République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques
Laboratoire de domiciliation : Laboratoire des mathématiques appliquées et de Modélisation

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN 3ème CYCLE

Domaine : Mathématiques. Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée par

BOUAZILA Nada

Intitulée

Sur la linéarisation des problèmes fonctionnels

Soutenue le : 17/11/2022

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
Mr AISSAOUI Mohamed-Zine	Prof	Univ-Guelma	Président
Mr GUEBBAI Hamza	Prof	Univ-Guelma	Encadreur
Mr HADJI Mohamed Lakhdar	Prof	Univ-Annaba	Examinateur
Mr ELLAGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma	Examinateur
Mr GHIAT Mourad	MCA	Univ-Guelma	Examinateur

Année Universitaire : 2022/2023

Résumé

Dans cette thèse , nous construisons de nouvelles suites de linéarisation et de discrétisation, pour approcher la solution d'une équation non linéaire définie dans un espace de Hilbert. Ces nouvelles suites utilisent le concept de l'opérateur adjoint , ce qui les rendent plus maniables en pratique par rapport à celles développées par Kantorovich, qui nécessitent le calcul de l'opérateur inverse dans chaque itération.

Les mots clés : Problèmes non linéaires, méthode de Newton-Kantorovich, Fréchet dérivabilité , opérateur adjoint .

Classification Mathématique des Sujets (2010) : 49M15, 49J50 .

Abstract

In this thesis, we construct new linearization and discretization sequences to approximate the solution of a nonlinear equation defined in a Hilbert space. These new sequences use the concept of the adjoint operator, which makes them more manageable in practice compared to those developed by Kantorovich, which require the computation of the inverse operator in each iteration.

Key words : Nonlinear problems, Newton-Kantorovich method, Fréchet differentiability, Adjoint Operator

Mathematical Subject Classification (2010) : 49M15, 49J50 .

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Position du problème

Les équations non linéaires, sont un outil fondamental pour la modélisation mathématique de beaucoup problèmes en théorie de contrôle, optimisation, théorie des problèmes inverses, physique, Chimie, économie, biologie et aussi en ingénierie([28],[31],[27],[33],[20],[20],[12],[17],[15]). les solutions de ces équations sont généralement données dans un espace de Banach de dimension infinie, ils ont la forme suivante :

$$\text{Trouver} \quad x \in \Omega, \quad F(x) = 0, \tag{1.1}$$

où Ω est un ouvert non vide d'un espace de Banach $\mathcal{X}$ de dimension infinie, F est un opérateur non linéaire de O dans $\mathcal{X}$, x^{∞} est la solution de l'équation (1.1) et 0 est le vecteur nul de $\mathcal{X}$.

Généralement, il n'est pas possible de résoudre d'une façon directe une équation non linéaire définie sur un espace de Banach de dimension infinie , il faut d'abord passer par deux processus numériques, la linéarisation et la discrétisation .

L'exploit mathématiques dans la théorie de la linéarisation des problèmes non linéaires dans les espaces de dimension infinis, reste à jamais la métamorphose qu'a apporté Kantorovich à la méthode de Newton, qui était à la base de résolution des équations non linéaires réelles ([4],[9],[14],[22],[25]).

La suite de linéarisation de l'équation (1.1) par la méthode de Newton-Kantorovich, est une suite itérative définie par,

$$\begin{cases} x_0 & \in & \Omega \\ x_{k+1} & = & x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k), \end{cases} \tag{1.2}$$

où Ω est un ensemble ouvert de l'espace Banach $\mathcal{X}$, x_0 est un point initial, et F^{-1} est l'opérateur inverse de la dérivée de Fréchet de l'opérateur F.

Pour approcher la solution de l'équation (1.1), il existe deux options à savoir

- **Option (A)** : Discrétiser l'équation (1.2), puis résoudre numériquement le système linéaire obtenu.

- **Option (B)** : Discrétiser l'équation (1.1) , ensuite appliquer la méthode de Newton-Kantorovich (1.2)au problème nonlinéaire discret, puis résoudre numériquement le systeme linéaire obtenu.

Les auteurs dans [18] étudient l'utilisation de l'option (A) et l'option (B), où ils prouvent que ces options ne sont pas en général équivalentes et que l'option (A) est la plus efficace , de plus, ils montrent que sous certaines hypothèses relatives à la méthode de discrétisation, les solutions itérés convergent vers la solution exacte, contrairement à l'option (B), où la solution itérée converge toujours vers le vecteur approché.

Dans cette thèse, nous allons construire de nouvelles suites de linéarisation et de discrétisation pour approcher la solution d'une équation non linéaire définie dans un espace de Hilbert, puis appliquer l'option (A) pour approcher la solution de l'équation (1.1). Ces nouvelles suites utilisent le concept de l'opérateur adjoint, au lieu de l'opérateur inverse, ce qui rend l'application de notre méthode plus facile en pratique par rapport à celle développée par Kantorovich, qui nécessite le calcul de l'opérateur inverse dans chaque itération.

Notre nouvelle méthode est définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$ où la suite itérative s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x^0 \text{ choisis dans } \Omega, \\ x^{k+1} = x^k - \alpha_k (F'(x^k))^* F(x^k), \ k \geq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ des paramètres réels, Ω un ouvert de $\mathcal{X}$, $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur non linéaire Fréchet différentiable et F^* est l'opérateur adjoint de l'opérateur F .

On va nommer la suite (1.3) **"Newton-Star"**, à cause de l'étoile (*) de l'opérateur adjoint qui existe dans cette suite .

Notre méthode est fondée sur l'idée qui consiste à remplacer l'opérateur inverse par l'opérateur adjoint ; Aussi en utilisant des hypothèses équivalentes à celles de Newton-Kantorovich, on va montrer la convergence locale de la suite linéarisée de Newton-Star, ainsi que sa discrétisation .

1.2 Plan de la thèse

Notre thèse est structurée comme suit,

le deuxième chapitre fixe brièvement la description de la théorie de Kantorovich . Nous commençons tout d'abord par présenter la méthode de Newton qui est destinée à la résolution des équations non linéaires définies sur $\mathbb{R}$, nous allons introduire la définition et les propriétés d'un opérateur Fréchet différentiable, afin de présenter la méthode de Newton-Kantorovich, ainsi nous allons montrer la convergence locale de cette dernière, nous allons appliquer la notion de dérivabilité au sens de Fréchet à un opérateur intégral définie respectivement sur un espace de fonctions intégrables, ensuite sur l'espace de fonctions continues. Enfin nous allons présenter aussi la méthode de Newton-Kantorovich de rang finie, ainsi nous allons présenter une application de cette dernière à une équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce .

Le troisième chapitre qui représente le résultat principale de cette thèse, est consacré à la présentation de la nouvelle suite Newton-Star . Ce chapitre est scindé de deux partie, la première aborde l'étude de la convergence locale de la nouvelle suite, la deuxième traite l'approximation numérique de cette suite dans un espace de dimension finie, parce que cette suite n'est applicable que sur un espace de dimension finie .

Le quatrième chapitre traite la convergence locale de la suite de discrétisation de Newton-Star, avec une application de cette dernière à une équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce.

Chapitre 2

La théorie de Newton-Kantorovich

Nous présentons dans ce chapitre les méthodes de Newton-Kantorovich, tout d'abord, nous commençons par la méthode de Newton classique dans $\mathbb{R}$, puis sa généralisation qui a été faite par Kantorovich dans un espace de Banach et son application dans le cas d'un espace de dimension infini. Ce qui nous conduit à une bonne compréhension à l'objectif de cette thèse, qui est l'amélioration de ces méthodes.

2.1 Méthode de Newton

Soit f une fonction différentiable, continue définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on considère l'équation

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

et on note x^* la solution exacte de (2.1) .

Considérons x_n la solution approchée de l'équation (2.1) dans le voisinage de x^*, le développement de Taylor de la fonction f en x^*, et au voisinage de x_n, s'écrit

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + O(|x^* - x_n|),$$

comme $O(|x^* - x_n|)$ est assez petit quand $x_n \to x^*$,

on a alors,

$$f(x^*) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n),$$

par conséquent, pour f assez régulière, on obtient

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n \approx 0,$$

ce qui implique

$$x^* \approx x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n), \tag{2.2}$$

aussi on définit la méthode de Newton pour résoudre les équations de la forme $f(x) = 0$.

La suite itérative de cette méthode est définie comme suit

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k) \quad k = 0, .., n. \tag{2.3}$$

La motivation géométrique de cette méthode est de chercher la racine de l'équation linéarisée, par passage à la droite tangente et itérer le processus.

la généralisation au cas des opérateurs définis dans des espaces plus généraux est due à Kantorovich ; Cependant cette méthode nécessite l'introduction de la notion de dérivée au sens de Fréchet, développée ci dessous.

2.2 Différentes notions de dérivées

2.2.1 Dérivée de Gateaux, Dérivée de Fréchet

On considère deux espaces de Banach, notée B_1 et B_2, on note par BL l'espace des applications linéaires bornées, définies de B_1 dans B_2 et F un opérateur défini par

$$F : \Omega \subset \mathrm{B}_1 \longrightarrow \mathrm{B}_2,$$

où Ω est un ouvert de B_1 .

Définition 2.2.1 *Soit l'opérateur F, fixons l'élément $x_0 \in \Omega$, et supposons* *qu'il existe un opérateur linéaire continue* $L \in BL(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$*, tel que pour tout* $x \in \mathrm{B}_1$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F\left(x_0 + hx\right) - F\left(x_0\right)}{h} = L(x). \tag{2.4}$$

On dit alors que l'opérateur linéaire L *est la dérivée de l'opérateur* F *en* x_0*, et on l'on note*

$$L = F'(x_0).$$

Cette dérivée est appelée souvent dérivée de Gateaux ou dérivée faible .

Désignons par $E = \{x \in \mathrm{B}_1 \text{ tel que } ||x|| = 1\}$. *Si la relation (2.4) est vérifiée pour tout* $x \in E$*, on dit que l'opérateur* F *est dérivable en* x_0 *et la dérivée* $F'(x_0)$ *est appelée dérivée de Fréchet ou dérivée forte, et on dit que* F *est Fréchet différentiable en* x_0.

Proposition 2.2.1 *Si l'opérateur* F *est Fréchet différentiable en* x_0 *alors l'opérateur* L *est unique.*

Preuve. Voir [[22]]

Quelques propriétés de la dérivée de Fréchet

1)- Si l'opérateur F est Fréchet dérivable en un point x_0, alors il est continue en ce point.

2)- Si $F = aF_1 + bF_2$, si $F_1'(x_0)$ et si $F_2'(x_0)$ existent, alors $F'(x_0)$ existe, de plus $F'(x_0) = aF_1'(x_0) + bF_2'(x_0)$.

3)- Si $F = L \in BL(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$, alors F est dérivable en chaque point $x_0 \in \mathrm{B}_1$.

4)- Soient F un opérateur défini sur un ouvert $\Omega \subset \mathrm{B}_1$ dans Ω un ouvert de B_2, G un opérateur de Ω dans un espace de Banach B_2. Posons $P = G \circ F$ et supposons que G est dérivable au point $y_0 = F(x_0)$ $(x_0 \in \Omega)$ et F est dérivable au point x_0. L'opérateur P admet alors une dérivée en x_0 et,

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= F'(F(x_0))F'(x_0) \\ F'(x_0) &= F'(y_0)F'(x_0). \end{aligned}$$

2.2.2 Dérivée seconde au sens de Fréchet

Définition 2.2.2 *Soit F un opérateur défini de Ω-ouvert d'un de Banach* B_1 *dans un Banach* B_2*, Fréchet différentiable de dérivée F'. On appelle dérivée seconde de Fréchet de F et on le note F'', la dérivée de F', avec $F'' = (F')'$.*

2.3 Application de la dérivabilité sur l'opérateur intégral

Dans cette section on va étudier la dérivabilité de l'opérateur intégral et calculer sa dérivée dans l'espace L^p et l'espace C^0 , où

$$\begin{aligned} L^p[a,b] &= \left\{ f:[a,b]\to\mathbb{R},\ mesurable,\ tel\ que\ [\int_a^b |f(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}} < \infty, \right\} \\ C^0[a,b] &= \{f:[a,b]\to\mathbb{R},\ continue\} \end{aligned}$$

2.3.1 Étude dans l'espace $L^p[0,1]$

Considérons l'opérateur intégral F suivant :

$$y(s) = F(x)(s) \quad \text{avec} \quad y(s) = \int_0^1 k(s,t,x(t))\,dt. \tag{2.5}$$

Théorème 2.3.1 *Supposons que la fonction $k(s,t,x)$ est continument dérivable par rapport à s,t et x (pour $0 \leq s,t \leq 1, -\infty < u < +\infty$), il existe deux constantes positives M et N telles que*

$$\left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(s,t,x) \right| \leq M|x|^{p-2} + N, \tag{2.6}$$

alors si $p \geq 2$, l'opérateur (2.5) est différentiable de $L^p(0,1)$ dans $L^q(0,1)$ $(1 \leq q < +\infty)$, est admet une dérivée seconde pour tout point $x_0 \in L^p(0,1)$. On note par $U = y'(x_0)$ la dérivée première en x_0, et $B = y''(x_0)$ la dérivée *seconde en* x_0*, où* U *et* B *sont définies par les formules suivantes :*

$$\begin{array}{ll} z = U(x) \quad , \quad z(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(s,t,x_0(t))\,x(t)\,dt, \\ V = B(x,x') \quad , \quad V(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial^2 x}(s,t,x_0(t))\,x(t)\,x'(t)\,dt. \end{array} \tag{2.7}$$

Démonstration

Assurons-nous tout d'abord que (2.5) est un opérateur de $L^p(0,1)$ dans $L^\infty(0,1)$, (donc dans $L^q(0,1)$, $(q<\infty)$).

On observera à cet effet que la fonction $k(s,t,x(t))$ est mesurable, puisque $k(s,t,x(t))$ est continue. En appliquant la formule de Taylor, on obtient

$$k(s,t,x(t)) = k(s,t,0) + \tfrac{\partial k}{\partial x}(s,t,0)\,x(t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(s,t,\theta x(t))\,x^2(t)\,, \quad 0<\theta<1 \quad .$$

Évaluons l'intégrale de chaque terme du second membre, on a alors

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 k(s,t,0)\,dt\right| &\leq \max_{s,t}|k(s,t,0)| = A_1, \\ \left|\int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(s,t,0)\,x(t)\,dt\right| &\leq \max_{s,t}\left|\frac{\partial k}{\partial u}(s,t,0)\right|\int_0^1 |x(t)|\,dt \leq A_2\,\|x\|_p\,. \end{aligned}$$

On se revenant à l'hypothèse (2.16) pour majorer le troisième terme du développement limité, on a alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(s,t,\theta x(t))\,x^2(t)\,dt\right| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[M\,|x(t)|^{p-2}+N\right]|x(t)|^2\,dt \\ &\leq A_3\,\|x\|_{L^p}^p\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $y = F(x)$ a un sens, et en outre

$|y(s)| \leq A_1 + A_2 \|x\|_{L^p} + A_3 \|x\|_{L^p}^p$, $(s \in [0,1])$,

de sorte que $y \in L^\infty(0,1)$.

Prouvons maintenant que F est dérivable et que $F'(x_0) = U$,

supposons que

$z = U(x)$, et que $z_\tau = \dfrac{F(x_0 + \tau x) - F(x_0)}{\tau}$,

on a alors

$$\begin{aligned} |z_\tau(s) - z(s)| &= \left| \int_0^1 \left[\frac{k(s,t,x_0(t) + \tau x(t)) - k(s,t,x_0(t))}{\tau} \right.\right. \\ &- \left.\left. \frac{\partial k}{\partial u}(s,t,x_0(t))\, x(t) \right] dt \right|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'aprés la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} k(s,t,x_0(t) + \tau x(t)) &= k(s,t,x_0(t)) + \tau \frac{\partial k}{\partial x}(s,t,x_0(t))\, x(t) \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(s,t,x_0(t) + \theta\tau x(t))\, x^2(t), (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

on peut mettre (2.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} |z_\tau(s) - z(s)| &= \frac{|\tau|}{2} \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(s,t,x_0(t) + \theta\tau x(t))\, dt \right|. \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{s,t} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(s,t,x_0(t) + \theta\tau x(t)) \right| |\tau|. \\ &\leq A_4 |\tau|, (0 \leq s \leq 1), \end{aligned}$$

où la constante A_4 ne dépend pas de x, mais de sa norme $(||x||)$.

Donc, z_τ converge uniformément vers z quand $\tau \to 0$ en x, pour vu que $\|x\| = 1$.

Pour prouver que F est deux fois dérivable, et que $F^{''}(s) = V$, voir [[22] page 513].

2.3.2 Étude dans l'espace $\mathcal{C}^0\,[0,1]$

l'opérateur (2.5) peut être considérer comme un opérateur de $\mathcal{C}^0[0,1]$ dans $\mathcal{C}^0[0,1]$.

Soit $x_0 \in \mathcal{C}^0\,[0,1]$, désignons par $\Omega = B(x_0, r) \subset C^0([0,1])$, et par

$G = \{(x,t,u) \in \mathbb{R}^3/0 \leq s,t \leq 1 \text{et} \, |u - x_0\,(t)| \leq r\}$.

Théorème 2.3.2 *Supposons que les fonctions $k\,(s,t,x)$, $\dfrac{\partial k}{\partial x}\,(s,t,x)$ et $\dfrac{\partial^2 k}{\partial u^2}\,(s,t,u)$ sont définies et continues dans G. Alors, l'opérateur F défini par (2.5) de Ω dans $\mathcal{C}^0(0,1)$, est deux fois dérivable en chaque point intérieur $\bar{x} \in \Omega$, et $F^{'}(\bar{x}) = U$ et $F^{''}(\bar{x}) = B$ sont définies par les formules*

$$\begin{aligned} z = U\,(x) \quad &, \quad z\,(s) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}\,(s,t,x_0\,(t))\,x\,(t)\,dt, \\ V = B(x,x') \quad &, \quad B\,(s) = \int_0^1 \frac{\partial^2 k}{\partial^2 x}\,(s,t,x_0\,(t))\,x\,(t)\,x'\,(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Démonstration Prenons un x de Ω. La continuité de la fonction $y = F\,(x)$ définie par (2.5), résulte directement de propriétés élémentaires de la théorie des intégrales dépendant d'un paramètre, donc, $y \in \mathcal{C}^0[0,1]$.

Prouvons maintenant que F est dérivable sur Ω et $F'(\bar{x}) = U$.

Supposons que $\bar{x} \in \Omega$ et $x \in \mathcal{C}^0[0,1]$, considérons l'élément noté z_τ

$$z_\tau = \frac{F(\bar{x} + \tau x) - F(\bar{x})}{\tau} - U(x).$$

z_τ tend vers zéro de plus τ est uniformément borné en x ($\|x\| = 1$) et en $s \in [0,1]$ (on utilise la formule des accroissements finis d'une manière similaire au cas $L^p[0,1]$). Finalement, $z_\tau \to 0$ uniformément en $x \in \mathcal{C}^0[0,1]$, ($\|x\| = 1$). Ceci prouve la dérivabilité de F en $\bar{x}$ et de plus $F'(\bar{x}) = U$.

Par des raisonnements analogues, on démontre que F et deux fois dérivable, de plus $F'' = B$ (voir [23]).

2.4 Les méthodes de Newton-Kantorovich

Dans cette section, $\mathcal{X}$ désigne un espace de Banach et $BL(\mathcal{X})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{X}$. $||.||$ désignera à la fois la norme dans $\mathcal{X}$ et dans $BL(\mathcal{X})$. La norme d'un opérateur $F \in BL(\mathcal{X})$ est définie par

$$||F|| = \sup\{||Fx||, ||x|| \leq 1\} = \sup\{||Fx||, ||x|| = 1\} = \{\sup \frac{||Fx||}{||x||}, ||x|| \neq 0\}.$$

2.4.1 La méthode de Newton-Kantorovich classique

La généralisation de la méthode de Newton aux espaces de Banach est due au mathématicien et économiste soviétique L. V. Kantorovich, qui a publie plusieurs ouvrages au milieu du XXe siècle, parmi lesquels nous soulignons [[23], [24]]. La suite itérative de la généralisation de la méthode de Newton pour la résolution des équations de la forme

$$F(x) = 0, \tag{2.10}$$

où F est un opérateur différentiel non linéaire défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$($\mathcal{X}$ est un espace de Banach) , est une suite de linéarisation qui s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & \in & \Omega \\ x_{k+1} & = & x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k), \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Ω un ouvert de $\mathcal{X}$, $F'(x_k)$ est la première dérivée de Fréchet de l'opérateur F au point x_k et $F'^{-1}(x_k)$ est son inverse.

Il est bien connu qu'il existe trois types de convergences pour prouver la convergence de la suite (2.11), convergence locale, convergence semi-locale et convergence globale. L'étude locale de la convergence consiste à imposer des conditions sur la solution exacte x^∞, et certaines conditions sur l'opérateur F ce qui permet d'obtenir une boule de convergence [11] de la suite (2.11) ainsi l'accessibilité à x^∞ de l'approximation initiale x_0 appartenant à la boule. Pour l'étude semi-locale de la convergence, elle est basée sur le choix des conditions sur l'approximation initiale x_0, ainsi que l'opérateur F, elle aboutit à un domaine dit domaine de paramètres [16] correspondant aux conditions requises à la première approximation, qui garantissent la convergence de la suite (2.11) vers la solution x^∞. Enfin, l'étude globale de la convergence, est basées sur certaines des conditions sur l'opérateur F, aussi la convergence de la suite (2.11) vers la solution x^∞ dans un domaine, et indépendante de la valeur initial x_0.

Le théorème suivant illustre la convergence locale de la méthode de Newton-Kantorovich .

Théorème 2.4.1 *Soit $x^\infty \in \Omega$ une solution de l'équation $F(x) = 0$, supposons que*

(H1) *$F'(x^\infty)$ est inversible,*

(H2) *il existe $r > 0$ tel que F' est l-lipschitzienne sur*

$$B_r(x^\infty) = \{x \in \Omega \ / \ ||x - x^\infty|| < r\} \ .$$

Alors, il existe $\rho \in]0, r]$ tel que pour tout $x_0 \in B_\rho(x^\infty)$, la suite de la méthode *de Newton-Kantorovich converge vers x^∞, de plus, il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$||x_{k+1} - x^\infty|| \leq M||x_k - x^\infty||^2, \quad \forall\ k \geq 1$$

et

$$||x_k - x^\infty|| \leq M||x_0 - x^\infty||^{(2^k)}, \quad \forall\ k \geq 1.$$

Démonstration

Soit $V(x^\infty)$ un voisinage de x^∞ , supposons que $[F'(x^\infty)]^{-1}$ existe sur $V(x^\infty)$ et que $\sup_{\in V(x^\infty)} ||[F'(x^\infty)]^{-1}|| = c_0 < \infty$.

On définit

$$T(x) = x - [F'(x)]^{-1}F(x) \quad x \in V(x^\infty),$$

donc $T(x^\infty) = x^\infty$.

Pour $x \in V(x^\infty)$, on a alors

$$\begin{aligned} T(x) - T(x^\infty) &= x - x^\infty - [F'(x^\infty)]^{-1}F(x) \\ &= [F'(x^\infty)]^{-1}\left\{F(x^\infty) - F(x) - F'(x)(x^\infty - x)\right\} \\ &= [F'(x^\infty)]^{-1}\int_0^1 [F'(x + t(x^\infty - x)) - F'(x)]dt(x^\infty - x), \end{aligned}$$

aussi en prenant la norme, on obtient

$$\begin{aligned}
||T(u)-T(x^{\infty})|| &\leq ||[F'(x^{\infty})]^{-1}||\int_0^1 ||[F'(x+t(x^{\infty}-x))-F'(x)]dt||(x^{\infty}-x)|| \\
&\leq ||[F'(x^{\infty})]^{-1}||\int_0^1 Lt||x^{\infty}-x||dt||x^{\infty}-x|| \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq 1}\left(||[F'(x^{\infty})]^{-1}||\int_0^1 Lt||x^{\infty}-x||dt||x^{\infty}-x||\right) \\
&\leq ||[F'(x^{\infty})]^{-1}||L||x^{\infty}-x||^2 \\
&\leq \sup_{x\in V(x^{\infty})}\left(||[F'(x^{\infty})]^{-1}||L||x^{\infty}-x||^2\right)
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$||T(x)-T(x^{\infty})|| \leq \frac{c_0L}{2}||x-x^{\infty}||^2. \tag{2.12}$$

Si on choisis $\delta < 2(C_0L)$ avec la propriété que la boule fermée

$\bar{B}(x^{\infty},\delta) \subseteq V(x^{\infty})$, alors l'opérateur $T : \bar{B}(x^{\infty},\delta) \to \bar{B}(x^{\infty},\delta)$ *est* $L-$ *lipchitizienne* avec $L = \frac{C_0L\delta}{2} < 1$.

Par le théorème de point fixe de Banach (un théorème de contraction), F admet un seul point fixe x^{∞} dans $B(x^{\infty},\delta)$ et la suite $\{x_k\}$ converge vers x^{∞}.

On note $M = \frac{C_0L}{2}$, on aura alors d'après (2.12)

$$||x_{(k+1)}-x^{\infty}|| \leq M||x_n-x^{\infty}||^2,$$

et par récurrence sur k , on obtient

$$||x_k-x^{\infty}|| \leq (M||x_0-x^{\infty}||)^{(2^k)},$$

Par conséquent, les deux estimations du théorème sont démontrées.

Le théorème montre clairement que la méthode de Newton-Kantorovich est localement convergente, de manière quadratique.

La suite(2.11) qui s'écrit

$$\begin{cases} x_0 & \in & \Omega \\ x_{k+1} & = & x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k), \end{cases}$$

est une suite de linéarisation, qui n'est pas applicable numériquement dans le cas d'un espace de dimension infini, cependant , on va lui construire une suite de discrétisation , dans laquelle on va approcher l'opérateur F'^{-1} par une suite d'opérateurs de rang fini .

2.4.2 Méthode de Newton-Kantrovich de rang fini

On note par , $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite qui définit la méthode de Newton-Kantorovich de rang fini, qui est une suite de discrétisation, pour la résolution des équations de la forme

$$F(x) = 0, \tag{2.13}$$

où F est un opérateur différentiel non linéaire défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, est construite comme suit

$$\begin{cases} x_n^0 & \in V \subset & \Omega \\ x_n^{k+1} & = & x_n^k - \Sigma_n F(x_n^k), \end{cases} \tag{2.14}$$

où Ω est un ouvert de $\mathcal{X}$, V un ouvert de Ω et $\Sigma_n : V \subset \Omega \longrightarrow BL(\mathcal{X})$, $\Sigma_n(x)$ est la suite des opérateurs d'approximation de rang fini de l'opérateur $F'(x)^{-1}$.

Définition 2.4.1 *Le rayon spectrale d'un opérateur $T \in BL(\mathcal{X})$, est défini comme suit*

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} ||T^n||.$$

Théorème 2.4.2 *Soient $F, x^{\infty}, \Omega, V, \Sigma_n, \rho_n$ et $(x_n^k)_{k\mathbb{N}}$, tel que*

1. *V un ouvert de Ω ,*
2. *$F : \Omega \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur non linéaire ,*
3. *x^{∞} est la solution unique dans Ω de*

$$F(x) = 0 \ ,$$

4. *F est deux fois différentiable au point x^{∞} et $F'(x^{\infty})$ est inversible ,*
5. *Σ_n est une suite d'opérateurs définie de V dans $BL(\mathcal{X})$, Fréchet différentiable en x^{∞},*
6. *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\rho_n = \rho(I - \Sigma_n(x^{\infty})F'(x^{\infty})) < 1,$$

avec ρ désigne le rayon spectrale,

alors,

pour tout ϵ qui vérifie $\rho_n + \epsilon < 1$, il existe deux boules dans V, de centre x^∞

et de rayons respectivement r' et r, ($B(x^\infty, r'_{n,\epsilon}) \subset V$, $B(x^\infty, r_{n,\epsilon}) \subset V$)

tel que,

si le point x_n^0 est dans la boule $B(x^\infty, r'_{n,\epsilon})$,

alors,

la suite $(x_n^k)_{k\in N}$ est dans la boule $B(x^\infty, r_{n,\epsilon})$ $\big((x_n^k)_{k\in N} \subset B(x^\infty, r_{n,\epsilon})\big)$,

de plus,

$$x_n^k \longrightarrow x^\infty \text{ quand } k \longrightarrow +\infty ,$$

et on a l'estimation

$$||X_n^k - X^\infty|| \leq r_{n,\epsilon}(\rho_n + \epsilon)^k \qquad k \geq 0.$$

Preuve Voir ([19]) .

2.5 L'application de la méthode de Newton-Kantorovich aux équations intégrales non linéaires de Fredholm

Soit F un opérateur non linéaire Fréchet différentiable, défini sur un ouvert non vide Ω de $\mathcal{X}$.

Soit le problème

$$\text{Trouver } \ x \in O \ , F(x) = 0, \tag{2.15}$$

On va traiter (2.15) dans le cas où F est une équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce , par conséquent on aura l'équation (2.15) s'écrit

$$\text{Trouver } \ x \in \Omega \ , x - K(x) = f, \tag{2.16}$$

pour une fonction $f \in \mathcal{X}$ donnée,où

$$K(x)(s) = \int_0^1 k(t, s, x(t))dt, \quad x \in \Omega, \ s \in [0, 1],$$

et le noyau k est une fonction réelle à trois variables, qui s'écrit

$$k : (s, t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \to k(s, t, x) \in \mathbb{R},$$

est assez régulière de tel sorte que l'opérateur K soit deux fois Fréchet différentiable sur Ω .

On note par $T = K'$, la dérivée de Fréchet de K, définie par,

pour tout $x \in \Omega$,

$$T(x)h(s) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(t, s, x(t))h(t)dt, \quad h \in \mathcal{X}, \ s \in [0,1]. \tag{2.17}$$

Dans toute la suite on va présenter une approximation numérique de la solution de l'équation (2.16), tout d'abord, pour la linéarisation de cette suite, on va appliquer la méthode de Newton-Kantorovich (si T est inversible), considérons la suite (u_n), une suite de linéarisation définie par

$$\left\{ \begin{array}{lll} x^0 & \in & \Omega \\ x^{k+1} & = & x^k - T(x^k)^{-1}F(x^k), \end{array} \right. \tag{2.18}$$

après, on discrétise (2.18) en utilisant la méthode de Newton-Kantorovich de rang fini et on obtient un système d'équations linéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_n^0 & \in & \Omega \\ x_n^{k+1} & = & x_n^k - \Sigma_n(x_n^k)F(x_n^k), \end{array} \right. \tag{2.19}$$

où (Σ_n) est une suite d'approximations de l'opérateur T^{-1} .

Rappelons que pour les équations intégrales de la forme (2.16), il existe principalement deux types de discrétisation, la méthode de Nyström (méthode quadrature), qui consiste à appliquer les méthodes d'intégration numériques[7], le deuxième type de discrétisation est véhiculé par les méthodes de projections [29] [26], dont la solution approchée x_n est la solution de l'équation approximée

$$\text{Trouver} \quad x_n \in \Omega \ , x_n - K_n(x_n) = f_n, \tag{2.20}$$

avec K_n est une approximation de l'opérateur K, ce dernier dépend de l'opérateur de projection π_n, défini sur un espace de dimension finie $\mathcal{X}_n$ ($\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$), et f_n est une approximation de f.

nous présentons quelques types projections

1. la projection définie par

   $x_n \in \mathcal{X}_n$, $K_n = \pi_n K \pi_n$ et $f_n = \pi_n f$,

   — si π_n est une projection orthogonale, on dit qu'elle est une projection de Galerkin,

   — si π_n est une projection d'interpolation, on dit alors qu'elle est une projection de collocation ,

2. la projection définie par

   $x_n \in \mathcal{X}_n$, $K_n = \pi_n K$ et $f_n = \pi_n f$,

   est une projection dite de Kantorovich ,

3. la projection définie par

$x_n \in \mathcal{X}_n$, $K_n = K\pi_n$ et $f_n = \pi_n f$,

est la projection itérée, lorsque K est un opérateur linéaire, cette dernière méthode est aussi appelée méthode de Sloan [32], cette méthode est particulièrement intéressante car elle est assez simple à appliquer et son ordre de convergence peut être supérieur à celui des méthodes de Galerkin ou de collocation [7, 10, 6].

Dans toute la suite, on va appliquer la projection de Sloan à l'opérateur T, en effet, π_n une projection définie sur un sous espace de $\mathcal{X}$ de dimension n, engendrée par une base ordonnée $[e_{n,1}, ..., e_{n,n}] \in \mathcal{X}^{1\times n}$,

$[e^*_{n,1}, ..., e^*_{n,n}] \in (\mathcal{X}^*)^{1\times n}$ est la base adjointe de e_n , où tous les $e^*_{n,j}$ sont des fonctions semi-linéaires bornées et π_n est définie comme suit

$$\pi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e^*_{n,j} > e_{n,j}, \quad x \in \mathcal{X}, \tag{2.21}$$

On note, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$\pi_n e_{n,j} = e_{n,j}, \qquad \pi_n e^*_{n,j} = e^*_{n,j}.$$

Supposons que $(\pi_n)_{n\geq 1}$ converge ponctuellement vers l'opérateur identité $(\pi_n(x) \longrightarrow x)$ quand $n \longrightarrow +\infty$,

c'est à dire, pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$||\pi_n - I|| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, ce qui implique que π_n est bornée, $\exists\ c > 0$ tel que

$||\pi_n|| \leq c\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la linéarisation de l'équation (2.16),

$$\text{Trouver}\ \ x \in \Omega\ , x - K(x) = f,$$

nous appliquons la méthode de Newton-Kantorovich, on obtient alors

$$(I - T(x^k))(x^{k+1} - x^k) = -x^k + K(x^k) + f \tag{2.22}$$

On procède à la discrétisation de cette équation (2.22) en utilisant la projection de Sloan, on a alors

$$(I - T_n(x_n^k)\pi_n)(x_n^{k+1} - x_n^k) = -x_n^k + K(x_n^k) + f. \tag{2.23}$$

Pour déterminer la convergence de (2.23), on suppose que

H1 K soit deux fois différentiable sur Ω,

H2 l'équation (2.15) admet une unique solution $x^\infty \in \Omega$,

H3 $(I - T(x^\infty))$ soit inversible ,

H4 $T : \Omega \to BL(\mathcal{X})$ soit δ-Lipschitzienne .

L'approximation donnée par la projection de Sloan de l'opérateur $T(x)$ est définie par

$$T_n(x) = T(x)\pi_n. \tag{2.24}$$

Le théorème suivant montre la convergence de la suite définie par la projection de Sloan .

Théorème 2.5.1 *Soit* $(\pi_n)_{n\geq 1}$ *une suite de projections converge ponctuellement vers l'opérateur identité de* $\mathcal{X}$ *.*

On pose

$$\Sigma_n = (I - T_n)^{-1},$$

et sous les hypothèses $(H1, H2, H3\ \ etH4)$*, il existe* n_0 *tel que, pour tout* $n \geq n_0$*,*

$$\rho_n = \rho(I - \Sigma_n(x^\infty)(I - T(x^\infty))) < 1, \quad (\rho \ \ \textit{désigne le rayon spectrale}) \tag{2.25}$$

de plus, pour $n \geq n_0$ *fixé, et pour tout* $\epsilon > 0$ *tel que* $\rho_n + \epsilon < 1$*,* $\exists r'_{n,\epsilon}, r_{n,\epsilon}$ *des réels positifs,* $\exists\ B(x^\infty, r'_{n,\epsilon}) \subset O$*(une boule de centre* u *et de rayon* $r'_{n,\epsilon}$ *) et* $B(x^\infty, r_{n,\epsilon})$*(une boule de centre* x^∞ *et de rayon* $r_{n,\epsilon}$ *) tel que, si* $x_n^0 \in$

$B(x^\infty, r'_{n,\epsilon})$, alors la suite $(x_n^k)_{k\geq 0}$ définie par

$$x_n^{k+1} = x_n^k - \Sigma_n(x_n^k)F(x_n^k),$$

reste dans $B(x^\infty, r_{n,\epsilon})$, de plus

$$x_n^k \to x^\infty \text{ quand } k \to +\infty,$$

et

$$||x_n^k - x^\infty|| \leq r_{n,\epsilon}(\rho_n + \epsilon)^k$$

Preuve Voir ([19]) .

Remarque 2.5.1 *En pratique, du fait que T_n soit un opérateur de rang fini, la suite Σ_n se représenta par une matrice d'ordre n , dont on calcule l'inverse de l'opérateur T_n dans chaque itération, y dépend du rang n_0 qui peut être petit ou grand, ce qui rend le temps d'exécution très grand, ainsi le calcul de l'inverse d'une matrice est la méthode la plus entachée par les erreurs d'arrondi, et par le bon conditionnement de la matrice à inverser, ce qui rend la matrice compliquée à appliquer en pratique, par ce que on a aucune information sur le bon conditionnement de la suite Σ_n à partir de l'opérateur F .*

Chapitre 3

La méthode de Newton-Star

Ce chapitre représente l'essence même de notre contribution mathématique, dans lequel, nous allons construire une nouvelle suite de linéarisation qui n'exige pas le calcul de l'opérateur inverse, et de montrer sa convergence locale dans un espace de Hilbert .

La suite de Newton-Kantororvich est définie pour la résolution des équations non linéaire de la forme

$$F(x) = 0, \tag{3.1}$$

où

$$F : \Omega \in \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$$

F un opérateur non linéaire , $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ sont deux espaces de Banach et Ω est un ouvert de $\mathbb{B}_1$. Cette suite est construite de la manière suivante :

$$\begin{cases} x^0 \text{ choisis } \text{ dans } \Omega, \\ x^{k+1} = x^k - (F'(x^k))^{-1} F(x^k), \; k \geq 0. \end{cases}$$

Le génie de Kantorovich apparaît, lorsqu'il a vu la correspondance entre $\frac{1}{F'(x^k)}$ dans le cas réel et $[F'(x^k)]^{-1}$ dans le cas d'un espace de Banach , où la première dérivée est au sens classique et la seconde est une dérivée de Fréchet. (voir [1],[13],[18],[21]).

Néanmoins, ce facteur a rendu cette suite très difficile à construire, à cause du calcul supplémentaire dû à l'inverse d'un opérateur borné sur un espace de dimension infini .

Notre intérêt consiste à définir une nouvelle suite, qu'on va nommer Newton-Star, qui n'exige pas le calcul de l'inverse de l'opérateur $(F'(x^k))^{-1}$ dans chaque itération k, en remplaçant l'opérateur inverse par l'opérateur adjoint. Pour atteindre notre objectif, nous exploitons d'abord la notion d'opérateur adjoint offerte par la structure d'un espace de Hilbert.

Dans toute la suite de cette thèse, on note par $(\mathcal{X}, < .,. >_{\mathcal{X}})$ l'espace de Hilbert, muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{X}} = \sqrt{< .,. >_{\mathcal{X}}}$, $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés définis de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ engendré par la norme

$$\forall T \in \mathrm{BL}(\mathcal{X}), \ \|T\| = \sup\left\{\|Tx\|_{\mathcal{X}} \ : \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\right\},$$

ainsi, $F : \Omega \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ l'opérateur Fréchet différentiable sur un ouvert non vide Ω de $\mathcal{X}$ et, F^* est l'opérateur adjoint de $F \in \mathrm{BL}(\mathcal{X})$ défini par

$$\forall x, y \in \mathcal{X} \ : < Fx, y >_{\mathcal{X}} = < x, F^* y >_{\mathcal{X}} .$$

Ce qui nous permet de construire la suite itérative de **Newton-Star**

$$\begin{cases} x^0 \text{ choisis dans } \Omega, \\ x^{k+1} = x^k - \alpha_k (F'(x^k))^* F(x^k), \ k \geq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où, $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ sont des paramètres réels .

3.1 La convergence locale de la méthode de Newton-Star

Dans cette section, on va étudier la convergence locale de la suite (3.2). Nous avons besoin du lemme technique suivant pour prouver le théorème principale de notre contribution.

Lemme 3.1.1 *Pour $\lambda \in]0,1[$ et $\mu \in]\lambda, 1[$, on définit la suite $\{v_k\}_{k\in \mathrm{N}}$ par*

$$\begin{cases} v_O = \mu - \lambda, \\ v_{k+1} = \lambda v_k + v_k^2, \ k \geq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$v_k \leq \mu^k(\mu - \lambda)$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} v_k = 0.$$

Démonstration On va étudier la variation de la suite (3.3), en utilisant sa fonction associée . On pose $v_k = g(k)$, où g est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \lambda x + x^2 \ .$$

Il est clair que $g(x)$ est croissante sur $]0, 1-\lambda[$, et elle a deux points fixes 0, en plus $1-\lambda$, alors $\{v_k\}_{k\in \mathrm{N}}$ est monotone est inclus dans $]0, 1-\lambda[$. Comme, on a

$$v_1 - v_0 = -\mu(1-\lambda)^2(1-\mu) < 0,$$

alors, v_k est décroissante .

Pour tout $k \geq 0$,

$$v_{k+1} = (\lambda + v_k)v_k \leq (\lambda + v_0)v_k \leq \mu v_k,$$

par conséquent,

$$v_k \leq \mu^k(\mu - \lambda). \qquad \square$$

On note par x^∞ la solution exacte unique de l'équation (3.1) dans Ω.

Supposons que $F'(.) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{BL}(\mathcal{X})$ est $\delta-$lipschitzienne sur Ω, c'est à dire

$$\exists \delta > 0 \forall x,\ y \in \Omega,\ \|F'(x) - F'(y)\| \leq \delta \|x - y\|_{\mathcal{X}}\,, \quad (H1)$$

et que F' est minorée sur Ω , c'est à dire

$$\exists\ m > 0, \forall u \in \mathcal{X}, \|F'(x^\infty)u\|_{\mathcal{X}} \geq m \|u\|_{\mathcal{X}}\,. \quad (H2)$$

Théorème 3.1.1 *Soit* $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{X}$ *une suite de Newton-Star définit par*

$$\begin{cases} x^0 \ \textit{choisis} \ \ \textit{dans}\ \Omega, \\ x^{k+1} = x^k - \alpha_k(F'(x^k))^* F(x^k),\ k \geq 0, \end{cases}$$

où, $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ sont des paramètres réels. Soient $\alpha, \beta > 0$ tel que,

$0 < \alpha_k \left\|F'(x^k)\right\|^2 \leq \alpha < 1$ *et* $\alpha_k \geq \beta$ $\forall$, $k \geq 0$,*et sous les hypothèses (H1)-(H2),* $\exists$ $C > 0$ *tel que,*

$$\left\|x^0 - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} < C \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Démonstration On a pour tout $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
x^{k+1} - x^\infty &= x^k - x^\infty - \alpha_k F'(x^k)^* \left(F(x^k) - F(x^\infty)\right) \\
&= x^k - x^\infty - \alpha_k F'(x^k)^* \left(F'(x^\infty)\left(x^k - x^\infty\right) + o\left(\left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right) \\
&= x^k - x^\infty - \alpha_k F'(x^k)^* \left(\left(F'(x^k) + F'(x^\infty) - F'(x^k)\right)\left(x^k - x^\infty\right)\right. \\
&+ \left. o\left(\left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right),
\end{aligned}$$

alors , il existe $c > 0$ tel que,

$$\begin{aligned}
\left\|x^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \left\|(I - \alpha_k F'(x^k)^* F'(x^k))(x^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}} + c\alpha_k \left\|F'(x^k)\right\| \left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 \\
&+ \alpha_k \left\|F'(x^k)^* \left(F'(x^\infty) - F'(x^k)\right)(x^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

où, I désigne l'opérateur identité de BL($\mathcal{X}$).

En utilisant le fait que F' soit $\delta-$Lipschitzienne, on obtient , pour tout $k \geq 0$,

$$\left\|x^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} \leq \left\|I - \alpha_k F'(x^k)^* F'(x^k)\right\| \left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} + \alpha_k (c + \delta) \left\|F'(x^k)\right\| \left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 .$$

Pour $r \in]0, m\delta^{-1}[$, on définit $\Omega_r = \{x \in \Omega \ : \ \|x - x^{\infty}\|_{\mathcal{X}} < r\}$, donc pour tout $x \in \Omega_r$ et pour tout $u \in \mathcal{X}$,on obtient

$$\begin{aligned}
\|F'(x)u\|_{\mathcal{X}} &= \|(F'(x^{\infty}) - (F'(x^{\infty}) - F'(x)))\, u\|_{\mathcal{X}} \\
&\geq \|F'(x^{\infty})u\|_{\mathcal{X}} - \|(F'(x^{\infty}) - F'(x))\, u\|_{\mathcal{X}} \\
&\geq (m - \delta\, \|x^{\infty} - x\|_{\mathcal{X}})\, \|u\|_{\mathcal{X}} \\
&\geq (m - \delta r)\, \|u\|_{\mathcal{X}}\,.
\end{aligned}$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned}
\|F'(x)u\|_{\mathcal{X}} &= \|(F'(x^{\infty}) - (F'(x^{\infty}) - F'(x)))\, u\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|F'(x^{\infty})u\|_{\mathcal{X}} + \|(F'(x^{\infty}) - F'(x))\, u\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq (\|F'(x^{\infty})\| + \delta r)\, \|u\|_{\mathcal{X}}\,,
\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $x \in \Omega_r$, on a la majoration suivante de $F'(x)$

$$m - \delta r \leq \|F'(x)\| \leq \|F'(x^{\infty})\| + \delta r.$$

D'autre part, on a pour tout $k \geq 0$, $(I - \alpha_k F'(x^k)^* F'(x^k))$ est un opérateur auto-adjoint.

En utilisant la norme des opérateur autoadjoint, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|I-\alpha_k F'(x^k)^*F'(x^k)\right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|< \left(I-\alpha_k F'(x^k)^*F'(x^k)\right)u, u >_{\mathcal{X}}\right| \\ &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|1-\alpha_k\left\|F'(x^k)u\right\|_{\mathcal{X}}^2\right|.\end{aligned}$$

Mais, pour $\|u\|_{\mathcal{X}}=1$,

$$\alpha_k\left\|F'(x^k)u\right\|_{\mathcal{X}}^2 \leq \alpha < 1,$$

donc, si $x^k \in \Omega_r$, alors

$$\begin{aligned}\left\|I-\alpha_k F'(x^k)^*F'(x^k)\right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left(1-\alpha_k\left\|F'(x^k)u\right\|_{\mathcal{X}}^2\right) \\ &\leq \left(1-\beta\left(m-\delta r\right)^2\right) < 1.\end{aligned}$$

Sachant que Ω est un ouvert, alors il existe $\kappa > 0$

tel que,

$$\Omega_\kappa = \{x \in X \ : \ \|x-x^\infty\|_{\mathcal{X}} < \kappa\} \subset \Omega.$$

On pose $\eta = \dfrac{m-\delta r}{c+\delta}$, par conséquent si on prend $x^0 \in \Omega_r$ tel que

$$\left\|x^0-x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} < \min(\eta^{-1}\beta\left(m-\delta r\right)^2, \kappa) = C,$$

alors, pour tout $k \geq 1$, $x^k \in \Omega_r \cap \Omega_\kappa$, $\left\{x^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bien défini, de plus

$$\eta\left\|x^k-x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} \leq v_k,$$

où, $\{v_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ est défini comme le lemme précédent avec $\lambda = \left(1-\beta\left(m-\delta r\right)^2\right)$ et $\mu = \eta\left\|x^0 - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} + \lambda$.

3.2 Application numérique

Dans cette section, pour illustrer l'application de notre suite (3.2) dans un espace de dimension finie, nous choisissons une fonction F, qui est définie par

$$\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ & x=(x_1,x_2,..,x_n) & \longmapsto & y=F(x), \end{array}$$

tel que

$$y_i = \begin{cases} 1-x_i^2+\sum\limits_{j=1}^{i-1}(1-x_j^2)^2+\sum\limits_{j=i+1}^{n}(1-x_j)^2 & 2\leq i\leq n-1 \\ 1-x_1^2+\sum\limits_{j=2}^{n}(1-x_j)^2 & i=1 \\ 1-x_n^2+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(1-x_j^2)^2 & i=n \end{cases}$$

Il est clair que l'équation $F(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ a une solution exacte et unique $x^\infty = \underbrace{(1,1,..,1)}_{n\ fois}$.

Nous allons étudier cet exemple en utilisant la suite (3.2) de Newton-Star .

Comme F est un polynôme, on vérifie facilement qu'elle est Fréchet différentiable sur $\mathbb{R}^n$, avec

$$F'(x)(i,j) = \begin{cases} -2x_i & i = j \\ 4x_j(x_j^2 - 1) & i > j \\ 2(x_j - 1) & i < j \end{cases}$$

donc, $F'(x)$ a la forme

$$F'(x)(i,j) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 2(x_2 - 1) & \dots & 2(x_n - 1) \\ 4x_1({x_1}^2 - 1) & -2x_2 & \dots & 2(x_n - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4x_1({x_1}^2 - 1) & 4x_2(x_2^2 - 1) & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $x, \tilde{x} \in B(x^\infty, R)$, $o\ B(x^\infty, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x^\infty - x||_2 \leq R\}$ la boule de centre x^∞ et de rayon R, alors

$$\begin{aligned} ||F'(x) - F'(\tilde{x})||_2 &\leq n||F'(x) - F'(\tilde{x})||_1 \\ &\leq n^2 \max_{1 \leq j \leq n} |F'(x)(i,j) - F'(\tilde{x})(i,j)|, \end{aligned}$$

où, $n = \dim \mathbb{R}^n$.

D'un autre côté ,

1. pour $i = j$ et $1 \leq i \leq n$

$$|F'(x)(i,i) - F'(\tilde{x})(i,i)| = 2|x - \tilde{x}| \ ,$$

2. pour $1 \leq i < j \leq n$

$$|F'(x)(i,j) - F'(\tilde{x})(i,j)| = 2|x_i - \tilde{x}_i| \ ,$$

3. et pour $1 \leq j < i \leq n$

$$\begin{aligned} |F'(x)(i,j) - F'(\tilde{x})(i,j)| &= |4x_j(x_j^2 - 1) - 4\tilde{x}_j(\tilde{x}_j^2 - 1)| \\ &\leq 4|x_j^3 - \tilde{x}_j^3| + 4|x_j - \tilde{x}_j| \\ &\leq \left(4|x_j^2 + x_j\tilde{x}_j + \tilde{x}_j^2| + 4\right)|x_j - \tilde{x}_j| \\ &\leq 4\left(\frac{3}{2}|x_j^2 + \tilde{x}_j^2| + 1\right)|x_j - \tilde{x}_j|. \end{aligned}$$

D'autre part on a,$x_j^2 \leq ||x||_2^2 \leq (||x - x^\infty||_2 + ||x^\infty||_2)^2 \leq (R+n)^2$, pour $1 \leq j \leq n$.

Par conséquent on obtient,

$$\begin{aligned} ||F'(x) - F'(\tilde{x})|| &\leq 4n^2(3(R+n)^2 + 1)||x - \tilde{x}||_\infty \\ &\leq 4n^2(3(R+n)^2 + 1)||x - \tilde{x}||_2, \end{aligned}$$

ce qui montre que $F'(.)$ est δ-Lipschitzienne dans une boule de rayon R et de centre x^∞ avec $\delta = 4n^2(3(R+n)^2 + 1)$. En calculant F' pour la solution exacte x^∞, on obtient

$$\begin{aligned}
F'(x^\infty) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
&= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= -2Id_{\mathbb{R}^{\ltimes}},
\end{aligned}$$

donc elle est inversible.

D'autre part, dans chaque itération $k \geq 1$, on choisis α_k vérifiant

$$\alpha_k = 0.99\frac{1}{n^2}||F'(x^k)||_1^{-2} \leq 0.99||F'(x^k)||^{-2},$$

ce qui donne $\alpha = 0.99$ et $\beta > 0$.

Toutes les hypothèses de notre théorème sont vérifiées, ce qui montre la convergence d'après le théorème (3.1.1), ce qui nous permet d'établir un algorithme pour obtenir la solution.

Algorithme de la méthode de Newton-Star (NS)

step 1. Donner un point de départ x^0 et $k_{\max} \geq 1$. Poser $k = 0$.

step 2. Poser $n = dimension(x^0)$.

step 3. If $k \leq k_{\max}$, alors arrêter .

step 4. $\alpha_k = 0.99\frac{1}{n^2}||F'(x^k)||_1^{-2}$.

step 5. $x^{k+1} = x^k - \alpha_k F'(x^k)^* F(x^k)$.

step 6. Poser $k = k + 1$.

step 7. $Er(k) = \sqrt{F(x^k)^t F'(x^k)}$, alors aller au step 2.

$Er(k) = \sqrt{F(x^k)^t F'(x^k)}$ est l'erreur d'estimation obtenue à chaque itération $k \geq 1$.

Le tableau(3.1) montre les résultats numériques obtenus pour un point de départ $x^0 = \underbrace{(2, 2, .., 2)}_{n \ fois}$, en faisant varier la taille de la matrice n et le nombre d'itérations k.

Itérations	n=30		n=100	
	$Er(k)$	CPU time	$Er(k)$	CPU time
k=10	1.1814e-02	0.009369	5.5894e-03	0.039737
k=20	2.7653e-04	0.015863	3.2229e-04	0.084274
k=50	4.0849e-09	0.031959	6.6281e-08	0.201700
k=100	6.7793e-16	0.057180	4.7482e-14	0.291275
k=500	6.7793e-16	0.204318	1.2784e-15	1.023639

Table 3.1 – Les erreurs et le temps d'exécution obtenus en employant la suite de Newton-Star.

Le tableau (3.1) prouve que la suite de Newton-Star est efficace, elle converge parfaitement pour des différentes valeurs de n et de nombre d'itérations k, dans un temps relativement très court.

Notre but est de montrer que la suite de Newton-Star est plus efficace dans la pratique par rapport à la méthode de Newton-Kantorovich, en procèdent à une comparaison entre les deux suites de Newton-Star et de Newton-Kantorovich, vérifiant les paramètres et les hypothèses suivantes :

— taille de matrice $n = 100$,

— nombre d'itérations $k = 100$,

— point de départ $x_0 = \underbrace{(a, a, .., a)}_{nfois}$, $a \in \mathbb{R}$,

on obtient le tableau (3.2) de comparaison suivant :

a	NS		NK	
	$Er(k)$	CPU time	$Er(k)$	CPU time
1.01	1.2784e-15	0.311879	1.2748e-15	0.312116
1.5	6.1674e-14	0.271268	NaN	0.900919
2	4.7482e-14	0.234149	NaN	0.381291
4	1.7605e-13	0.214328	NaN	0.351824
6	8.8911e-14	0.237603	NaN	0.533779
10	3.3543e-13	0.225355	NaN	0.479043

Table 3.2 – Les erreur et le temps d'exécution obtenus en employant la suite de Newton-Star et la suite de Newton-Kantorovich.

où, NaN (Not a Number) dans le tableau représente une valeur qui n'est pas un nombre déterminé(de la forme$\frac{0}{0}$ ou $\frac{\mathrm{inf}}{\mathrm{inf}}$).
Dans notre exemple NaN signifie que la matrice $F'(x^k)$ se rapproche d'une matrice non inversible, ce qui la rend impossible à inverser numériquement.

Le tableau (3.2) montre que, pour un point de départ assez proche de la solution exacte, les deux suites de Newton-Star et de Newton-Kantorovich convergent avec la même erreur, et le même temps d'exécution ; mais pour des points de départ loin de la solution exacte, la suite de Newton-Star continue à être efficace dans un temps relativement petit, par contre la suite de Newton-Kantorovich ne converge plus (non inversibilité de la matrice).

Chapitre 4

La méthode Newton-Star de rang fini (Finit Rank Newton-Star)

Dans ce chapitre, on va construire une nouvelle suite de discrétisation à partir de la suite de linéarisation présentée dans le chapitre précédent, on va montrer sa convergence locale par deux options. Enfin, pour affirmer l'efficacité de notre nouvelle suite, on va l'appliquer sur une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

Dans le **chapitre 3** on a traité l'inversibilité qui existe dans la suite (2.11), en remplaçant l'inverse de l'opérateur F', par l'opérateur adjoint, dont on a défini notre nouvelle méthode par la suite(3.2) de Newton-Star, mais cette dernière n'est pas applicable numériquement dans le cas d'un espace de dimension infinie, ce qui nous oblige de construire une nouvelle suite à partir de la suite de Newton-Star (3.2), qui consiste à approcher l'opérateur F' par une suite d'approximations $(F'_n)_{n\geq 1} \subset \mathrm{BL}(\mathcal{X})$, qui converge ponctuellement vers F', c'est à dire

$$\forall\ x \in \mathcal{X}, \lim_{n\to+\infty} ||(F'_n - F')x|| = 0, \tag{4.1}$$

cette technique sera appliquée à la solution d'une équation non linéaire définie sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Cette nouvelle suite qui est dite de rang fini sera appelée **" Finit Rank Newton-Star "**.

Considérons , la nouvelle suite

$$\begin{cases} x^0 \text{ choisis dans } \Omega, \\ x_n^{k+1} = x_n^k - \alpha_{n,k}(F'_n(x_n^k))^* F(x_n^k),\ \ k \geq 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\alpha_{n,k}$ sont des réels positifs et Ω un ouvert de $\mathcal{X}$.

4.1 La convergence locale de la méthode Finit Rank Newton-Star

Nous allons traité la convergence locale de Finit Rank Newton-Star par deux options, A et B.

4.1.1 Option A

Pour l'option A, nous considérons les hypothèses suivantes :

$$(H_A) = \begin{cases} 1) - F'(.) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{BL}(\mathcal{X}) \text{ est } \delta - \text{Lipschitzienne } sur\ \Omega\ (\delta > 0), \\ 2) - \exists\ m > 0, \forall u \in \mathcal{X}, \|F_n'(x^\infty)u\|_{\mathcal{X}} \geq m\,\|u\|_{\mathcal{X}} & , \\ 3) - \exists\ R > 0\ , B(x^\infty, R) \subset \Omega\ et\ \forall\ x \in B(x^\infty, R) & , \\ \lim_{n\to+\infty} \|F'(x) - F_n'(x)\| = 0 & . \end{cases} \tag{4.3}$$

Théorème 4.1.1 *Soit* $\left\{x_n^k\right\}_{k\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{X}$ *une suite de Finit Rank Newton-Star définie par*

$$\begin{cases} x^0\ choisis\ \ dans\ \Omega, \\ x_n^{k+1} = x_n^k - \alpha_{n,k}(F_n'(x_n^k))^* F(x_n^k),\ k \geq 0,\ n \geq 1, (\alpha_{n,k})_{\in\mathrm{N}} \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

— $\exists\ \alpha, \beta > 0$, *tel que* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)\right\|^2 \leq \alpha$, *et* $\alpha_{n,k} \geq \beta > 0$ $\forall k \geq 0, n \geq 1$

— *les hypothèses* (H_A) *sont vérifiées ,* *alors, il existe $C > 0$ tel que,*

$$\left\|x^0 - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} < C \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Démonstration 4.1.1 *On a, pour tout $k \geq 0$*

$$\begin{aligned} x_n^{k+1} - x^\infty &= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x^k)^* \left(F(x_n^k) - F(x^\infty)\right) \\ &= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x^\infty)\left(x_n^k - x^\infty\right) + o\left(\left\|x^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right) \\ &= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* \left(\left(F_n'(x_n^k) + F'(x^\infty) - F_n'(x_n^k)\right)\left(x_n^k - x^\infty\right)\right. \\ &+ \left. o\left(\left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right), \end{aligned}$$

alors, il existe $c > 0$ tel que,

$$\begin{aligned} \left\|x_n^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \left\|(I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F_n'(x_n^k))(x_n^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}} + c\alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x_n^\infty) - F'(x_n^k)\right)\left(x_n^k - x_n^\infty\right)\right\|_{\mathcal{X}} \\ &+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x_n^k) - F_n'(x_n^k)\right)\left(x_n^k - x^\infty\right)\right\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

où, I désigne l'opérateur identité de $BL(\mathcal{X})$.

En utilisant le fait que F' soit $\delta-$Lipschitzienne, on obtient , pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\|x_n^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \left\|I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F'(x_n^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} + \alpha_{n,k}\left(c + \delta\right) \left\|F_n'(x^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x_n^k) - F_n'(x_n^k)\right)\left(x_n^k - x^\infty\right)\right\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Pour $r \in \left]0, M\delta^{-1}\right[$, *on définis* $\Omega_r = \{x \in \Omega \,:\, \|x - x^{\infty}\|_{\mathcal{X}} < r\}$, *donc pour tout* $V \in \Omega_r$ *et pour tout* $u \in \mathcal{X}$,*on obtient*

$$\begin{aligned}\|F_n'(V)u\|_{\mathcal{X}} &= \|(F_n'(x^{\infty}) - (F_n'(x^{\infty}) - F_n'(x)))\,u\|_{\mathcal{X}}\\ &\geq \|F_n'(x^{\infty})u\|_{\mathcal{X}} - \|(F_n'(x^{\infty}) - F_n'(V))\,u\|_{\mathcal{X}}\\ &\geq (m - \delta\,\|x^{\infty} - V\|_{\mathcal{X}})\,\|u\|_{\mathcal{X}} \geq (m - \delta r)\,\|u\|_{\mathcal{X}}\,,\end{aligned}$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned}\|F_n'(V)u\|_{\mathcal{X}} &= \|(F_n'(x^{\infty}) - (F_n'(x^{\infty}) - F_n'(V)))\,u\|_{\mathcal{X}}\\ &\leq \|F_n'(x^{\infty})u\|_{\mathcal{X}} + \|(F_n'(x^{\infty}) - F_n'(V))\,u\|_{\mathcal{X}}\\ &\leq (\|F_n'(\zeta)\| + \delta r)\,\|u\|_{\mathcal{X}}\,.\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $x \in \Omega_r$, *on a la majoration suivante de* $F(x)$,

$$m - \delta r \leq \|F_n'(V)\| \leq \|F_n'(x^{\infty})\| + \delta r.$$

D'autre part, on a pour tout $k \geq 0$, $I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)$ *est un opérateur autoadjoint, alors*

$$\begin{aligned}\left\|I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)\right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|< \left(I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)\right)u, u >_{\mathcal{X}}\right|\\ &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|1 - \alpha_{n,k}\left\|F_n'(x_n^k)u\right\|_{\mathcal{X}}^2\right|.\end{aligned}$$

Mais, pour $\|u\|_{\mathcal{X}} = 1$,

$$\alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)u \right\|_{\mathcal{X}}^2 > \frac{1}{2},$$

donc, si $x_n^k \in \Omega_r$, *alors*

$$\begin{aligned} \left\| I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F_n'(x_n^k) \right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1} \left(1 - \alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)u \right\|_{\mathcal{X}}^2 \right) \\ &\leq \left(1 - \beta \left(m - \delta r \right)^2 \right) < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En outre, nous observons qu'il existe n_0 *de sorte que, pour tout* $n \geq n_0$, *il existe* $R > 0$ *et* $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$, *pour tout* $V \in B(x^\infty, R)$

$$||F'(V) - F_n'(V)|| \leq \delta_2 \left(\alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)^* \right\| \right)^{-1},$$

ce qui implique que,

$$\text{pour tout } n \geq n_0 \ , \ \alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x_n^k) - F_n'(x_n^k) \right) (x_n^k - x^\infty) \right\|_{\mathcal{X}} \leq \delta_2 ||x_n^k - x^\infty|| \ ,$$

Sachant que Ω *est un ouvert, alors il existe* $\kappa > 0$

tel que,

$$\Omega_\kappa = \{ x \in X \ : \ \|x - x^\infty\|_{\mathcal{X}} < \kappa \} \subset \Omega.$$

on pose $\eta = \dfrac{m - \delta r}{c + \delta}$. *par conséquent si on prend* $x^0 \in \Omega_r$ *tel que*

$$\left\| x^0 - x^\infty \right\|_{\mathcal{X}} < \min(\eta^{-1} \beta \left(m - \delta r \right)^2, \kappa),$$

alors, pour tout $k \geq 1$,$n \geq 1$, $x_n^k \in \Omega_r \cap \Omega_\kappa$, $\left\{x_n^k\right\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et*

$$\eta \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} \leq w_k,$$

où, $\{w_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ *est défini comme le lemme précédent avec* $\lambda = \left(1 - \beta\left(m - \delta r\right)^2 + \delta_2\right)$ *et* $\mu = \eta \left\|x^0 - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} + \lambda$.

4.1.2 Option B

Pour l'option B, nous proposons les hypothèses suivantes

$$(H_B) = \begin{cases} 1) - F_n'(.) : \mathcal{X} \longrightarrow BL(\mathcal{X}) \text{ is } \delta - \text{lipschitzienne sur } \Omega, \\ 2) - \exists\ m > 0, \forall u \in \mathcal{X}, \left\|F_n'(x^\infty)u\right\|_{\mathcal{X}} \geq m \left\|u\right\|_{\mathcal{X}}, \\ 3) - \lim_{n\to+\infty} ||F'(x^\infty) - F_n'(x^\infty)|| = 0. \end{cases}$$

Théorème 4.1.2 *Soit* $\left\{x_n^k\right\}_{k\in\mathrm{N}} \subset \mathcal{X}$ *une suite de Finit Rank Newton-Star définie par*

$$\begin{cases} x^0 \text{ choisis dans } \Omega, \\ x_n^{k+1} = x_n^k - \alpha_{n,k}(F_n'(x_n^k))^* F(x_n^k),\ k \geq 0,\ n \geq 1, (\alpha_{n,k})_{\in\mathrm{N}} \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

— $\exists\ \alpha, \beta > 0$ *, tel que* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)\right\|^2 \leq \alpha$ *, et* $\alpha_{n,k} \geq \beta > 0$ $\forall k \geq 0, n \geq 1$

— *les hypothèses* (H_B) *sont vérifiées ,*

alors, il existe $C > 0$ *tel que,*

$$\left\|x^0 - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} < C \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Démonstration 4.1.2 *On a, pour tout* $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
x_n^{k+1} - x^\infty &= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x^k)^* \left(F(x_n^k) - F(x^\infty)\right) \\
&= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x^\infty)\left(x_n^k - x^\infty\right) + o\left(\left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right) \\
&= x_n^k - x^\infty - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* \left(\left(F'(x_n^k) + F'(x^\infty) - F'(x_n^k)\right)\left(x_n^k - x^\infty\right)\right. \\
&+ \left. o\left(\left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\right),
\end{aligned}$$

Alors, il existe $c > 0$ *tel que,*

$$\begin{aligned}
\left\|x_n^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \left\|(I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F'(x_n^k))(x_n^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}} + c\alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 \\
&+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x^\infty) - F_n'(x^\infty)\right)(x_n^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}} \\
&+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F_n'(x^*) - F_n'(x_n^k)\right)(x_n^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

où, I *désigne l'opérateur identité de* $BL(\mathcal{X})$*.*

En utilisant le fait que F_n' *soit* $\delta-$*Lipschitzienne, on obtient , pour tout* $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left\|x_n^{k+1} - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} &\leq \left\|I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F'(x_n^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}} + \alpha_{n,k}(c+\delta) \left\|F_n'(x^k)\right\| \left\|x_n^k - x^\infty\right\|_{\mathcal{X}}^2 \\
&+ \alpha_{n,k} \left\|F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x^\infty) - F_n'(x^\infty)\right)(x_n^k - x^\infty)\right\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

Pour $r \in \left]0, M\delta^{-1}\right[$, *on définit* $\Omega_r = \{x \in \Omega \ : \ \|x - x^\infty\|_{\mathcal{X}} < r\}$. *Pour* *tout* $V \in \Omega_r$ *et pour tout* $u \in \mathcal{X}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left\|F_n'(x)u\right\|_{\mathcal{X}} &= \left\|\left(F_n'(x^\infty) - \left(F_n'(x^\infty) - F_n'(x)\right)\right)u\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\geq \left\|F_n'(x^\infty)u\right\|_{\mathcal{X}} - \left\|\left(F_n'(x^\infty) - F_n'(V)\right)u\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\geq \left(m - \delta\left\|x^\infty - V\right\|_{\mathcal{X}}\right)\left\|u\right\|_{\mathcal{X}} \geq (m - \delta r)\left\|u\right\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned}
\left\|F_n'(V)u\right\|_{\mathcal{X}} &= \left\|\left(F_n'(x^\infty) - \left(F_n'(x^\infty) - F_n'(V)\right)\right)u\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \left\|F_n'(x^\infty)u\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|\left(F_n'(x^\infty) - F_n'(V)\right)u\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \left(\left\|F_n'(x^\infty)\right\| + \delta r\right)\left\|u\right\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $V \in \Omega_r$,

$$m - \delta r \leq \left\|F_n'(V)\right\| \leq \left\|F_n'(x^\infty)\right\| + \delta r.$$

D'autre part, on a pour tout $k \geq 0$, $I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)$ *est un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\begin{aligned}
\left\|I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)\right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|< \left(I - \alpha_{n,k}F_n'(x_n^k)^*F_n'(x_n^k)\right)u, u >_{\mathcal{X}}\right| \\
&= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1}\left|1 - \alpha_{n,k}\left\|F_n'(x_n^k)u\right\|_{\mathcal{X}}^2\right|.
\end{aligned}$$

Mais, pour $\|u\|_{\mathcal{X}} = 1$,

$$\alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)u \right\|_{\mathcal{X}}^2 \leq \alpha < 1.$$

Et, si $x_n^k \in \Omega_r$, *alors*

$$\begin{aligned} \left\| I - \alpha_{n,k} F_n'(x_n^k)^* F_n'(x_n^k) \right\| &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{X}}=1} \left(1 - \alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)u \right\|_{\mathcal{X}}^2 \right) \\ &\leq \left(1 - \beta \left(m - \delta r \right)^2 \right) < 1. \end{aligned}$$

En outre,nous proposons qu'il existe n_0 *tel que, pour tout* $n \geq n_0$, *il existe*

$0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$

$$||F'(x^\infty) - F_n'(x^\infty)|| \leq \delta_2 \left(\alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)^* \right\| \right)^{-1},$$

ce qui implique que,

$$\text{pour tout } n \geq n_0 \ , \ \alpha_{n,k} \left\| F_n'(x_n^k)^* \left(F'(x^\infty) - F_n'(x^\infty) \right) \left(x_n^k - x^\infty \right) \right\|_{\mathcal{X}} \leq \delta_2 ||x_n^k - x^\infty|| \ ,$$

sachant que Ω *est un ouvert, alors il existe* $\kappa > 0$

tel que,

$$\Omega_\kappa = \{ V \in X \ : \ \|V - x^\infty\|_{\mathcal{X}} < \kappa \} \subset \Omega.$$

On pose $\eta = \dfrac{m - \delta r}{c + \delta}$. *Si on prend* $x^0 \in \Omega_r$ *tel que*

$$\left\| x^0 - x^\infty \right\|_{\mathcal{X}} < \min(\eta^{-1} \beta \left(m - \delta r \right)^2, \kappa),$$

alors, pour tout $k \geq 1$,$n \geq 1$, $x_n^k \in \Omega_r \cap \Omega_\kappa$, $\left\{x_n^k\right\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie, et*

$$\eta \left\| x_n^k - x^\infty \right\|_{\mathcal{X}} \leq w_k,$$

où, $\{w_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ *est définie comme le lemme précédent* $\lambda = \left(1 - \beta\left(m - \delta r\right)^2\right)$ *et* $\mu = \eta \left\| x^0 - x^\infty \right\|_{\mathcal{X}} + \lambda$.

4.2 Application numérique

Dans cette section, nous cherchons à illustrer l'application de la méthode de Finit Rank Newton-Star, en utilisant la projection de Sloan définie dans ***chapitre 2****, pour cela, nous choisissons une équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce .*

On considères $\mathcal{X} = L^2([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace de toutes les fonctions réelles* L^2*-intégrables définies sur*$[0,1]$*, muni de la norme*

$$||f|| = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,\forall f \in \mathcal{X}.$$

On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$u(t) = \int_0^1 g(t,s)u^2(s)h(s)ds + f(t), \quad t \in [0,1], \tag{4.4}$$

avec le noyau de green g définie par

$$(s,t) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto g(s,t) := \begin{cases} s(1-t) & s \leq t \\ t(1-s) & t \leq s, \end{cases}$$

on pose

$$F[u](t) = u(t) - \int_0^1 g(t,s)u^2(s)h(s)ds - f(t), \tag{4.5}$$

La solution exacte de

$$F[u](t) = 0, \tag{4.6}$$

est $u(t) = t$,

pour

$$f(t) = -\frac{1}{8}t^5 - \frac{1}{8}(\frac{5}{6} - t)t^4 - \frac{1}{24}t + 5,$$

F *est Fréchet différentiable sur* $\mathcal{X}$ *avec*

$$F'[u]h(t) = h(t) - \int_0^1 g(t,s)u(s)h(s)ds, \tag{4.7}$$

pour la discrétisation, on considère une projection Tabouret désignée par

$t_j = (j-1)h,\ h = \frac{1}{n-1},\ 1 \leq j \leq n$, *posons*

$$\pi_n x(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j(t),$$

avec,

$$e_j(t) = \begin{cases} 1 & t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ 0 & ailleurs \end{cases},$$

et

$$x_j = \frac{1}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s)ds.$$

Le tableau (4.1) montre les résultats obtenue pour un vecteur de départ $u_0 = t - 1$, en faisant varier n et le nombre d'itérations k .

n	k=3	k=5	k=10
3	3.291473170936947e-04	1.559262749669278e-05	7.128841814392187e-07
5	4.959719502638146e-03	4.126735106469944e-04	2.633923415470847e-07
7	2.671533303968451e-02	4.142549102930514e-03	1.218608351867021e-05

Table 4.1 – Les erreurs obtenus en employant la suite de Finit rank Newton-Star

Le tableau (4.1) prouve que la suite de Newton-Star est efficace, elle converge parfaitement pour des différentes valeurs de n et de nombre d'itérations k.

Conclusion et Perspectives

Nous avons réussi à montrer qu'en remplaçant l'opérateur inverse par l'opérateur adjoint, et en reconduisant la méthode de Newton-Kantorovich moyennant certains nouvelles hypothèses, la suite Newton-Star reste convergente vers la solution exacte, et en se référant aux résultats numériques(tableau (3.1)), nous constatons que l'application de cette nouvelle technique dans la pratique et plus efficace et plus facile à appliquer, en particulier l'indépendance du choix du point de départ. Mais cette méthode reste non applicable sur la machine dans le cas d'un espace de dimension infini, ce qui nous amène à procéder à une nouvelle discrétisation en construisons une nouvelle suite, où l'opérateur adjoint est approché par un opérateur de rang fini, avec une projection de la suite de Newton-Star sur un espace de dimension fini, nous *avons montré avec deux options et en s'appuyant sur les résultats numérique, qu'à partir d'un certain rang la nouvelle suite obtenue reste convergente .*

Comme perspectives, nous allons procéder la généralisation de la méthode de Newton-Star, plus précisément, trouver une manière dans laquelle on définit la suite de Newton-Star dans un espace de Banach, de plus utiliser les méthodes d'optimisation pour obtenir la meilleur valeur des α_x

Bibliographie

[1] *M. Ahues,* A note on perturbed fixed slope iterations. *Applied mathematics letters 18.4, 375-380 , (2005).*

[2] *S. Amat, M.A. Hernàndez, N. Romero,* A modified Chebyshev's iterative method with at least sixth order of convergence*, Appl. Math. Comput., 206(1), 164-174 (2008) .*

[3] *S. Amat, M.A. Hernàndez, N. Romero,* Semilocal convergence of a sixth order iterative method for quadratic equations*, Appl. Numer. Math., 62 , 833-841,(2012).*

[4] *I. K. Argyros and A. A. Magrenan,*Extended convergence results for the newton-kantorovich iteration*, J. of Comp. and Appl. Math 286 ,no. 3, 54-67, (2015).*

[5] *I.K. Argyros, A unifying* local semi-local convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space*, J. Math. Anal. Appl, 298 (2),(2004).*

[6] *K.E.Atkinson,F.A.Potra,* Projection and Iterated projection method for nonlinear integral equations*,SIAM Journal on Numerical Analysis.24(6),1352-1373, (1987).*

[7] *K. E. Atkinson,* The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.*

[8] *N.Bouazila,H.Guebbai,W.Merchela.New linearization method for nonlinear problemsin Hilbert space 55(2), 167-175,(2021).*

[9] *F. Cianciaruso and E. De Pascale,* Estimates of majorizing sequences in the newton kantorovich method : A further improvement*, J. of Math. Anal. and Appl. 322 (2006), no. 1, 329 ?-335. Volumen 55, Numero 2, Ano 2021*

[10] *D.R.Dellwo,M.B.Friedman,*Accelerated projection and Iterated projection methods with applications to nonlinear integral equations*,SIAM Journal on Numerical Analysis.28(1),236-250,(1991).*

[11] *J. E. Dennis and R. B. Schnabel,* Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.*

[12] *P. Deuflhard and G. Heindl,* Affine invariant convergence theorems for Newton's method and extensions to related methods*, SIAM J. Numer. Anal., 16 , 1-10, (1979) .*

[13] *Z. K. Eshkuvatov, H. H. Hameed, and N. M. A. Nik Long,* One dimensional nonlinear integral operator with newton kantorovich method*, Journal of King Saud University - Science 28, no. 2, 172-177, (2016).*

[14] *A. J. Ezquerro, V. Hernandez, and M. Angel,* Newton's Method : an Updated Approach of Kantorovich's Theory*, Birkhauser, 2017.*

[15] *J.A. Ezquerro, M.A. Hernàndez, M.J. Rubio,* Secant-like methods for solving nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, J. Comput. Appl. Math., 115 nos. 1-2, 245-254, (2000).*

[16] *J. A. Ezquerro, M. A. Hernández-Verón and A. I. Velasco,* An analysis of the semilocal convergence for secant-like methods*, Applied. Mathematics. Computational., 266,883-892 ,(2015).*

[17] *W.B. Gragg, R.A. Tapia,* Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem*, SIAM J. Numer. Anal., 11 1, 10-13,(1974).*

[18] *L. Grammont, M. Ahues and F.D. D'Almeida,* For nonlinear infinite dimensional equations which to begin with : Linearization or discretization, *J. Integral Equ. Appl. 26 , 413-436 (2014).*

[19] *L.Grammont, P. B. Vasconcelos, M.Ahues,* A modified iterated projection method adapted to a nonlinear integral equation. Applied Mathematics and Computation*, 276, 432-441, (2016).*

[20] *M.A. Hernàndez, M.J. Rubio,* A uniparameteric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations*, J. Math. Anal. Appl., 275, 821-834, (2002).*

[21] *A. Khellaf, W. Merchela, and S. Benarab,*New numerical process solving nonlinear infinite-dimensional equations*, Computational Applied Mathematics 39 no. 93. (2020).*

[22] *L. V. Kantorovich and G. P. Akilov,*Functional Analysis *, Pergamon Press, 1982.*

[23] *L. V. Kantorovich,* On Newton' s method for functional equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 59 (1948) 1237-1240 .*

[24] *L. V. Kantorovich,* The majorant principle and Newton's method*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 76 ,17-20 ,(1951).*

[25] L. V. Kantorovich, V. I. Krilov, Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers Inc, 1958.*

[26] M. A. Krasnosel 'skii ,G. M. Vainikko,R. P.Zabreyko, Y. B. Ruticki, V.V. Stet'senko, Approximate solution of operator equations. *Springer Science and Business Media (2012) .*

[27] G.J. Miel, An updated version of the Kantorovich theorem for Newton's method*, Technical summary report, Mathematical research center, University of Wisconsin, Madison, 1980.*

[28] I. Moret, On a general iterative scheme for Newton-type methods*, Numer. Funct. Anal. Optimiz, 9 (11-12), 1115-1137, (1987-1988).*

[29] NAIR, M.T. Linear operator equations : Approximation and regularization. *Indian Institute of Technology Madras,India (2001).*

[30] F.A. Potra, On the convergence of a class of Newton-like methods, Iterative solution of nonlinear systems of equations *, Lecture notes in Mathematics 953, Springer Verlag, New York , 1982.*

[31] F.A. Potra, V. Ptàk, Nondiscrete Induction and Iterative methods *, Pitman Publishing Limited, London, 1984.*

*[32] I.H.Sloan,*Improvement by iteration for compact operator equations*,Mathematics of Computation.30 ,758-764, (1976).*

[33] J.F. Traub, Iterative methods for the solutions of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.*