 ; f_{8,11} = 0 ; f_{8,12} = -E_x I \beta^2$$

$$f_{91} = f_{92} = f_{93} = f_{94} = 0 ; f_{95} = \sin \beta l_2 ; f_{96} = \cos \beta l_2 ; f_{97} = sh \beta l_2 ; f_{98} = ch \beta l_2$$

$$f_{99} = 0 ; f_{9,10} = -1 ; f_{9,11} = 0 ; f_{9,12} = -1$$

$$f_{10,1} = f_{10,2} = f_{10,3} = f_{10,4} = 0 ; f_{10,5} = \cos \beta l_2 ; f_{10,6} = -\sin \beta l_2 ; f_{10,7} = ch \beta l_2 ; f_{10,8} = sh \beta l_2$$

$$f_{10,9} = -1 ; f_{10,10} = 0 ; f_{10,11} = -1 ; f_{10,12} = 0$$

$$f_{11,1} = f_{11,2} = \dots = f_{11,8} = 0 ; f_{11,9} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_3 + k_4 \sin \beta l_3 ; f_{11,10} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_3 + k_4 \cos \beta l_3$$

$$f_{11,11} = -E_x I \beta^3 ch \beta l_3 + k_4 sh \beta l_3 ; f_{11,12} = +E_x I \beta^3 sh \beta l_3 + k_4 ch \beta l_3$$

$$f_{12,1} = f_{12,2} = \dots = f_{12,8} = 0 ; f_{12,9} = E_x I \beta^2 \sin \beta l_3 ; f_{12,10} = E_x I \beta^2 \cos \beta l_3 ; f_{12,11} = -E_x I \beta^2 sh \beta l_3$$

$$f_{12,12} = -E_x I \beta^2 ch \beta l_3$$

3.3. Cas d'une poutre multi-travées

$$\{A\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_R, B_R, C_R, D_R\}^T$$

$$f_{11} = E_x I \beta^3 ; f_{12} = -k_1 ; f_{13} = -E_x I \beta^3 ; f_{14} = -k_1$$

$$f_{21} = k_1 \beta ; f_{22} = E_x I \beta^2 ; f_{23} = k_1 \beta ; f_{24} = -E_x I \beta^2$$

Pour $r = 2, 3, \dots, R$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+1} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_{r-1} + (-1)^r k_r \sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+2} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_{r-1} + (-1)^r k_r \cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+3} = -E_x I \beta^3 ch \beta l_{r-1} + (-1)^r k_r sh \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+4} = -E_x I \beta^3 sh \beta l_{r-1} + (-1)^r k_r ch \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+5} = -E_x I \beta^3$$

$$f_{4(r-2)+3, 4(r-2)+7} = +E_x I \beta^3$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+1} = E_x I \beta^2 \sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+2} = E_x I \beta^2 \cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+3} = -E_x I \beta^2 \operatorname{sh} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+4} = -E_x I \beta^2 \operatorname{ch} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+6} = -E_x I \beta^2$$

$$f_{4(r-2)+4,4(r-2)+8} = +E_x I \beta^2$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+1} = -\sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+2} = -\cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+3} = -\operatorname{sh} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+4} = -\operatorname{ch} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+6} = 1$$

$$f_{4(r-2)+5,4(r-2)+8} = 1$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+1} = -\beta \cos \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+2} = \beta \sin \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+3} = -\beta \operatorname{ch} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+4} = -\beta \operatorname{sh} \beta l_{r-1}$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+5} = \beta$$

$$f_{4(r-2)+6,4(r-2)+7} = \beta$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+1} = E_x I \beta^3 \cos \beta l_R + (-1)^{R+1} k_{R+1} \sin \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+2} = -E_x I \beta^3 \sin \beta l_R + (-1)^{R+1} k_{R+1} \cos \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+3} = -E_x I \beta^3 \operatorname{ch} \beta l_R + (-1)^{R+1} k_{R+1} \operatorname{sh} \beta l_R$$

$$f_{4(R-1)+3,4(R-1)+4} = -E_x I \beta^3 \operatorname{sh} \beta l_R + (-1)^{R+1} k_{R+1} \operatorname{ch} \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+1} = E_x I \beta^2 \sin \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+2} = E_x I \beta^2 \cos \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+3} = -E_x I \beta^2 \operatorname{sh} \beta l_R$$

$$f_{4R,4(R-1)+4} = -E_x I \beta^2 \operatorname{ch} \beta l_R$$

Le reste des éléments f_{ij} sont égales à zéro

Annexe 4

Complément du paragraphe 4.5.3.3

Les équations de mouvement des modèles de camion sous forme matricielle s'écrivent :

$$[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\}$$

Avec les éléments des matrices et vecteurs sont les suivants :

3.1. Modèle de camion à essieux tandem à 9 degrés de liberté:

$$\{Z_v\} = \{z_v ; \theta_v ; \alpha_v ; z_1 ; z_2 ; z_5 ; z_4 ; z_5 ; z_6\}$$

Les éléments de la matrice de masse $[M_v]$ sont :

$$m_{11} = m_v ; m_{22} = I_{\theta_v} ; m_{33} = I_{\alpha_v} ; m_{44} = m_1 ; m_{55} = m_2 ; m_{66} = m_3 ; \\ m_{77} = m_4 ; m_{88} = m_5 ; m_{99} = m_6$$

Le reste des éléments de la matrice sont tous des zéro

Les éléments de la matrice $[k_v]$ sont

$$k_{11} = \sum_{i=1}^4 k_{s_i} ; k_{12} = a_1 s_1 (k_{s_1} + k_{s_3}) - a_2 s_1 (k_{s_2} + k_{s_4}) ; k_{13} = b_1 s_3 (k_{s_3} + k_{s_4}) - b_2 s_3 (k_{s_1} + k_{s_2}) \\ k_{14} = -k_{s_1} ; k_{15} = -a_4 k_{s_2} ; k_{16} = -a_3 k_{s_2} ; k_{17} = -k_{s_3} ; k_{18} = -a_4 k_{s_4} ; k_{19} = -a_3 k_{s_4} \\ k_{22} = a_1^2 s_1^2 (k_{s_1} + k_{s_3}) + a_2^2 s_1^2 (k_{s_2} + k_{s_4}) ; k_{23} = s_1 s_3 (a_1 b_1 k_{s_3} + a_2 b_2 k_{s_2} - a_1 b_2 k_{s_1} - a_2 b_1 k_{s_4}) \\ k_{24} = -a_1 s_1 k_{s_1} ; k_{25} = a_2 a_4 s_1 k_{s_2} ; k_{26} = a_2 a_3 s_1 k_{s_2} ; k_{27} = -a_2 s_1 k_{s_3} ; k_{28} = a_2 a_4 s_1 k_{s_4} ; \\ k_{29} = a_2 a_3 s_1 k_{s_4} \\ k_{33} = b_1^2 s_3^2 (k_{s_3} + k_{s_4}) + b_2^2 s_3^2 (k_{s_1} + k_{s_2}) ; k_{34} = b_2 s_3 k_{s_1} ; k_{35} = a_4 b_2 s_3 k_{s_2} \\ k_{36} = a_3 b_2 s_3 k_{s_2} ; k_{37} = -b_1 s_3 k_{s_3} ; k_{38} = -a_4 b_1 s_1 k_{s_4} ; k_{39} = -a_3 b_1 s_3 k_{s_4} \\ k_{44} = k_{s_1} + k_{p1} \\ k_{55} = a_4^2 k_{s_2} + k_{p2} ; k_{56} = a_3 a_4 k_{s_2} \\ k_{66} = a_3^2 k_{s_2} + k_{p3} ; k_{67} = a_3 a_4 k_{s_2} \\ k_{77} = k_{s_3} + k_{p4} \\ k_{88} = a_4^2 k_{s_4} + k_{p5} ; k_{89} = a_3 a_4 k_{s_4} \\ k_{99} = a_3^2 k_{s_4} + k_{p6}$$

Le reste des éléments k_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[C_v]$ sont :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \sum_{i=1}^4 c_{si} ; c_{12} = a_1 s_1 (c_{s1} + c_{s3}) - a_2 s_1 (c_{s2} + c_{s4}) ; c_{13} = b_1 s_3 (c_{s3} + c_{s4}) - b_2 s_3 (c_{s1} + c_{s2}) \\
c_{14} &= -c_{s1} ; c_{15} = -a_4 c_{s2} ; c_{16} = -a_3 c_{s2} ; c_{17} = -c_{s3} ; c_{18} = -a_4 c_{s4} ; c_{19} = -a_3 c_{s4} \\
c_{22} &= a_1^2 s_1^2 (c_{s1} + c_{s3}) + a_2^2 s_1^2 (c_{s2} + c_{s4}) ; c_{23} = s_1 s_3 (a_1 b_1 c_{s3} + a_2 b_2 c_{s2} - a_1 b_2 c_{s1} - a_2 b_1 c_{s4}) \\
c_{24} &= -a_1 s_1 c_{s1} ; c_{25} = a_2 a_4 s_1 c_{s2} ; c_{26} = a_2 a_3 s_1 c_{s2} ; c_{27} = -a_2 s_1 c_{s3} ; c_{28} = a_2 a_4 s_1 c_{s4} ; \\
c_{29} &= a_2 a_3 s_1 c_{s4} \\
c_{33} &= b_1^2 s_3^2 (c_{s3} + c_{s4}) + b_2^2 s_3^2 (c_{s1} + c_{s2}) ; c_{34} = b_2 s_3 c_{s1} ; c_{35} = a_4 b_2 s_3 c_{s2} \\
c_{36} &= a_3 b_2 s_3 c_{s2} ; c_{37} = -b_1 s_3 c_{s3} ; c_{38} = -a_4 b_1 s_1 c_{s4} ; c_{39} = -a_3 b_1 s_3 c_{s4} \\
c_{44} &= c_{s1} + c_{p1} \\
c_{55} &= a_4^2 c_{s2} + c_{p2} ; c_{56} = a_3 a_4 c_{s2} \\
c_{66} &= a_3^2 c_{s2} + c_{p3} \\
c_{77} &= c_{s3} + c_{p4} \\
c_{88} &= a_4^2 c_{s4} + c_{p5} ; c_{89} = a_3 a_4 c_{s4} \\
c_{99} &= a_3^2 c_{s4} + c_{p6}
\end{aligned}$$

Le reste des éléments c_{ij} sont égales à zéro

3.2. Modèle de camion à essieux tandem à 11 degrés de liberté:

$$\{Z_v\} = \left\{ z_v ; \theta_v ; \alpha_v ; I_{\theta_{L1}} ; I_{\theta_{L1}} ; z_1 ; z_2 ; z_5 ; z_4 ; z_5 ; z_6 \right\}$$

Les éléments de la matrice de masse $[M_v]$ sont :

$$\begin{aligned}
m_{11} &= m_v ; m_{22} = I_{\theta_v} ; m_{33} = I_{\alpha_v} ; m_{44} = I_{\theta_{L1}} ; m_{55} = I_{\alpha_{L2}} ; m_{66} = m_1 ; \\
m_{77} &= m_2 ; m_{88} = m_3 ; m_{99} = m_4 ; m_{10,10} = m_5 ; m_{11,11} = m_6
\end{aligned}$$

Le reste des éléments k_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[k_v]$ sont :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \sum_{i=1}^6 k_{si} ; k_{12} = a_1 s_1 (k_{s1} + k_{s4}) - a_2 s_1 (k_{s2} + k_{s3} + k_{s5} + k_{s6}) ; k_{13} = b_1 s_3 (k_{s4} + k_{s5} + k_{s6}) - b_2 s_3 (k_{s1} + k_{s2} + k_{s3}) ; \\
k_{14} &= s_2 (a_3 k_{s2} - a_4 k_{s3}) ; k_{15} = s_2 (a_3 k_{s5} - a_4 k_{s6}) ; k_{16} = -k_{s1} ; k_{17} = -k_{s2} ; k_{18} = -k_{s3} ; k_{19} = -k_{s4} \\
k_{1,10} &= -k_{s5} ; k_{1,11} = -k_{s6} \\
k_{22} &= a_1^2 s_1^2 (k_{s1} + k_{s4}) + a_2^2 s_1^2 (k_{s2} + k_{s3} + k_{s5} + k_{s6}) ; k_{23} = b_2 s_1 s_3 (a_2 k_{s2} + a_2 k_{s3} - a_1 k_{s1}) + b_1 s_1 s_3 (a_1 k_{s4} - a_2 k_{s5} - a_2 k_{s6}) \\
k_{24} &= a_2 s_1 s_2 (a_4 k_{s3} - a_3 k_{s2}) ; k_{25} = a_2 s_1 s_2 (a_4 k_{s6} - a_3 k_{s5}) ; k_{26} = -a_1 s_1 k_{s1} \\
k_{27} &= a_2 s_1 k_{s2} ; k_{28} = a_2 s_1 k_{s3} ; k_{29} = -a_1 s_1 k_{s4} ; k_{2,10} = a_2 s_1 k_{s5} ; k_{2,11} = a_2 s_1 k_{s6} \\
k_{33} &= b_2^2 s_3^2 (k_{s1} + k_{s2} + k_{s3}) + b_1^2 s_3^2 (k_{s4} + k_{s5} + k_{s6}) ; k_{34} = b_2 s_2 s_3 (a_4 k_{s3} - a_3 k_{s2}) ; k_{35} = b_1 s_2 s_3 (a_3 k_{s5} - a_4 k_{s6}) \\
k_{36} &= b_2 s_3 k_{s1} ; k_{37} = b_2 s_3 k_{s2} ; k_{38} = b_2 s_3 k_{s3} ; k_{39} = -b_1 s_3 k_{s4} ; k_{3,10} = -b_1 s_3 k_{s5} ; k_{3,11} = -b_1 s_3 k_{s6} \\
k_{44} &= s_2^2 (a_3^2 k_{s2} + a_4^2 k_{s3}) ; k_{45} = 0 ; k_{46} = 0 ; k_{47} = -a_3 s_2 k_{s2} ; k_{48} = a_4 s_2 k_{s3} ; k_{49} = 0 ; k_{4,10} = 0 ; k_{4,11} = 0 \\
k_{55} &= s_2^2 (a_3^2 k_{s5} + a_4^2 k_{s6}) ; k_{56} = 0 ; k_{57} = 0 ; k_{58} = 0 ; k_{59} = 0 ; k_{5,10} = -a_3 s_2 k_{s5} ; k_{5,11} = a_4 s_2 k_{s6} \\
k_{66} &= k_{s1} + k_{p1} ; k_{67} = 0 ; k_{68} = 0 ; k_{69} = 0 ; k_{6,10} = 0 ; k_{6,11} = 0 \\
k_{77} &= k_{s2} + k_{p2} ; k_{78} = 0 ; k_{79} = 0 ; k_{7,10} = 0 ; k_{7,11} = 0 \\
k_{88} &= k_{s3} + k_{p3} ; k_{89} = 0 ; k_{8,10} = 0 ; k_{8,11} = 0 \\
k_{99} &= k_{s4} + k_{p4} ; k_{9,10} = 0 ; k_{9,11} = 0 \\
k_{10,10} &= k_{s5} + k_{p5} ; k_{10,11} = 0 \\
k_{11,11} &= k_{s6} + k_{p6}
\end{aligned}$$

Le reste des éléments k_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[C_v]$ sont :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \sum_{i=1}^6 c_{si} ; c_{12} = a_1 s_1 (c_{s1} + c_{s4}) - a_2 s_1 (c_{s2} + c_{s3} + c_{s5} + c_{s6}) ; c_{13} = b_1 s_3 (c_{s4} + c_{s5} + c_{s6}) - b_2 s_3 (c_{s1} + c_{s2} + c_{s3}) \\
c_{14} &= s_2 (a_3 c_{s2} - a_4 c_{s3}) ; c_{15} = s_2 (a_3 c_{s5} - a_4 c_{s6}) ; c_{16} = -c_{s1} ; c_{17} = -c_{s2} ; c_{18} = -c_{s3} ; c_{19} = -c_{s4} \\
c_{1,10} &= -c_{s5} ; c_{1,11} = -c_{s6} \\
c_{22} &= a_1^2 s_1^2 (c_{s1} + c_{s4}) + a_2^2 s_1^2 (c_{s2} + c_{s3} + c_{s5} + c_{s6}) ; c_{23} = b_2 s_1 s_3 (a_2 c_{s2} + a_2 c_{s3} - a_1 c_{s1}) + b_1 s_1 s_3 (a_1 c_{s4} - a_2 c_{s5} - a_2 c_{s6}) \\
c_{24} &= a_2 s_1 s_2 (a_4 c_{s3} - a_3 c_{s2}) ; c_{25} = a_2 s_1 s_2 (a_4 c_{s6} - a_3 c_{s5}) ; c_{26} = -a_1 s_1 c_{s1} \\
c_{27} &= a_2 s_1 c_{s2} ; c_{28} = a_2 s_1 c_{s3} ; c_{29} = -a_1 s_1 c_{s4} ; c_{2,10} = a_2 s_1 c_{s5} ; c_{2,11} = a_2 s_1 c_{s6} \\
c_{33} &= b_2^2 s_3^2 (c_{s1} + c_{s2} + c_{s3}) + b_1^2 s_3^2 (c_{s4} + c_{s5} + c_{s6}) ; c_{34} = b_2 s_2 s_3 (a_4 c_{s3} - a_3 c_{s2}) ; c_{35} = b_1 s_2 s_3 (a_3 c_{s5} - a_4 c_{s6}) \\
c_{36} &= b_2 s_3 c_{s1} ; c_{37} = b_2 s_3 c_{s2} ; c_{38} = b_2 s_3 c_{s3} ; c_{39} = -b_1 s_3 c_{s4} ; c_{3,10} = -b_1 s_3 c_{s5} ; c_{3,11} = -b_1 s_3 c_{s6} \\
c_{44} &= s_2^2 (a_3^2 c_{s2} + a_4^2 c_{s3}) ; c_{45} = 0 ; c_{46} = 0 ; c_{47} = -a_3 s_2 c_{s2} ; c_{48} = a_4 s_2 c_{s3} ; c_{49} = 0 ; c_{4,10} = 0 ; c_{4,11} = 0 \\
c_{55} &= s_2^2 (a_3^2 c_{s5} + a_4^2 c_{s6}) ; c_{56} = 0 ; c_{57} = 0 ; c_{58} = 0 ; c_{59} = 0 ; c_{5,10} = -a_3 s_2 c_{s5} ; c_{5,11} = a_4 s_2 c_{s6} \\
c_{66} &= c_{s1} + c_{p1} ; c_{67} = 0 ; c_{68} = 0 ; c_{69} = 0 ; c_{6,10} = 0 ; c_{6,11} = 0 \\
c_{77} &= c_{s2} + c_{p2} ; c_{78} = 0 ; c_{79} = 0 ; c_{7,10} = 0 ; c_{7,11} = 0 \\
c_{88} &= c_{s3} + c_{p3} ; c_{89} = 0 ; c_{8,10} = 0 ; c_{8,11} = 0 \\
c_{99} &= c_{s4} + c_{p4} ; c_{9,10} = 0 ; c_{9,11} = 0 \\
c_{10,10} &= c_{s5} + c_{p5} ; c_{10,11} = 0 \\
c_{11,11} &= c_{s6} + c_{p6}
\end{aligned}$$

Le reste des éléments c_{ij} sont égales à zéro

Complément du paragraphe 4.6.1

Les équations de mouvement des modèles de camion a essieux tridem sous forme matricielle s'écrivent :

$$[M]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\}$$

Avec les élément des matrices et vecteurs sont les suivants :

4.1. Modèle de camion à essieux tridem à 18 degrés de liberté:

$$\{Z_v\} = \{z_t ; \theta_t ; \alpha_t ; z_r ; \theta_r ; \alpha_r ; z_1 ; \alpha_1 ; z_2 ; \alpha_2 ; z_3 ; \alpha_3 ; z_4 ; \alpha_4 ; z_5 ; \alpha_5 ; z_6 ; \alpha_6\}$$

Les éléments de la matrice de masses $[M]$ sont :

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_t ; m_{22} = I_{\theta_t} ; m_{33} = I_{\alpha_t} ; m_{44} = m_r ; m_{55} = I_{\theta_r} ; m_{66} = I_{\alpha_r} ; \\ m_{77} &= m_1 ; m_{88} = I_{\alpha_1} ; m_{99} = m_2 ; m_{10,10} = I_{\alpha_2} ; m_{11,11} = m_3 ; m_{12,12} = I_{\alpha_3} ; \\ m_{13,13} &= m_4 ; m_{14,14} = I_{\alpha_4} ; m_{15,15} = m_5 ; m_{16,16} = I_{\alpha_5} ; m_{17,17} = m_6 ; m_{18,18} = I_{\alpha_6} \end{aligned}$$

Le reste des éléments de la matrice sont tous des zéro

Les éléments de la matrice $[K_v]$ sont :

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{s1} + k_{s2} + k_{s6} + k_{s7} + k_e ; k_{12} = -a_1 s_1 (k_{s1} + k_{s6}) + a_2 s_1 (k_{s2} + k_{s7}) + s_6 k_e ; \\ k_{13} &= s_9 (b_2 k_{s1} - b_1 k_{s6}) + s_{11} (b_2 k_{s2} - b_1 k_{s7}) ; k_{14} = -k_e ; k_{15} = s_7 k_e ; \\ k_{17} &= -(k_{s1} + k_{s6}) ; k_{18} = s_9 (b_1 k_{s6} - b_2 k_{s1}) ; k_{19} = -a_4 (k_{s2} + k_{s7}) ; \\ k_{1,10} &= a_4 s_{11} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; k_{1,11} = -a_3 (k_{s2} + k_{s7}) ; k_{1,12} = a_3 s_{11} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; \\ k_{22} &= a_1^2 s_1^2 (k_{s1} + k_{s6}) + a_2^2 s_1^2 (k_{s2} + k_{s7}) + s_6^2 k_e ; \\ k_{23} &= a_1 s_1 s_9 (b_1 k_{s6} - b_2 k_{s1}) + a_2 s_1 s_{11} (b_2 k_{s2} - b_1 k_{s7}) ; k_{24} = -s_6 k_e ; k_{25} = s_6 s_7 k_e ; \\ k_{2,7} &= a_1 s_1 (k_{s1} + k_{s6}) ; k_{2,8} = a_1 s_1 s_9 (b_2 k_{s1} - b_1 k_{s6}) ; k_{2,9} = -a_2 a_4 s_1 (k_{s2} + k_{s7}) ; \\ k_{2,10} &= a_2 a_4 s_{11} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; k_{2,11} = -a_2 a_3 s_1 (k_{s2} + k_{s7}) ; k_{2,12} = a_2 a_3 s_{11} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; \\ k_{33} &= s_9^2 (b_2^2 k_{s1} + b_1^2 k_{s6}) + s_{10}^2 s_{11} (b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7}) ; k_{3,7} = s_9 (b_1 k_{s6} - b_2 k_{s1}) ; k_{3,8} = -s_9^2 (b_2^2 k_{s1} + b_1^2 k_{s6}) ; \\ k_{3,9} &= a_4 s_{10} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; k_{3,10} = -a_4 s_{10} s_{11} (b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7}) ; k_{3,11} = a_3 s_{10} (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s2}) ; \\ k_{3,12} &= -a_3 s_{10} s_{11} (b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7}) ; \\ k_{44} &= k_{s3} + k_{s4} + k_{s5} + k_{s8} + k_{s9} + k_{s10} + k_e ; \\ k_{45} &= s_3 (k_{s3} + k_{s8}) + s_4 (k_{s4} + k_{s9}) + s_5 (k_{s5} + k_{s10}) - s_7 k_e ; \\ k_{46} &= b_2 s_{11} (k_{s3} + k_{s4} + k_{s5}) - b_1 s_{11} (k_{s8} + k_{s9} + k_{s10}) ; k_{4,13} = -(k_{s3} + k_{s8}) ; \\ k_{4,14} &= s_{11} (b_1 k_{s8} - b_2 k_{s3}) ; k_{4,15} = -(k_{s4} + k_{s9}) ; k_{4,16} = s_{11} (b_1 k_{s9} - b_2 k_{s4}) \\ k_{4,17} &= -(k_{s5} + k_{s10}) ; k_{4,18} = s_{11} (b_1 k_{s10} - b_2 k_{s5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{55} &= s_3^2(k_{s3} + k_{s8}) + s_4^2(k_{s4} + k_{s9}) + s_5^2(k_{s5} + k_{s10}) - s_7^2 k_e ; \\
k_{56} &= s_3 s_{11}(b_2 k_{s3} - b_1 k_{s8}) + s_4 s_{11}(b_2 k_{s4} - b_1 k_{s9}) + s_5 s_{11}(b_2 k_{s5} - b_1 k_{s10}) ; \\
k_{5.13} &= -s_3(k_{s3} + k_{s8}) ; k_{5.14} = s_3 s_{11}(b_1 k_{s8} - b_2 k_{s3}) ; k_{5.15} = -s_4(k_{s4} + k_{s9}) ; \\
k_{5.16} &= s_4 s_{11}(b_1 k_{s9} - b_2 k_{s4}) ; k_{5.17} = -s_5(k_{s5} + k_{s10}) ; k_{5.18} = s_5 s_{11}(b_1 k_{s10} - b_2 k_{s5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{6.6} &= b_2^2 s_{11}^2(k_{s3} + k_{s4} + k_{s5}) - b_1^2 s_{11}^2(k_{s8} + k_{s9} + k_{s10}) ; \\
k_{6.13} &= s_{11}(b_1 k_{s8} - b_2 k_{s3}) ; k_{6.14} = -s_{11}^2(b_2^2 k_{s3} + b_1^2 k_{s8}) ; \\
k_{6.15} &= s_{11}(b_1 k_{s9} - b_2 k_{s4}) ; k_{6.16} = -s_{11}^2(b_2^2 k_{s4} + b_1^2 k_{s9}) ; \\
k_{6.17} &= s_{11}(b_1 k_{s10} - b_2 k_{s5}) ; k_{6.18} = -s_{11}^2(b_2^2 k_{s5} + b_1^2 k_{s10})
\end{aligned}$$

$$k_{77} = k_{p1} + k_{p7} + k_{s1} + k_{s6} ; k_{78} = s_8(b_2 k_{p1} - b_1 k_{p7}) + s_9(b_2 k_{s1} - b_1 k_{s6})$$

$$k_{88} = s_8^2(b_2^2 k_{p1} + b_1^2 k_{p7}) + s_9^2(b_2^2 k_{s1} + b_1^2 k_{s6})$$

$$\begin{aligned}
k_{99} &= k_{p2} + k_{p8} + a_4^2(k_{s2} + k_{s7}) ; k_{9.10} = s_{10}(b_2 k_{p2} - b_1 k_{p8}) + a_4^2 s_{11}(b_2 k_{s2} + b_1 k_{s7}) ; \\
k_{9.11} &= a_3 a_4(k_{s2} + k_{s7}) ; k_{9.12} = a_3 a_4 s_{11}(b_2 k_{s2} - b_1 k_{s7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{10.10} &= s_{10}^2(b_2^2 k_{p2} + b_1^2 k_{p8}) + a_4^2 s_{11}^2(b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7}) ; k_{10.11} = a_3 a_4(b_2 k_{s2} - b_1 k_{s7}) \\
k_{10.12} &= a_3 a_4 s_{11}^2(b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7})
\end{aligned}$$

$$k_{11.11} = k_{p3} + k_{p9} + a_3^2(k_{s2} + k_{s7}) ; k_{11.12} = s_{10}(b_2 k_{p3} - b_1 k_{p9}) + a_3^2 s_{11}(b_2 k_{s2} - b_1 k_{s7})$$

$$k_{12.12} = s_{10}^2(b_2^2 k_{p3} + b_1^2 k_{p9}) + a_3^2 s_{11}^2(b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s7})$$

$$k_{13.13} = k_{p4} + k_{p10} + k_{s3} + k_{s8} ; k_{13.14} = s_{10}(b_2 k_{p4} - b_1 k_{p10}) + s_{11}(b_2 k_{s3} - b_1 k_{s8})$$

$$k_{14.14} = s_{10}^2(b_2^2 k_{p4} + b_1^2 k_{p10}) + s_{11}^2(b_2^2 k_{s3} + b_1^2 k_{s8})$$

$$k_{15.15} = k_{p5} + k_{p11} + k_{s4} + k_{s9} ; k_{15.16} = s_{10}(b_2 k_{p5} - b_1 k_{p11}) + s_{11}(b_2 k_{s4} - b_1 k_{s9})$$

$$k_{16.16} = s_{10}^2(b_2^2 k_{p5} + b_1^2 k_{p11}) + s_{11}^2(b_2^2 k_{s4} + b_1^2 k_{s9})$$

$$k_{17.17} = k_{p6} + k_{p12} + k_{s5} + k_{s10} ; k_{17.18} = s_{10}(b_2 k_{p6} - b_1 k_{p12}) + s_{11}(b_2 k_{s5} - b_1 k_{s10})$$

$$k_{18.18} = s_{10}^2(b_2^2 k_{p6} + b_1^2 k_{p12}) + s_{11}^2(b_2^2 k_{s5} + b_1^2 k_{s10})$$

Le reste des éléments k_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[C_v]$ sont :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{s1} + c_{s2} + c_{s6} + c_{s7} + c_e ; c_{12} = -a_1 s_1 (c_{s1} + c_{s6}) + a_2 s_1 (c_{s2} + c_{s7}) + s_6 c_e ; \\
c_{13} &= s_9 (b_2 c_{s1} - b_1 c_{s6}) + s_{11} (b_2 c_{s2} - b_1 c_{s7}) ; c_{14} = -c_e ; c_{15} = s_7 c_e ; \\
c_{17} &= -(c_{s1} + c_{s6}) ; c_{18} = s_9 (b_1 c_{s6} - b_2 c_{s1}) ; c_{19} = -a_4 (c_{s2} + c_{s7}) ; \\
c_{1.10} &= a_4 s_{11} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) ; c_{1.11} = -a_3 (c_{s2} + c_{s7}) ; c_{1.12} = a_3 s_{11} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) \\
\\
c_{22} &= a_1^2 s_1^2 (c_{s1} + c_{s6}) + a_2^2 s_1^2 (c_{s2} + c_{s7}) + s_6^2 c_e ; \\
c_{23} &= a_1 s_1 s_9 (b_1 c_{s6} - b_2 c_{s1}) + a_2 s_1 s_{11} (b_2 c_{s2} - b_1 c_{s7}) ; c_{24} = -s_6 c_e ; c_{25} = s_6 s_7 c_e ; \\
c_{2.7} &= a_1 s_1 (c_{s1} + c_{s6}) ; c_{28} = a_1 s_1 s_9 (b_2 c_{s1} - b_1 c_{s6}) ; c_{2.9} = -a_2 a_4 s_1 (c_{s2} + c_{s7}) ; \\
c_{2.10} &= a_2 a_4 s_{11} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) ; c_{2.11} = -a_2 a_3 s_1 (c_{s2} + c_{s7}) ; c_{2.12} = a_2 a_3 s_{11} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) \\
\\
c_{33} &= s_9^2 (b_2^2 c_{s1} + b_1^2 c_{s6}) + s_{10}^2 s_{11} (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7}) ; c_{3.7} = s_9 (b_1 c_{s6} - b_2 c_{s1}) ; c_{38} = -s_9^2 (b_2^2 c_{s1} + b_1^2 c_{s6}) ; \\
c_{39} &= a_4 s_{10} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) ; c_{3.10} = -a_4 s_{10} s_{11} (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7}) ; c_{3.11} = a_3 s_{10} (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s2}) ; \\
c_{3.12} &= -a_3 s_{10} s_{11} (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7}) \\
\\
c_{44} &= c_{s3} + c_{s4} + c_{s5} + c_{s8} + k_{s9} + c_{s10} + c_e ; \\
c_{45} &= s_3 (c_{s3} + c_{s8}) + s_4 (c_{s4} + c_{s9}) + s_5 (c_{s5} + c_{s10}) - s_7 c_e ; \\
c_{46} &= b_2 s_{11} (c_{s3} + c_{s4} + c_{s5}) - b_1 s_{11} (c_{s8} + c_{s9} + c_{s10}) ; c_{4.13} = -(c_{s3} + c_{s8}) ; \\
c_{4.14} &= s_{11} (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s3}) ; c_{4.15} = -(c_{s4} + c_{s9}) ; c_{4.16} = s_{11} (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s4}) \\
c_{4.17} &= -(c_{s5} + c_{s10}) ; c_{4.18} = s_{11} (b_1 c_{s10} - b_2 c_{s5}) \\
\\
c_{55} &= s_3^2 (c_{s3} + c_{s8}) + s_4^2 (c_{s4} + c_{s9}) + s_5^2 (c_{s5} + c_{s10}) - s_7^2 c_e ; \\
c_{56} &= s_3 s_{11} (b_2 c_{s3} - b_1 c_{s8}) + s_4 s_{11} (b_2 c_{s4} - b_1 c_{s9}) + s_5 s_{11} (b_2 c_{s5} - b_1 c_{s10}) ; \\
c_{5.13} &= -s_3 (c_{s3} + c_{s8}) ; c_{5.14} = s_3 s_{11} (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s3}) ; c_{5.15} = -s_4 (c_{s4} + c_{s9}) ; \\
c_{5.16} &= s_4 s_{11} (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s4}) ; c_{5.17} = -s_5 (c_{s5} + c_{s10}) ; c_{5.18} = s_5 s_{11} (b_1 c_{s10} - b_2 c_{s5}) \\
\\
c_{6.6} &= b_2^2 s_{11}^2 (c_{s3} + c_{s4} + c_{s5}) - b_1^2 s_{11}^2 (c_{s8} + c_{s9} + c_{s10}) ; c_{6.13} = s_{11} (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s3}) ; \\
c_{6.14} &= -s_{11}^2 (b_2^2 c_{s3} + b_1^2 c_{s8}) ; c_{6.15} = s_{11} (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s4}) ; c_{6.16} = -s_{11}^2 (b_2^2 c_{s4} + b_1^2 c_{s9}) ; \\
c_{6.17} &= s_{11} (b_1 c_{s10} - b_2 c_{s5}) ; c_{6.18} = -s_{11}^2 (b_2^2 c_{s5} + b_1^2 c_{s10}) \\
\\
c_{77} &= c_{p1} + c_{p7} + c_{s1} + c_{s6} ; c_{78} = s_8 (b_2 c_{p1} - b_1 c_{p7}) + s_9 (b_2 c_{s1} - b_1 c_{s6}) \\
\\
c_{88} &= s_8^2 (b_2^2 c_{p1} + b_1^2 c_{p7}) + s_9^2 (b_2^2 c_{s1} + b_1^2 c_{s6}) \\
\\
c_{99} &= c_{p2} + c_{p8} + a_4^2 (c_{s2} + c_{s7}) ; c_{9.10} = s_{10} (b_2 c_{p2} - b_1 c_{p8}) + a_4^2 s_{11} (b_2 c_{s2} + b_1 c_{s7}) ; \\
c_{9.11} &= a_3 a_4 (c_{s2} + c_{s7}) ; c_{9.12} = a_3 a_4 s_{11} (b_2 c_{s2} - b_1 c_{s7}) \\
\\
c_{10.10} &= s_{10}^2 (b_2^2 c_{p2} + b_1^2 c_{p8}) + a_4^2 s_{11}^2 (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7}) ; c_{10.11} = a_3 a_4 (b_2 c_{s2} - b_1 c_{s7}) \\
c_{10.12} &= a_3 a_4 s_{11}^2 (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7}) \\
\\
c_{11.11} &= c_{p3} + c_{p9} + a_3^2 (c_{s2} + c_{s7}) ; c_{11.12} = s_{10} (b_2 c_{p3} - b_1 c_{p9}) + a_3^2 s_{11} (b_2 c_{s2} - b_1 c_{s7})
\end{aligned}$$

$$c_{12.12} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p3} + b_1^2 c_{p9}) + a_3^2 s_{11}^2 (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s7})$$

$$c_{13.13} = c_{p4} + c_{p10} + c_{s3} + c_{s8} ; c_{13.14} = s_{10} (b_2 c_{p4} - b_1 c_{p10}) + s_{11} (b_2 c_{s3} - b_1 c_{s8})$$

$$c_{14.14} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p4} + b_1^2 c_{p10}) + s_{11}^2 (b_2^2 c_{s3} + b_1^2 c_{s8})$$

$$c_{15.15} = c_{p5} + c_{p11} + c_{s4} + c_{s9} ; c_{15.16} = s_{10} (b_2 c_{p5} - b_1 c_{p11}) + s_{11} (b_2 c_{s4} - b_1 c_{s9})$$

$$c_{16.16} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p5} + b_1^2 c_{p11}) + s_{11}^2 (b_2^2 c_{s4} + b_1^2 c_{s9})$$

$$c_{17.17} = c_{p6} + c_{p12} + c_{s5} + c_{s10} ; c_{17.18} = s_{10} (b_2 c_{p6} - b_1 c_{p12}) + s_{11} (b_2 c_{s5} - b_1 c_{s10})$$

$$c_{18.18} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p6} + b_1^2 c_{p12}) + s_{11}^2 (b_2^2 c_{s5} + b_1^2 c_{s10})$$

Le reste des éléments c_{ij} sont égales à zéro

4.1. Modèle de camion à essieux tridem à 20 degrés de liberté:

$$\{Z_v\} = \{z_t ; \theta_t ; \alpha_t ; z_r ; \theta_r ; \alpha_r ; \theta_{l1} ; \theta_{l2} ; z_1 ; \alpha_1 ; z_2 ; \alpha_2 ; z_3 ; \alpha_3 ; z_4 ; \alpha_4 ; z_5 ; \alpha_5 ; z_6 ; \alpha_6\}$$

Les éléments de la matrice de masses $[M_v]$ sont :

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_t ; m_{22} = I_{\theta_t} ; m_{33} = I_{\alpha_t} ; m_{44} = m_r ; m_{55} = I_{\theta_r} ; m_{66} = I_{\alpha_r} ; m_{77} = I_{\theta_{l1}} ; m_{88} = I_{\theta_{l2}} ; \\ m_{99} &= m_1 ; m_{10.10} = I_{\alpha_1} ; m_{11.11} = m_2 ; m_{12.12} = I_{\alpha_2} ; m_{13.13} = m_3 ; m_{14.14} = I_{\alpha_3} ; m_{15.15} = m_4 ; \\ m_{16.16} &= I_{\alpha_4} ; m_{17.17} = m_5 ; m_{18.18} = I_{\alpha_5} ; m_{19.19} = m_6 ; m_{20.20} = I_{\alpha_6} \end{aligned}$$

Le reste des éléments m_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[K_v]$ sont :

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{s1} + k_{s2} + k_{s3} + k_{s7} + k_{s8} + k_{s9} + k_e ; k_{12} = a_2 s_1 (k_{s2} + k_{s3} + k_{s8}) - a_1 s_1 (k_{s1} + k_{s7}) + s_6 k_e ; \\ k_{13} &= s_9 (b_2 k_{s1} - b_1 k_{s7}) + b_2 s_{11} (k_{s2} + k_{s3}) - b_1 s_{11} (k_{s8} + k_{s9}) ; k_{14} = -k_e ; k_{15} = s_7 k_e ; \\ k_{17} &= s_2 (a_4 k_{s3} - a_3 k_{s2}) ; k_{18} = s_2 (a_4 k_{s9} - a_3 k_{s8}) ; k_{19} = -(k_{s1} + k_{s7}) ; \\ k_{1.10} &= s_9 (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s1}) ; k_{1.11} = -(k_{s2} + k_{s8}) ; k_{1.12} = s_{11} (b_1 k_{s8} - b_2 k_{s2}) ; \\ k_{1.13} &= -(k_{s3} + k_{s9}) ; k_{1.12} = s_{11} (b_1 k_{s9} - b_2 k_{s3}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} &= a_1^2 s_1^2 (k_{s1} + k_{s7}) + a_2^2 s_1^2 (k_{s2} + k_{s3} + k_{s8} + k_{s9}) + s_6^2 k_e ; \\
k_{23} &= a_1 s_1 s_9 (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s1}) + a_2 s_1 s_{11} (b_2 k_{s2} + b_2 k_{s3} - b_1 k_{s8} - b_1 k_{s9}) ; \\
k_{24} &= -s_6 k_e ; k_{25} = s_6 s_7 k_e ; k_{2.7} = a_2 s_1 s_2 (a_4 k_{s3} - a_3 k_{s2}) ; \\
k_{28} &= a_2 s_1 s_2 (a_4 k_{s9} - a_3 k_{s8}) ; k_{2.9} = a_2 s_1 (k_{s1} + k_{s7}) ; \\
k_{2.10} &= a_1 s_1 s_9 (b_2 k_{s1} - b_1 k_{s7}) ; k_{2.11} = -a_2 s_1 (k_{s2} + k_{s8}) ; \\
k_{2.12} &= a_2 s_1 s_{11} (b_1 k_{s8} - b_2 k_{s2}) ; k_{2.13} = -a_2 s_1 (k_{s3} + k_{s9}) ; \\
k_{2.14} &= a_2 s_1 s_{11} (b_1 k_{s9} - b_2 k_{s3}) \\
\\
k_{33} &= b_2^2 s_9^2 k_{s1} + b_2^2 s_9 s_{11} (k_{s2} + k_{s3}) + b_1^2 s_9^2 k_{s7} + b_1^2 s_9 s_{11} (k_{s8} + k_{s9}) ; \\
k_{3.7} &= b_2 s_2 s_9 (a_4 k_{s3} - a_3 k_{s2}) ; k_{38} = b_1 s_2 s_9 (a_3 k_{s8} - a_4 k_{s9}) ; \\
k_{39} &= s_9 (b_1 k_{s7} - b_2 k_{s1}) ; k_{3.10} = -s_9^2 (b_2^2 k_{s1} + b_1^2 k_{s7}) ; k_{3.11} = s_9 (b_1 k_{s8} - b_2 k_{s2}) ; \\
k_{3.12} &= -s_9 s_{11} (b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s8}) ; k_{3.13} = s_9 (b_1 k_{s9} - b_2 k_{s3}) ; k_{3.14} = -s_9 s_{11} (b_2^2 k_{s3} + b_1^2 k_{s9}) \\
\\
k_{44} &= k_{s4} + k_{s5} + k_{s6} + k_{s10} + k_{s11} + k_{s12} + k_e ; \\
k_{45} &= s_3 (k_{s4} + k_{s10}) + s_4 (k_{s5} + k_{s11}) + s_5 (k_{s6} + k_{s12}) - s_7 k_e ; \\
k_{46} &= b_2 s_{11} (k_{s4} + k_{s5} + k_{s6}) - b_1 s_{11} (k_{s10} + k_{s11} + k_{s12}) ; \\
k_{4.15} &= -(k_{s4} + k_{s10}) ; k_{4.16} = s_{11} (b_1 k_{s10} - b_2 k_{s4}) ; \\
k_{4.17} &= -(k_{s5} + k_{s11}) ; k_{4.18} = s_{11} (b_1 k_{s11} - b_2 k_{s5}) ; \\
k_{4.19} &= -(k_{s6} + k_{s12}) ; k_{4.20} = s_{11} (b_1 k_{s12} - b_2 k_{s6}) \\
\\
k_{55} &= s_3^2 (k_{s4} + k_{s10}) + s_4^2 (k_{s5} + k_{s11}) + s_5^2 (k_{s6} + k_{s12}) + s_7^2 k_e ; \\
k_{56} &= s_3 s_{11} (b_2 k_{s4} - b_1 k_{s10}) + s_4 s_{11} (b_2 k_{s5} - b_1 k_{s11}) + s_5 s_{11} (b_2 k_{s6} - b_1 k_{s12}) ; \\
k_{5.15} &= -s_3 (k_{s4} + k_{s10}) ; k_{5.16} = s_3 s_{11} (b_1 k_{s10} - b_2 k_{s4}) ; \\
k_{5.17} &= -s_4 (k_{s5} + k_{s11}) ; k_{5.18} = s_4 s_{11} (b_1 k_{s11} - b_2 k_{s5}) ; \\
k_{5.19} &= -s_5 (k_{s6} + k_{s12}) ; k_{5.20} = s_5 s_{11} (b_1 k_{s12} - b_2 k_{s6}) \\
\\
k_{6.6} &= b_2^2 s_{11}^2 (k_{s4} + k_{s5} + k_{s6}) - b_1^2 s_{11}^2 (k_{s10} + k_{s11} + k_{s12}) ; \\
k_{6.15} &= s_{11} (b_1 k_{s10} - b_2 k_{s4}) ; k_{6.16} = -s_{11}^2 (b_2^2 k_{s4} + b_1^2 k_{s10}) ; \\
k_{6.17} &= s_{11} (b_1 k_{s11} - b_2 k_{s5}) ; k_{6.18} = -s_{11}^2 (b_2^2 k_{s5} + b_1^2 k_{s11}) ; \\
k_{6.19} &= s_{11} (b_1 k_{s12} - b_2 k_{s6}) ; k_{6.20} = -s_{11}^2 (b_2^2 k_{s6} + b_1^2 k_{s12}) \\
\\
k_{77} &= s_2^2 (a_3^2 k_{s2} + a_4^2 k_{s3}) ; k_{7.11} = a_3 s_2 k_{s2} ; k_{7.12} = a_3 b_2 s_2 s_{11} k_{s2} ; \\
k_{7.13} &= -a_4 s_2 k_{s3} ; k_{7.14} = -a_3 b_2 s_2 s_{11} k_{s3} \\
\\
k_{88} &= s_2^2 (a_3^2 k_{s8} + a_4^2 k_{s9}) ; k_{8.11} = a_3 s_2 k_{s8} ; \\
k_{8.12} &= -a_3 b_1 s_2 s_{11} k_{s8} ; k_{8.13} = -a_4 s_2 k_{s9} ; k_{8.14} = a_4 b_1 s_2 s_{11} k_{s9} \\
\\
k_{99} &= k_{s1} + k_{s7} + k_{p1} + k_{p7} ; k_{9.10} = s_8 (b_2 k_{p1} - b_1 k_{p7}) + s_9 (b_2 k_{s1} - b_1 k_{s7}) \\
\\
k_{10.10} &= s_8^2 (b_2^2 k_{p1} + b_1^2 k_{p7}) + s_9^2 (b_2^2 k_{s1} + b_1^2 k_{s7}) \\
\\
k_{11.11} &= k_{s2} + k_{s8} + k_{p2} + k_{p8} ; k_{11.12} = s_{10} (b_2 k_{p2} - b_1 k_{p8}) + s_{11} (b_2 k_{s2} - b_1 k_{s8})
\end{aligned}$$

$$k_{12.12} = s_8 s_{10} (b_2^2 k_{p2} + b_1^2 k_{p8}) - s_9 s_{11} (b_2^2 k_{s2} + b_1^2 k_{s8})$$

$$k_{13.13} = k_{s3} + k_{s9} + k_{p3} + k_{p9} ; k_{13.14} = s_{10} (b_2 k_{p3} - b_1 k_{p9}) + s_{11} (b_2 k_{s3} - b_1 k_{s9})$$

$$k_{14.14} = s_8 s_{10} (b_2^2 k_{p3} + b_1^2 k_{p9}) - s_9 s_{11} (b_2^2 k_{s3} + b_1^2 k_{s9})$$

$$k_{15.15} = k_{s4} + k_{s10} + k_{p5} + k_{p10} ; k_{15.16} = s_{10} (b_2 k_{p4} - b_1 k_{p10}) + s_{11} (b_2 k_{s4} - b_1 k_{s10})$$

$$k_{16.16} = s_{10}^2 (b_2^2 k_{p4} + b_1^2 k_{p10}) - s_{11}^2 (b_2^2 k_{s4} + b_1^2 k_{s10})$$

$$k_{17.17} = k_{s5} + k_{s11} + k_{p5} + k_{p11} ; k_{17.18} = s_{10} (b_2 k_{p5} - b_1 k_{p11}) + s_{11} (b_2 k_{s5} - b_1 k_{s11})$$

$$k_{18.18} = s_{10}^2 (b_2^2 k_{p5} + b_1^2 k_{p11}) - s_{11}^2 (b_2^2 k_{s5} + b_1^2 k_{s11})$$

$$k_{19.19} = k_{s6} + k_{s12} + k_{p6} + k_{p12} ; k_{19.20} = s_{10} (b_2 k_{p6} - b_1 k_{p12}) + s_{11} (b_2 k_{s6} - b_1 k_{s12})$$

$$k_{20.20} = s_{10}^2 (b_2^2 k_{p6} + b_1^2 k_{p12}) - s_{11}^2 (b_2^2 k_{s6} + b_1^2 k_{s12})$$

Le reste des éléments k_{ij} sont égales à zéro

Les éléments de la matrice $[C_v]$ sont :

$$c_{11} = c_{s1} + c_{s2} + c_{s3} + c_{s7} + c_{s8} + c_{s9} + c_e ; c_{12} = a_2 s_1 (c_{s2} + c_{s3} + c_{s8}) - a_1 s_1 (c_{s1} + c_{s7}) + s_6 c_e ;$$

$$c_{13} = s_9 (b_2 c_{s1} - b_1 c_{s7}) + b_2 s_{11} (c_{s2} + c_{s3}) - b_1 s_{11} (c_{s8} + c_{s9}) ; c_{14} = -c_e ; c_{15} = s_7 c_e ;$$

$$c_{17} = s_2 (a_4 c_{s3} - a_3 c_{s2}) ; c_{18} = s_2 (a_4 c_{s9} - a_3 c_{s8}) ; c_{19} = -(c_{s1} + c_{s7}) ;$$

$$c_{1.10} = s_9 (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s1}) ; c_{1.11} = -(c_{s2} + c_{s8}) ; c_{1.12} = s_{11} (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s2}) ;$$

$$c_{1.13} = -(c_{s3} + c_{s9}) ; c_{1.12} = s_{11} (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s3})$$

$$c_{22} = a_1^2 s_1^2 (c_{s1} + c_{s7}) + a_2^2 s_1^2 (c_{s2} + c_{s3} + c_{s8} + c_{s9}) + s_6^2 c_e ;$$

$$c_{23} = a_1 s_1 s_9 (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s1}) + a_2 s_1 s_{11} (b_2 c_{s2} + b_2 c_{s3} - b_1 c_{s8} - b_1 c_{s9}) ;$$

$$c_{24} = -s_6 c_e ; c_{25} = s_6 s_7 c_e ; c_{2.7} = a_2 s_1 s_2 (a_4 c_{s3} - a_3 c_{s2}) ;$$

$$c_{28} = a_2 s_1 s_2 (a_4 c_{s9} - a_3 c_{s8}) ; c_{2.9} = a_2 s_1 (c_{s1} + c_{s7}) ;$$

$$c_{2.10} = a_1 s_1 s_9 (b_2 c_{s1} - b_1 c_{s7}) ; c_{2.11} = -a_2 s_1 (c_{s2} + c_{s8}) ;$$

$$c_{2.12} = a_2 s_1 s_{11} (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s2}) ; c_{2.13} = -a_2 s_1 (c_{s3} + c_{s9}) ;$$

$$c_{2.14} = a_2 s_1 s_{11} (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s3})$$

$$c_{33} = b_2^2 s_9^2 c_{s1} + b_2^2 s_9 s_{11} (c_{s2} + c_{s3}) + b_1^2 s_9^2 c_{s7} + b_1^2 s_9 s_{11} (c_{s8} + c_{s9}) ;$$

$$c_{3.7} = b_2 s_2 s_9 (a_4 c_{s3} - a_3 c_{s2}) ; c_{38} = b_1 s_2 s_9 (a_3 c_{s8} - a_4 c_{s9}) ;$$

$$c_{39} = s_9 (b_1 c_{s7} - b_2 c_{s1}) ; c_{3.10} = -s_9^2 (b_2^2 c_{s1} + b_1^2 c_{s7}) ; c_{3.11} = s_9 (b_1 c_{s8} - b_2 c_{s2}) ;$$

$$c_{3.12} = -s_9 s_{11} (b_2^2 c_{s2} + b_1^2 c_{s8}) ; c_{3.13} = s_9 (b_1 c_{s9} - b_2 c_{s3}) ; c_{3.14} = -s_9 s_{11} (b_2^2 c_{s3} + b_1^2 c_{s9})$$

$$\begin{aligned}
c_{44} &= c_{s4} + c_{s5} + c_{s6} + c_{s10} + c_{s11} + c_{s12} + c_e ; \\
c_{45} &= s_3(c_{s4} + c_{s10}) + s_4(c_{s5} + c_{s11}) + s_5(c_{s6} + c_{s12}) - s_7c_e ; \\
c_{46} &= b_2s_{11}(c_{s4} + c_{s5} + c_{s6}) - b_1s_{11}(c_{s10} + c_{s11} + c_{s12}) ; \\
c_{4.15} &= -(c_{s4} + c_{s10}) ; c_{4.16} = s_{11}(b_1c_{s10} - b_2c_{s4}) ; \\
c_{4.17} &= -(c_{s5} + c_{s11}) ; c_{4.18} = s_{11}(b_1c_{s11} - b_2c_{s5}) ; \\
c_{4.19} &= -(c_{s6} + c_{s12}) ; c_{4.20} = s_{11}(b_1c_{s12} - b_2c_{s6}) \\
\\
c_{55} &= s_3^2(c_{s4} + c_{s10}) + s_4^2(c_{s5} + c_{s11}) + s_5^2(c_{s6} + c_{s12}) + s_7^2c_e ; \\
c_{56} &= s_3s_{11}(b_2c_{s4} - b_1c_{s10}) + s_4s_{11}(b_2c_{s5} - b_1c_{s11}) + s_5s_{11}(b_2c_{s6} - b_1c_{s12}) ; \\
c_{5.15} &= -s_3(c_{s4} + c_{s10}) ; c_{5.16} = s_3s_{11}(b_1c_{s10} - b_2c_{s4}) ; \\
c_{5.17} &= -s_4(c_{s5} + c_{s11}) ; c_{5.18} = s_4s_{11}(b_1c_{s11} - b_2c_{s5}) ; \\
c_{5.19} &= -s_5(c_{s6} + c_{s12}) ; c_{5.20} = s_5s_{11}(b_1c_{s12} - b_2c_{s6}) \\
\\
c_{6.6} &= b_2^2s_{11}^2(c_{s4} + c_{s5} + c_{s6}) - b_1^2s_{11}^2(c_{s10} + c_{s11} + c_{s12}) ; \\
c_{6.15} &= s_{11}(b_1c_{s10} - b_2c_{s4}) ; c_{6.16} = -s_{11}^2(b_2^2c_{s4} + b_1^2c_{s10}) ; \\
c_{6.17} &= s_{11}(b_1c_{s11} - b_2c_{s5}) ; c_{6.18} = -s_{11}^2(b_2^2c_{s5} + b_1^2c_{s11}) ; \\
c_{6.19} &= s_{11}(b_1c_{s12} - b_2c_{s6}) ; c_{6.20} = -s_{11}^2(b_2^2c_{s6} + b_1^2c_{s12}) \\
\\
c_{77} &= s_2^2(a_3^2c_{s2} + a_4^2c_{s3}) ; c_{7.11} = a_3s_2c_{s2} ; c_{7.12} = a_3b_2s_2s_{11}c_{s2} ; \\
c_{7.13} &= -a_4s_2c_{s3} ; c_{7.14} = -a_3b_2s_2s_{11}c_{s3} \\
\\
c_{88} &= s_2^2(a_3^2c_{s8} + a_4^2c_{s9}) ; c_{8.11} = a_3s_2c_{s8} ; \\
c_{8.12} &= -a_3b_1s_2s_{11}c_{s8} ; c_{8.13} = -a_4s_2c_{s9} ; c_{8.14} = a_4b_1s_2s_{11}c_{s9} \\
\\
c_{99} &= c_{s1} + c_{s7} + c_{p1} + c_{p7} ; c_{9.10} = s_8(b_2c_{p1} - b_1c_{p7}) + s_9(b_2c_{s1} - b_1c_{s7}) \\
\\
c_{10.10} &= s_8^2(b_2^2c_{p1} + b_1^2c_{p7}) + s_9^2(b_2^2c_{s1} + b_1^2c_{s7}) \\
\\
c_{11.11} &= c_{s2} + c_{s8} + c_{p2} + c_{p8} ; c_{11.12} = s_{10}(b_2c_{p2} - b_1c_{p8}) + s_{11}(b_2c_{s2} - b_1c_{s8}) \\
\\
c_{12.12} &= s_8s_{10}(b_2^2c_{p2} + b_1^2c_{p8}) - s_9s_{11}(b_2^2c_{s2} + b_1^2c_{s8}) \\
\\
c_{13.13} &= c_{s3} + c_{s9} + c_{p3} + c_{p9} ; c_{13.14} = s_{10}(b_2c_{p3} - b_1c_{p9}) + s_{11}(b_2c_{s3} - b_1c_{s9}) \\
\\
c_{14.14} &= s_8s_{10}(b_2^2c_{p3} + b_1^2c_{p9}) - s_9s_{11}(b_2^2c_{s3} + b_1^2c_{s9}) \\
\\
c_{15.15} &= c_{s4} + c_{s10} + c_{p5} + c_{p10} ; c_{15.16} = s_{10}(b_2c_{p4} - b_1c_{p10}) + s_{11}(b_2c_{s4} - b_1c_{s10}) \\
\\
c_{16.16} &= s_{10}^2(b_2^2c_{p4} + b_1^2c_{p10}) - s_{11}^2(b_2^2c_{s4} + b_1^2c_{s10}) \\
\\
c_{17.17} &= c_{s5} + c_{s11} + c_{p5} + c_{p11} ; c_{17.18} = s_{10}(b_2c_{p5} - b_1c_{p11}) + s_{11}(b_2c_{s5} - b_1c_{s11})
\end{aligned}$$

$$c_{18.18} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p5} + b_1^2 c_{p11}) - s_{11}^2 (b_2^2 c_{s5} + b_1^2 c_{s11})$$

$$c_{19.19} = c_{s6} + c_{s12} + c_{p6} + c_{p12} ; c_{19.20} = s_{10} (b_2 c_{p6} - b_1 c_{p12}) + s_{11} (b_2 c_{s6} - b_1 c_{s12})$$

$$c_{20.20} = s_{10}^2 (b_2^2 c_{p6} + b_1^2 c_{p12}) - s_{11}^2 (b_2^2 c_{s6} + b_1^2 c_{s12})$$

Le reste des éléments c_{ij} sont égales à zéro