

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des sciences et de la technologie
Département de Génie Electrotechnique et Automatique

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Génie Electrique

Présentée par

Boubidi Assia

Intitulée

**Contribution à l'analyse et au contrôle des
systèmes fractionnaires**

Soutenue le : 06/10/2022

Devant le Jury composé de :

Président	Pr. BOULOUH Messaoud	Université 8 mai 1945 Guelma
Encadreur	Pr. KECHIDA Sihem	Université 8 mai 1945 Guelma
Examineur	Pr. BOUDEN Toufik	Université de Jijel
Examineur	Pr. LACHOURI A. Rezzak	Université de Skikda

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Je remercie ALLAH le tout puissant pour la croyance, la santé, la patience, ... qu'il m'a donné tout le long de ma vie.

*Je tiens à remercier profondément mon encadreur de thèse, Dr. **Kechida Sihem**, Professeure à l'Université 8 mai 1945 -Guelma et directrice du Laboratoire d'Automatique et Informatique-Guelma (LAIG) pour sa disponibilité, aide continue, soutien permanent et sa patience pour mener ce travail de recherche à terme. Ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je vous suis très reconnaissante.*

*J'exprime ma gratitude envers Dr. **Boulouh Messaoud**, Professeur à l'Université 8 mai 1945 -Guelma, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

*Je tiens à remercier Dr. **Bouden Toufik**, Professeur à l'Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel, et Dr. **Lachouri A. Rezzak**, Professeur à l'Université 20 Aout 1955 -Skikda, qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon manuscrit de thèse.*

Plus personnellement, je remercie chaleureusement ma mère qui m'a encouragé et qui a entouré ma vie de tendresse et d'amour sans réserve.

Un merci, un des plus importants, à ma petite famille pour sa patience et son support. Merci de m'avoir encouragé à poursuivre mes études jusqu'au bout. Je suis très contente de partager cette réussite avec vous.

Je tiens à remercier également tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui travaillent pour que cette nation soit meilleure.

ملخص

تندرج هذه الأطروحة في إطار نظرية الحساب الكسري التي يكتسب استخدامها انتشارا متزايدا في مختلف المجالات ولا سيما في مجال تحكم الأنظمة الديناميكية حيث يتم استخدام المعادلات التفاضلية الكسرية في وصف هذه الأنظمة أو/و وحدة التحكم. تقدم هذه الأطروحة مساهمتين.

المساهمة الأولى تعرض دراسة تحليلية لحدود ومناطق الرنين الخاصة بالأنظمة الكسرية من النوع الثاني. حاليا، تم تعيين هذه الحدود والمناطق عدديا، ولم يتم مطلقاً مناقشتها رياضياً. في هذه الأطروحة، أدت الصياغة الرياضية لهذه الإشكالية إلى حل معادلة من الدرجة الثالثة بتطبيق الطريقة المثلثية باستعمال الظل للحصول أخيراً على العبارة التحليلية لحدود الرنين. بالإضافة إلى ذلك، تم تحديد مناطق الرنين وإثباتها رياضياً من خلال تطبيق إشارة المميز وقاعدة ديكرت للإشارات. النتائج التي تم الحصول عليها تم اختبارها على أمثلة عديدة وتطبيقها على مرشح كسري.

أما المساهمة الثانية فتقدم ضبطاً مثالياً لوحدي التحكم الكلاسيكي PID والكسري $PI^{\lambda}D^{\mu}$ للتحكم في سرعة محرك ذو تيار مستمر بدون فرش، باستخدام التحسين أحادي الهدف ومتعدد الأهداف. تم ضبط معاملات وحدات التحكم باستخدام خوارزمية الحوت الأحذب في نسختها أحادية الهدف WOA ونسختها متعددة الأهداف MOWOA. لمقارنة أداء وحدات التحكم المختلفة، تمت محاكاة وتحليل كل من استجابات الخطوات والتردد، استجابات التتبع واستجابات اضطرابات الحمل. أظهرت نتائج المحاكاة أن وحدة التحكم الكسري $PI^{\lambda}D^{\mu}$ المضبوطة بواسطة خوارزمية MOWOA تحقق أسرع استجابة دون أي تجاوز مع قدرة تتبع جيدة ورفض جيد لاضطراب الشحن.

الكلمات المفتاحية

حساب كسري، نظام كسري، وحدة تحكم كسري، خوارزمية تحسين.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie du calcul fractionnaire où son utilisation gagne de plus en plus de popularité dans divers domaines, notamment dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le contrôleur sont décrits par des équations différentielles fractionnaires. A travers cette thèse, deux contributions ont été présentées.

La première contribution offre une étude analytique des limites et des régions de résonance des systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type. Dans la littérature, ces limites et régions ont été déterminées numériquement, mais elles n'ont jamais été discutées mathématiquement. Dans cette thèse, la formulation mathématique de cette problématique a conduit à la résolution d'une équation cubique en appliquant la méthode trigonométrique en tangente pour aboutir finalement à l'expression analytique des limites de résonance. De plus, les régions de résonance ont été déterminées et prouvées mathématiquement en appliquant le signe du discriminant et la règle des signes de Descartes. Les résultats trouvés ont été testés à travers des exemples numériques et appliqués à un filtre d'ordre fractionnaire.

La deuxième contribution présente un réglage optimal du contrôleur classique PID et du contrôleur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ pour le contrôle de la vitesse d'un moteur à courant continu sans balais, en utilisant l'optimisation mono- et multi-objectif. Les paramètres des contrôleurs ont été synthétisés via l'algorithme des baleines à bosse dans sa version mono-objectif WOA (Whale Optimization Algorithm) et sa version multi-objectif MOWOA (Multi-Objective Whale Optimization Algorithm). Pour la comparaison des performances des différents correcteurs, les réponses indicielles et fréquentielles, les réponses de suivi et les réponses aux perturbations de charge ont été toutes simulées et analysées. Les résultats de simulation ont montré que le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ optimisé par l'algorithme MOWOA fournit la réponse la plus rapide sans aucun dépassement avec une bonne capacité de suivi et un bon rejet des perturbations de charge.

Mots Clés

Calcul fractionnaire, Système d'ordre fractionnaire, correcteur d'ordre fractionnaire, algorithme d'optimisation.

Abstract

This thesis is part of the theory of fractional calculus where its use is gaining more and more popularity in various fields, especially in the control of dynamic systems where the system to be controlled and/or the controller are described by fractional differential equations. Through this thesis, two contributions have been presented.

The first contribution offers an analytical study of the resonance limits and regions for commensurate fractional order systems of the second kind. In literature, these limits and regions have been determined numerically, but they have never been discussed mathematically. In this thesis, the mathematical formulation of this problem led to the resolution of a cubic equation by applying the tangent trigonometric method to get finally the analytical expression of the resonance limits. In addition, the resonance regions have been determined and proved mathematically by applying the sign of discriminant and Descartes' rule of signs. The results found were tested through numerical examples and applied to a fractional order filter.

The second contribution presents an optimal tuning of the classical controller PID and of the fractional order controller $PI^\lambda D^\mu$ to control the speed of a brushless DC motor, using mono- and multi-objective optimization. The controller parameters were synthesized using the humpback whale algorithm in its single-objective version WOA (Whale Optimization Algorithm) and its multi-objective version MOWOA (Multi-Objective Whale Optimization Algorithm). To compare the performance of different controllers, step and frequency responses, tracking responses and load disturbance responses were all simulated and analyzed. The simulation results showed that the $PI^\lambda D^\mu$ corrector optimized by the MOWOA algorithm provides the fastest response without any overshoot with good tracking ability and good load disturbance rejection.

Keywords

Fractional calculus, fractional order system, fractional order controller, optimization algorithm.

Liste des figures

1.1.	Tracé de la fonction $\Gamma(z)$	9
1.2.	Tracé de la fonction $E_{\alpha,\beta}(z)$ pour différentes valeurs de α et β	10
1.3.	Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel.....	19
1.4.	Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre fractionnaire complexe	21
1.5.	Réponse impulsionnelle du dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de α	22
1.6.	Réponse indicielle du dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de α	23
1.7.	Evaluation Numérique de ${}_0D_t^\alpha f(t)$ par l'approximation de Grunwald-Letnikov de quelques fonctions pour différentes valeurs de α	25
1.8.	Facteur d'oubli $h(10 - \tau)$ pour différentes valeurs de α	26
1.9.	Diagrammes de Bode de $s^{0.5}$ approximés par la méthode d'Oustaloup sur $[0.001;1000]$ (rad/s) pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation N	32
1.10.	Diagrammes de Bode de $s^{-0.5}$ approximés par la méthode d'Oustaloup sur $[0.001;1000]$ (rad/s) pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation N	33
1.11.	Quelques réponses de $s^{-\alpha}$ ($-1 \leq \alpha \leq 1$) approximées par la méthode d'Oustaloup avec un ordre d'approximation 5 sur l'intervalle $[0.001;1000]$ (rad/s).....	34
2.1.	Exemple d'illustration en thermique d'un phénomène de diffusion dans un milieu semi-infini.....	37
2.2.	Cellule électrolytique	39
2.3.	Circuit équivalent de Randles	40
2.4.	Circuit équivalent de Karunathilaka	40
2.5.	Régions de stabilité : un système est stable ssi ses pôles en sv sont à l'intérieur du domaine grisé	46
2.6.	Diagramme de Bode de F_1 définie par (2.54).....	49
2.7.	Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (2.55) dans le plan (v, ξ) selon [Mal11]	54
3.1.	Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (3.1) dans le plan (v, ξ) selon [Mal11]	57
3.2.	Solution en y de l'équation $D = 0$	61

3.3. Solution positive en y de l'équation $D = 0$	62
3.4. Solution en ξ de l'équation $D = 0$	62
3.5. Signes du discriminant D dans le plan (v, y)	65
3.6. Signes du discriminant D dans le plan (v, y) pour $y \geq 0$	65
3.7. Signes du discriminant D dans le plan (v, ξ)	66
3.8. Division du plan (v, ξ) selon les signes des coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$	67
3.9. Division du plan (v, ξ) selon les signes de D et des coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$	67
3.10. Division du plan (v, ξ) selon le nombre et le signe des racines de (3.3).....	72
3.11. Racines de (3.3) pour les différentes régions et lignes du plan (v, ξ) selon la division de la figure (3.10)	73
3.12. Division du plan (v, ξ) selon le nombre des racines simples et strictement positives de (3.3).....	74
3.13. Division du plan (v, ξ) selon le nombre des racines simples et strictement positives de (3.3) des systèmes stables	74
3.14. Régions de résonance du modèle non entier (3.1) dans le plan (v, ξ) selon [Bou21]	75
3.15. Diagrammes de Bode pour les différentes régions de résonance	77
3.16. Diagrammes de Bode pour les limites de résonance (ligne violet et bleu)	79
3.17. Sallen-Key FLPF	80
4.1. Système de la commande classique	85
4.2. Structure du correcteur PID	86
4.3. Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	87
4.4. Le correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ dans le plan (λ, μ)	87
4.5. Diagramme asymptotique du correcteur.....	88
4.6. Réponse indicielle du système en BO.....	89
4.7. Effet du paramètre k_p sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.....	90
4.8. Effet du paramètre k_i sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.....	91
4.9. Effet du paramètre k_d sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.....	92
4.10. Effet du paramètre λ sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.....	93
4.11. Effet du paramètre μ sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.....	94

5.1. Optimum global vs optimum local	97
5.2. Espace de décision et espace des objectifs d'un problème d'optimisation multi-objectif...	99
5.3. Visualisation, dans l'espace des objectifs, des relations de dominance possibles par rapport à la solution A	100
5.4. Front de Pareto pour un problème bi-objectif.....	101
5.5. Approches de résolution d'un problème multi-objectif de point de vue « décideur ».....	102
5.6. Approches de résolution d'un problème multi-objectif de point de vue « concepteur »...	103
5.7. Méthode d'agrégation	104
5.8. Méthode du but à atteindre	105
5.9. Méthode de ε -contrainte	105
5.10. Méthode lexicographique	107
5.11. Sélection parallèle dans l'algorithme VEGA.....	108
5.12. Intensification et diversification dans l'approche de Pareto [Joz04]	109
5.13. Méthodes d'élitisme : sans et avec archive.....	110
5.14. Classification des algorithmes métaheuristiques	112
5.15. Méthode de chasse par filet à bulles	114
5.16. Organigramme de l'algorithme des WOA.....	115
5.17. Phase d'exploration (X^* est un agent de recherche choisi aléatoirement)	116
5.18. Mécanisme d'encerclement par rétrécissement (X^* est le meilleur agent)	117
5.19. Mécanisme d'attaque au filet à bulles (X^* est le meilleur agent)	118
5.20. Organigramme de l'algorithme MOWOA	120
5.21. Mise à jour de la grille adaptative selon que la nouvelle solution est : (a) à l'intérieur ou (b) à l'extérieur de la grille	122
5.22. Grille adaptative au cours des itérations $t_k > t_j > t_i$	123
5.23. Mise à jour de la grille selon la fonction objectif f_k	124
5.24. Limites de la grille dans un espace bi-objectif	124
5.25. Mécanisme de suppression lorsque l'archive est pleine.	125
5.26. Mécanisme de sélection du guide.	126
6.1. Schéma bloc du système de contrôle du moteur BLDC	128
6.2. Réponses indicielles des modèles d'ordre entier et fractionnaire sur l'intervalle [0;5].....	129
6.3. Réponses indicielles des modèles d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sur l'intervalle [0;40].....	130
6.4. Réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID en utilisant l'optimisation mono-objectif	132

6.5. Réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID en utilisant l'optimisation multi-objectif	135
6.6. Décideur flou	136
6.7. Degrés d'appartenance des entrées normalisées et de la sortie	137
6.8. Convergence de la fonction objectif (ITAE) pour les contrôleurs PID/FOPID	139
6.9. Box-plots de la fonction objectif (ITAE) des contrôleurs PID/FOPID pour 10 exécutions indépendantes.....	140
6.10. Front de Pareto optimisé pour le contrôleur : (a) PID, (b) FOPID	141
6.11. Réponses du moteur avec les différents contrôleurs.....	142
6.12. Réponses du moteur avec les différents contrôleurs.....	143
6.13. Réponses du moteur à une référence multi-échelon	144
6.14. Diagrammes de Bode pour le système (moteur-contrôleur) en boucle ouverte	145
6.15. Diagrammes de Bode pour le système (moteur-contrôleur) en boucle fermé	145
6.16. Réponses du moteur à une perturbation de charge de type échelon	146
6.17. Réponses du moteur à une perturbation de charge de type multi-échelon	147
B.1. Implémentation des entrées/sortie du décideur flou	164
B.2. Fonctions d'appartenance des entrées/sortie du décideur flou	166
B.3. Règles d'inférence du décideur flou	167
B.4. Application des règles d'inférence sur la solution du front Pareto N°53 pour le correcteur MOWOA-PID.....	172
B.5. Application des règles d'inférence sur la solution du front Pareto N°2 pour le correcteur MOWOA-FOPID.....	172

Liste des tableaux

1.1.	Transformée de Laplace de quelques fonctions.....	16
1.2.	Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles	23
1.3.	Méthodes d'approximation de l'opérateur s^α en temps discret.....	28
1.4.	Approximation de $s^{0.5}$ et $s^{-0.5}$ par la méthode d'Oustaloup.....	31
3.1.	Nombre des racines réelles d'une équation cubique.....	63
3.2.	Signe du discriminant D	64
3.3.	Signe de a	64
3.4.	Nombre et signe des racines de (3.3) pour chaque région de la figure (3.9)	68
3.5.	Nombre et signe des racines de (3.3) pour chaque ligne de la figure (3.9)	70
3.6.	Nombre et signe des racines de (3.3) avec les régions et les lignes correspondantes	71
3.7.	Nombre des racines simples et strictement positives de (3.3) avec les régions et les lignes correspondantes	72
3.8.	Exemples numériques sur les régions de résonance	76
3.9.	Exemples numériques sur les limites de résonance	78
6.1.	Règles de décision floue	138
6.2.	Paramètres des algorithmes WOA/MOWOA	138
6.3.	Paramètres des contrôleurs PID/FOPID optimisés par les algorithmes WOA/MOWOA	143
6.4.	Performances des réponses indicielles	143
6.5.	Performances des réponses fréquentielles	144
6.6.	Performances des réponses à une perturbation de charge de type échelon	146
A.1.	Nombre et nature des racines d'une équation cubique	160
B.1.	Résultats de simulation du décideur flou pour l'obtention des paramètres du contrôleur MOWOA-PID.....	167
B.2.	Résultats de simulation du décideur flou pour l'obtention des paramètres du contrôleur MOWOA-FOPID.....	169

Liste des symboles et abréviations

\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers relatifs
\mathcal{L}	Opérateur de Laplace.
\mathcal{L}^{-1}	Opérateur de Laplace inverse.
$\mathcal{Re}(\cdot)$	Partie réelle.
$\mathcal{Im}(\cdot)$	Partie imaginaire.
$\mathcal{Arg}(\cdot)$	Argument.
${}_{t_0}D_t^\alpha f(t)$	Dérivée d'ordre α de la fonction f de borne inférieure t_0 .
${}_{t_0}I_t^\alpha f(t)$	Intégrale d'ordre α de la fonction f de borne inférieure t_0 .
ITAE	Integrated Time multiplied Absolute Error.
SSE	Sum of Squared Error.
MF	Membership Function.
PID	Proportionnal-Integral-Derivative/Proportionel-Intégral-Déivée.
FOPID	Fractional Order PID.
WOA	Whale Optimization Algorithm.
MOWOA	MutiObjective Whale Optimization Algorithm.
FPA	Flower Pollination Algorithm.
FLPF	Fractional Low Pass Filter.

Table des matières

ملخص	ii
Résumé	ii
Abstract	iv
Liste des figures	v
Liste des tableaux	ix
Liste des symboles et abréviations	x
Introduction générale.....	1
Partie I : Contribution à l'analyse des systèmes fractionnaires.	
Chapitre 1 : Introduction au calcul fractionnaire.....	7
1.1 Introduction.....	7
1.2 Historique.....	7
1.3 Théorie du calcul fractionnaire	8
1.3.1 Fonctions spéciales du calcul fractionnaire	8
1.3.1.1 La fonction Gamma	9
1.3.1.2 La fonction Mittag-Leffler.....	9
1.3.2 Opérateur d'ordre fractionnaire	10
1.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville (RL)	11
1.3.2.2 Définition de Caputo	11
1.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	12
1.3.3 Propriétés principales.....	13
1.3.4 Méthodes opérationnelles fractionnaires	14
1.3.4.1 Eléments de la transformée de Laplace	14

1.3.4.2	Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle	15
1.3.4.3	Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle	15
1.3.5	Caractéristiques fréquentielles d'un opérateur fractionnaire	17
1.3.5.1	Définition de l'espace bi-complexe	18
1.3.5.2	Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel	18
1.3.5.3	Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire complexe	19
1.3.6	Caractéristiques temporelles d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel	22
1.3.6.1	Réponse impulsionnelle	22
1.3.6.2	Réponse indicielle	22
1.3.7	Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles	23
1.3.8	Evaluation Numérique des opérateurs fractionnaires	24
1.3.9	Interprétation géométrique des opérateurs fractionnaires.....	26
1.4	Approximations des opérateurs fractionnaires	27
1.4.1	Approximation par un modèle rationnel à temps discret	27
1.4.2	Approximation par un modèle rationnel à temps continu	28
1.4.2.1	Méthode des fractions en chaîne continues.....	28
1.4.2.2	Méthode de Matsuda.....	29
1.4.2.3	Méthode de Carlson	30
1.4.2.4	Méthode d'AbdelAty	30
1.4.2.5	Méthode d'Oustaloup.....	30
1.5	Conclusion.....	35
	Chapitre 2 : Les systèmes fractionnaires - théorie et applications	36
2.1	Introduction	36
2.2	Applications des systèmes fractionnaires.....	36
2.2.1	Thermique : Diffusion et équation de la chaleur	37
2.2.2	Électricité.....	38

2.2.3 Electrochimie	39
2.2.4 Rhéologie	40
2.2.5 Automatique	41
2.3 Représentation des systèmes fractionnaires	42
2.3.1 Equation différentielle	42
2.3.2 Systèmes fractionnaires commensurables et non commensurables.....	42
2.3.3 Fonction de transfert	43
2.3.3.1 Forme modale factorisée	43
2.3.3.2 Forme modale développée	44
2.4 Stabilité des systèmes non entiers	44
2.5 Fonctions de transfert fractionnaires élémentaires.....	46
2.5.1 Fonction de transfert élémentaire du premier type [Mal11]	47
2.5.1.1 Stabilité et résonance	47
2.5.1.2 Exemple	48
2.5.2 Fonction de transfert élémentaire du second type [Mal11]	49
2.5.2.1 Stabilité	50
2.5.2.2 Résonance	52
2.6 Conclusion.....	54
Chapitre 3 : Etude analytique des limites et régions de résonance des systèmes fractionnaires du second type.....	55
3.1 Introduction	55
3.2 Problématique	56
3.3 Etude analytique des régions de résonance [Bou21].....	57
3.4 Régions de résonance et exemples numériques	75
3.5 Application à un filtre FLPE	79
3.6 Conclusion.....	81
Partie II : Contribution au contrôle fractionnaire.	
Chapitre 4 : Le contrôle fractionnaire	83

4.1	Introduction	83
4.2	La commande fractionnaire : un aperçu	84
4.3	Le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	85
4.3.1	Le correcteur PID	85
4.3.2	Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$	86
4.4	Conclusion.....	95
	Chapitre 5 : L'optimisation mono- et multi-objectif	96
5.1	Introduction	96
5.2	Optimisation mono-objectif	97
5.3	Problème d'optimisation multi-objectif	98
5.3.1	Définition	98
5.3.2	Optimalité multi-objectif au sens de Pareto.....	99
5.3.2.1	La notion de dominance	100
5.3.2.2	Ensemble de Pareto et front de Pareto	100
5.3.3	Approches de résolution	101
5.3.3.1	Approches non Pareto	103
5.3.3.1.1	Approches scalaires	103
5.3.3.1.2	Approches non-scalaires et non-Pareto	106
5.3.3.2	Approches Pareto	108
5.4	Méthodes d'optimisation : les métaheuristiques	111
5.5	Algorithme des baleines à bosses (WOA et MOWOA).....	113
5.5.1	Algorithme des baleines à bosses (WOA)	113
5.5.2	Algorithme multi-objectif des baleines à bosses (MOWOA).....	119
5.5.2.1	Organigramme	119
5.5.2.2	Mise à jour de l'archive	121
5.5.2.3	Sélection du guide	125
5.6	Conclusion.....	126

Chapitre 6 : Réglage des contrôleurs PID/FOPID	127
6.1 Introduction	127
6.2 Présentation	128
6.3 Le modèle du moteur BLDC	129
6.4 Réglage des contrôleurs PID/FOPID par optimisation mono-objectif	130
6.5 Réglage des contrôleurs PID/FOPID par optimisation multi-objectif	133
6.6 Résultats de simulation	138
6.7 Conclusion.....	147
Conclusion générale et perspectives	148
Bibliographie	150
Annexe A : Résolution d’une équation cubique	160
Annexe B : Résultats du décideur flou	164

Introduction générale

Contexte

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques.

L'une des théories qui connaissent actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie grâce au progrès informatique, est celle du *Calcul fractionnaire* dont les premières prémices datent de plus de trois siècles. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée. De plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre.

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau. Depuis seulement un peu plus de quarante années, elle a été objet de conférences spécialisées dont le mérite de la première conférence est attribué à B. Ross qui l'a organisée à l'université de New Haven en juin 1974 sous le titre "Le calcul fractionnaire et ses applications". Pour la première étude, un autre mérite est attribué à K. B. Oldham et J. Spanier [Old74] qui ont publié un livre en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968 et consacré à la présentation des méthodes et applications du calcul fractionnaire en physique et en ingénierie.

Dans les dernières décennies, le concept du calcul fractionnaire a changé énormément la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la « nature » autour de nous. Beaucoup de chercheurs ont affirmé que l'usage des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires est souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères (gomme, caoutchouc, ...) [Pfi04]. La dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour

la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et processus puisque, en effet, la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier. De plus, plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que le comportement de nombreux systèmes physiques peut être correctement décrit par des équations différentielles à dérivées non entières. C'est le cas de certains systèmes thermiques [Abi12], électrochimiques [Kar81a, Kar81b], viscoélastiques [Bag79, Bag86], etc. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont, à cet effet, été développés [Coi00].

La raison principale de l'usage des modèles d'ordre entier était l'absence des méthodes de résolution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier. Actuellement, il existe un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire par des modèles entiers discrets [Tab71, Ala94, Vin00, Che02a] et des modèles entiers continus [Mai06, Mai08, Mai11, Mat93, Car64, Abd18, Ous00]. Ces méthodes ont été employées dans diverses applications, notamment en théorie de circuits électriques (fractances), en théorie de la mécanique, en théorie du contrôle (nouveaux contrôleurs et modèles de systèmes d'ordre fractionnaires), etc. Il est important de comprendre que le mot « systèmes d'ordre fractionnaire signifie tout simplement systèmes qui sont mieux décrits par des modèles mathématiques d'ordre non entier », le système lui-même n'est pas fractionnaire au vrai sens du terme, c'est le modèle qui l'est [Ndo11].

Les travaux réalisés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la théorie du calcul fractionnaire discutant deux contributions. Par conséquent, le manuscrit de cette thèse est organisé en deux parties.

Objectifs et Organisation

Partie I : Contribution à l'analyse des systèmes fractionnaires

Comme dans les systèmes conventionnels, les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable sont deux types : du premier et du deuxième type. Ces deux types ont été étudiés récemment dans [Mal11] de point de vue stabilité et résonance. Pour le premier type, la condition de stabilité et la limite de résonance ont été déterminées analytiquement. Cependant, pour le deuxième type, la condition de stabilité a été déterminée analytiquement par contre les limites et les régions de résonance ont été spécifiées numériquement.

Dans la partie I, nous présentons une première contribution de cette thèse qui offre une étude analytique des limites et des régions de résonance des systèmes fractionnaires du deuxième type [Bou21].

Cette partie est organisée en trois chapitres comme suit :

Le chapitre 1 rappelle l'histoire du calcul fractionnaire puis présente une description exhaustive de la théorie de la dérivation fractionnaire tout en passant par les différentes définitions. Les transformées de Laplace des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire y sont données. Une évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles et une interprétation géométrique de la dérivée fractionnaire sont données grâce à l'utilisation d'une approximation de la définition de Grunwald-Letnikov. Enfin les méthodes d'approximation des opérateurs fractionnaires en temps discret et continu sont présentées dont nous avons mis l'accent sur la méthode d'Oustaloup avec plus de détail.

Le chapitre 2 présente tout d'abord quelques exemples d'applications des systèmes fractionnaires, notamment en thermique dans l'équation de la chaleur, en électricité dans l'impédance fractionnaire d'un circuit type intégrateur fractionnaire, en rhéologie dans l'exemple du comportement "contrainte-déformation" d'un solide et en électrochimie dans la modélisation d'une cellule électrolytique et en automatique avec la commande CRONE. S'ensuit l'étude de la stabilité et résonance des fonctions de transfert fractionnaires élémentaires du premier et du deuxième type [Mal11].

Le chapitre 3 constitue une première contribution de cette thèse où les limites et les régions de résonance des systèmes fractionnaires du deuxième type ont été déterminées analytiquement. Ce chapitre présente tout d'abord la formulation mathématique du problème des limites de résonance qui a conduit à une équation cubique obtenue en mettant la première dérivée de l'amplitude de la réponse fréquentielle du système égale à zéro. Puis, une étude mathématique profonde est menée sur cette équation pour conduire finalement à l'expression analytique des limites de résonance. De plus, afin de donner une preuve mathématique des régions de résonance, la règle des signes de Descartes a été appliquée. Pour clôturer, les résultats trouvés ont été testés sur des exemples numériques puis appliqués sur un filtre fractionnaire.

Partie II

Dans le but d'améliorer la qualité des performances et la robustesse des systèmes asservis, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'application du calcul d'ordre fractionnaire dans le

domaine de la commande conduisant à la naissance du domaine de la commande d'ordre fractionnaire où le système à contrôler et/ou le régulateur sont régis par des équations différentielles fractionnaires. L'idée d'utiliser des contrôleurs d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes revient à Oustaloup, qui a développé le contrôleur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), décrit dans son ouvrage [Ous91] avec des applications dans divers domaines. Oustaloup avait notamment démontré l'avantage du régulateur CRONE par rapport au PID classique. Une autre structure de commande d'ordre fractionnaire est le régulateur TID (Tilt-Integral-Derivator) [Lur94] qui a une structure semblable à un correcteur PID classique avec la composante proportionnelle remplacée par un intégrateur d'ordre fractionnaire. Podlubny [Pod99b] a proposé plus tard le régulateur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ (FOPID : Fractional Order PID) utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier. Aussi le correcteur à avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, a été proposé dans [Rayn00, Mon05], qui est une extension du correcteur à avance-retard de phase classique.

Dans la partie II, on s'intéresse plus particulièrement à la commande d'ordre fractionnaire régie par le régulateur $PI^\lambda D^\mu$. Pour atteindre les performances souhaitées du système bouclé en termes de rapidité, précision et stabilité, un réglage des paramètres du correcteur est nécessaire.

L'objectif de cette partie est de fournir un réglage optimal du régulateur FOPID en utilisant l'optimisation mono- et multi-objectif. Le régulateur FOPID est comparé avec le régulateur PID classique pour montrer sa supériorité [Bou22].

Cette partie est organisée en trois chapitres comme suit :

Le chapitre 4 dresse un aperçu exhaustif des principales structures de la commande d'ordre fractionnaire. Puis, il présente le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ avec une analyse approfondie dans le domaine fréquentiel de l'effet de chacun de ses paramètres sur la réponse du système bouclé.

Le chapitre 5 présente les concepts de base de l'optimisation mono- et multi-objectif avec un tour d'horizon sur les méthodes de résolution métaheuristiques. Nous nous sommes intéressés à l'optimisation par les métaheuristiques à population, plus particulièrement à l'algorithme des baleines à bosse dans sa version mono-objectif WOA (Whale Optimisation Algorithm) et à sa version multi-objectif MOWOA (Multi-Objective Whale Optimisation Algorithm).

Le chapitre 6 présente un réglage optimal des paramètres des contrôleurs PID/FOPID pour le contrôle de la vitesse d'un moteur à courant continu sans balais (BLDC : Brushless Direct Current). Les paramètres des contrôleurs ont été réglés via les algorithmes d'optimisation mono-

et multi-objectif qui sont respectivement WOA et MOWOA. Pour la comparaison des différents contrôleurs, les réponses indicielles, les réponses fréquentielles et les réponses de suivi de consignes et de rejet de perturbations de charges ont toutes été réalisées et analysées.

Enfin, une *conclusion générale* résume les principaux résultats de cette thèse et suggère des perspectives futures de ces travaux de recherche.

Les résultats obtenus ont fait l'objet des communications et publications suivantes :

1. **A. Boubidi**, S. Kechida and H. Tebbikh (2021), "Analytical study of resonance regions for second kind commensurate fractional systems", Discrete and Continuous, Dynamical Systems - Series B, 26(7): 3579-3594, <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2020247>.
2. **A. Boubidi** et S. Kechida, "Les algorithmes métaheuristiques", Journée Doctorale 2018 (JD'18), LAIG, 13 Décembre 2018, Guelma, Algérie.
3. **A. Boubidi** et S. Kechida, "Optimisation d'un contrôleur PID par les métaheuristiques : Application à la commande d'un moteur à CC", Journées sur les Signaux et Systèmes (JSS'19), LAIG, 13 Novembre 2019, Guelma, Algérie.

Travaux soumis

1. **A. Boubidi** and S. Kechida (soumis 2022), "Comparative study of integer- and fractional-order PID controller tuning for BLDC motor speed using single- and multi-objective optimization".
2. **A. Boubidi**, S. Kechida and S. Hassainia (soumis 2022), "A New Version of Hybrid Grey Wolf Optimizer with Sine Cosine Algorithm (NGWOSCA) ".

Ces travaux ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Automatique et Informatique de Guelma (LAIG) en tant que :

1. Membre du Projet de Recherche Formation-Universitaire (PRFU) "Commande et Supervision des Systèmes Industriels", Université 8 Mai 1945 de Guelma, agréé en 2018 pour une durée de 4 ans. Réf : A01L08UN240120180001.
2. Membre du projet de Recherche Formation-Universitaire (PRFU) "Commande et consensus des systèmes dynamiques", Université 8 Mai 1945 de Guelma, agréé en 2021 pour une durée de 4 ans. Réf : A01L08UN240120210001.

Partie I

Contribution à l'analyse des systèmes fractionnaires

Chapitre 1

Introduction au calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Le calcul fractionnaire est connu comme une généralisation des dérivées et d'intégrales d'ordre entier. La principale raison de l'utilisation du calcul fractionnaire dans beaucoup de domaines de recherche est qu'il fournit un outil plus puissant pour décrire plusieurs phénomènes dans la nature. Au 19^e siècle et grâce aux contributions principales de Liouville, Grünwald, Letnikov et Riemann que toute une théorie complète, adaptée aux développements mathématiques modernes, a été formalisée.

Le but de ce chapitre est de présenter les éléments de base de la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuient le reste du manuscrit.

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons l'historique du calcul fractionnaire puis une description exhaustive de la théorie de la dérivation fractionnaire est présentée tout en passant par les différentes définitions de la dérivation fractionnaire. Une évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles et une interprétation géométrique et physique de la dérivée fractionnaire sont données grâce à l'utilisation d'une approximation de la définition de Grünwald-Letnikov.

Dans la deuxième partie, nous présentons quelques méthodes d'approximation des opérateurs fractionnaires en temps discret et continu dont nous mettons l'accent sur la méthode d'Oustaloup avec plus de détail.

1.2 Historique

Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, L'Hôpital a écrit à Leibniz en lui demandant des explications sur une notation particulière qu'il avait utilisée dans sa publication pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction :

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

La question était : serait-il quoi le résultat si $n = 1/2$. La réponse de Leibniz était : « un paradoxe apparent d'où nous aurons un jour des conséquences utiles ». Dans ces mots, le calcul fractionnaire est né.

Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), Grünwald (1867) et Letnikov (1868), etc. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée de plus. L'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière.

Pendant ces trois dernières décennies, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ses concepts dans différents domaines de l'ingénierie, la mécanique, l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, la modélisation, l'identification aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel et notamment la commande des processus, la mécatronique et la robotique. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer aux références [Pol99, Hil00, Kil06]. Les chercheurs ont démontré que le calcul fractionnaire peut traduire mieux la réalité de la nature car il ajoute une autre dimension pour mieux la comprendre et la décrire d'une manière appréciée.

Aujourd'hui, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines des sciences pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

1.3 Théorie du calcul fractionnaire

1.3.1 Fonctions spéciales du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions mathématiques utilisées en calcul fractionnaire telles que la fonction gamma qui est une généralisation de la factorielle aux nombres réels et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle très important dans la solution des équations différentielle d'ordre fractionnaire.

1.3.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est intrinsèquement liée au calcul non entier. C'est une généralisation du factoriel pour les nombres réels. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante [Eul38] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

Dans le cas où z est complexe la fonction Gamma converge si z est à partie réelle positive.

Quelques propriétés importantes de la fonction gamma sont données ci-dessous :

- ✓ Elle possède des pôles simples pour $z = 0, -1, -3, \dots$, cela signifie que la fonction Gamma tend vers l'infini à ces valeurs négatives donc discontinue à ces pôles.
- ✓ Une intégration par parties montre la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.2)$$

- ✓ La fonction de Gamma Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

La figure (1.1) montre le tracé de la fonction $\Gamma(z)$ pour z réel et tel que $-6 < z < 4$. A partir de cette figure, la fonction gamma est toujours positive lorsque z est positif. On note aussi que la fonction gamma est indéterminée pour tous les nombres entiers négatifs.

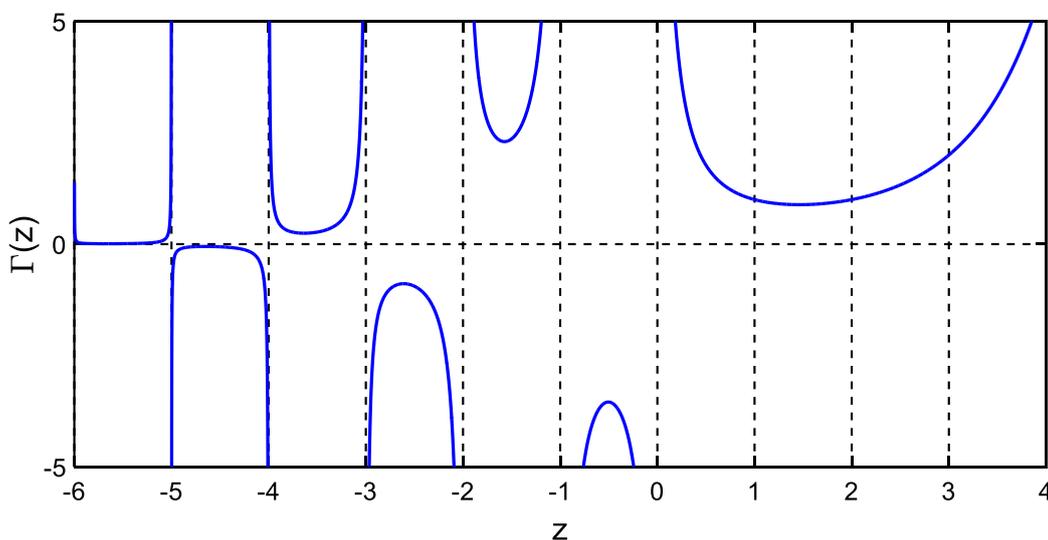


Fig. 1.1. Tracé de la fonction $\Gamma(z)$.

1.3.1.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [Mit03, Mit05] et désignée par la fonction suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (1.3)$$

La fonction exponentielle usuelle correspond à $\alpha = 1$. En effet :

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.4)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres possède également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction introduite par R.P. Agarwal en 1953 est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.5)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.3) car :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z), \quad (\alpha > 0) \quad (1.6)$$

Pour les équations différentielles d'ordre non entier, La fonction de Mittag-Leffler a le même rôle que la fonction exponentielle. La figure (1.2) ci-dessous montre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .

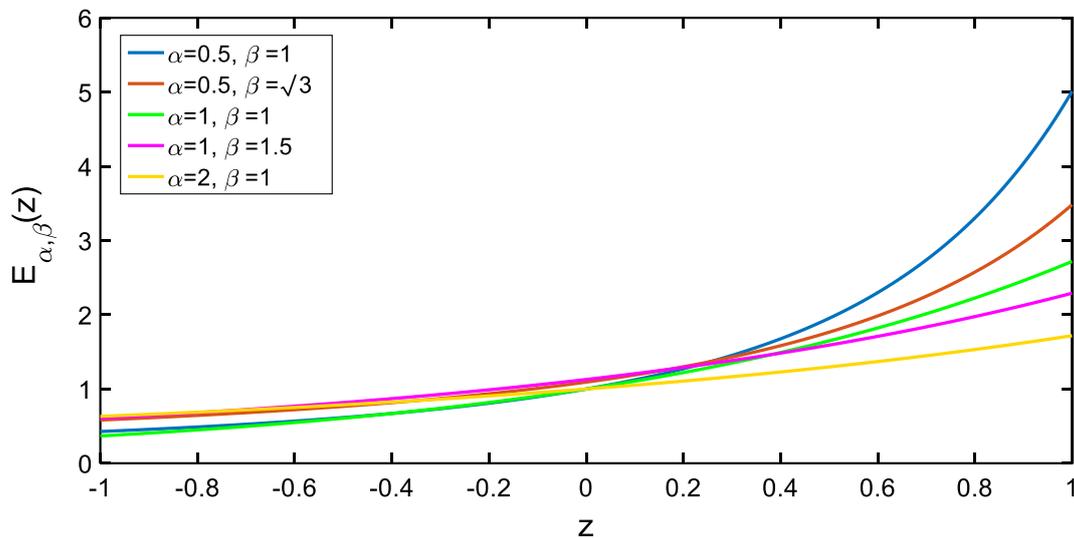


Fig. 1.2. Tracé de la fonction $E_{\alpha,\beta}(z)$ pour différentes valeurs de α et β .

1.3.2 Opérateur d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire est basé sur la généralisation de la différentiation et l'intégration à un ordre arbitraire, qui peut être rationnel, irrationnel voire complexe.

Cette généralisation a conduit à l'introduction de l'opérateur intégro-différentiel continu de base :

$${}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} & \mathcal{R}e(\alpha) > 0 \\ f(t) & \mathcal{R}e(\alpha) = 0 \\ I^\alpha f(t) & \mathcal{R}e(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où α est l'ordre de l'opération, généralement $\alpha \in \mathbb{R}$, t_0 et t sont les limites de l'opération.

Nombreuses sont les définitions de l'opérateur de dérivation fractionnaire, malheureusement toutes les définitions proposées ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus utilisées [Old74, Pod99a, Pod02].

1.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville (RL)

L'intégrale dite de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure t_0 est donnée par :

$${}_{t_0}^{RL}I_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.8)$$

Tandis que la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ est définie comme étant la dérivée d'ordre entier n de l'intégrale d'ordre non entier $(n - \alpha)$, soit :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_{t_0}^{RL}I_t^{n-\alpha} f(t) \right) \quad (1.9)$$

avec n est un nombre entier, sous la condition $(n - 1 < \alpha < n)$.

En utilisant la définition de l'intégrale (1.8), la dérivée d'ordre α de f s'écrit :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) \quad (1.10)$$

1.3.2.2 Définition de Caputo

De la même manière, Caputo décrit l'intégrale d'ordre fractionnaire par :

$${}_{t_0}^CI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.11)$$

Par contre, la dérivée d'ordre fractionnaire introduite par Caputo diffère de celle de Riemann-Liouville. Elle effectue la dérivation entière n fois de la fonction f avant d'appliquer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$, soit :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0} I_t^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (1.12)$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale (1.8), la dérivée d'ordre α de f s'écrit :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right) \quad (1.13)$$

Remarque 1.1 : La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo est exprimée par [Kwa06] :

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_{0+})^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=t_{0+}} \quad (1.14)$$

1.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est une généralisation de la définition de la dérivée d'ordre entier n à une dérivée d'ordre réel α où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler.

Soit la dérivée d'ordre 1 donnée par :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.15)$$

La dérivée d'ordre 2 conduit à :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (1.16)$$

Une première généralisation à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ est alors donnée par :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.17)$$

La généralisation de la définition de la dérivée (1.17) à des ordres de dérivation non entiers, donne :

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (1.18)$$

où $\lfloor . \rfloor$ est la partie réelle. La notation $\binom{\alpha}{k}$ désigne le binôme de *Newton* généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} \quad (1.19)$$

avec :

$$\binom{\alpha}{k} = 0 \text{ pour } \alpha - k = -1, -2, -3, \dots \quad (1.20)$$

Selon la valeur de α qui peut être positive ou négative, l'opérateur ${}_{t_0}D_t^\alpha$ correspond respectivement à une dérivation ou intégration.

1.3.3 Propriétés principales

Les principales propriétés d'un opérateur d'ordre fractionnaire sont :

- La dérivation d'ordre fractionnaire étant basée sur celle d'une intégration d'ordre entier. Elle a un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction nécessite la connaissance de f sur l'intervalle $[t_0, t]$, alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de f autour de t est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.
- La définition de Grünwald-Letnikov décrit l'unification des deux notions; l'intégral et la dérivée d'ordre fractionnaire [Mil93].
- Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}_{t_0}D_t^\alpha f(t)$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
- Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_{t_0}D_t^\alpha$ est l'opérateur identité, ainsi :

$${}_{t_0}D_t^0 f(t) = f(t) \quad (1.21)$$

- La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires :

$${}_{t_0}D_t^\alpha (\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) + \delta {}_{t_0}D_t^\alpha g(t) \quad (1.22)$$

avec γ et δ sont des nombres réels.

- La dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle $f(t)$ donne :

$${}_{t_0}D_t^\alpha \circ {}_{t_0}I_t^\alpha f(t) = f(t), \quad \text{avec } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.23)$$

avec « \circ » est l'opérateur de composition des fonctions.

- Les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe, soit [Sam93] :

$${}_t I_t^{\alpha_1} \circ {}_t I_t^{\alpha_2} f(t) = {}_t I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t), \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{R}e(\alpha_1) > 0 \\ \mathcal{R}e(\alpha_2) > 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

- Les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), vérifient la propriété de semi-groupe sous certaines conditions [Mil93], soit :

$${}_0 D_t^{\alpha_1} \circ {}_0 D_t^{\alpha_2} f(t) = {}_0 D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t), \quad (1.25)$$

et

$${}_t D_t^r \circ {}_t D_t^\alpha f(t) = {}_t D_t^{r+\alpha} f(t), \text{ avec } \begin{cases} r \text{ entier positif} \\ n \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (1.26)$$

1.3.4 Méthodes opérationnelles fractionnaires

Les définitions temporelles des opérateurs d'ordre fractionnaire souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, leur expression dans le domaine opérationnel relève d'une simplicité remarquable. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

1.3.4.1 Eléments de la transformée de Laplace

Soit $F(s)$, la transformée de Laplace de $f(t)$ définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1.27)$$

$f(t)$ est la fonction originale qui peut être obtenue par la transformée de Laplace inverse de $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(t) dt, \quad c = \mathcal{R}e(s) > c_0 \quad (1.28)$$

où c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (1.30). Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1.29)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = F(s)G(s) \quad (1.30)$$

sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent. Nous utiliserons cette propriété de la transformée de Laplace du produit de convolution pour évaluer l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(t)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0^+} \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(t)\Big|_{t=0^+} \quad (1.31)$$

1.3.4.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo peut être interprétée comme un produit de convolution de la fonction $h(t) = 1/(\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1})$ et $f(t)$:

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}} * f(t) \quad (1.32)$$

La transformée de Laplace de la fonction $h(t)$ est donnée par [Pod99a] :

$$H(s) = s^{-\alpha} \quad (1.33)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution, on obtient la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo :

$$\mathcal{L}\{I_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (1.34)$$

où $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$, $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ et $s = \sigma + j\omega$ désigne l'opérateur de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue de la transformée de Laplace de l'intégrale dans le cas entier.

1.3.4.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée [Chi96].

a) Définition de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=0^+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.35)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (1.35) sont données en fonction des dérivées non entières évaluées à l'origine.

b) Définition de Caputo

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f(0), \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.36)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (1.36) sont données en fonction des dérivées entières évaluées à l'origine.

c) Définition de Gröndwald-Leitnikov

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (1.37)$$

Remarque 1.1 : Les transformées de Laplace des dérivées d'ordre non entier de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour $t < 0$. Elles se réduisent à :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (1.38)$$

Remarque 1.2 : La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales.

Le tableau (1.1) donne quelques transformées de Laplace utiles avec a , α et β sont des nombres réelles ($\alpha, \beta > 0$).

Tab. 1.1. Transformée de Laplace de quelques fonctions.

Fonction $F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$

1.3.5 Caractéristiques fréquentielles d'un opérateur fractionnaire

Le dérivateur d'ordre fractionnaire est l'élément de base de toute équation différentielle d'ordre fractionnaire, sa grandeur de sortie s'identifie à un facteur près, à la dérivée fractionnaire d'ordre $(\alpha = a + ib)$ de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit :

$$y(t) = \tau^\alpha D^\alpha u(t) = \tau^{a+ib} D^{a+ib} u(t) \quad (1.39)$$

où τ est un nombre réel positif désigne la constante du temps de la différentiation, a et b sont des nombres réels ou entiers.

A l'aide des relations (1.36) et (1.37) et sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (1.39) conduit à :

$$Y(s) = (\tau s)^\alpha U(s) \quad (1.40)$$

Soit, en posant $\omega_u = 1/\tau$, appelé *fréquence au gain unité* ou *fréquence de transition* :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha U(s) \quad (1.41)$$

D'où l'on tire la transmittance complexe :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^{a+ib} = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^a \left[\cos\left(b \ln \frac{s}{\omega_u}\right) + i \sin\left(b \ln \frac{s}{\omega_u}\right) \right] \quad (1.42)$$

On pose :

$$T(s) = T_{réel}(s) + iT_{imag}(s) \quad (1.43)$$

avec :

$$T_{réel}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^a \cos\left(b \ln \frac{s}{\omega_u}\right) \quad (1.44)$$

$$T_{imag}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^a \sin\left(b \ln \frac{s}{\omega_u}\right) \quad (1.45)$$

Les fonctions $T_{réel}(s)$ et $T_{imag}(s)$ représentent les transmittances relatives à la sortie réelle $y_{réel}(t)$ et imaginaire $y_{imag}(t)$ du dérivateur d'ordre fractionnaire complexe.

L'ordre de dérivation complexe considéré par J. Liouville en 1832 [Lio32], B. Riemann en 1892 [Rie92] et S.G. Samko en 1993 [Sam93] appartient au même plan complexe que la variable de Laplace. Dans ce paragraphe, une distinction mathématique est faite entre, d'une part, le plan complexe opérationnel noté C_j dont relève la variable de Laplace $s = \sigma + j\omega$ et, d'autre part, le

plan complexe temporel noté C_i dont relève l'ordre de dérivation $\alpha = a + ib$ et les sorties $y_{réel}(t)$ et $y_{imag}(t)$. L'espace généré par ces deux plans est appelé espace bi-complexe et noté \hat{C} .

1.3.5.1 Définition de l'espace bi-complexe

L'espace bi-complexe est défini par l'ensemble $\hat{C} = C_j \times C_j$, noté $C_j + iC_j$ où i est le couple $(0, 1)$ de $C_j \times C_j$. Cet espace est muni de deux lois $+$ et $*$ tel que [Ous05] :

$$\text{Si } \begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases} \quad \text{Alors } \begin{cases} z + z' = a + a' + i(b + b') \\ z * z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \end{cases} \quad (1.46)$$

avec a, b, a' et b' sont tous des éléments de C_j .

On munit aussi cet espace d'une norme définie par :

$$\text{Si } z = a + ib \quad \text{Alors } \|z\| = \text{Max}(|a + ib|; |a - ib|) \quad (1.47)$$

Ainsi défini, cet espace permet de déterminer mathématiquement la transmittance $T(s)$ selon ses parties réelle et imaginaire par rapport au nombre complexe i , soit en posant $s = \rho e^{j\theta}$ et $\alpha = a + ib$:

$$T(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\alpha = \left(\frac{\rho}{\omega_u} e^{j\theta}\right)^{a+ib} = \left(\frac{\rho}{\omega_u}\right)^a e^{ja\theta} \left[\cos\left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta\right) + i \sin\left(b \ln \frac{\rho}{\omega_u} + jb\theta\right) \right] \quad (1.48)$$

1.3.5.2 Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel

La réponse en fréquence d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel se déduit de sa transmittance en faisant $s = j\omega$ et $\alpha = a + i0 = a$ réel (la partie imaginaire nulle), soit :

$$T(s) = T(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^a \quad (1.49)$$

Définis comme le module et l'argument de $T(j\omega)$, le gain G et la phase φ du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} G = |T(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \\ \varphi = \text{Arg}(T(j\omega)) = a \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.50)$$

L'analyse d'un tel système d'équations relève deux propriétés remarquables de ce type de dérivateurs :

- Le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente $20a$ dB par décade,
- Le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi = a\pi/2$.

La figure (1.3) représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier réel en fonction de la fréquence réduite ω/ω_u et pour des ordres de dérivation compris entre -1.5 et 1.5.

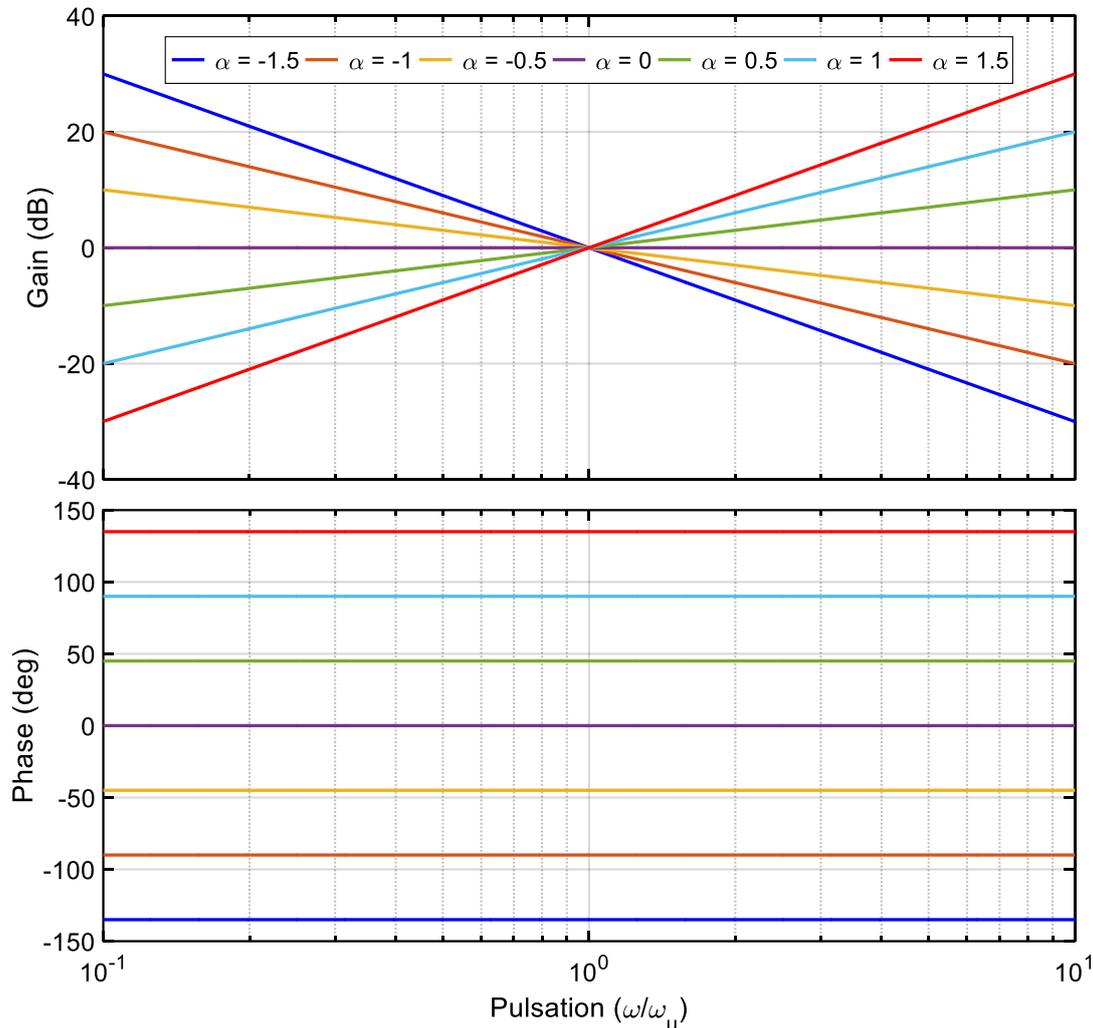


Fig. 1.3. Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel.

Le caractère fractionnaire réel de l'ordre de dérivation, permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation continue :

- de la pente de la droite de gain;
- de l'ordonnée de la droite de phase.

1.3.5.3 Réponse fréquentielle d'un opérateur d'ordre fractionnaire complexe

La réponse fréquentielle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire complexe se déduit de sa transmittance donnée par l'équation (1.37) en faisant $s = j\omega$ et $\alpha = a + ib$ avec $b \neq 0$. Les parties réelles et imaginaires relatives au plan complexe C_i de sa réponse fréquentielle admettent des expressions de la forme [Ous05]:

$$\begin{cases} \mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega)) = T_{réel}(j\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a e^{ja\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u} + jb\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega)) = T_{imag}(j\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a e^{ja\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u} + jb\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{cases} \quad (1.51)$$

Les gains et les phases du dérivateur se déduisant ensuite des modules et arguments de ces deux réponses en fréquence, soient, pour $T_{réel}(j\omega)$:

$$\begin{cases} |\mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega))| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \sqrt{\cos^2\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) + sh^2\left(b\frac{\pi}{2}\right)} \\ \arg\left(\mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega))\right) = a\frac{\pi}{2} + \arg\left[\cos\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) ch\left(b\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) sh\left(b\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (1.52)$$

et pour $T_{imag}(j\omega)$:

$$\begin{cases} |\mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega))| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \sqrt{\sin^2\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) + sh^2\left(b\frac{\pi}{2}\right)} \\ \arg\left(\mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega))\right) = a\frac{\pi}{2} + \arg\left[\sin\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) ch\left(b\frac{\pi}{2}\right) + j\cos\left(b\ln\frac{\omega}{\omega_u}\right) sh\left(b\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (1.53)$$

Les valeurs et les pentes des gains à la fréquence ω_u ont pour expressions :

$$|\mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega))|_{\omega=\omega_u} = \left| ch\left(b\frac{\pi}{2}\right) \right| \quad (1.54)$$

$$|\mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega))|_{\omega=\omega_u} = \left| sh\left(b\frac{\pi}{2}\right) \right| \quad (1.55)$$

$$\left. \frac{\partial |\mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega))|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 20a \quad (1.56)$$

$$\left. \frac{\partial |\mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega))|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 20a \quad (1.57)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- les valeurs des gains sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation;
- les pentes des gains sont exclusivement liées à la partie réelle a de l'ordre de dérivation.

Les valeurs et les pentes des phases à la fréquence ω_u ont pour expressions :

$$\arg\left(\mathcal{R}e_{/i}(T(j\omega))\right)_{\omega=\omega_u} = a\frac{\pi}{2} \quad (1.58)$$

$$\arg\left(\mathcal{I}m_{/i}(T(j\omega))\right)_{\omega=\omega_u} = a\frac{\pi}{2} + \operatorname{sgn}(b)\frac{\pi}{2} \quad (1.59)$$

$$\left. \frac{\partial \arg(\operatorname{Re}_{/i}(T(j\omega)))}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = -b \operatorname{th}\left(b \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.60)$$

$$\left. \frac{\partial \arg(\operatorname{Im}_{/i}(T(j\omega)))}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = \frac{-b}{\operatorname{th}\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \quad (1.61)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- Les valeurs des phases sont exclusivement liées à la partie réelle a de l'ordre de dérivation;
- Les pentes des phases sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation.

La figure (1.4) représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre complexe α .

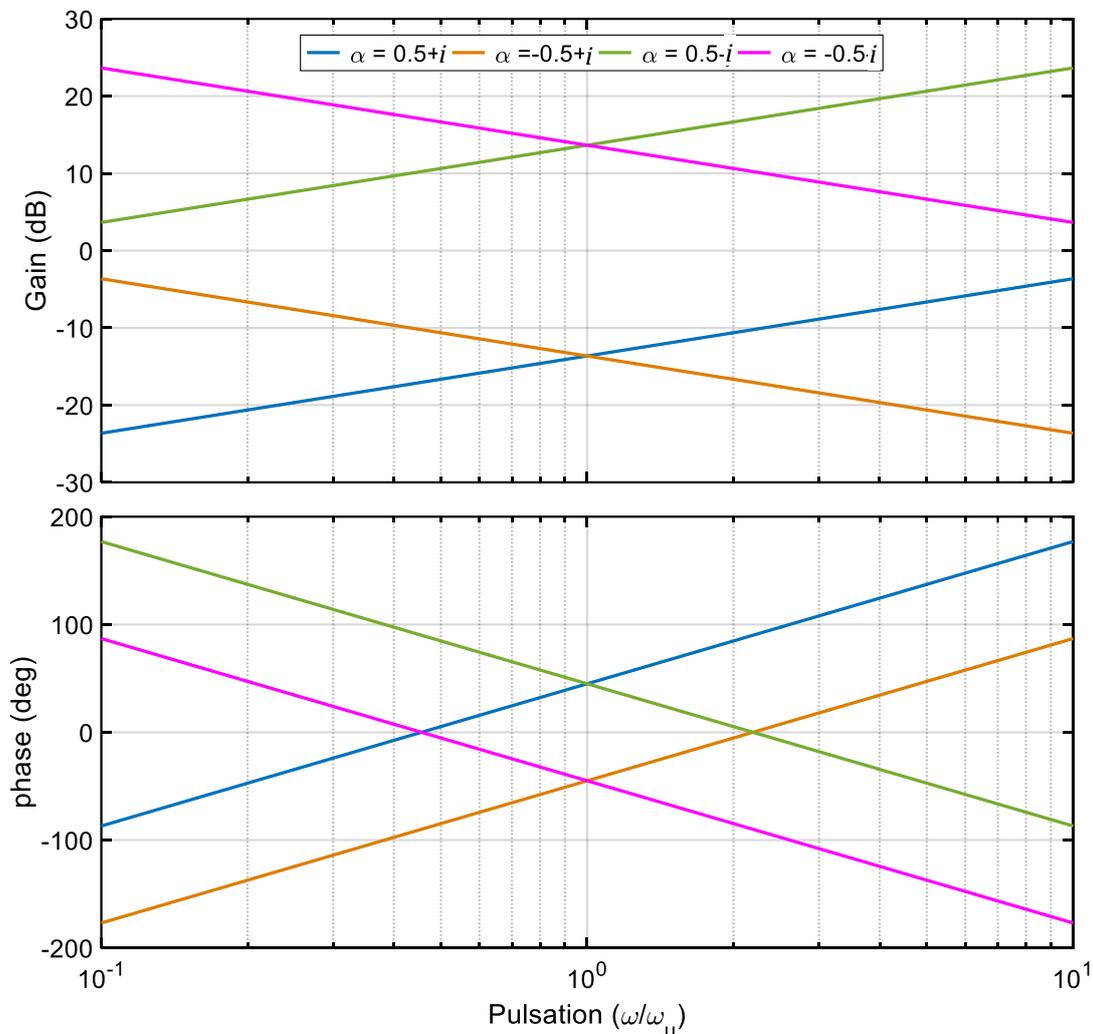


Fig. 1.4. Diagrammes de Bode d'un dérivateur d'ordre fractionnaire complexe.

1.3.6 Caractéristiques temporelles d'un opérateur d'ordre fractionnaire réel

1.3.6.1 Réponse impulsionnelle

Sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, l'équation (1.35) de la transformée de Laplace de la dérivée au sens de *Riemann-Liouville* peut s'écrire :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (1.62)$$

Le cas $F(s) = 1$ correspond à la dérivée d'ordre fractionnaire réel α de la fonction de Dirac $f(t) = \delta(t)$. Alors, en substituant dans (1.62), on peut déduire la réponse impulsionnelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire, soit:

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha \delta(t) \} = s^\alpha \Leftrightarrow {}_0D_t^\alpha \delta(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^\alpha) = \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} u(t) \quad (1.63)$$

avec $u(t)$ est l'échelon unitaire.

La figure (1.5) représente la réponse impulsionnelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel pour différentes valeurs de l'ordre α . La réponse pour $\alpha = 0$ (ligne noire) n'apparaît pas sur la figure car elle est au-dessous la courbe de la réponse pour $\alpha = 1$ (ligne bleue).

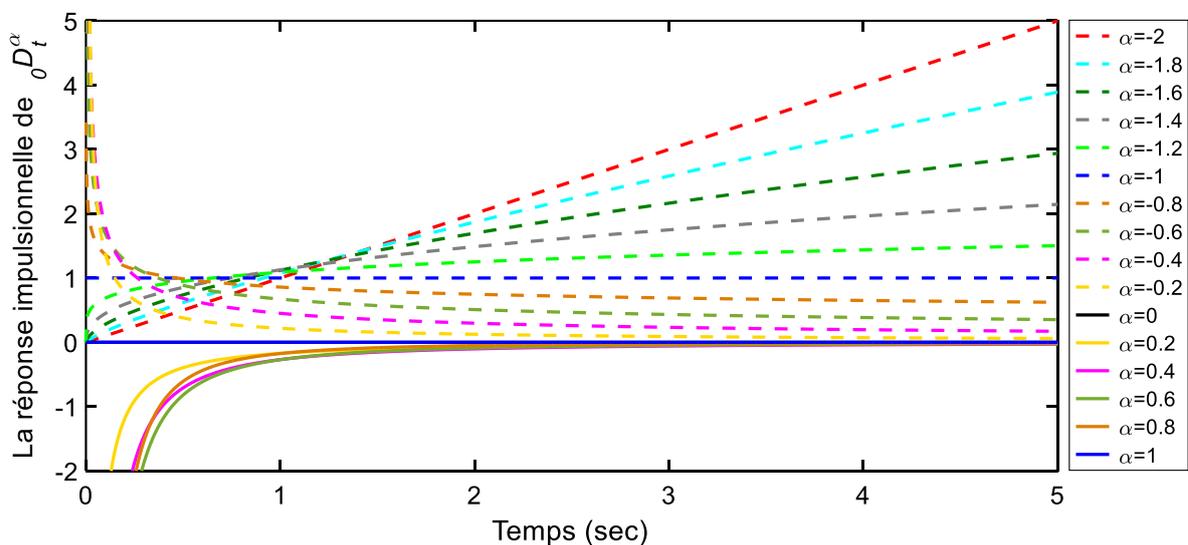


Fig. 1.5. Réponse impulsionnelle du dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de α .

1.3.6.2 Réponse indicielle

La dérivée d'ordre fractionnaire réel d'un échelon unitaire est obtenue en substituant $F(s) = 1/s$ dans l'équation (1.62), ce qui donne :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha u(t) \} = s^{\alpha-1} \Leftrightarrow {}_0D_t^\alpha u(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha + 1)} u(t) \quad (1.64)$$

La figure (1.6) représente la réponse indicelle d'un dérivateur d'ordre fractionnaire réel pour différentes valeurs de l'ordre α .

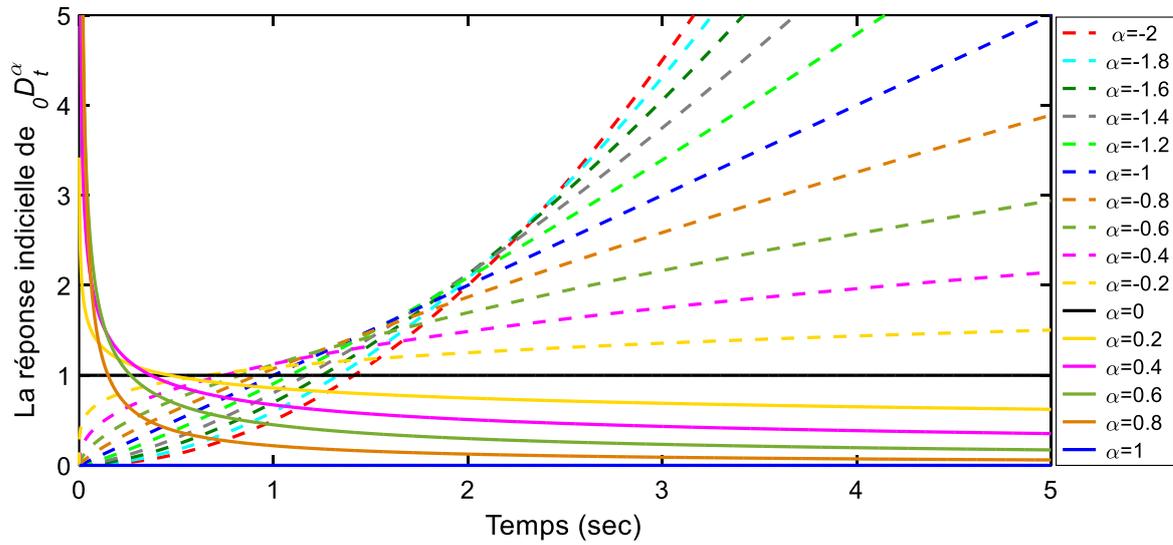


Fig. 1.6. Réponse indicelle du dérivateur fractionnaire réel pour différentes valeurs de α .

1.3.7 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Les dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles obtenues par la définition du Riemann-Liouville avec la limite inférieure égale à 0 sont montrées dans le tableau (1.2) [Das08].

Tab. 1.2. Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles.

Fonction $f(t)$	Dérivée d'ordre α : ${}_0D_t^\alpha f(t)$
$u(t)$ (échelon unité)	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$
$u(t-a)$	$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} u(t-a)$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
$\delta^{(n)}(t)$	$\frac{t^{-n-\alpha-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$(t-a)$	$\frac{(t-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$
$(t-a)^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)}$
$\cosh(\sqrt{\lambda}t)$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$

1.3.8 Evaluation Numérique des opérateurs fractionnaires

Le calcul de la dérivée ou l'intégrale d'ordre fractionnaire α d'une fonction quelconque est généralement très difficile en utilisant les méthodes analytiques. Par conséquence, une approximation numérique est nécessaire. La méthode la plus simple à utiliser est celle basée sur la définition de Grünwald-Letnikov. Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique des fonctions usuelles et des équations différentielles fractionnaires. Rappelons la définition de *Grünwald-Letnikov* (§1.3.2.3):

$${}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{t-t_0}{h} \rceil} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (1.65)$$

Cette formule peut être utilisée pour une évaluation numérique approximative de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire en choisissant une valeur appropriée du pas d'échantillonnage h [Dor94, Pod99a, Mil93], soit :

$${}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N c_k^\alpha f(t - kh), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.66)$$

avec $c_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ et $N = \lceil \frac{t-t_0}{h} \rceil$. Pour le calcul de ces coefficients, on utilise souvent l'expression récurrente suivante :

$$c_k^\alpha = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{k}\right) c_{k-1}^\alpha, \quad c_0^\alpha = 1 \quad (1.67)$$

Une collection de différents algorithmes pour l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire a été également présentée dans [Die05]. L'avantage de l'approximation par la définition de Grünwald-Letnikov réside dans sa simplicité de mise en œuvre. La figure (1.7) représente les résultats de simulation de l'approximation de Grünwald-Letnikov (1.66) pour un ordre de dérivation α compris entre -1 et 1 de quelques fonctions usuelles (échelon $u(t)$, t et \cos). Selon que α est positive ou négative, on a respectivement une dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire. Pour $\alpha=0$, on récupère la fonction elle-même.

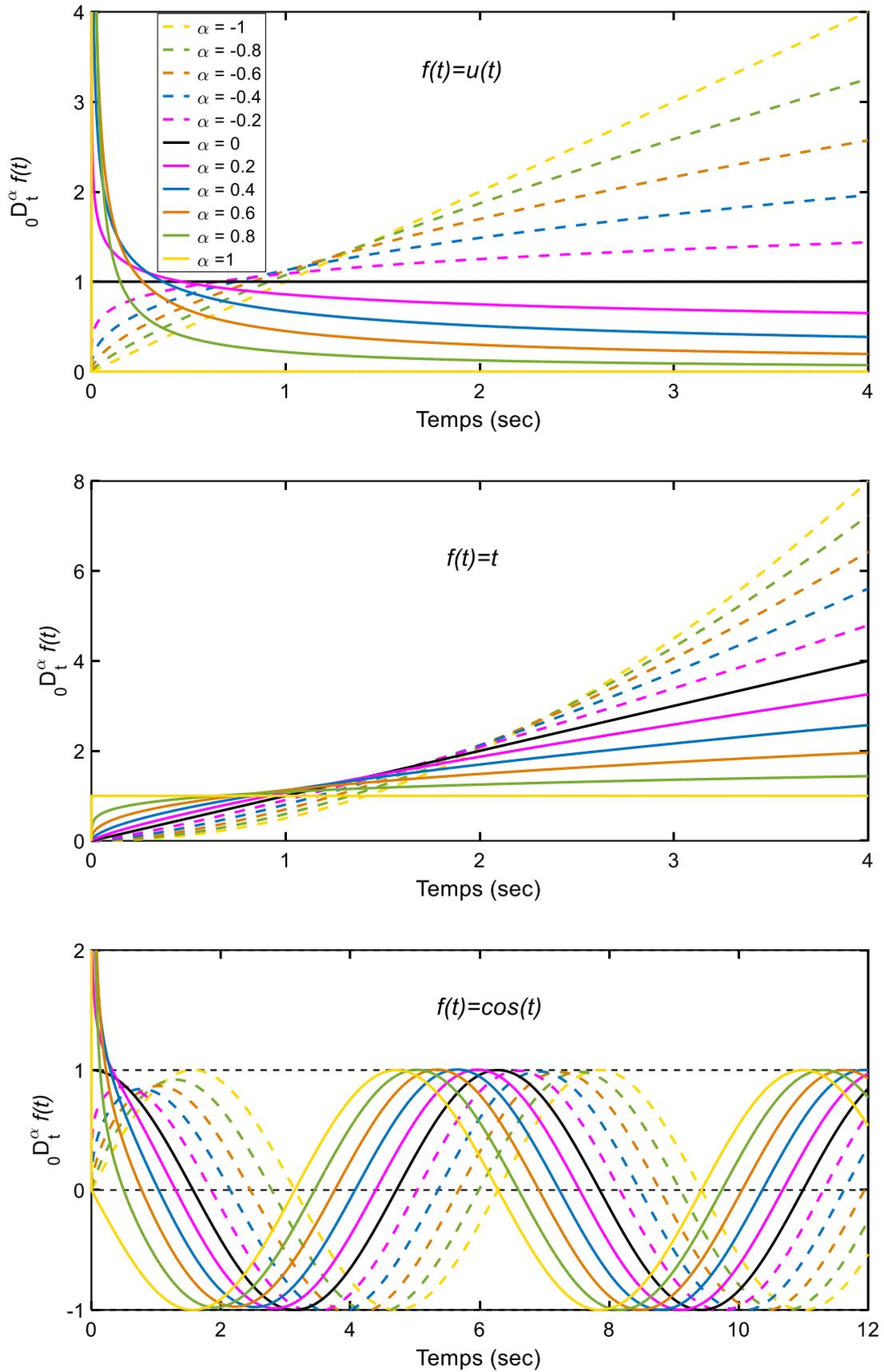


Fig. 1.7. Evaluation Numérique de ${}_0D_t^\alpha f(t)$ par l'approximation de Grunwald-Letnikov de quelques fonctions pour différentes valeurs de α .

1.3.9 Interprétation géométrique des opérateurs fractionnaires

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui a priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la différentiation fractionnaire. Le manque ou l'absence de telles interprétations a été fortement abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire qui a eu lieu à New Haven (USA) en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts et est restée sans réponse [Ros75b, Ros75a], et ce malgré les rencontres internationales qui ont suivi, notamment en 1984, 1989 et en 1996. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches ont été adoptées [Pod02, Mor05, Tav13]. Parmi celles-ci nous citerons celle de [Pod02] qui est basée sur l'intégrale de Riemann-Liouville.

Dans le cas où l'ordre m est réel, la définition (1.8) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction $h_\alpha(t - \tau)$ définie par :

$$h_\alpha(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(t - \tau)^{1-\alpha}} \quad (1.68)$$

La figure (1.8) représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de α comprises entre 0.1 et 1. Comme c'est prévu, si α est égal à 1, l'intégrale ${}_{t_0}I_t^\alpha$ est une intégrale classique et toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même "poids" qui est égal à 1. Si α est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de "poids" que les plus anciennes.

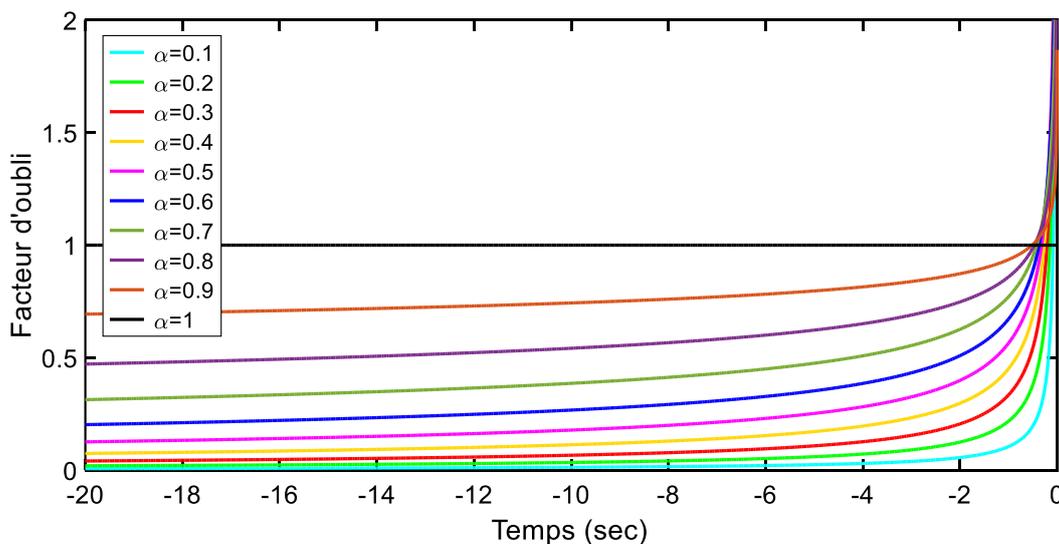


Fig. 1.8. Facteur d'oubli $h(10 - \tau)$ pour différentes valeurs de α .

A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration α mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion [Ser08].

1.4 Approximations des opérateurs fractionnaires

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement des puissances d'ordre entier de " s " dans le cas continu ou de " z " dans le cas discret. Alors, il est impératif d'approximer les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire par des fonctions de transfert d'ordre entier. Autrement dit, lorsque des simulations doivent être exécutées ou des correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier qui sont beaucoup plus facile à manipuler, avec un comportement assez identique à celui des fonctions originales.

Le processus d'approximation d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire est basé sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire. La fonction de transfert d'un opérateur d'ordre fractionnaire élémentaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$T(s) = s^{-\alpha} \quad (1.69)$$

avec α est un nombre réel tel que $-1 < \alpha < 1$. L'approximation d'un tel opérateur (2.35) peut se faire de deux manières [Aou05] :

- Approximation par un modèle rationnel à temps discret,
- Approximation par un modèle rationnel à temps continu.

1.4.1 Approximation par un modèle rationnel à temps discret

Le principe de ces méthodes consiste à approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en remplaçant l'opérateur de Laplace s dans le modèle fractionnaire par son équivalent discret $w(z^{-1})$ qui peut être calculé par plusieurs méthodes. Parmi lesquelles on cite les méthodes : d'Euler, de Tustin, de Simpson, et de Al-alaoui [Tab71, Ala94, Vin00, Che02a]. Ces fonctions sont données dans le tableau (1.3) où T représente le pas d'échantillonnage.

Comme on peut le constater à partir de ces approximations, un système d'ordre fractionnaire est décrit dans le domaine continu par une fonction de transfert irrationnelle, alors que dans le domaine discret il est décrit par une transmittance de dimension infinie, ce qui confirme que les

systèmes d'ordre fractionnaire ont une mémoire illimitée contrairement aux systèmes d'ordre entier dont la mémoire est limitée.

L'inconvénient majeur de cette classe de méthodes est l'ordre d'approximation qui est très élevé, ce qui rend la simulation en temps réel difficile à obtenir.

Tab. 1.3. Méthodes d'approximation de l'opérateur s^α en temps discret.

Méthode	Opération effectuée
Euler	$s \rightarrow w(z^{-1}) = \frac{1}{T} (1 - z^{-1})$ $(w(z^{-1}))^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right)$
Tustin	$s \rightarrow w(z^{-1}) = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{2}{T} \right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots)$
Simpson	$s \rightarrow w(z^{-1}) = \frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}$ $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{3}{T} \right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots)$
Al-Alaoui	$s \rightarrow w(z^{-1}) = \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{(1 + z^{-1}/7)}$ $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2 \right) z^{-2} + \dots \right)$

1.4.2 Approximation par un modèle rationnel à temps continu

1.4.2.1 Méthode des fractions en chaîne continues (Continued Fraction Expansions - CFE)

L'approximation CFE est donnée par [Mao06, Mai08, Mai11] :

$$s^\alpha \approx \frac{p_{m0}(\alpha)s^m + p_{m1}(\alpha)s^{m-1} + \dots + p_{mm}(\alpha)}{q_{m0}(\alpha)s^m + q_{m1}(\alpha)s^{m-1} + \dots + q_{mm}(\alpha)} \quad (1.70)$$

avec m est l'ordre d'approximation et $p_{mi}(\alpha)$, $q_{mi}(\alpha)$ sont des coefficients calculés selon la formule :

$$p_{mi}(\alpha) = q_{m,m-i}(\alpha) = (-1)^i B(m, i)(n + i + 1)_{(m-i)}(n - m)_{(i)} \quad (1.71)$$

où, $B(m, i)$ sont les coefficients binomiaux définis par :

$$B(m, i) = \frac{m!}{i!(m-i)!} \quad (1.72)$$

u_k est le symbole de Pochhammer donné par :

$$u_k = u(u+1)(u+2) \dots (u+k-1), \quad u_0 = 1 \quad (1.73)$$

1.4.2.2 Méthode de Matsuda

Cette méthode, proposée par Matsuda [Mats93], fournit une approximation continue de $G(s) = s^\alpha$ en calculant le gain à des fréquences logarithmiquement équidistantes $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ dans un intervalle de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$ pour obtenir un modèle d'approximation d'ordre n . Ces fréquences sont données par :

$$\omega_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.74)$$

Puis, l'ensemble des fonctions suivant est défini récursivement comme suit :

$$d_0(\omega) = |G(j\omega)| \quad (1.75)$$

$$d_{k+1}(\omega) = \frac{\omega - \omega_k}{d_k(\omega) - d_k(\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.76)$$

Ensuite, la matrice triangulaire supérieure de dimension $(n+1) \times (n+1)$ est formée :

$$D = \begin{bmatrix} d_0(\omega_0) & d_0(\omega_0) & d_0(\omega_0) & d_0(\omega_0) \\ & d_1(\omega_0) & d_1(\omega_0) & d_1(\omega_0) \\ & & d_2(\omega_0) & d_2(\omega_0) \\ & & & \ddots \\ & & & & d_n(\omega_0) \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

Enfin, l'approximation désirée est donnée par la fonction rationnelle suivante :

$$G(s) \approx a_0 + \frac{s - \omega_0}{a_1 + \frac{s - \omega_1}{a_2 + \frac{s - \omega_2}{a_3 + \dots}}} \approx a_0 + \frac{s - \omega_0}{a_1 + \dots} \frac{s - \omega_1}{a_2 + \dots} \dots \quad (1.79)$$

avec les a_k sont définis comme suit :

$$a_k = \begin{cases} |G(j\omega_0)|, & k = 0 \\ \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{d_{k-1}(\omega_k) - d_{k-1}(\omega_{k-1})}, & k = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.80)$$

1.4.2.3 Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson dans [Car64] est dérivée du processus de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la $i^{\text{ème}}$ racine. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{\frac{1}{\alpha}} = s \quad (1.81)$$

La méthode itérative de Newton mènera à une séquence d'approximations $H_i(s)$ qui commence par la valeur initiale $H_0(s) = 1$. La fonction rationnelle approximant $H(s) = s^\alpha$, est obtenue sous la forme suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) (H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) s}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) (H_{i-1}(s))^{1/\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s} \quad (1.82)$$

Malheureusement, cette approche n'est utilisable que si $1/\alpha$ est entier $\pm 2, \pm 3, \dots$

1.4.2.4 Méthode d'AbdelAty

Cette méthode proposée par AbdelAty [Abd18] est basée sur l'utilisation d'une somme pondérée de filtres passe-haut du premier ordre. Les paramètres des filtres sont obtenus en utilisant l'algorithme de pollinisation des fleurs (FPA: Flower Pollination Algorithm). Cette approximation est donnée par :

$$s^\alpha \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n k_i \frac{s}{\tau_i^\alpha (1 + \tau_i s)} \quad (1.83)$$

où τ_i et k_i sont deux constantes déterminés par l'algorithme d'optimisation FPA.

1.4.2.5 Méthode d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup [Ous00] est largement utilisée dans le control d'ordre fractionnaire. Elle permet d'approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire s^α pour $-1 < \alpha < 1$, dans une bande de fréquences donnée $[\omega_l, \omega_h]$, par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier comme suit :

$$s^\alpha \approx K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (1.84)$$

avec :

$$\omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+0.5(1-\alpha)}{2N}}, \quad \omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+0.5(1+\alpha)}{2N}}, \quad K = \omega_h^\alpha \quad (1.85)$$

et N est l'ordre d'approximation. Le modèle rationnel obtenu est de $(2N+1)$ ordre.

Parmi les méthodes citées, la méthode d'Oustaloup est supérieure en termes de flexibilité et de précision. Pour cette raison, la méthode d'Oustaloup sera étudiée avec plus de détails en mettant l'accent sur la réponse fréquentielle de l'opérateur s^α et les réponses temporelles de quelques fonctions usuelles.

a) Réponse fréquentielle

Prenons comme 1^{er} exemple le dérivateur fractionnaire $s^{0.5}$. Cet opérateur possède une pente en ascendant de 10 dB par décade et une phase de +45 degrés. La figure (1.9) présente les tracés de Bode des modèles d'approximation de $s^{0.5}$ en utilisant la méthode d'Oustaloup avec différents ordres d'approximation (1, 3 et 5) dans la plage de fréquences (0,001 rad/s, 1000 rad/s). Comme on peut le voir, les modèles présentent des oscillations autour des courbes idéales d'amplitude et de phase. Mais ces oscillations n'apparaissent plus à partir de $N=5$.

Le 2^{ème} exemple est l'intégrateur fractionnaire $s^{-0.5}$. Cet opérateur possède une pente en descendant de 10 dB par décade et une phase de -45 degrés. La figure (1.10) présente les tracés de Bode des modèles d'Oustaloup avec différents ordres d'approximation (1, 3 et 5) dans la plage de fréquences (0,001 rad/s, 1000 rad/s). Ces modèles se manifestent de la même manière que dans le cas du dérivateur.

Les 3 modèles d'approximation d'Oustaloup obtenus pour chaque opérateur sont donnés dans le tableau (1.4).

Tab. 1.4. Approximation de $s^{0.5}$ et $s^{-0.5}$ par la méthode d'Oustaloup.

N=1	$s^{0.5} \approx \frac{31.62s^3 + 1010s^2 + 319.4s + 1}{s^3 + 319.4s^2 + 1010s + 31.62}$
N=3	$s^{0.5} \approx \frac{31.62s^7 + 8358s^6 + 2.695e05s^5 + 1.187e06s^4 + 7.249e05s^3 + 6.134e04s^2 + 709.1s + 1}{s^7 + 709.1s^6 + 6.134e04s^5 + 7.249e05s^4 + 1.187e06s^3 + 2.695e05s^2 + 8358s + 31.62}$
N=5	$s^{0.5} \approx \frac{31.62s^{11} + 1.724e04s^{10} + 2.083e06s^9 + 6.742e07s^8 + 6.112e08s^7 + 1.571e09s^6 + 1.147e09s^5 + 2.383e08s^4 + 1.403e07s^3 + 2.313e05s^2 + 1021s + 1}{s^{11} + 1021s^{10} + 2.313e05s^9 + 1.403e07s^8 + 2.383e08s^7 + 1.147e09s^6 + 1.571e09s^5 + 6.112e08s^4 + 6.742e07s^3 + 2.083e06s^2 + 1.724e04s + 31.62}$
N=1	$s^{-0.5} \approx \frac{0.03162s^3 + 10.1s^2 + 31.94s + 1}{s^3 + 31.94s^2 + 10.1s + 0.03162}$
N=3	$s^{-0.5} \approx \frac{0.03162s^7 + 22.42s^6 + 1940s^5 + 2.292e04s^4 + 3.755e04s^3 + 8523s^2 + 264.3s + 1}{s^7 + 264.3s^6 + 8523s^5 + 3.755e04s^4 + 2.292e04s^3 + 1940s^2 + 22.42s + 0.03162}$
N=5	$s^{-0.5} \approx \frac{0.03162s^{11} + 32.3s^{10} + 7314s^9 + 4.436e05s^8 + 7.536e06s^7 + 3.628e07s^6 + 4.967e07s^5 + 1.933e07s^4 + 2.132e06s^3 + 6.587e04s^2 + 545.1s + 1}{s^{11} + 545.1s^{10} + 6.587e04s^9 + 2.132e06s^8 + 1.933e07s^7 + 4.967e07s^6 + 3.628e07s^5 + 7.536e06s^4 + 4.436e05s^3 + 7314s^2 + 32.3s + 0.03162}$

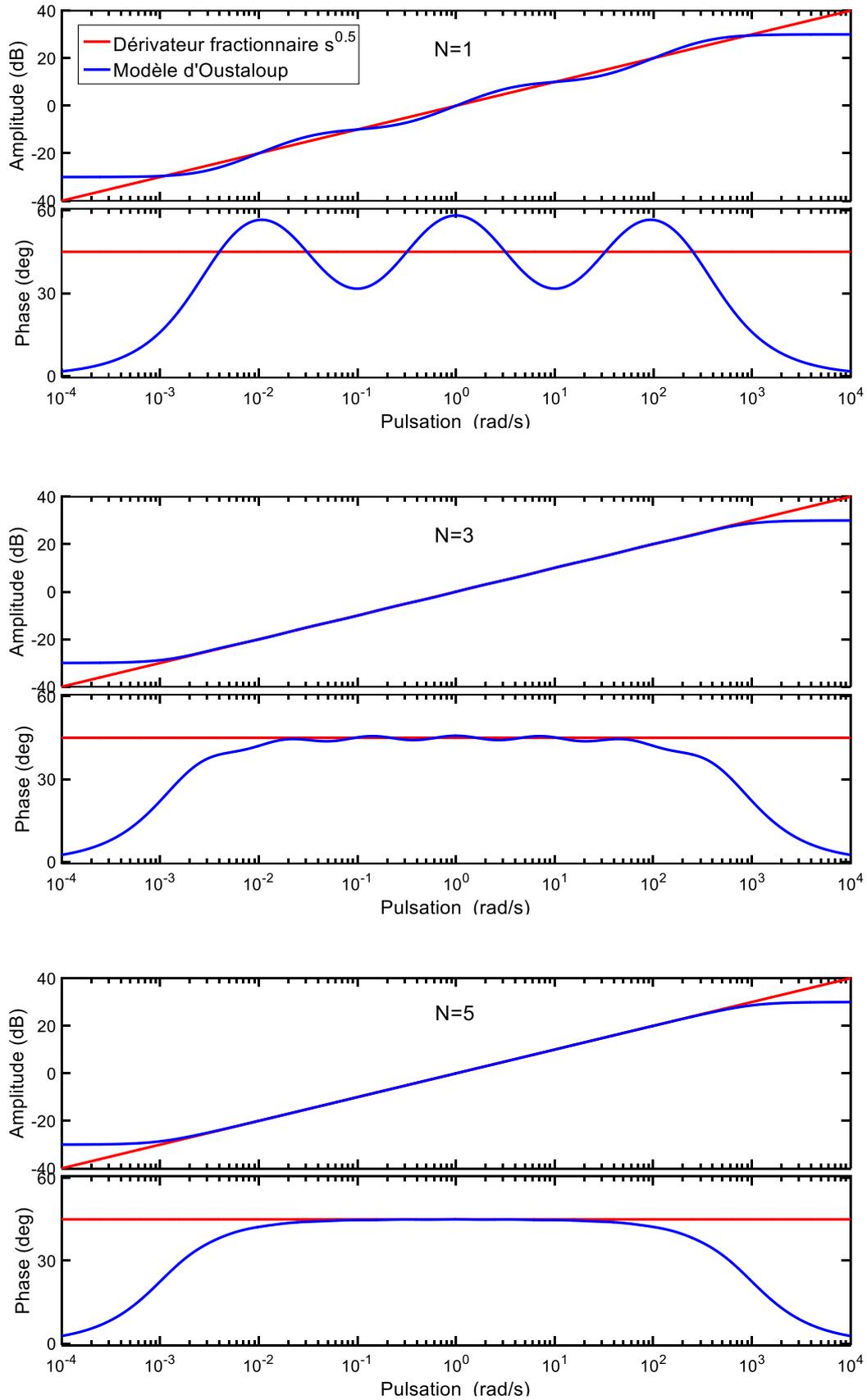


Fig. 1.9. Diagrammes de Bode de $s^{0.5}$ approximés par la méthode d'Oustaloup sur $[0.001;1000]$ (rad/s) pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation N.

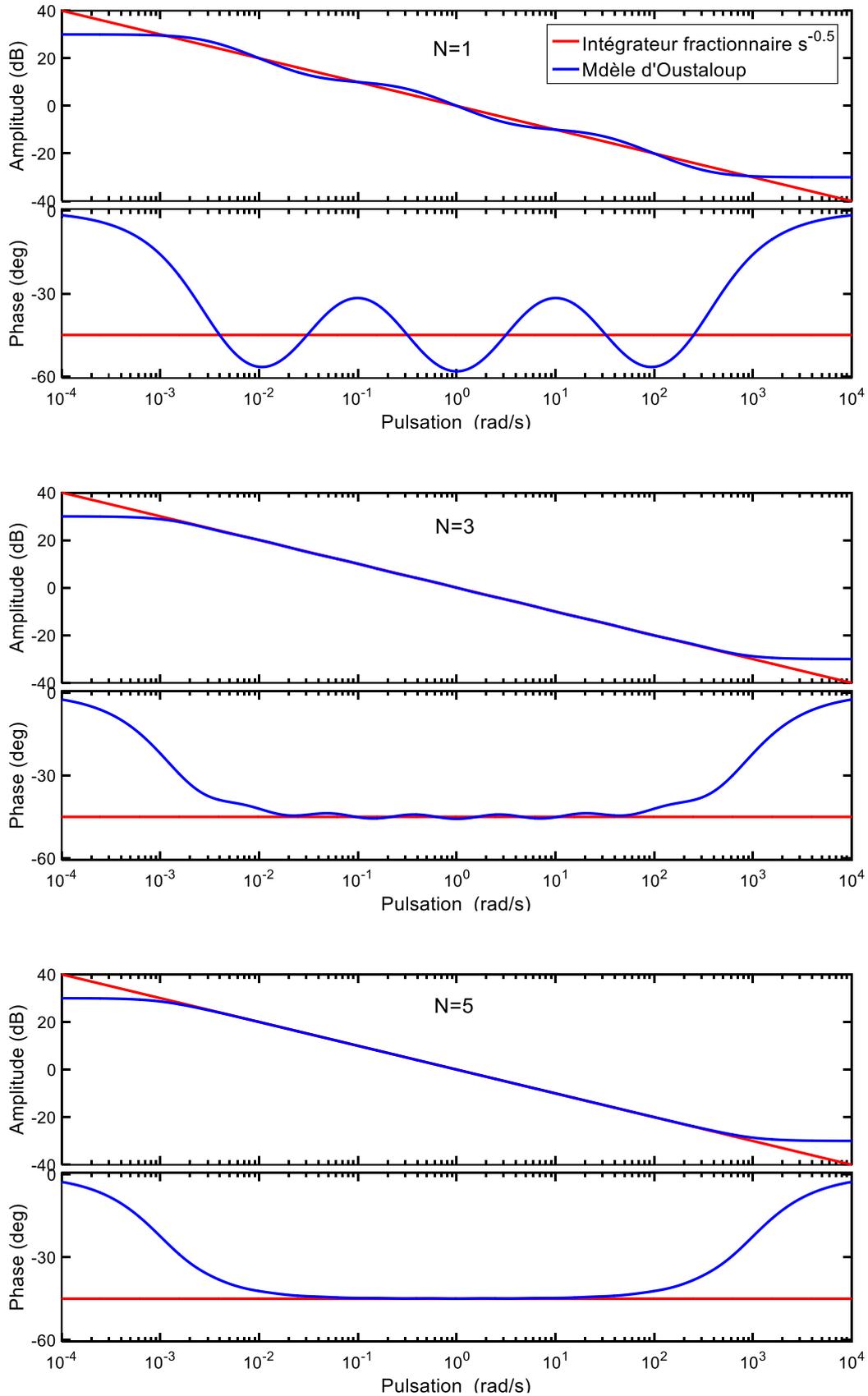


Fig. 1.10. Diagrammes de Bode de $s^{-0.5}$ approximés par la méthode d'Oustaloup sur $[0.001;1000]$ (rad/s) pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation N .

b) Quelques réponses temporelles

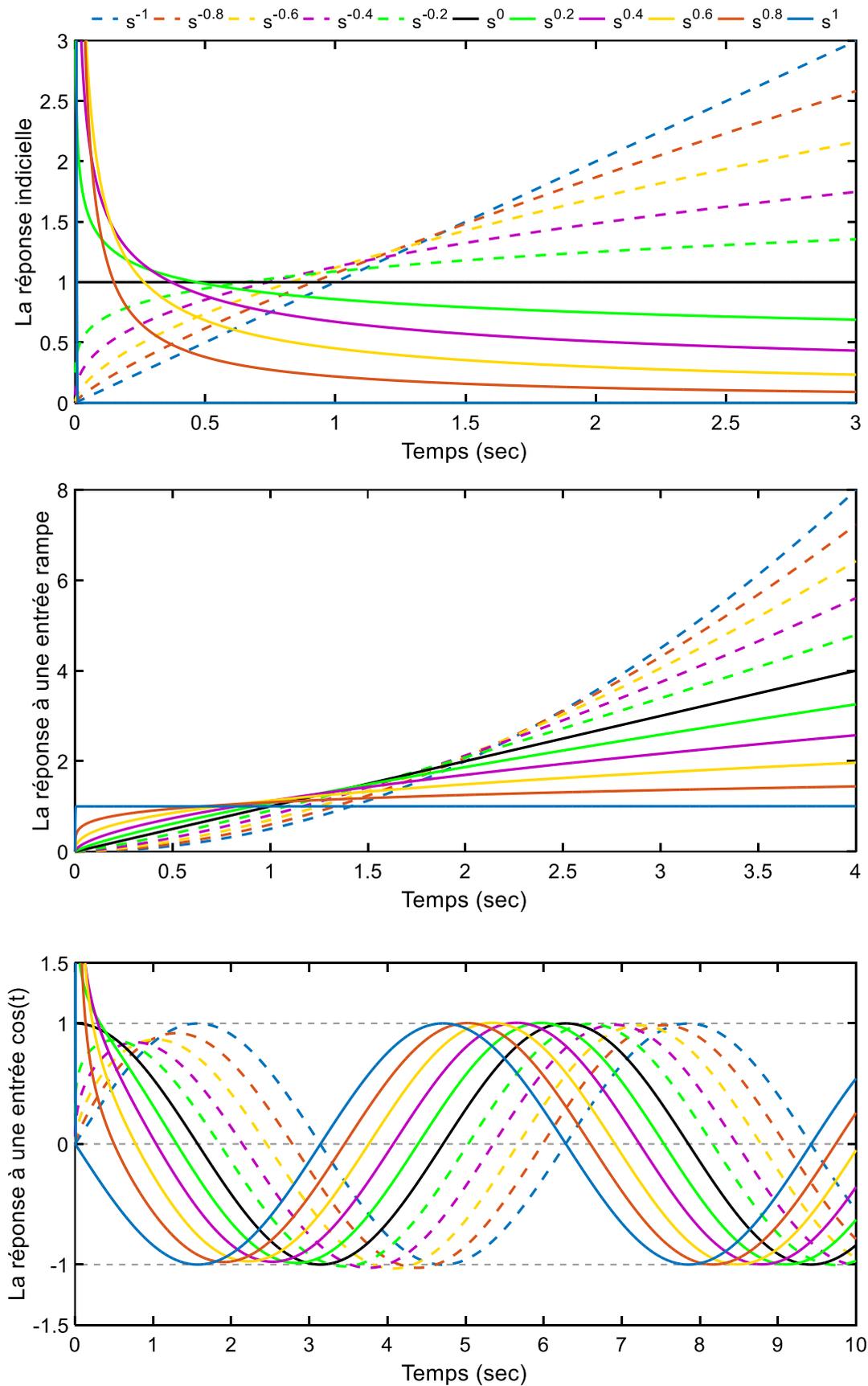


Fig. 1.11. Quelques réponses de s^α ($-1 \leq \alpha \leq 1$) approximées par la méthode d'Oustaloup avec un ordre d'approximation 5 sur l'intervalle $[0.001; 1000]$ (rad/s).

Considérons un ensemble d'opérateurs fractionnaires s^α , où α varie entre -1 et 1 avec un pas de 0.2, approximés par la méthode d'Oustaloup sur l'intervalle [0.001, 1000] (rad/s) avec un ordre d'approximation 5. Les réponses à une entrée unité (échelon), à une entrée rampe et à une entrée cosinus de ces modèles sont présentées dans la figure (1.11). Pour chaque signal d'entrée, les 11 réponses de ces opérateurs forment une suite de courbes douces allant de la courbe intégrale connue (qui correspond à s^{-1}) à la courbe dérivée (qui correspond à s^1) [Old74]. Remarquons que pour les entrées unité et cosinus, les dérivées fractionnaires s^α ont répondu avec une impulsion au démarrage parce que ces deux entrées présentent une transition à $t = 0$.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la théorie de la dérivation non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de base telles que la fonction Gamma Euler et la fonction Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire dans le domaines temporel et fréquentiel. Nous avons présenté une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de Grunwald-Letnikov afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions. A base de cette approximation, une interprétation géométrique et physique est donnée.

Puisque l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire constitue un point délicat pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire, nous avons rappelé les différentes méthodes d'approximation les plus utilisées. Vu sa simplicité et sa précision, la méthode d'Oustaloup qui va être utilisée pour la simulation du correcteur fractionnaire dans le chapitre 6, est abordée avec plus de détails.

Chapitre 2

Les systèmes fractionnaires : Théorie et applications

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation des systèmes fractionnaires ou systèmes d'ordre fractionnaire. Il est important de comprendre que le mot « *systèmes d'ordre fractionnaire* » signifie tout simplement « *systèmes qui sont mieux décrits par des modèles mathématiques d'ordre non entier* » [Ndo11].

Dans la première partie de ce chapitre, on présente des exemples de systèmes fractionnaires, s'inscrivant dans des disciplines variées des sciences de l'ingénieur et des sciences physiques telles que l'électricité, le rhéologie, l'automatique, etc.

Ensuite, on expose de manière exhaustive la théorie des systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire tout en passant par les différentes définitions et représentations. Le concept de stabilité est aussi abordé.

La dernière partie présente les systèmes d'ordre fractionnaire élémentaires du premier et du deuxième type en termes de stabilité et de résonance [Mal11, Khe11].

2.2 Applications des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés.

A titre d'exemples, nous citerons quelques-uns de ces champs d'applications et quelques résultats expérimentaux. Ils sont issus de la littérature, mais il nous paraît utile de reprendre quelques exemples de manière claire et détaillée. Les exemples présentés dans ce chapitre

montrent qu'un nombre d'applications utilisent le calcul fractionnaire, soit comme un outil de commande, soit comme un outil de modélisation.

2.2.1 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

Considérons à titre d'illustration [Abi12], un milieu semi-infini monodimensionnel homogène de température initiale nulle en tout point (figure 2.1). Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale. Il en résulte une variation de température, notée $T(x, t)$, fonction du temps t et de l'abscisse x du point de mesure de température à l'intérieur du milieu.

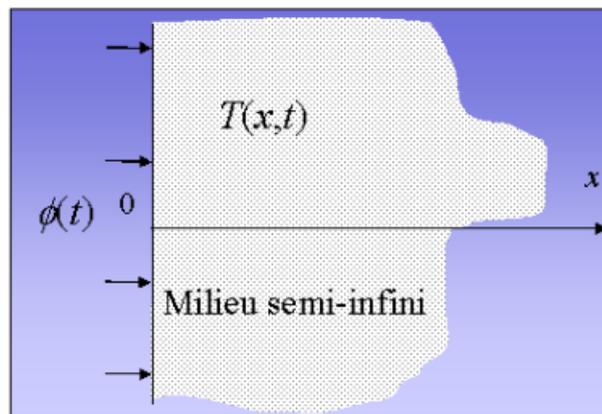


Fig. 2.1. Exemple d'illustration en thermique d'un phénomène de diffusion dans un milieu semi-infini.

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \varphi(t), & x = 0, t > 0 \\ T(x, t) = 0, & x \rightarrow \infty, t > 0 \\ T(x, t) = 0, & 0 \leq x < \infty, t = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le transfert de chaleur est régi par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(x, s)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{s^{0.5}} e^{-x\sqrt{s/\alpha}} \quad (2.2)$$

avec λ , α , ρ et C_p sont respectivement la conductivité thermique, la diffusivité thermique, la masse volumique moyenne et la capacité thermique moyenne du matériau (milieu).

Dans le cas où $x = 0$, le transfert (2.2) n'est autre que l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ qui se réduit alors à :

$$Z_e(s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{\bar{\varphi}(0, s)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{s^{0.5}} \quad (2.3)$$

Dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), l'expression analytique de la température $T(0, t)$ en surface est alors donnée par :

$$T(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} I_t^{0.5} \varphi(t) \quad (2.4)$$

2.2.2 Électricité

Grâce à des données expérimentales, Shmidt et Drumheller [Sch71] ont montré que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ($LiN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ sont très grandes ($\epsilon' \approx \epsilon'' \approx 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance 1/2 (avec $\epsilon' \in \mathbb{R}$ et $\epsilon'' \in \mathbb{R}$). Dans [Sch71, Las95, Las99, Mra04], la fonction diélectrique pour un composé ($LiN_2H_5SO_4$) est donnée par :

$$\epsilon = \epsilon' \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - j) = \epsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } j = \sqrt{-1} \quad (2.5)$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon} \quad (2.6)$$

où C_e est une constante. En substituant la relation (2.5) dans (2.6), on aboutit à :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}} \quad (2.7)$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme :

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad K = \frac{1}{\sqrt{2} C_e \epsilon'} \quad (2.8)$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace s :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme « Fractor », par analogie au terme anglais « Capacitor », pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance.

2.2.3 Electrochimie

Cette section présente un exemple de systèmes fractionnaires, utilisé pour obtenir une approximation d'un phénomène physique.

Le principe d'une cellule électrolytique est esquissé à la figure (2.2).

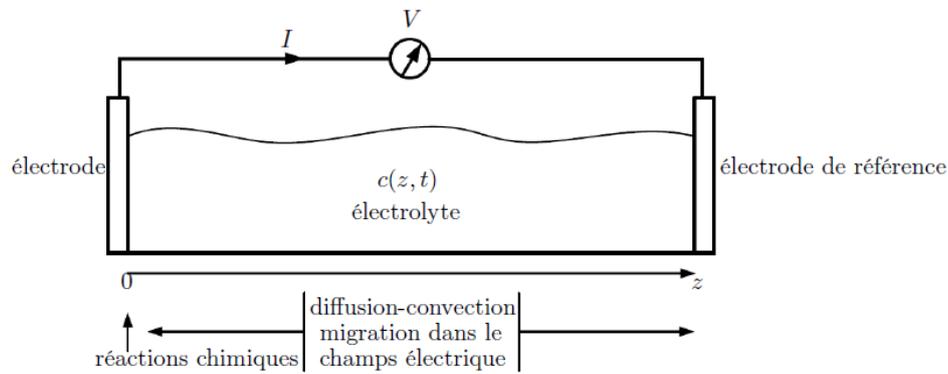


Fig. 2.2. Cellule électrolytique.

La relation entre la tension V et le courant I est non linéaire. Toutefois, pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement, la linéarisation de la relation représente une bonne approximation du système. Ainsi, en identifiant les grandeurs électriques avec leurs transformées de Fourier, la relation entre la tension et le courant peut s'écrire comme suit :

$$I(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} V(\omega) \quad (2.10)$$

où $Z(\omega)$ est appelée l'impédance de la cellule au point opérationnel donné.

Afin de parvenir à une solution analytique, des hypothèses simplificatrices sont introduites. Nous nous intéressons ici particulièrement au modèle connu sous le nom de « *circuit équivalent de Randles* », illustré dans la figure (2.3).

Grâce à une motivation basée sur des données expérimentales, Karunathilaka et al. [Kar81a, Kar81b] ont apporté une modification au « *circuit équivalent de Randles* » appelé « *circuit équivalent de Karunathilaka* », illustré dans la figure (2.4).

L'élément W qui apparaît dans les deux circuits est appelé « *impédance de Warburg* » et représente le transfert [Las99] :

$$Z_W(\omega) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{j\omega}} \quad (2.11)$$

où σ est une constante réelle, appelée le coefficient de Warburg. La présence de W est due aux effets de diffusion au sein de l'électrolyte. L'impédance du circuit équivalent de Randles est donnée par :

$$\begin{cases} Z_r(\omega) = R_r(\omega) - jX_r(\omega) \\ R_r(\omega) = R_e + \frac{R_t\omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)} \\ X_r(\omega) = \frac{1}{C_d\omega} - \frac{\sigma C_d\omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d\omega \times D(\omega)} \end{cases} \quad (2.12)$$

avec

$$D(\omega) = \left(1 + \sigma C_d\omega^{\frac{1}{2}}\right)^2 + C_d^2\omega \left(\sigma + R_t\omega^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (2.13)$$

et celui du circuit équivalent de Karunathilaka et al. [Kar81a, Kar81b] par :

$$\begin{cases} Z_k(\omega) = R_k(\omega) - jX_k(\omega) \\ R_k(\omega) = R_e + \frac{R_t\omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)} + \frac{R_x}{1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2} \\ X_k(\omega) = \frac{1}{C_d\omega} - \frac{\sigma C_d\omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d\omega \times D(\omega)} + \frac{1}{C_x\omega} - \frac{1}{C_x\omega(1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2)} \end{cases} \quad (2.14)$$

Le circuit équivalent de Karunathilaka [Kar81a, Kar81b] a été validé expérimentalement.

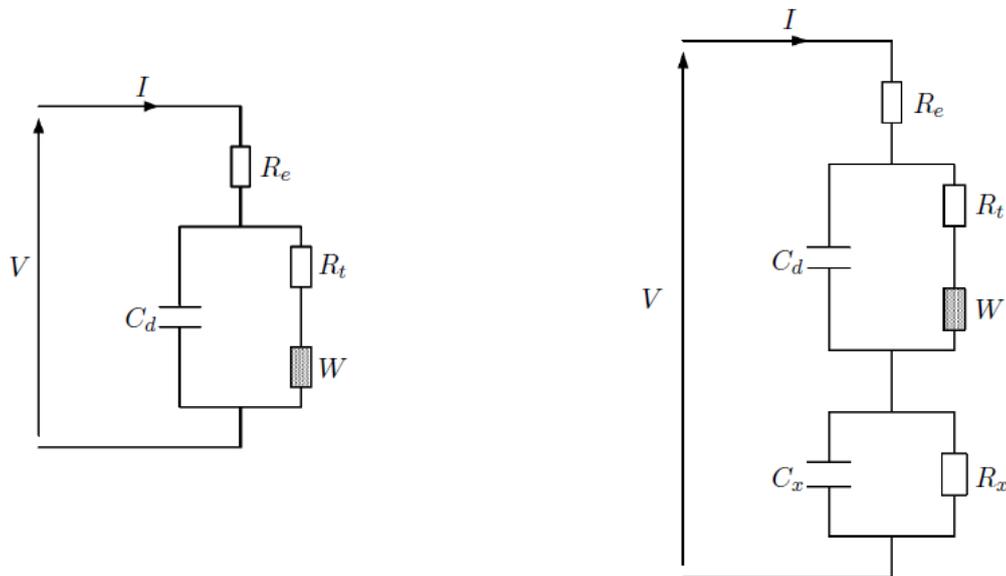


Fig. 2.3. Circuit équivalent de Randles. Fig. 2.4. Circuit équivalent de Karunathilaka.

2.2.4 Rhéologie

En rhéologie, lorsque des solides visco-élastiques sont employés comme matériaux isolateurs ou amortisseurs de vibrations, la dérivation fractionnaire est un moyen approprié pour décrire fidèlement l'amortissement dans les équations du mouvement [Bag79, Bag86]. L'introduction de

la dérivation non entière dans la modélisation réduit le nombre des paramètres du modèle [Sou96]. On peut voir cela sur l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'équation du mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par :

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n}{dt^n} \sigma(t) \quad (2.15)$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, et où b_m , E_0 , E_n , M et N sont des paramètres du modèle. Maintenant, en utilisant la dérivation fractionnaire, on n'a plus besoin que d'un seul terme de dérivation agissant respectivement sur la contrainte et la déformation. Ce qui produit un modèle compact à quatre ou cinq paramètres maximums [Bag89], au lieu d'une dizaine dans le cas de l'équation (2.15) :

$$(1 + bD_t^\alpha)\sigma(t) = (E_0 + E_1D_t^\alpha)\varepsilon(t) \quad (2.16)$$

2.2.5 Automatique

Les outils fractionnaires apparaissent aussi en automatique, notamment dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le régulateur sont régis par des équations différentielles fractionnaires. L'introduction de ces outils fractionnaires est motivée par le caractère robuste que procure la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), introduite par Oustaloup [Ous91]. Le régulateur proposé par Oustaloup a la forme suivante (dans l'une de ses versions) :

$$C_m = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m \quad (2.17)$$

où les réels C_0 , $\omega_b > 0$, $\omega_h > 0$, et $m > 0$ sont des paramètres du régulateur, m étant non entier. Oustaloup [Ous91] a mis en relief l'apport des contrôleurs fractionnaires dont CRONE constitue un cas particulier, et il a montré que l'introduction du caractère fractionnaire a rendu le contrôle plus puissant quant à la robustesse du système aussi bien vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres, que vis-à-vis des non linéarités présentes dans la boucle de commande. Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet du contrôle fractionnaire sans invoquer les travaux de Podlubny [Pod94], Chen et al. [Che09] et Caponetto et al. [Cap10] qui ont montré que l'utilisation des contrôleurs fractionnaires $PI^\lambda D^\mu$, qui sont une généralisation des contrôleurs traditionnels PID, assure un contrôle efficace des systèmes fractionnaires. Aussi, comme application des systèmes fractionnaires en automatique, on peut évoquer Matignon et Andrea-Novel [Mat96, Mat97] qui

ont présenté une stabilisation basée sur un observateur généralisant l'approche polynomiale des systèmes d'ordre entier.

2.3 Représentation des systèmes fractionnaires

2.3.1 Equation différentielle

Un système non entier peut être décrit par une équation différentielle de la forme

$$a_N D^{\alpha_N} y(t) + a_{N-1} D^{\alpha_{N-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_M D^{\beta_M} u(t) + b_{M-1} D^{\beta_{M-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.18)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie et où les ordres de dérivation $\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_0, \dots, \beta_M$ sont des nombres réels positifs ordonnés comme suit :

$$0 < \alpha_0 < \dots < \alpha_N \text{ et } 0 < \beta_0 < \dots < \beta_M \quad (2.19)$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle classique à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_N > \beta_M$ pour que le système soit strictement propre.

Dans l'équation (2.18), qui décrit la dynamique d'un système linéaire invariant monovarié d'ordre fractionnaire, deux cas se présentent et conduisent à deux types de systèmes: les systèmes commensurables ou d'ordres commensurables et les systèmes non commensurables ou d'ordres non commensurables.

2.3.2 Systèmes fractionnaires commensurables et non commensurables

Un système est dit commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle fractionnaire qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base ν . C'est à dire dans l'équation (2.18), la condition suivante est remplie :

$$\alpha_k, \beta_k = k\nu, \quad \nu \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

L'équation (2.18) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\sum_{k=0}^N a_k D^{k\nu} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k D^{k\nu} u(t) \quad (2.21)$$

Un système est dit non commensurable si la condition (2.20) n'est pas remplie.

2.3.3 Fonction de transfert

La transformée de *Laplace* de l'équation différentielle (2.18), est donnée par :

$$a_N s^{\alpha_N} Y(s) + a_{N-1} s^{\alpha_{N-1}} Y(s) + \dots + a_0 s^{\alpha_0} Y(s) = b_M s^{\beta_M} U(s) + b_{M-1} s^{\beta_{M-1}} U(s) + \dots + b_0 s^{\beta_0} U(s) \quad (2.22)$$

Cette équation détermine directement la forme classique d'une fonction de transfert non entière :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_M s^{\beta_M} + b_{M-1} s^{\beta_{M-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_N s^{\alpha_N} + a_{N-1} s^{\alpha_{N-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.23)$$

Si le système est commensurable d'ordre v , cette fonction de transfert peut être réécrite selon :

$$F(s) = \frac{b_M s^{Mv} + b_{M-1} s^{(M-1)v} + \dots + b_1 s^v + b_0}{a_N s^{Nv} + a_{N-1} s^{(N-1)v} + \dots + a_1 s^v + a_0} \quad (2.24)$$

Une notation particulière d'un transfert commensurable peut être définie par la fonction rationnelle R_v :

$$F(s) = R_v(s^v) \quad (2.25)$$

Avec :

$$R_v(s^v) = \frac{Q_v(s^v)}{P_v(s^v)} = \frac{b_M (s^v)^M + b_{M-1} (s^v)^{M-1} + \dots + b_1 s^v + b_0}{a_N (s^v)^N + a_{N-1} (s^v)^{N-1} + \dots + a_1 s^v + a_0} \quad (2.26)$$

où Q_v et P_v sont deux polynômes à puissances entières et v l'ordre commensurable.

Les zéros des polynômes Q_v et P_v sont nommés respectivement les zéros en s^v et les pôles en s^v de F .

2.3.3.1 Forme modale factorisée

Dans un premier niveau de généralisation, tous les zéros et les pôles en s^v sont associés à l'ordre commensurable v . La fonction de transfert est alors mise sous la forme :

$$F(s) = G_0 \frac{\prod_{k'=1}^{N'} (s^v - z_{k'})^{q_{k'}}}{\prod_{k=1}^{N'} (s^v - p_k)^{q_k}}, \quad q_{k'} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q_k \in \mathbb{N} \quad (2.27)$$

où G_0 est un gain, $z_{k'}$ et p_k étant respectivement les zéros et les pôles en s^v de multiplicités respectives $q_{k'}$ et q_k de la fonction de transfert (2.26).

Dans un deuxième niveau de généralisation, la fonction de transfert peut être représentée sous la forme :

$$F(s) = G_0 \frac{\prod_{k'=1}^{N'} (s^{v k'} - z_{k'})^{q_{k'}}}{\prod_{k=1}^{N'} (s^{v k} - p_k)^{q_k}}, \quad q_{k'} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q_k \in \mathbb{N} \quad (2.28)$$

où G_0 est un gain, $z_{k'}$ et p_k étant respectivement les zéros en $s^{v_{k'}}$ et les pôles en s^{v_k} de multiplicités respectives $q_{k'}$ et q_k de la fonction de transfert (2.23).

En dehors de ces formes modales factorisées, d'autres formes, dites modales développées, peuvent également être obtenues.

2.3.3.2 Forme modale développée

Ce type de représentations met en évidence les modes propres du système.

Dans un premier niveau de généralisation, la fonction de transfert est mise sous la forme :

$$F(s) = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{l=1}^{r_k} \frac{a_{k,l}}{(s^v - p_k)^l}, \quad r_k \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

où p_k , $k = 1, \dots, N$ sont les pôles en s^v de multiplicités r_k de la fonction de transfert (2.26)

Dans un deuxième niveau de généralisation, les pôles en s^v peuvent être associés à des ordres différents v_k , la fonction de transfert pouvant alors s'écrire sous la forme :

$$F(s) = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{l=1}^{r_k} \frac{a_{k,l}}{(s^{v_k} - p_k)^l}, \quad r_k \in \mathbb{N} \quad (2.30)$$

p_k étant les pôles en s^{v_k} de multiplicités entières r_k .

2.4 Stabilité des systèmes non entiers

La stabilité des systèmes non entiers a été traitée dans plusieurs contextes (linéaire, non linéaire, commensurable, non commensurable, variant et invariant dans le temps, avec et sans retard, analytiquement, numériquement) par plusieurs auteurs [Ike77, Mati98, Mer09, Tri09, Sab13, Ben15, Iva18]. Le critère de stabilité le plus connu pour les systèmes non entiers d'ordre commensurable v est celui de Matignon [Mat98]. En effet, Matignon a démontré la stabilité pour un ordre v entre 0 et 1. Le théorème permet de vérifier la stabilité à travers le placement des pôles en s^v au lieu des pôles en s . Dans l'article [Moz05], le théorème a été étendu pour un ordre commensurable v entre 1 et 2 où les auteurs ont défini un nouvel ordre $v' = v/2$ et le théorème initial de Matignon a été appliqué pour les pôles en $s^{v'}$ du système. Dans la thèse de Aoun [Aou05], le théorème de Matignon a été validé pour n'importe quel ordre commensurable, et la démonstration de l'instabilité des systèmes non entiers pour des ordres supérieurs à 2 a été présentée. Ainsi, le théorème de Aoun [Aou05] est présentée ci-dessous avec sa preuve. Ce

théorème est utilisé ultérieurement pour déterminer la stabilité des fonctions de transfert élémentaires [Mal11].

Théorème : [Aou05] ([Mat98] étendu)

Soient F la fonction de transfert (2.26) non entière et commensurable à l'ordre ν . F est stable au sens BIBO (Bounded Input Bounded Output) ssi :

$$0 < \nu < 2 \quad (2.31)$$

et

$$|\arg(p_k)| > \frac{\nu\pi}{2}, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.32)$$

avec p_k sont les pôles en s^ν de F .

Démonstration

Afin de démontrer la validité du théorème de *Matignon étendu*, il suffit de démontrer que F est instable ssi :

$$\nu \geq 2 \quad (2.33)$$

où

$$0 < \nu < 2, \quad \exists p_k \in \mathbb{C}, |\arg(p_k)| \leq \frac{\nu\pi}{2} \quad (2.34)$$

Soit $\{p_k\}_{k=1,\dots,N}$ l'ensemble des pôles en s^ν de $F(s)$ tel que $P_\nu(p_k^\nu) = 0$. La fonction multiforme $s \mapsto s^\nu$ se transforme en une fonction analytique après avoir effectué une coupure dans le plan complexe le long de \mathbb{R}_- . Par conséquent, tous les arguments de s sont restreint à $[-\pi, \pi[$ et les pôles en s de $F(s)$ sont alors donnés par :

$$p_{l,k} = |p_k|^{\frac{1}{\nu}} e^{j\left(\frac{\arg(p_k) + 2l\pi}{\nu}\right)}, \quad k = 1, \dots, N \text{ et } l \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

tel que :

$$-\pi \leq \frac{\arg(p_k) + 2l\pi}{\nu} < \pi \quad (2.36)$$

Le système représenté par $F(s)$ est instable ssi il existe un pôle à partie réelle positive, soit :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\arg(p_k) + 2l\pi}{\nu} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.37)$$

Par conséquent, $F(s)$ est instable ssi il existe un $l \in \mathbb{Z}$ satisfaisant (2.37), ou bien un l satisfaisant l'inégalité

$$-v\frac{\pi}{2} - \arg(p_k) \leq 2l\pi \leq v\frac{\pi}{2} - \arg(p_k) \quad (2.38)$$

Pour des raisons de simplicité de calcul et sans perte de généralité, la détermination principale des arguments de p_k est définie dans $]-\pi, \pi[$.

Suivant la valeur de ν , deux cas peuvent se distinguer :

– **1^{er} cas : $\nu \geq 2$**

$l = 0$ vérifie la contrainte (2.38). Par conséquent, F possède au moins N pôles instables $p_{k,0}$, $k = 1, \dots, N$.

– **2^e cas : $0 < \nu < 2$**

L'unique valeur de l pourrait satisfaire (2.38) est $l = 0$ ssi :

$$|\arg(p_k)| \leq \frac{\nu\pi}{2} \quad (2.39)$$

Compte tenu des résultats obtenus pour $\nu \geq 2$ et $0 < \nu < 2$, la fonction de transfert est instable ssi :

$$\nu \geq 2 \quad (2.40)$$

où

$$0 < \nu < 2, \exists p_k \in \mathbb{C}, \quad |\arg(p_k)| \leq \frac{\nu\pi}{2} \quad (2.41)$$

Par contradiction, la fonction de transfert est stable ssi (2.31) et (2.32) sont satisfaites.

La figure (2.9) montre la région de stabilité pour différentes valeurs de l'ordre commensurable ν .

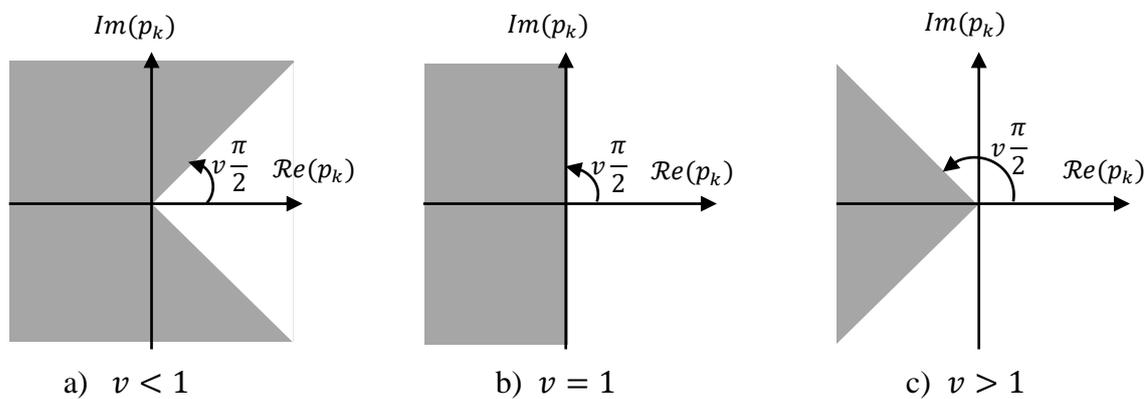


Fig. 2.5. Régions de stabilité : un système est stable ssi ses pôles en s^ν sont à l'intérieur du domaine grisé.

2.5 Fonctions de transfert fractionnaires élémentaires

Lors de l'étude des systèmes d'ordre fractionnaire commensurable, il est important de connaître les caractéristiques des fonctions de transfert élémentaires du premier et du deuxième type (généralisation de la notion de la fonction de transfert, respectivement, du premier et du

deuxième ordre dans le cas entier). Dans leur article [Mal11], R. Malti, X. Moreau, F. Khemane et A. Oustaloup ont étudié ces deux types de systèmes en termes de stabilité et de résonance. Ce travail a constitué une contribution originale dans la thèse de F. Khemane [Khe11]. Les résultats de cette étude seront présentés dans les deux sections suivantes.

2.5.1 Fonction de transfert élémentaire du premier type [Mal11]

La fonction de transfert élémentaire du premier type est donnée sous sa forme canonique par :

$$F_1(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^v} \quad (2.42)$$

avec $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ représente la fréquence naturelle non amortie.

2.5.1.1 Stabilité et résonance

La condition de stabilité de (2.42) est obtenue à partir du théorème de *Matignon étendu* :

$$0 < v < 2 \quad (2.43)$$

La réponse fréquentielle s'obtient en remplaçant s par $j\omega$ dans (2.42) :

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega}{\omega_n}\right)^v + 1} \quad (2.44)$$

Posons $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ la fréquence normalisée, l'équation (2.44) peut être réécrite comme suit :

$$F_1(j\omega) = \mathcal{F}_1(j\Omega) = \frac{1}{\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega\right)^v + 1} \quad (2.45)$$

ou bien :

$$\mathcal{F}_1(j\Omega) = \frac{1}{1 + \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v + j\sin\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v} \quad (2.46)$$

Le gain en dB est donné par :

$$|F_1(j\omega)|_{dB} = |\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{dB} = -10 \log\left(1 + 2\cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v + \Omega^{2v}\right) \quad (2.47)$$

Dans le cas où $F_1(s)$ est résonant, $|\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{dB}$ possède au moins un maximum. Par conséquent, $F_1(s)$ est résonant si l'équation :

$$\frac{d|\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow 2v\Omega^{2v-1} + 2v\cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^{v-1} = 0 \quad (2.48)$$

possède au moins une solution réelle et strictement positive qui correspond à ce maximum. Une seule solution peut ainsi être obtenue à la fréquence :

$$\Omega_r^v = -\cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.49)$$

à condition que :

$$1 < v < 2 \quad (2.50)$$

Le gain à la fréquence de résonance est obtenu en remplaçant (2.49) dans (2.47) :

$$|\mathcal{F}_1(j\Omega_r)|_{dB} = -20 \log\left(\sin\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2.51)$$

La phase à la fréquence de résonance est obtenue à partir de (2.46) :

$$\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = -\arctan\left(\frac{\sin\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega_r^v}{1 + \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega_r^v}\right) = \arctan\left(\cot\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2.52)$$

Par conséquent :

$$\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = (1 - v)\frac{\pi}{2} \quad (2.53)$$

La fonction de transfert élémentaire de premier type est résonante si la condition (2.50) est satisfaite. La fréquence de résonance est donnée par (2.49), le gain et la phase à cette fréquence sont donnés respectivement par (2.51) et (2.53).

2.5.1.2 Exemple

Soit la fonction de transfert élémentaire de premier type :

$$F_1(s) = \frac{1}{1 + s^{1.5}} \quad (2.54)$$

La condition de résonance présentée dans (2.50) est satisfaite dans cet exemple avec $v = 1.5$. Par conséquent, $F_1(s)$ est résonante à la fréquence de résonance calculée de (2.49) $\Omega_r = 0.7937$. Le gain et la phase à la fréquence de résonance sont donnés à partir de (2.51) et (2.53) respectivement par $|\mathcal{F}_1(j\Omega_r)|_{dB} = 3.0103dB$ et $\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = -\pi/4$ rad.

La figure (2.6) présente le diagramme de Bode (gain et phase) de ce système.

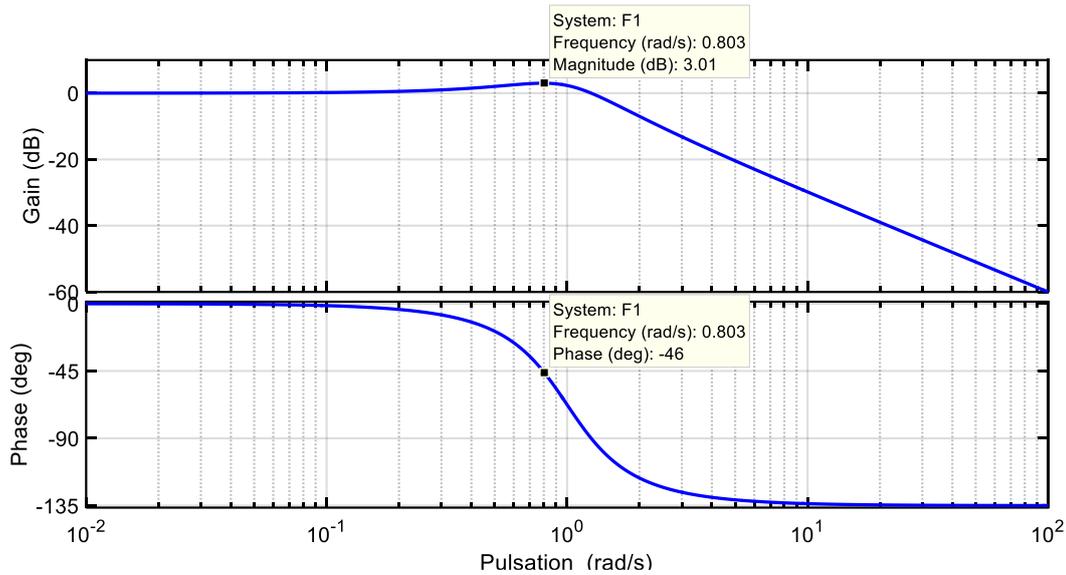


Fig. 2.6. Diagramme de Bode de F_1 définie par (2.54).

2.5.2 Fonction de transfert élémentaire du second type [Mal11]

Lorsque le système possède des pôles en s^v complexes conjugués, il est préférable comme dans le cas entier de le représenter par des fonctions de transfert élémentaires du deuxième type ayant des coefficients réels :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^v + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^{2v}} \quad (2.55)$$

avec $v \in \mathbb{R}_+$, $\omega_n \in \mathbb{R}_+$ et $\xi \in \mathbb{R}$ sont respectivement l'ordre commensurable, la fréquence naturelle non amortie et le facteur d'amortissement.

L'objectif de cette partie est d'étendre, selon [Mal11], les propriétés d'une fonction de transfert rationnelle du deuxième ordre à une fonction de transfert non entière du deuxième type. Sachant que le système rationnel (2.55) avec $v = 1$:

- est stable si le facteur d'amortissement $\xi > 0$,
- est résonant si $0 < \xi < \sqrt{2}/2$,
- possède deux pôles complexes conjugués si $0 < \xi < 1$,
- possède un pôle double si $\xi = 1$,
- possède deux pôles réels négatifs si $\xi > 1$.

Les conditions de stabilité de la fonction de transfert élémentaire du deuxième type sont d'abord déterminées en fonction du facteur d'amortissement ξ et de l'ordre non entier v . Les conditions de résonance sont ensuite déterminées numériquement.

2.5.2.1 Stabilité

Les pôles en s^v de (2.55) sont donnés par :

$$s_{1,2}^v = \omega_n^v \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad (2.56)$$

Deux cas se distinguent selon la valeur de $|\xi|$:

$$\begin{cases} |\xi| \geq 1 \Rightarrow \text{les pôles en } s^v \text{ sont réels} \\ |\xi| < 1 \Rightarrow \text{les pôles en } s^v \text{ sont complexes conjugués} \end{cases} \quad (2.57)$$

Si $|\xi| \geq 1$

La fonction de transfert (2.55) possède dans ce cas deux pôles réels en s^v . Cette fonction est stable si ces pôles sont négatifs :

$$s_{1,2}^v < 0 \Rightarrow \omega_n^v \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) < 0 \quad (2.58)$$

$$\Rightarrow -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \quad (2.59)$$

L'inégalité (2.59) est satisfaite seulement pour des valeurs positives de ξ , par conséquent :

$$1 \leq \xi < +\infty \quad (2.60)$$

Si $|\xi| < 1$

La fonction de transfert (2.55) possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués en s^v :

$$s_{1,2}^v = \omega_n^v \left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (2.61)$$

$$s_{1,2}^v = \omega_n^v e^{\pm j\theta} \quad (2.62)$$

avec θ , limité à $]0, \pi[$, est donné par :

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi}\right) & \text{si } -1 < \xi \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi}\right) + \pi & \text{si } 0 \leq \xi < 1 \end{cases} \quad (2.63)$$

Toujours selon le théorème étendu de Matignon, le système est stable ssi :

$$0 < v \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (2.64)$$

Deux cas se distinguent :

1^{er} cas : $-1 < \xi < 0$

Dans ce cas :

$$0 < v \leq 1 \text{ et } \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi} \quad (2.65)$$

Par conséquent, θ est dans le premier quadrant :

$$0 < v \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.66)$$

De plus, en remplaçant (2.63) dans (2.66) :

$$\begin{aligned} \tan\left(v \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow \tan^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1-\xi^2}{\xi^2} \leq \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \xi^2 < \cos^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Puisque ξ est négatif, la condition à satisfaire est :

$$-1 < -\cos\left(v \frac{\pi}{2}\right) < \xi \leq 0 \quad (2.68)$$

2^{ème} cas : $0 \leq \xi < 1$

Dans ce cas :

$$1 \leq v < 2 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} < 0 \quad (2.69)$$

Par conséquent, θ est dans le deuxième quadrant : $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. De plus, en se basant sur (2.64) :

$$\frac{\pi}{2} \leq v \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (2.70)$$

De plus, en remplaçant (2.63) dans (2.70) :

$$\begin{aligned} \tan\left(v \frac{\pi}{2} - \pi\right) < \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi} < \tan(0) &\Rightarrow \tan^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) > \frac{1-\xi^2}{\xi^2} > 0 \\ &\Rightarrow \xi^2 > \cos^2\left(v \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Puisque ξ est négatif, la condition à satisfaire est :

$$0 < -\cos\left(v \frac{\pi}{2}\right) < \xi < 1 \quad (2.72)$$

La combinaison des inégalités (2.60), (2.68) et (2.72) conduit au corollaire suivant du théorème de Matignon.

Corollaire 2.1 : Stabilité d'une fonction de transfert non entière du deuxième type [Mal11]

La fonction de transfert (2.55) est stable ssi :

$$-\cos\left(v \frac{\pi}{2}\right) < \xi < \infty \quad \text{et} \quad 0 < v < 2 \quad (2.73)$$

Ce corollaire est en concordance avec le cas rationnel. En effet, pour un ordre $v = 1$, la condition de stabilité pour une fonction de transfert rationnelle de deuxième ordre s'écrit :

$$0 < \xi < \infty \quad (2.74)$$

2.5.2.2 Résonance

La réponse fréquentielle de (2.55) est donnée par :

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^v + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{2v}} \quad (2.75)$$

Avec $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ la fréquence normalisée, l'équation (2.75) peut être réécrite comme suit :

$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}_2(j\Omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\Omega)^v + (j\Omega)^{2v}} \quad (2.76)$$

Le gain de $\mathcal{F}_2(j\Omega)$ est alors donné par :

$$|\mathcal{F}_2(j\Omega)| = \frac{1}{\left|1 + 2\xi e^{jv\frac{\pi}{2}}\Omega^v + e^{jv\pi}\Omega^{2v}\right|} \quad (2.77)$$

qui peut être réécrit comme suit :

$$|\mathcal{F}_2(j\Omega)| = \frac{1}{\left|\left(1 + 2\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v + \cos(v\pi)\Omega^{2v}\right) + j\left(2\xi \sin\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v + \sin(v\pi)\Omega^{2v}\right)\right|} \quad (2.78)$$

Le gain en dB est donné par :

$$|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{dB} = -10 \log \left[\Omega^{4v} + 4\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^{3v} + 4\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^v + 1 \right] \quad (2.79)$$

Dans le cas où $F_2(s)$ est résonante, $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{dB}$ a au moins un maximum. Par conséquent, $F_2(s)$ est résonante si l'équation :

$$\frac{d|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega^{4v-1} + 3\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^{3v-1} + (2\xi^2 + \cos(v\pi))\Omega^{2v-1} + \xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^{v-1} = 0 \quad (2.80)$$

possède une solution réelle strictement positive qui correspond à ce maximum. En simplifiant le facteur en commun $(v-1)$ dans (2.80), l'équation devient :

$$\frac{d|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega^{3v} + 3\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)\Omega^{2v} + (2\xi^2 + \cos(v\pi))\Omega^v + \xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.81)$$

A partir de cette équation, il est possible de retrouver la condition de résonance dans le cas entier, en remplaçant ν par 1 :

$$\Omega^3 + (2\xi^2 - 1)\Omega = 0 \quad (2.82)$$

La solution strictement positive est donnée par :

$$\Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2.83)$$

D'où la condition de résonance sur le facteur d'amortissement dans le cas rationnel :

$$1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.84)$$

Selon [Mal11, Khe11], les solutions de l'équation (2.81) de troisième ordre en Ω^ν peuvent être réelles positives, réelles négatives, ou complexes. Le système étudié peut avoir zéro, une ou deux fréquences de résonance selon le nombre de solutions réelles strictement positives qui correspondent aux maxima de $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|$. Certaines solutions réelles et strictement positives peuvent correspondre à des minima de $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|$, notamment lorsque le système présente une double résonance, il possède alors un minimum entre deux maxima.

L'équation (2.81), peut difficilement être résolue analytiquement [Khe11]. Toutefois, une solution numérique est donnée par la figure (2.7). La région grise présente les combinaisons de ν et ξ qui conduisent à un système non résonant. Les deux régions jaune et verte, présentent les combinaisons de ν et ξ qui conduisent à un système résonant avec respectivement une et deux fréquences de résonance. La région rouge présente des combinaisons de ν et ξ du système instable.

Résumé

- Si $0 < \nu \leq 0.5$ et $-\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi < 0 \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ est résonante.
- Si $0 < \nu \leq 0.5$ et $0 \leq \xi \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ n'est jamais résonante (pour $\xi = 0$ l'équation (2.81) n'a pas de solution strictement positive).
- Si $0.5 < \nu \leq 1$ et $-\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi < \xi_0 \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ est résonante. Avec ξ_0 est calculé numériquement et présenté sur la figure (2.7) comme étant le contour supérieur de la région de résonance jaune dans l'intervalle $\nu \in]0.5, 1]$.
- Si $0.5 < \nu \leq 1$ et $\xi_0 \leq \xi < \infty \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ n'est jamais résonante.
- Si $1 < \nu \leq 2$ et $-\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi < \infty \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ est toujours résonante.

- Si $\nu_1 < \nu \leq 2$ et $\xi_1 < \xi < \infty \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ possède deux fréquences de résonance. Sachons que ν_1 et ξ_1 sont calculés numériquement et tracés sur la figure (2.7) comme étant le contour inférieur à gauche de la région verte.

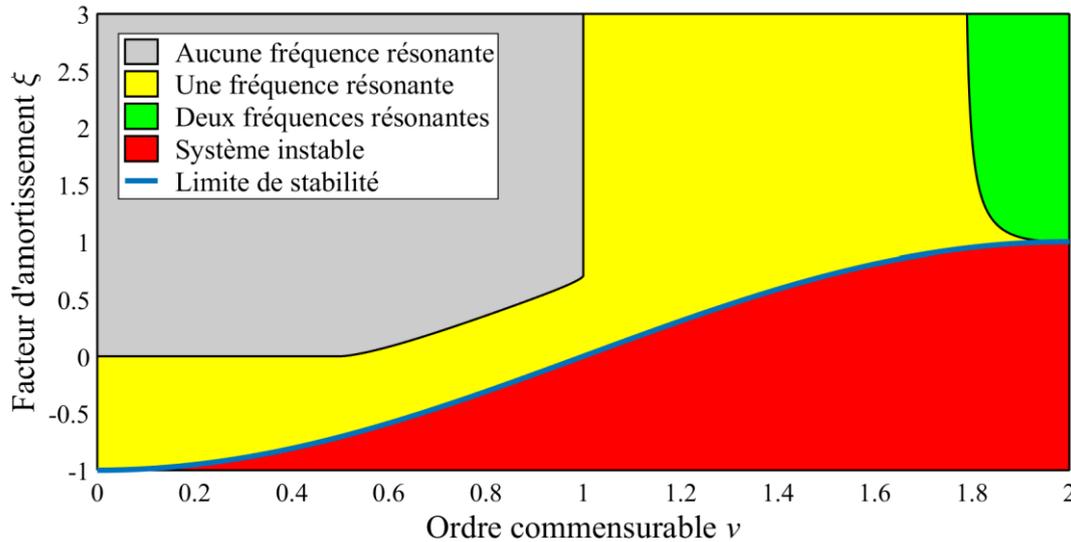


Fig. 2.7. Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (2.55) dans le plan (ν, ξ) selon [Mal11].

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques exemples d'applications des systèmes fractionnaires, notamment en thermique dans l'équation de la chaleur, en électricité dans l'impédance fractionnaire d'un circuit du type intégrateur fractionnaire, en rhéologie dans l'exemple du comportement « contrainte-déformation » d'un solide et en électrochimie dans la modélisation d'une cellule électrolytique et en automatique avec la commande fractionnaire.

Comme dans le cas conventionnel, lors de l'étude des systèmes d'ordre fractionnaire, il est important de connaître les caractéristiques des fonctions de transfert fractionnaires élémentaires du premier et du deuxième type notamment en termes de stabilité et de résonance. Ces caractéristiques ont fait l'objet d'une publication, présentée par R. Malti et al. [Mal11], qui a constitué une contribution originale dans la thèse de F. Khemane [Khe11].

Le chapitre 3 présente un complément de l'étude [Mal11] avec une analyse mathématique plus approfondie de la fonction de transfert fractionnaire du deuxième type en termes de résonance en constituant une première contribution de cette thèse.

Chapitre 3

Etude analytique des limites et régions de résonance des systèmes fractionnaires du second type

3.1 Introduction

Les systèmes fractionnaires d'ordre fractionnaire commensurable du premier et du deuxième type ont été étudiés dans [Mal11] de point de vue stabilité et résonance. Pour le premier type de systèmes, la condition de stabilité et la limite de résonance ont été déterminées analytiquement. Pour les systèmes du deuxième type, la condition de stabilité a été déterminée analytiquement par contre les limites et les régions de résonance ont été spécifiées numériquement.

Dans ce chapitre, nous déterminons ces limites et régions analytiquement. Ce travail constitue *une première contribution de cette thèse [Bou21], à savoir "Etude analytique des limites et régions de résonance de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type"*.

Dans la première partie, nous présentons la formulation mathématique requise du problème des limites de résonance qui a conduit à une équation cubique obtenue en mettant la première dérivée de l'amplitude de la réponse fréquentielle du système égale à zéro.

Dans la deuxième partie, une étude mathématique profonde est menée sur cette équation pour conduire finalement à l'expression analytique des limites de résonance. De plus, afin de donner une preuve mathématique de la division des régions de résonance, *la règle des signes de Descartes* a été appliquée.

Pour clôturer, dans la troisième partie, nous validons les résultats trouvés sur des exemples numériques puis sur un filtre d'ordre fractionnaire.

3.2 Problématique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes fractionnaires du deuxième type. Ces systèmes ont été étudiés par Malti et al. [Mal11] où la condition de stabilité (2.73) a été déduite analytiquement du théorème de Matignon étendu. Cependant, les limites et les régions de résonance ont été déterminées numériquement (sans étude mathématique) (figure 2.7).

Au cours de ce chapitre, nous présentons une étude originale qui porte sur *l'étude analytique des limites et des régions de résonance des systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type*.

Pour commencer, rappelons tout d'abord la fonction de transfert du deuxième type :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^v + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^{2v}} \quad (3.1)$$

avec $v \in \mathbb{R}_+^*$, $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\xi \in \mathbb{R}$ sont respectivement l'ordre commensurable, la fréquence naturelle non amortie et le facteur d'amortissement.

a) Stabilité

Corollaire 3.1 : [Mal11]

La fonction de transfert de deuxième type (3.1) est stable ssi :

$$-\cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) < \xi < \infty \quad \text{et} \quad 0 < v < 2 \quad (3.2)$$

b) Résonance : Problématique

La fonction de transfert F_2 (3.1) est résonante ssi la dérivée du module $|F_2(j\omega)|$ s'annule au moins à une solution strictement positive et change de signe. Par conséquent, F_2 est résonante ssi l'équation (voir §2.4.2.2) :

$$\frac{d|F_2(j\omega)|_{dB}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \Omega^{3v} + 3\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) \Omega^{2v} + (2\xi^2 + \cos(v\pi)) \Omega^v + \xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.3)$$

(avec $\Omega = \omega/\omega_n$ la fréquence normalisée) possède au moins une solution réelle strictement positive et la dérivée du module de $F_2(j\omega)$ change de signe. La dernière équation cubique en v peut avoir, dans \mathbb{R} , une (simple ou triple), deux (dont une des deux racines est double) ou trois racines (distinctes). Le nombre des fréquences de résonance de F_2 dépend du nombre des racines réelles positives de (3.3). Dans [Mal11, Khe11], ces racines ont été calculées numériquement puis le plan (v, ξ) a été divisé en régions de résonance selon le nombre des racines réelles positives

calculées comme c'est illustré dans la figure (3.1). Cette figure représente des combinaisons de ν et ξ reflétant la résonance des systèmes du deuxième type; la région grise ne produit aucun système résonant, les régions jaune et verte produisent des systèmes résonants avec respectivement une et deux fréquences de résonance. La zone rouge représente les systèmes instables. Notons que le début de la région verte selon ν , noté ν_1 dans [Khe11], n'est pas déterminé. De plus, le contour supérieur de la région jaune défini dans l'intervalle $\nu \in [0.5, 1]$ et le contour inférieur de la région verte défini dans l'intervalle $\nu \in [\nu_1, 2]$, notés respectivement ξ_0 et ξ_1 dans [Mal11, Khe11], sont calculés numériquement.

D'après [Mal11, Khe11], la résolution analytique de (3.3) n'est pas une tâche facile. Dans ce contexte, le présent chapitre complète l'étude existante sur les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type. Basé sur une étude mathématique détaillée de l'équation (3.3), ce travail fournit deux contributions principales : déterminer analytiquement les limites de résonance ξ_0 et ξ_1 (également ν_1) et désigner mathématiquement, dans le plan (ν, ξ) , les régions de résonance selon le nombre des racines positives de (3.3).

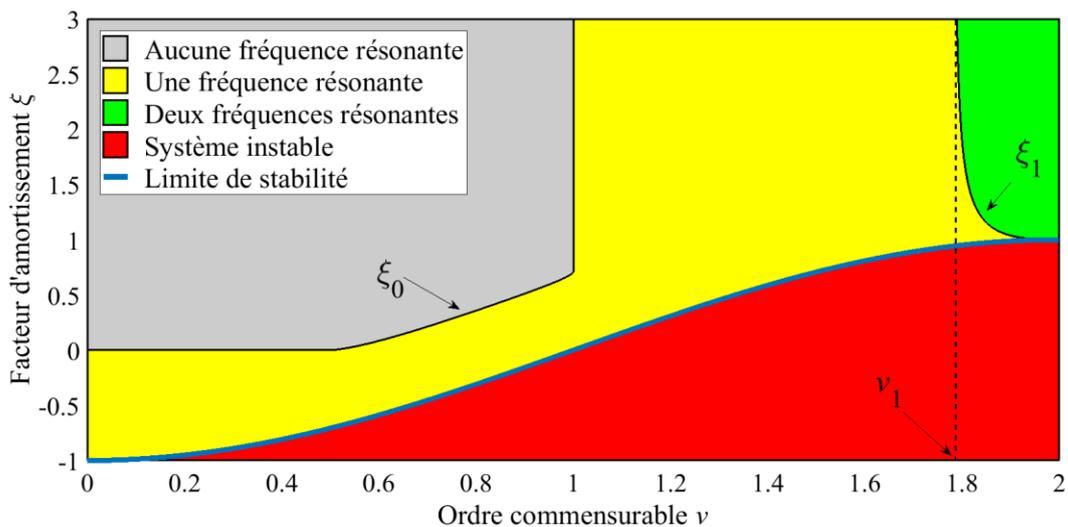


Fig. 3.1. Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (3.1) selon [Mal11].

3.3 Etude analytique des régions de résonance [Bou21]

Le premier problème rencontré lors de la recherche de l'expression des limites de résonance est de répondre à la question suivante : *Comment formuler mathématiquement ces limites et que représentent ces limites pour l'équation (3.3)?* Pour répondre à cette question, l'idée était de revenir aux systèmes conventionnels pour s'inspirer de leur démarche.

Rappelons tout d'abord comment la limite de résonance des systèmes conventionnels du second ordre a été déduite. Ces derniers systèmes représentent un sous-ensemble des systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type (3.1). La substitution par ($\nu = 1$) dans la dernière équation donne :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.4)$$

Les systèmes du second ordre sont résonants si l'équation (3.3) avec $\nu = 1$:

$$\Omega^3 + \Omega(2\xi^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega(\Omega^2 + 2\xi^2 - 1) = 0 \quad (3.5)$$

possède au minimum une racine strictement positive et le membre gauche de (3.5) change du signe.

La résolution de (3.5) donne :

$$\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega = \pm\sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.6)$$

Ces systèmes stables ($\xi > 0$) sont résonants lorsque $\xi < \sqrt{2}/2$ avec une seule fréquence de résonance $\Omega_{res} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$. On définit dans ce cas, la limite de résonance par $\xi_{lr} = \sqrt{2}/2$ qui sépare deux régions (systèmes résonants et systèmes non résonants). Quand on remplace ξ par ξ_{rl} dans l'équation (3.5), on aboutit à :

$$\Omega^3 = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) et en revanche l'équation (3.3) possède une racine triple ($\Omega=0$). Cette situation correspond à un discriminant nul de l'équation (3.7) et par conséquent de l'équation (3.3).

De la même manière, les limites de résonance ξ_0 et ξ_1 pour les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du second type correspondent à un discriminant D nul de l'équation (3.3). Pour aboutir à ces limites et spécifier les différentes régions de résonance du système, On a suivi les étapes suivantes.

Etape 1 : Résolution de l'équation $D = 0$

Après calcul (voir **Annexe A**), le discriminant D de (3.3) est donné par

$$D = 4 \left(9 \cos^2 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) - 8 \right) \xi^6 + 12 \left(-3 \cos^4 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) + 4 \right) \xi^4 + 12 \left(3 \cos^6 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos^4 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) + 2 \cos^2 \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) - 2 \right) \xi^2 - 4 \cos^3(\nu\pi) \quad (3.8)$$

La dernière équation est une équation cubique en ξ^2 . Pour résoudre cette équation, nous définissons une nouvelle variable :

$$y = \xi^2 \quad (3.9)$$

Par conséquent, nous obtenons une équation cubique en y :

$$D = 0 \Rightarrow ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{cases} a = 9 \cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 8 \\ b = 3\left(-3 \cos^4\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) + 4\right) \\ c = 3\left(3 \cos^6\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos^4\left(v\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 2\right) \\ d = -\cos^3(v\pi) \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode trigonométrique en tangente (voir **Annexe A**). Nous commençons la résolution par le changement de variable :

$$y = z - T \quad (3.12)$$

avec

$$T = \frac{bc - 9ad}{2(b^2 - 3ac)} \quad (3.13)$$

Après calcul, T est réduite à :

$$T = \frac{1}{8}(\cos(v\pi) - 9) \quad (3.14)$$

La substitution de (3.12) dans (3.10) donne :

$$rz^3 + sz^2 + pz + q = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$\begin{cases} r = 9\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 8 \\ s = \frac{9}{4}\left(7\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 8\right)\sin^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) \\ p = \frac{27}{16}\left(9\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 8\right)\sin^4\left(v\frac{\pi}{2}\right) \\ q = \frac{27}{64}\left(7\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) - 8\right)\sin^6\left(v\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous observons que :

$$pr > 0 \quad (3.17)$$

Ce que signifie que (3.15) possède une seule solution.

De plus,

$$p^2 - 3sq = -\frac{729}{8}\sin^4\left(v\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.18)$$

est négative. Par conséquent, la solution de (3.15) est exprimée en cotangente hyperbolique comme suit :

$$z = \sqrt{\frac{p}{3r}} \coth(\theta) \quad (3.19)$$

avec

$$\coth(3\theta) = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \quad (3.20)$$

D'où :

$$3\theta = \operatorname{argcoth} \left(-\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \right) \quad (3.21)$$

Cette dernière expression peut être réécrite comme suit :

$$3\theta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} + 1}{-\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} - 1} \right) \quad (3.22)$$

La substitution de (3.16) dans (3.22) donne :

$$\theta = -\frac{1}{6} \ln \left(8tg^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (3.23)$$

Par conséquent, (3.16) et (3.23) dans (3.19) donne:

$$z = \frac{3}{4} \left(\sin \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 \frac{e^{-\frac{1}{3} \ln \left(8tg^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right)} + 1}{e^{-\frac{1}{3} \ln \left(8tg^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right)} - 1} \quad (3.24)$$

La dernière expression peut être simplifiée comme suit :

$$z = \frac{3}{4} \left(\sin \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 \frac{1 + 2tg^{\frac{2}{3}} \left(v \frac{\pi}{2} \right)}{1 - 2tg^{\frac{2}{3}} \left(v \frac{\pi}{2} \right)} \quad (3.25)$$

Substituons (3.25) dans (3.12), la solution de (3.10) est donnée par :

$$y = \frac{\left(1 + \sin^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(1 + \cos^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) \right) tg^{\frac{2}{3}} \left(v \frac{\pi}{2} \right)}{1 - 2tg^{\frac{2}{3}} \left(v \frac{\pi}{2} \right)} \quad (3.26)$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$y = \frac{\cos^2\left(v\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + tg^{\frac{2}{3}}\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(1 - tg^{\frac{2}{3}}\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}{\left(1 - 2tg^{\frac{2}{3}}\left(v\frac{\pi}{2}\right)\right)} \quad (3.27)$$

Cette solution est tracée sur la figure (3.2).

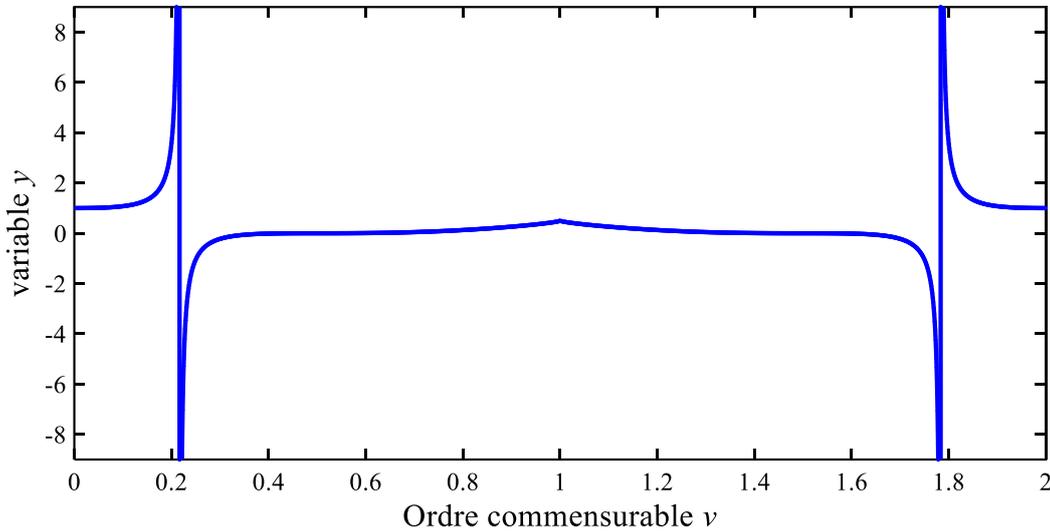


Fig. 3.2. Solution en y de l'équation $D = 0$.

Notons que le graphe a deux asymptotes verticales dont on peut déduire leurs équations de :

$$1 - 2tg^{\frac{2}{3}}\left(v\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.28)$$

D'où :

$$v = \frac{2}{\pi} \left(\pm \arctg\left(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right) + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.29)$$

D'après la condition de stabilité (3.2) :

$$0 < v < 2 \quad (3.30)$$

Alors, v a deux valeurs :

$$\begin{cases} v_{asy1} = 0.2163 \\ v_{asy2} = 1.7837 \end{cases} \quad (3.31)$$

Rappelons que $y = \xi^2$, donc y est toujours positif. Par conséquent, seule la partie positive du graphe de la figure (3.2) est maintenue. Pour le faire, on cherche tout d'abord les points d'intersection du graphe avec l'axe v comme suit :

$$y = 0 \Rightarrow 1 - tg^{\frac{2}{3}}\left(v\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.32)$$

Alors,

$$v = \pm 0.5 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.33)$$

Comme ν est compris entre 0 et 2 (condition de stabilité (3.2)), alors, ν a deux valeurs :

$$\begin{cases} \nu_{cr1} = 0.5 \\ \nu_{cr2} = 1.5 \end{cases} \quad (3.34)$$

La figure (3.3) présente le tracé de la partie positive de y .

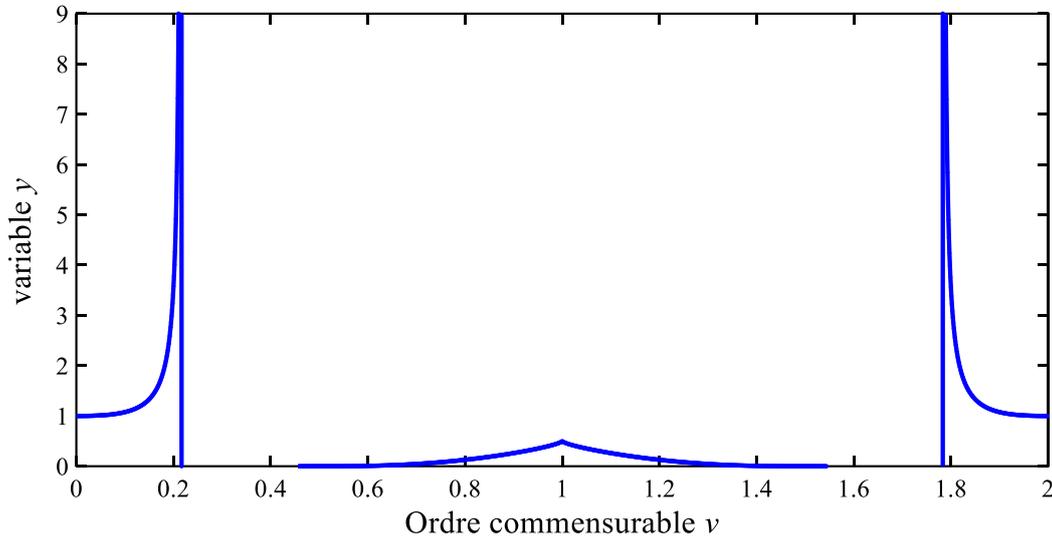


Fig. 3.3. Solution positive en y de l'équation $D = 0$.

Maintenant, la solution de (3.10) exprimée en ξ peut être déduite comme suit :

$$\xi = \pm \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \left(\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}{1 - 2\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}} \quad (3.35)$$

$$\nu \in]0, 0.2163[\cup [0.5, 1.5] \cup]1.7837, 2[$$

La figure (3.4) illustre la solution de (3.10) en ξ .

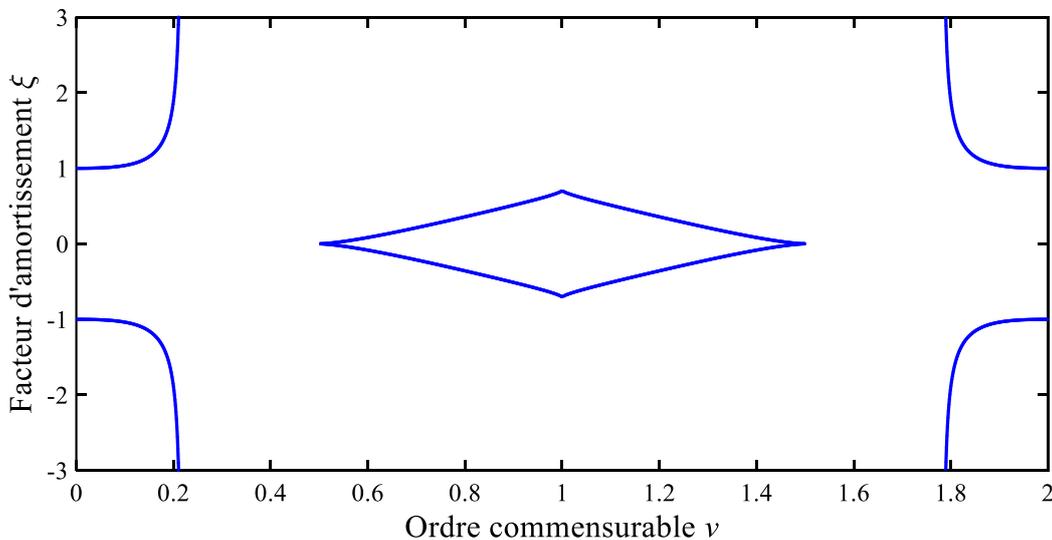


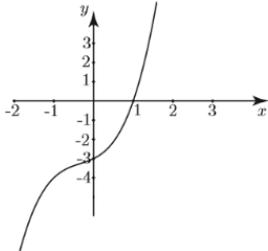
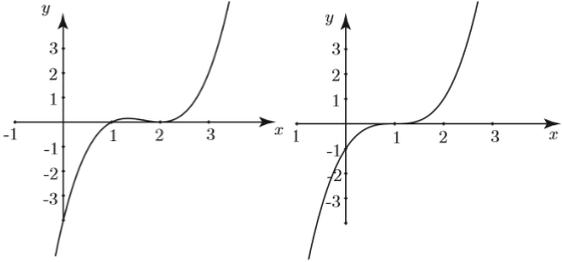
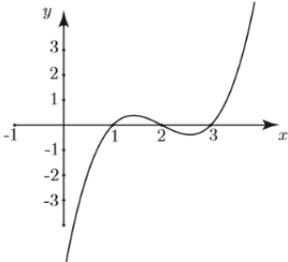
Fig. 3.4. Solution en ξ de l'équation $D = 0$.

Une fois, la solution de l'équation ($D = 0$) est obtenue (3.35), on passe aux régions de résonance. Pour spécifier ces régions, le nombre des racines positives simples de l'équation (3.3) doit être déterminé. Pour le faire, on doit tout d'abord déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (3.3). Puis, déterminer les nombres possibles des racines positives et négatives en appliquant *la règle des signes de Descartes*. Enfin, on peut déduire le nombre des racines positives de (3.3) connaissant le signe du discriminant D .

Etape 2 : Détermination du signe de D

Le nombre des racines réelles de l'équation cubique (3.3) est strictement déterminé par le signe de son discriminant D . Comme toute équation cubique à coefficients réels, trois cas se présentent comme le montre le tableau (3.1).

Tab. 3.1. Nombre des racines réelles d'une équation cubique.

Signe D et les racines d'une équation cubique	Interprétation géométrique
<p>Cas 1 : $D < 0$ 1 racine réelle simple. (avec 2 racines complexes conjuguées)</p>	 <p>The graph shows a cubic curve on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -2 to 3, and the y-axis from -4 to 3. The curve crosses the x-axis at a single point between x=0 and x=1, indicating one real root. It has a local minimum in the third quadrant and a local maximum in the first quadrant.</p>
<p>Cas 2 : $D = 0$ 3 racines réelles.</p>	 <p>The left graph shows a cubic curve with a horizontal tangent at the x-axis, indicating a double root and a simple root. The right graph shows a cubic curve with a horizontal tangent at the x-axis, indicating a triple root.</p> <p style="text-align: center;"> 2 racines réelles 1 racine réelle (1 simple et 1 double) (1 racine triple) </p>
<p>Cas 3 : $D > 0$ 3 racines réelles simples (distinctes).</p>	 <p>The graph shows a cubic curve on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -1 to 3, and the y-axis from -3 to 3. The curve crosses the x-axis at three distinct points: one between x=0 and x=1, one between x=1 and x=2, and one between x=2 and x=3.</p>

De l'équation (3.8) et l'équation (3.10), le discriminant D a le même signe que le polynôme cubique en y :

$$P(y) = ay^3 + by^2 + cy + d \tag{3.36}$$

avec a, b, c et d sont définis par (3.11).

De plus, d'après (3.17), l'équation ($D = 0$) possède une seule racine. D'où le signe de D peut être déduit comme le montre le tableau (3.2).

Tab. 3.2. Signe du discriminant D .

y	$-\infty$	y_0	$+\infty$
Signe de $D(y)$	– signe de (a)	0	signe de (a)

où y_0 est la solution de $D = 0$ donnée par (3.27) et a est définie dans (3.11) comme suit :

$$a = 9 \cos^2 \left(v \frac{\pi}{2} \right) - 8 \tag{3.37}$$

Avant de déterminer le signe de a , trouvons tout d'abord la solution de l'équation $a = 0$. La résolution de cette équation conduit à :

$$v = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\arccos \left(\frac{8}{9} \right) + 2k\pi \right) \\ \frac{2}{\pi} \left(\pi - \arccos \left(\frac{8}{9} \right) + 2k\pi \right) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.38}$$

Sur l'intervalle $0 < v < 2$ (condition de stabilité (3.2)), v admet uniquement deux valeurs :

$$\begin{cases} v_1 = 0.2163 \\ v_2 = 1.7837 \end{cases} \tag{3.39}$$

Remarquons que ces deux valeurs correspondent aux équations des deux asymptotes verticales (3.31).

Maintenant, le signe de a est donné par le tableau (3.3).

Tab. 3.3. Signe de a .

v	0	v_1	v_2	2
Signe de a	+	0	–	+

Prenons la figure (3.2), et d'après les tableaux (3.2) et (3.3), le signe du discriminant D , pour chaque combinaison (v, y) , est déduit comme le montre la figure (3.5).

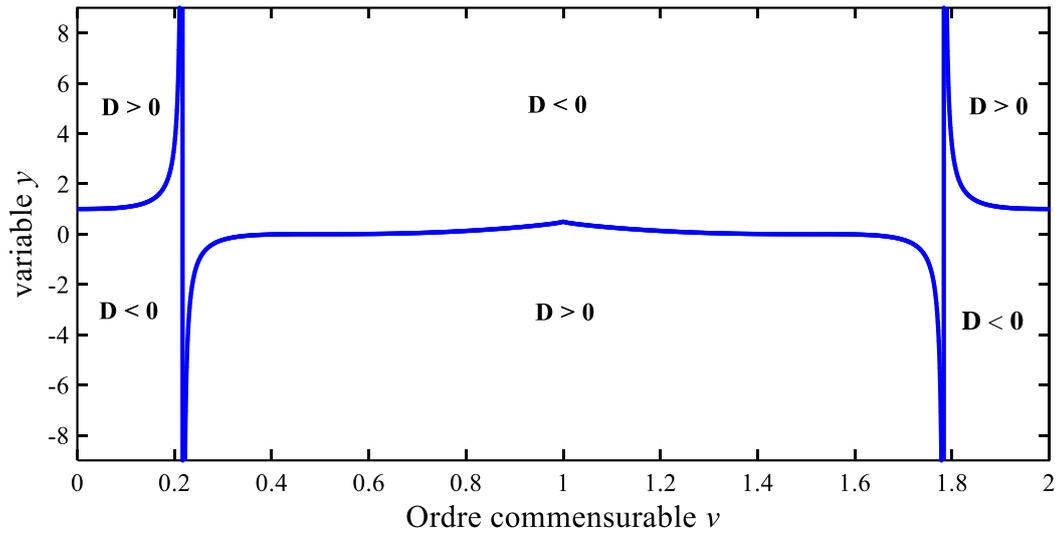


Fig. 3.5. Signes du discriminant D dans le plan (ν, y) .

Sachons que $y = \xi^2$, seule la partie positive de y est gardée. D'où la figure (3.6).

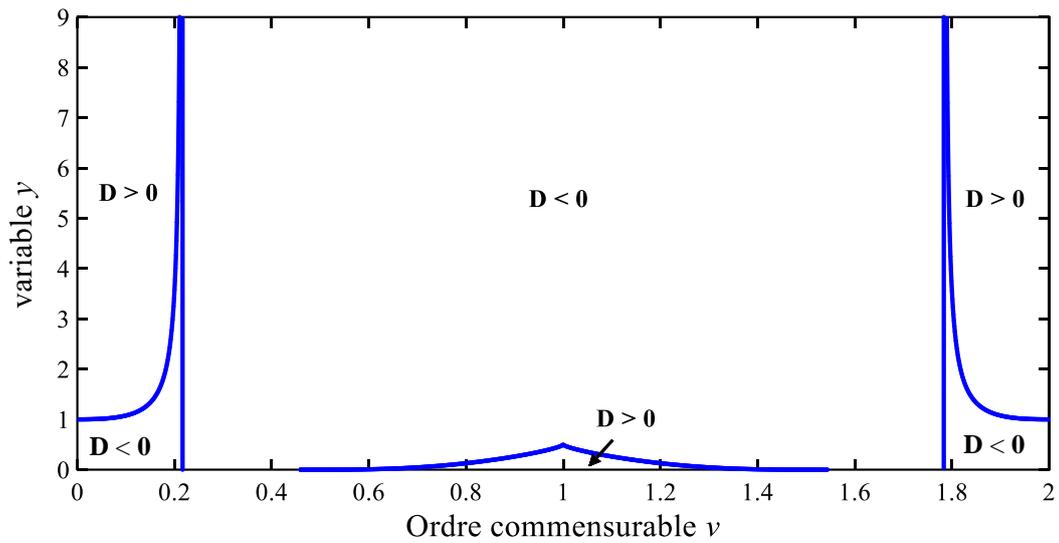


Fig. 3.6. Signes du discriminant D dans le plan (ν, y) pour $y \geq 0$.

Enfin, le signe de D est déduit pour toute combinaison (ν, ξ) comme c'est illustré dans la figure (3.7).

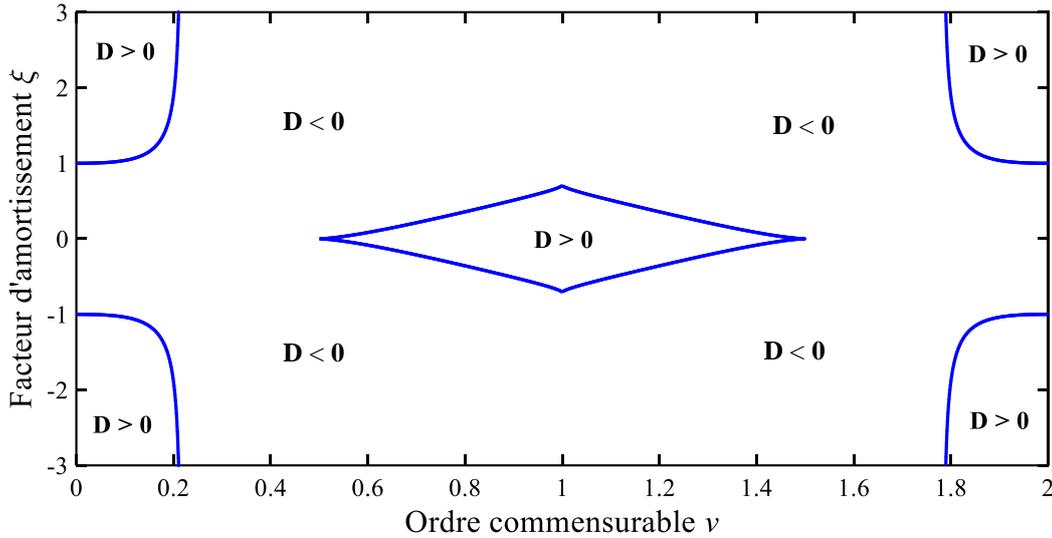


Fig. 3.7. Signes du discriminant D dans le plan (v, ξ) .

Etape 3 : Préparation de la règle des signes de Descartes

Le nombre des racines réelles positives et négatives possibles de l'équation cubique (3.3) est déterminé en appliquant *la règle des signes de Descartes*.

Soit l'équation algébrique $f(x) = 0$, avec $f(x)$ un polynôme à coefficients réels :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \tag{3.40}$$

La règle stipule que, selon [Cur18],

- **Le nombre des racines positives** de l'équation $f(x) = 0$ est le nombre de changements de signe entre les coefficients consécutifs de $f(x)$ différents de zéro, éventuellement diminué d'un nombre pair. Les racines multiples d'une même valeur sont comptabilisées séparément.
- **Le nombre des racines négatives** de l'équation $f(x) = 0$ est le nombre de changements de signe entre les coefficients consécutifs de $f(-x)$ différents de zéro, éventuellement diminué d'un nombre pair. Les racines multiples d'une même valeur sont comptabilisées séparément.

Pour appliquer *la règle de Descartes*, considérons tout d'abord la 1^{ère} fonction polynomiale de (3.3) :

$$f(x) = x^3 + 3\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)x^2 + (2\xi^2 + \cos(v\pi))x + \xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.41}$$

et la 2^e fonction polynomiale :

$$f(-x) = -x^3 + 3\xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right)x^2 - (2\xi^2 + \cos(v\pi))x + \xi \cos\left(v\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.42}$$

Puis, couvrons le plan (v, ξ) avec les signes de $f(x)$ et $f(-x)$ comme c'est montré dans la figure (3.8). Notons que l'ellipse correspond au troisième coefficient de $f(x)$ et $f(-x)$ égal à zéro.

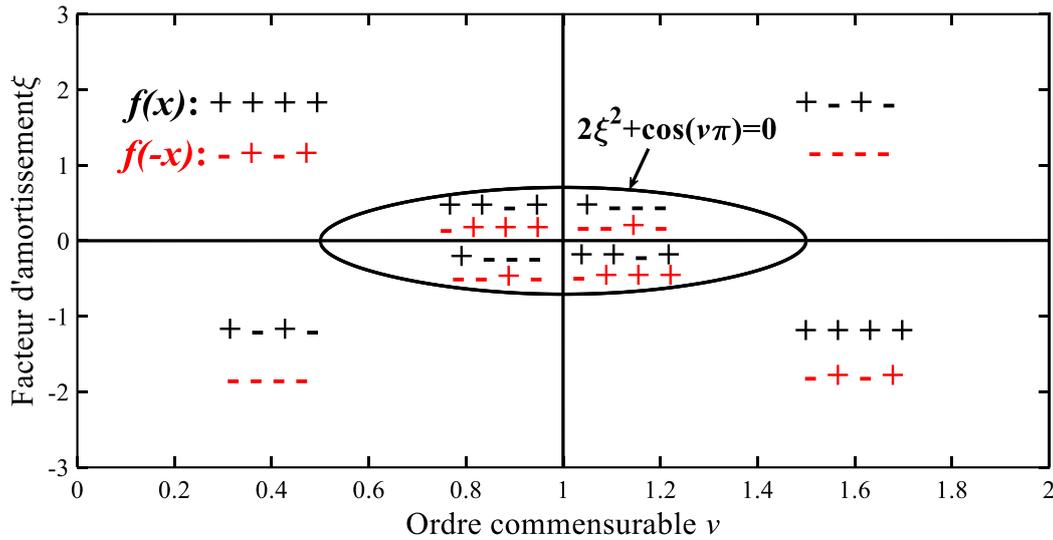


Fig. 3.8. Division du plan (ν, ξ) selon les signes des coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$.

Etape 4 : Détermination des nombres des racines positives simples de (3.3) et spécification des régions de résonance

Maintenant, appliquons la règle des signes de Descartes à (3.3) et en s’aidant du signe de D on peut déduire le nombre des racines positives simples de (3.3). Avant de le faire, superposons la figure (3.7) avec la figure (3.8) et créons une nouvelle division du plan (ν, ξ) pour couvrir les différentes combinaisons possibles du discriminant D et des signes des coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$. La nouvelle répartition du plan (ν, ξ) est illustré par la figure (3.9).

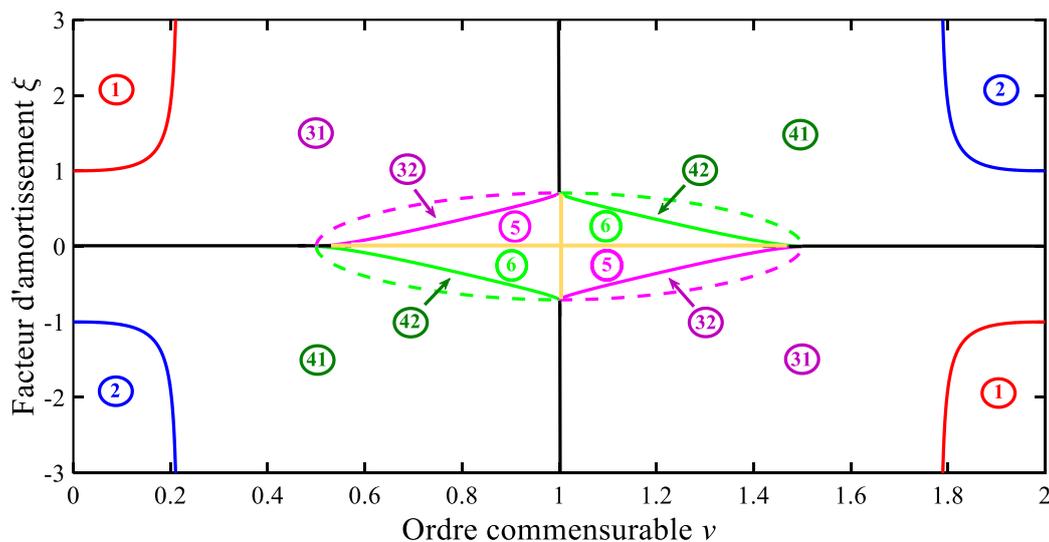


Fig. 3.9. Division du plan (ν, ξ) selon les signes de D et des coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$.

Les résultats sont présentés dans le tableau (3.4). Ce tableau regroupe toutes les combinaisons possibles de (ν, ξ) comme illustré dans la figure (3.9). Pour chaque région, les signes des

coefficients de $f(x)$ et $f(-x)$ sont déterminés selon la figure (3.8). Puis, la Règle des Signes de Descartes est appliquée et les nombres possibles des racines positives (R^+), négatives (R^-) et nulles sont déduits. Encore, pour chaque région, le signe du discriminant D est déterminé comme indiqué sur la figure (3.7). Par conséquent, le nombre des racines (R) de (3.3) est connu. Enfin, le nombre des racines positives de (3.3) est déterminé.

Tab. 3.4. Nombre et signes des racines de (3.3) pour chaque région de la figure (3.9).

Région	1	2	31	32	41	42	5	6
Signe de D	+	+	-	-	-	-	+	+
Nbr des R	3	3	1	1	1	1	3	3
Signes des coeff de $f(x)$	++++	+---	++++	++-+	+---	+---	++-+	+---
Changements de signes	0	3	0	2	3	1	2	1
Nbrs possibles des R^+	0	3 ou 1	0	2 ou 0	3 ou 1	1	2 ou 0	1
Signes des coeff de $f(-x)$	-+++	----	-+++	-++++	----	---+	-++++	----
Changements de signes	3	0	3	1	0	2	1	2
Nbrs possibles des R^-	3 ou 1	0	3 ou 1	1	0	2 ou 0	1	2 ou 0
Nbr des R^+	0	3	0	0	1	1	2	1
Nbr des R^+ simples	0	3	0	0	1	1	2	1
Nbr des R^-	3	0	1	1	0	0	1	2
Nbr des R nulles	0	0	0	0	0	0	0	0

Pour plus de clarté, prenons quelques exemples :

Exemple 3.1 : Région 1

$D > 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles simples.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + + + +

Il n'y a aucun changement de signes \rightarrow Il n'y a aucune racine positive.

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - + - +

Il y a 3 changements de signes \rightarrow Il y a 3 ou 1 racine négative.

\Rightarrow (3.3) n'a aucune racine positive et possède 3 racines négatives.

Déduction : (3.3) n'a aucune racine positive simple.

Exemple 3.2 : Région 2

$D > 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles simples.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + - + -

Il y a 3 changements de signe → Il y a 3 ou 1 racine positive.

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - - - -

Il n'y a aucun changement de signes → Il n'y a aucune racine négative.

⇒ (3.3) n'a aucune racine négative et possède 3 racines positives.

Déduction : (3.3) possède 3 racines positives simples.

Exemple 3.3 : Région 32

$D < 0$, l'équation (3.3) possède 1 racine réelle simple.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + + - +

Il y a 2 changements de signes → Il y a 2 ou 0 racine positive.

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - + + +

Il y a 1 changement de signes → Il y a 1 racine négative.

⇒ (3.3) n'a aucune racine positive et possède 1 racine négative.

Déduction : (3.3) n'a aucune racine positive simple.

Exemple 3.4 : Région 5

$D > 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles simples.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + + - +

Il y a 2 changements de signes → Il y a 2 ou 0 racine positive.

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - + + +

Il y a 1 changement de signes → Il y a 1 racine négative.

⇒ (3.3) possède 1 racine négative et 2 racines positives.

Déduction : (3.3) possède 2 racines positives simples.

Dans le travail [Bou21], pour éviter beaucoup de détails, nous nous sommes limités aux régions du plan (ν, ξ) de la figure (3.9). Dans cette thèse nous présentons l'étude complète où l'analyse couvre tout le plan (ν, ξ) (régions et lignes). Le tableau (3.5) complète le tableau (3.4) et présente les résultats obtenus couvrant toutes les lignes de la figure (3.9).

Tab. 3.5. Nombre et signe des racines de (3.3) pour chaque ligne de la figure (3.9).

Ligne	Rouge	Bleu	Violet	Vert	Noir	Corail	Violet pointillé	Vert pointillé
Signe de D	$D = 0$	$D = 0$	$D = 0$	$D = 0$	-	+	-	-
Nbr des R	3	3	3	3	1	3	1	1
Signes des coeffs de $f(x)$	++++	+ - + -	++ - +	+ - - -	++	+-	+++	+ - -
Changements de signes	0	3	2	1	0	1	0	1
Nbrs possibles des R^+	0	3 ou 1	2 ou 0	1	0	1	0	1
Signes des coeffs de $f(-x)$	- + - +	- - - -	- + + +	- - + -	--	- +	- + +	- - -
Changements de signes	3	0	1	2	0	1	1	0
Nbrs possibles des R^-	3 ou 1	0	1	2 ou 0	0	1	1	0
Nbr des R^+	0	3 (1+1 double)	2 (1 double)	1	0	1	0	1
Nbr des R^+ simples	0	1	0	1	0	1	0	1
Nbr des R^-	3 (1+1 double)	0	1	2 (1 double)	0	1	1	0
Nbr de R nulles	0	0	0	0	1	1	0	0

Pour plus de clarté, prenons quelques exemples :

Exemple 3.5 : Ligne en bleu

$D = 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + - + -

Il y a 3 changements de signes → Il y a 3 ou 1 racine positive.

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - - - -

Il n'y a aucun changement de signes → Il n'y a aucune racine négative.

⇒ (3.3) n'a aucune racine négative et possède 3 racines positives (1 simple et 1 double).

Déduction : (3.3) possède 1 racine positive simple.

Exemple 3.6 : Ligne en violet

$D = 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + + - +

Il y a 2 changements de signes → Il y a 2 ou 0 racine positive

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - + + +

Il y a un changement de signes → Il y a une racine négative.

⇒ (3.3) a 1 racines négative et 1 racine positive (double).

Déduction : (3.3) n'a aucune racine positive simple.

Exemple 3.7 : ligne en corail

$D = 0$, l'équation (3.3) possède 3 racines réelles.

Les signes des coefficients de $f(x)$: + -

Il y a 1 changements de signes → Il y a 1 racine positive

Les signes des coefficients de $f(-x)$: - +

Il y a 1 changement de signes → Il y a racine négative

⇒ (3.3) a 1 racine positive, une racine négative et une racine nulle.

Déduction : (3.3) possède 1 racine positive simple.

Les tableaux (3.4) et (3.5) peuvent être réduits au tableau (3.6) qui regroupe les différentes régions et lignes avec les nombres des racines R^+ , R^+ simples, R^- et nulles. Comme le montre les tableaux (3.4) et (3.5), les régions 31, 32 et la ligne en violet pointillé (colonnes en violet) possèdent le même nombre des racines positives, positives simples, négatives et nulles. Par conséquent, elles ont été regroupées dans une même région, nommée « région 3 » du tableau (3.6). De même pour la « région 4 » qui regroupe les régions 41, 42 et la ligne en vert pointillé des tableaux (3.4) et (3.5) (colonnes en vert).

Tab. 3.6. Nombre et signe des racines de (3.3) avec les régions et les lignes correspondantes.

Région et ligne	1	2	3	4	5	6	Rouge	Bleu	Violet	Vert	Noir	Corail
Nbr des R^+	0	3	0	1	2	1	0	3 (1+1 double)	2 (1 double)	1	0	1
Nbr des R^+ simples	0	3	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1
Nbr des R^-	3	0	1	0	1	2	3 (1+1 double)	0	1	2 (1 double)	0	1
Nbr des R nulles	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

(Région 3=région 31+région 32+ligne en violet pointillé) (Région 4=région 41+région 42+ligne en vert pointillé)

La figure (3.10) divise le plan (v, ξ) comme indiqué dans le tableau (3.6).

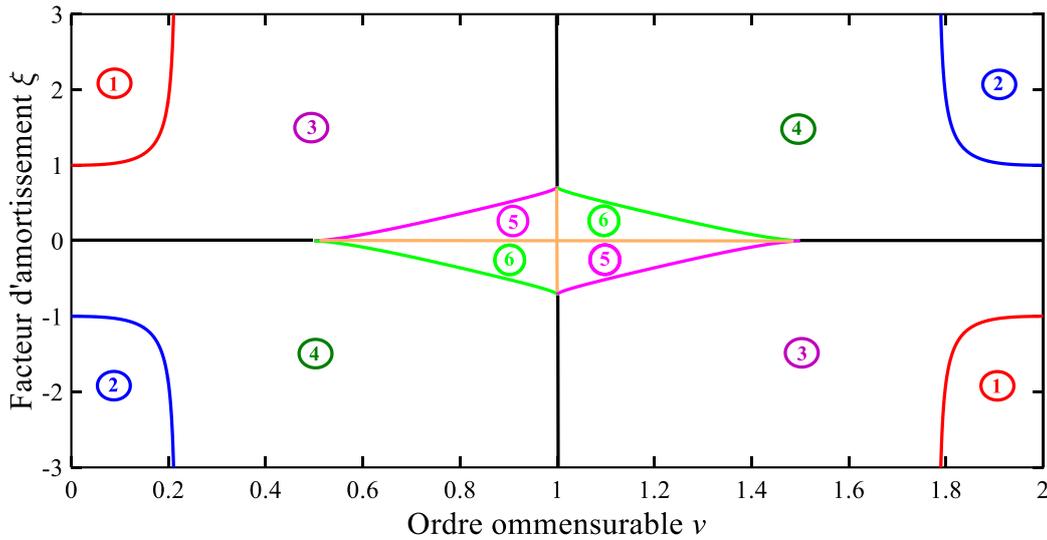


Fig. 3.10. Division du plan (ν, ξ) selon le nombre et les signes des racines de (3.3).

Maintenons, illustrons graphiquement les racines de (3.3). Ces racines représentent l'intersection du graphe de la fonction f , définie par (3.41), avec l'axe des x . Pour chaque région de 1 à 6 de la figure (3.10) (aussi les lignes curvilignes et droites), une valeur arbitraire de la combinaison (ν, ξ) est choisie et remplacée dans la fonction (3.41). La figure (3.11) illustre la fonction obtenue $f(x)$.

A partir du tableau (3.6), on peut associer chaque nombre de racines simples et strictement positives de (3.3) aux régions et lignes correspondantes comme le montre le tableau (3.7).

Tab. 3.7. Nombres des racines simples et strictement positives de (3.3) avec les régions et les lignes correspondantes.

Nbr R^+ simples de (3.3)	0	1	2	3
Région	1, 3	4, 6	5	2
Ligne	rouge, violet, noir	bleu, vert, corail	/	/

La figure (3.12) présente une division du plan (ν, ξ) selon le nombre des racines positives simples comme indiqué dans le tableau (3.7). On peut distinguer 4 régions notées R_0^+ , R_1^+ , R_2^+ et R_3^+ avec respectivement zéro, un, deux et trois racines strictement positives simples de l'équation (3.3). En comparaison avec la figure (3.10), nous observons que les lignes curvilignes (colorées en rouge et en vert) séparant respectivement les deux régions (1, 3) et (4, 6) sont disparues parce que chaque paire de régions possède le même nombre des racines positives simples ainsi que la ligne qui sépare les deux régions.

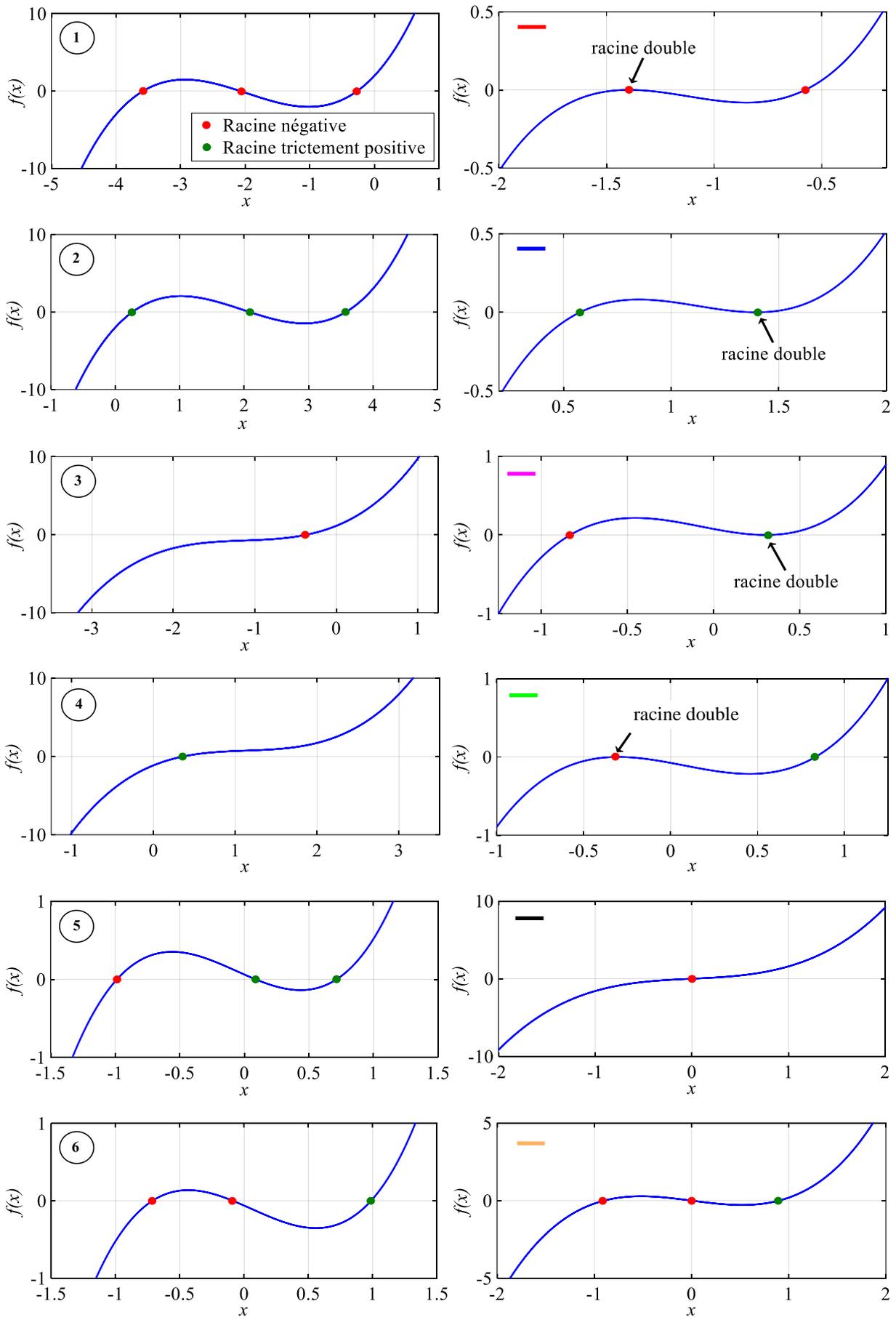


Fig. 3.11. Racines de (3.3) pour les différentes régions et lignes du plan (ν, ξ) selon la division de la figure (3.10).

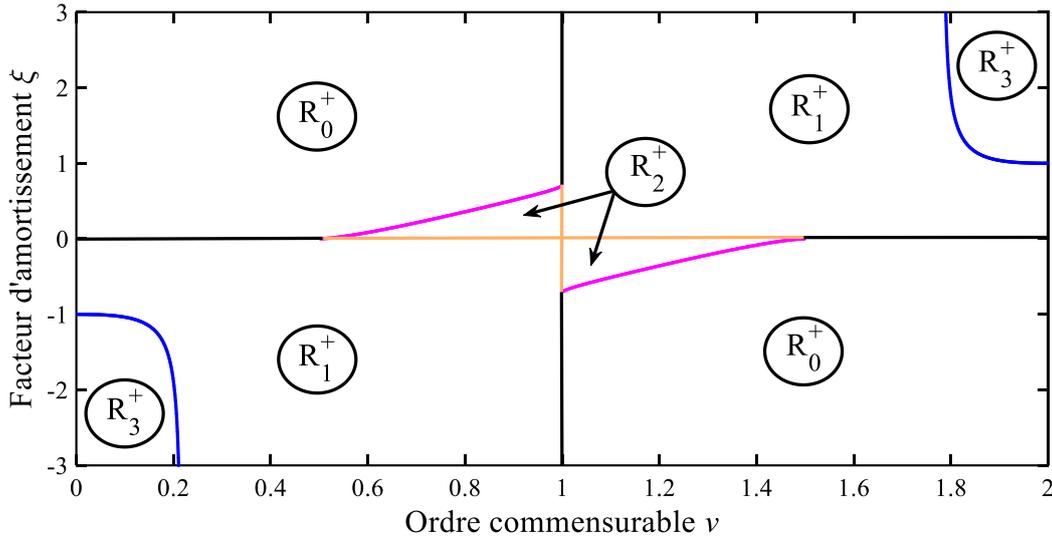


Fig. 3.12. Division du plan (ν, ξ) selon le nombre des racines simples et strictement positives de (3.3).

Appliquons la condition de stabilité (3.2). La figure (3.12) se réduit à la figure (3.13).

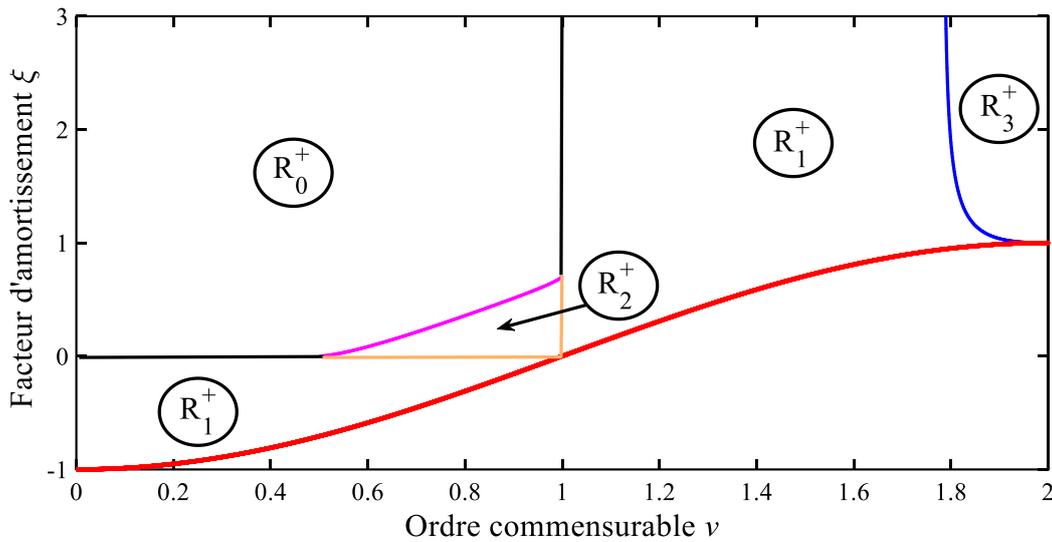


Fig. 3.13. Division du plan (ν, ξ) selon le nombre des racines simples et strictement positives de (3.3) des systèmes stables.

Etape 5: Expression des limites de résonance

Finalement, les limites de résonance (les lignes curvilignes colorées en violet et en bleu dans la figure (3.13)) sont alors exprimées par :

$$\xi_{lr} = \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \left(\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}{1 - 2\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}} \quad (3.43)$$

$$\nu \in [0.5; 1] \cup]1.7837; 2[$$

Ce résultat est en concordance avec le cas rationnel. En effet, la limite de résonance connue pour la fonction rationnelle du second degré peut être obtenue de (3.43) avec $\nu = 1$. Après avoir enlevé le cas d'indétermination $\xi_{lr} = \sqrt{2}/2$.

Notons que les limites de résonance, notées par ξ_0 et ξ_1 dans [Mal11, Khe11] (Fig. 3.1), ont la même expression (3.43) (pour deux intervalles de ν) car elles appartiennent à la même courbe (solution de $D = 0$). Tandis, ν_1 est l'équation de la seconde asymptote ($\nu_1 = \nu_{asy2} = 1.7837$).

3.4 Régions de résonance et exemples numériques

La figure (3.14) montre les régions de résonance pour les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable du second type (3.1). Quatre régions peuvent être distinguées :

- **La région grise:** système non résonant (aucune racine strictement positive simple de (3.3));
- **La région jaune:** système résonant avec une fréquence de résonance (une seule racine strictement positive et simple de (3.3));
- **La région marron:** système résonant avec une fréquence résonante et une fréquence anti-résonante (deux racines strictement positives et simples de (3.3));
- **La région verte:** système résonant avec deux fréquences résonantes et une fréquence anti-résonante (trois racines strictement positives et simples de (3.3)).

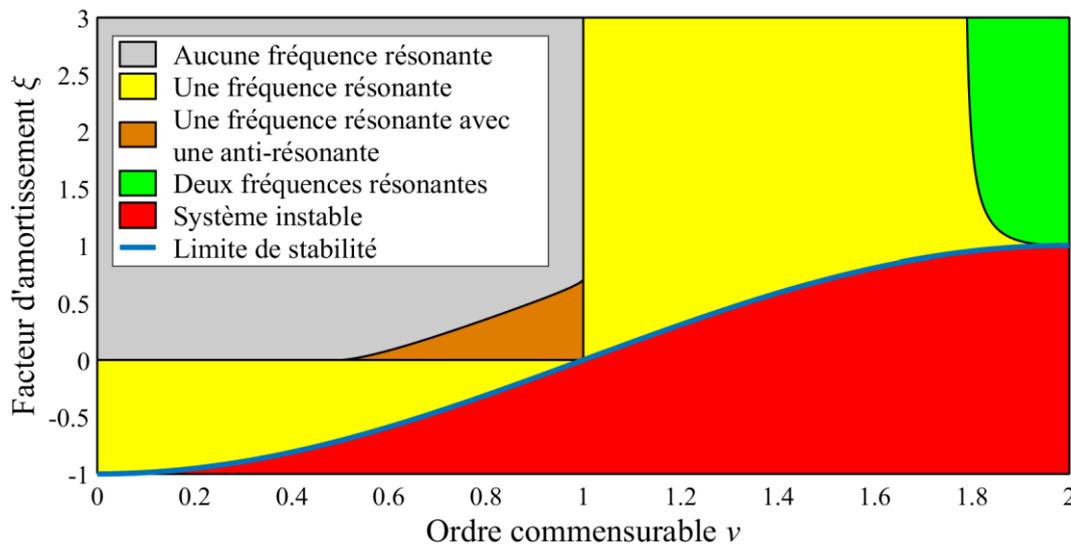


Fig. 3.14. Régions de résonance du modèle non entier (3.1) dans le plan (ν, ξ) selon [Bou21].

En se référant à la figure (3.1), la figure (3.14) présente une nouvelle région qui est en marron. Nous récapitulons les différentes régions de résonance dans le tableau (3.8) dans lequel pour chaque région, un exemple est donné. La figure (3.15) illustre la réponse fréquentielle de chaque région.

Tab. 3.8. Exemples numériques sur les régions de résonance.

Région et domaine de définition	Exemple
<p><u>Région grise</u></p> <p>Système non résonant</p> $\begin{cases} 0 < \nu \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq \xi \\ 0.5 < \nu \leq 1 \text{ et } \xi_{lr} \leq \xi \end{cases}$	$\nu = 0.5 \text{ et } \xi = 0.5$ $(3.3) \Rightarrow \Omega^{1.5} + 1.06\Omega^1 + 0.5\Omega^{0.5} + 0.35 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{0.5} = -0.93 \\ \Omega_2^{0.5} = 0.06 + i0.612 \\ \Omega_3^{0.5} = 0.06 - i0.612 \end{cases}$
<p><u>Région jaune</u></p> <p>Système résonant avec 1 fréquence résonante</p> $\begin{cases} 0 < \nu < 1 \text{ et } -\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi < 0 \\ 0.5 < \nu < 1 \text{ et } \xi = 0 \\ \nu = 1 \text{ et } 0 < \xi < \sqrt{2}/2 \\ 1 < \nu < 1.7837 \text{ et } -\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi \\ 1.7837 < \nu < 2 \text{ et } -\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \xi \leq \xi_{lr} \end{cases}$	$\nu = 1.5 \text{ et } \xi = 0.9$ $(3.3) \Rightarrow \Omega^{4.5} - 1.91\Omega^3 + 1.62\Omega^{1.5} - 0.64 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{1.5} = 0.89 \\ \Omega_2^{1.5} = 0.51 + i0.67 \\ \Omega_3^{1.5} = 0.51 - i0.67 \end{cases}$ $\Rightarrow \Omega_1 = 0.93$ $\Rightarrow \Omega_{res} = 0.93$
<p><u>Région marron (Nouvelle région)</u></p> <p>Système résonant avec 1 fréquence anti-résonante et 1 résonante</p> $0.5 < \nu < 1 \text{ et } 0 < \xi < \xi_{lr}$	$\nu = 0.8 \text{ et } \xi = 0.28$ $(3.3) \Rightarrow \Omega^{2.4} + 0.26\Omega^{1.6} - 0.65\Omega^{0.8} + 0.09 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{0.8} = 0.15 \\ \Omega_2^{0.8} = 0.59 \\ \Omega_3^{0.8} = -1.00 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0.09 \\ \Omega_2 = 0.52 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{anti-res} = 0.09 \\ \Omega_{res} = 0.52 \end{cases}$
<p><u>Région verte</u></p> <p>Système résonant avec 2 fréquences de résonance et 1 anti-résonante</p> $1.7837 < \nu < 2 \text{ et } \xi_{lr} < \xi$	$\nu = 1.9 \text{ et } \xi = 2.5$ $(3.3) \Rightarrow \Omega^{5.7} - 7.41\Omega^{3.8} + 13.45\Omega^{1.9} - 2.47 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{1.9} = 0.21 \\ \Omega_2^{1.9} = 2.60 \\ \Omega_3^{1.9} = 4.60 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0.44 \\ \Omega_2 = 1.65 \\ \Omega_3 = 2.23 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{res1} = 0.44 \\ \Omega_{anti-res} = 1.65 \\ \Omega_{res2} = 2.23 \end{cases}$

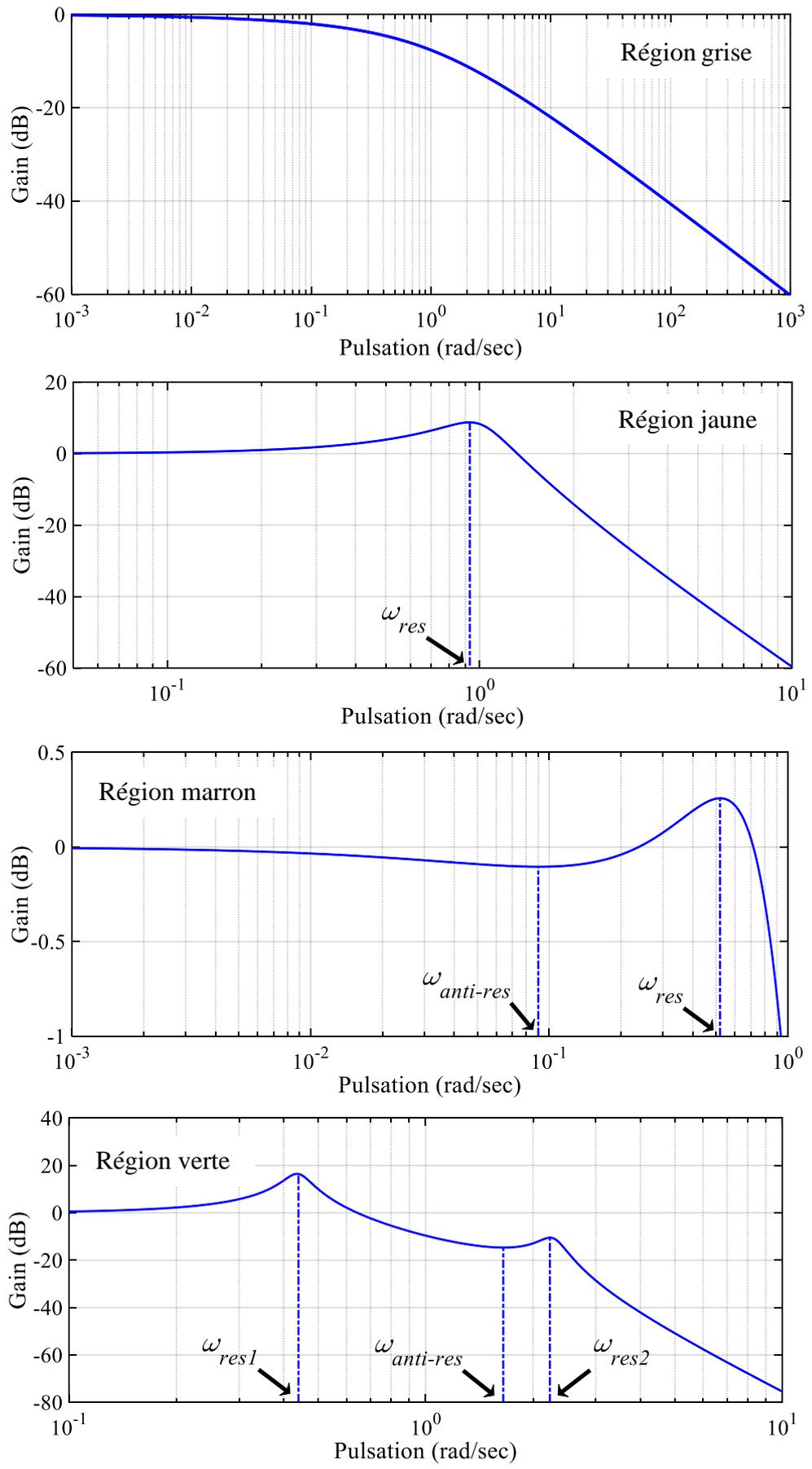


Fig. 3.15. Diagrammes de Bode pour les différentes régions de résonance.

Selon le tableau (3.6), les lignes en violet et en rouge représentant respectivement les limites de résonance ξ_0 et ξ_1 possèdent des racines doubles et ces racines n'ont pas été comptabilisées comme fréquences de résonance ou d'anti-résonance car la dérivée de la réponse fréquentielle ne change pas de signe. Le tableau (3.9) donne un exemple pour chaque ligne. Les réponses fréquentielles illustrées dans la figure (3.16) montrent que la racine double représente un point d'inflexion horizontal noté ω_{infl} .

Tab. 3.9. Exemples numériques sur les limites de résonance.

Ligne	Exemple
<p style="text-align: center;"><u>Ligne en violet</u></p> <p style="text-align: center;">Système non résonant</p> <p style="text-align: center;">$0 < \nu < 0.5$ et $\xi = \xi_{tr}$</p>	<p style="text-align: center;">$\nu = 0.8$ et $\xi = 0.36$</p> <p>(3.3) $\Rightarrow \Omega^{2.4} + 0.33\Omega^{1.6} + 0.55\Omega^{0.8} + 0.11 = 0$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{0.8} = \Omega_2^{0.8} = 0.33 \\ \Omega_3^{0.8} = -1.00 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2 = 0.25$</p> <p>$\Rightarrow \Omega_{infl} = 0.25$</p>
<p style="text-align: center;"><u>Ligne bleue</u></p> <p style="text-align: center;">Système résonant avec 1 fréquence résonante</p> <p style="text-align: center;">$1.7837 < \nu < 2$ et $\xi = \xi_{tr}$</p>	<p style="text-align: center;">$\nu = 1.85$ et $\xi = 1.15$</p> <p>(3.3) $\Rightarrow \Omega^{5.55} - 3.37\Omega^{3.70} + 3.56\Omega^{1.85} - 1.12 = 0$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1^{1.85} = 0.58 \\ \Omega_2^{1.85} = \Omega_3^{1.85} = 1.40 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0.74 \\ \Omega_2 = \Omega_3 = 1.20 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_{res} = 0.74 \\ \Omega_{infl} = 1.20 \end{cases}$</p>

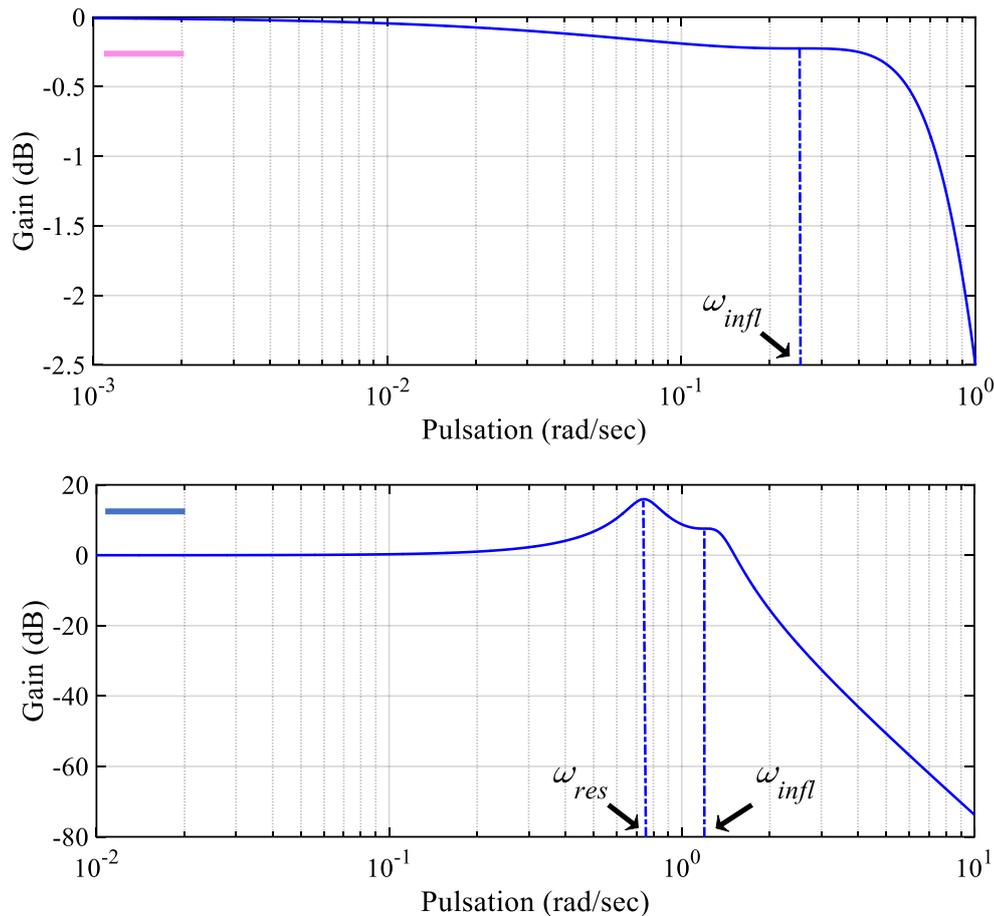


Fig. 3.16. Diagrammes de Bode pour les limites de résonance (ligne violet et bleu de Fig. 3.13).

3.5 Application à un filtre FLPF

Les filtres d'ordre fractionnaire Passe-Bas (Fractional order Low-Pass Filter (FLPF)) constituent un exemple typique des systèmes d'ordre fractionnaire du second type (3.1). Ils ont été proposés par Radwan et al. [Red08], où des filtres classiques du 1^{er} ordre ont été généralisés aux filtres d'ordre fractionnaire. La conception des filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et passe-tout a été réalisée en utilisant des capacités d'ordre fractionnaire avec une impédance $Z = \frac{1}{s^\nu C}$. Par la suite, les mêmes auteurs ont présenté, dans [Red09], des filtres d'ordre fractionnaire de second type avec deux capacités fractionnaires avec le même ordre ν . Ils ont utilisé, comme exemples, les filtres Sallen-Key et KHN. Dans leur étude, vu la difficulté de l'analyse mathématique de la réponse fréquentielle, cette dernière a été testée par choix arbitraire des paramètres de la fonction de transfert pour voir si le filtre est résonant ou non. D'où l'intérêt de la présente étude, qui offre une analyse mathématique complète de la réponse fréquentielle selon les paramètres de la fonction de transfert.

Prenons l'exemple du filtre d'ordre fractionnaire passe-bas nommé Sallen-Key (Sallen-Key FLPF), d'ordre 2ν constitué de deux capacités fractionnaires de même ordre ν , un amplificateur opérationnel et des résistances comme le montre la figure (3.17).

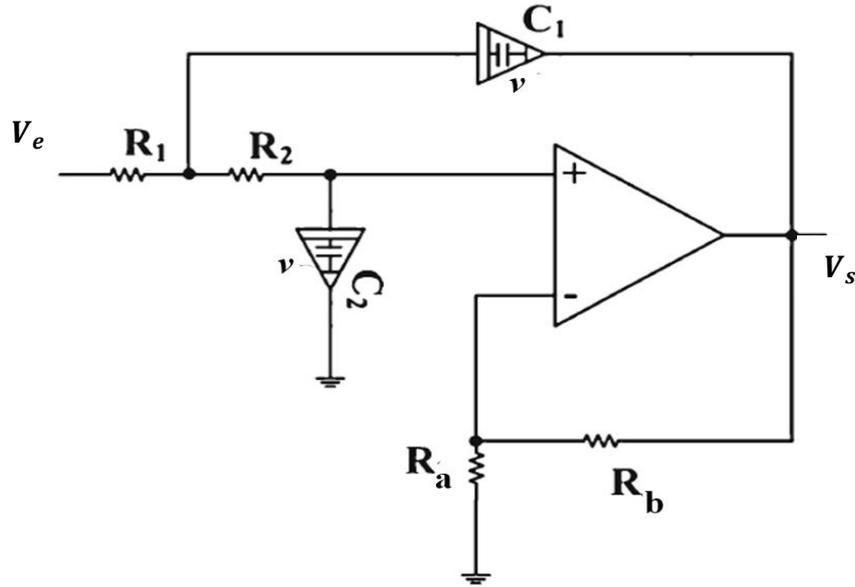


Fig. 3.17. Sallen-Key FLPF.

La fonction de transfert de ce filtre est exprimée comme suit :

$$F(s) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{G}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^{2\nu} + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - G)) s^\nu + 1} \quad (3.44)$$

Elle correspond à la fonction de transfert du second type (3.1) avec un gain statique :

$$G = 1 + \frac{R_b}{R_a} \quad (3.45)$$

et

$$\begin{cases} \omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ \xi = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - G)}{2\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \end{cases} \quad (3.46)$$

Selon les valeurs de ν et ξ , la réponse fréquentielle de Sallen-Key FLPF appartient à une des régions de résonance de la figure (3.14).

Dans le cas particulier, où $R_1 = R_2$ et $C_1 = C_2$, le facteur d'amortissement est réduit à $\xi = (3 - G)/2$. Parce que le gain statique G est toujours supérieur à 1, cela entraîne que ξ est inférieur à 1. La variation de ξ , c-à-d de G , et de ν permet d'obtenir des réponses fréquentielles non résonantes (région grise), résonante avec une seule fréquence de résonance (région jaune) et résonante avec une fréquence anti-résonante et une résonante (région marron). Mais la réponse

fréquentielle ne peut jamais être résonante avec deux fréquences de résonance (région verte) car dans ce cas ξ est toujours inférieur à 1. Si, $R_b = 1.5 R_a$, ce qui implique $G = 2.5$ et $\xi = 0.25$, et avec $\nu = 0.25$, la réponse fréquentielle appartient à la région marron.

Le cas où $R_1 = R_2$ et $C_1 = 4C_2$, donne un facteur d'amortissement $\xi = (9 - G)/4$. Puisque G est toujours supérieur à 1, ξ est par conséquent inférieur à 2. Cette fois-ci, toutes les régions de résonance peuvent être touchées par variation de G , par conséquent de ξ , et de ν . Par exemple : si $R_b = 2 R_a$, ce qui implique $G = 3$ et $\xi = 1.5$, et avec $\nu = 1.9$, la réponse fréquentielle appartient à la région verte.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la première contribution de cette thèse qui offre une analyse analytique des régions de résonance des systèmes fractionnaires élémentaires du second type (3.1). Dans [Mal11, Khe11], les limites et les régions de résonance ont été déterminées numériquement. Dans notre étude [Bou21], ces limites ont été déterminées analytiquement (3.43) ainsi les régions de résonance ont été spécifiées et éprouvées mathématiquement. Pour atteindre ce but, nous avons fait une étude mathématique détaillée de l'équation cubique (3.3). Cette dernière équation est obtenue en mettant la première dérivée de l'amplitude de la réponse fréquentielle égale à zéro. Un système d'ordre fractionnaire commensurable de second type est résonant si (3.3) possède au minimum une racine strictement positive simple et le membre non nul de cette équation (la première dérivée citée) change de signe. Comme dans le cas conventionnel, les limites de résonance correspondent au discriminant D de (3.3) égal à zéro. Ce qui a conduit à résoudre une équation cubique en ξ^2 dont les coefficients sont en fonction de ν (3.10). Pour résoudre cette dernière équation, la méthode trigonométrique en tangente est adoptée. Par conséquent, l'expression analytique des limites de résonance est obtenue (3.43). Pour spécifier les régions de résonance, une étude mathématique de l'équation (3.3) est détaillée en appliquant la méthode des signes de Descartes afin de trouver le nombre des racines strictement positives et simples pour chaque combinaison (ν, ξ) . Comparé à la répartition numérique adoptée par [Mal11, Khe11] et illustrée dans la figure (3.1), la répartition mathématique de notre étude [Bou21] illustrée dans la figure (3.14) fait apparaître une nouvelle région résonante avec une fréquence résonante et une anti-résonante (région marron). Ces résultats ont été validés à travers des exemples numériques et appliqués à un filtre d'ordre fractionnaire.

Partie II

Contribution au contrôle fractionnaire

Chapitre 4

Le contrôle fractionnaire

4.1 Introduction

Le correcteur Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) s'est imposé dans plus de 90% des boucles de commande [Ast95]. La prédominance incontestée de ce type de correcteur provient, outre de sa simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement [Ast01].

Cependant, dû à l'augmentation de la complexité des systèmes industriels et aux exigences très élevées pour beaucoup d'applications, le correcteur classique PID ne peut être capable de satisfaire les performances désirées. En effet, une étude qualitative, proposée en [Ast95], souligne que lorsque la dynamique d'un système est essentiellement du premier ordre, un correcteur PI est adéquat. C'est également le cas pour un correcteur PID, quand la dynamique dominante est du second ordre. Par contre, si l'ordre du système est plus élevé, les performances peuvent être améliorées par l'utilisation d'autres architectures de contre-réaction. Il résulte également des performances limitées lors de l'emploi de correcteurs PID avec des systèmes possédant des modes oscillants. Les systèmes dominés par un retard pur engendrent évidemment des difficultés, la prédiction linéaire de l'écart futur par le terme dérivé ne permet pas de résoudre le problème de manière satisfaisante. La structure linéaire du correcteur PID n'est pas adaptée aux systèmes fortement non linéaires. Parfois, d'excellents résultats peuvent néanmoins être obtenus avec d'autres structures de commande. Enfin, bien que plusieurs méthodes de réglage du correcteur PID soient proposées dans la littérature pour commander les systèmes instables [Maj98, Maj00, Hwa03, Gan05], les performances obtenues sont souvent modestes.

Malgré toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail continu et intensif de recherches est en cours vers le perfectionnement de la qualité de commande des systèmes. Une des possibilités d'améliorer le correcteur PID est d'utiliser la commande fractionnaire par introduction de la dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire.

Ce chapitre entame le sujet de la commande fractionnaire dans deux parties. Premièrement, un aperçu exhaustif des principales structures de la commande fractionnaire est présenté. La deuxième partie commence par un rappel du correcteur classique PID, puis, présente le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ avec une analyse profonde de l'effet de chacun de ses paramètres $(k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu)$ sur la réponse du système bouclé.

4.2 La commande fractionnaire : un aperçu

De point de vue ingénierie, la commande d'ordre fractionnaire est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique. Son intérêt majeur est d'améliorer ou optimiser les performances des systèmes en utilisant les concepts de la dérivation et d'intégration d'ordre non entier.

Dans la littérature, ils existent quatre structures principales de la commande d'ordre fractionnaire [Che02b] :

- La première structure est le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), proposé par Oustaloup [Ous91]. Ce dernier a démontré la supériorité des performances du correcteur proposée en comparaison avec le correcteur PID classique. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1^{ère}, 2^e et 3^e génération) et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées, à titre d'exemple la commande de la suspension de voiture [Ous95].
- La deuxième structure est le correcteur PID d'ordre fractionnaire (FOPID : Fractional Order PID), noté $PI^\lambda D^\mu$. Ce correcteur, proposé par Podlubny [Pod99b], est une généralisation du correcteur PID, comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ . Podlubny a démontré la meilleure réponse de ce type de correcteurs, en comparaison avec le correcteur PID classique, pour la commande des systèmes fractionnaires.
- La troisième structure est le correcteur TID (Tilit-Integral-Derivator), proposé par Lurie [Lur94]. Ce correcteur a une structure semblable au correcteur PID classique où la composante proportionnelle est remplacée par un intégrateur d'ordre fractionnaire. Par rapport aux correcteurs PID, le correcteur TID assure un meilleur rejet des perturbations, et une bonne

robustesse vis-à-vis aux variations des paramètres du système. L'objectif du correcteur TID est d'avoir les avantages du correcteur PID en fournissant une réponse en boucle fermée plus proche de la réponse optimale théorique.

- La quatrième structure est le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, proposé dans différents contextes [Rayn00, Mon05]. Ce correcteur est une généralisation du correcteur à avance-retard de phase classique par l'introduction de l'ordre fractionnaire dans sa structure, ce qui permet plus de flexibilité dans l'accomplissement des spécifications de la commande. Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

4.3 Le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

Généralement, le correcteur PID est implémenté dans les systèmes de commande classiques à retour unitaire comme le montre la figure (4.1) où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur et $G(s)$ est la fonction de transfert de système.

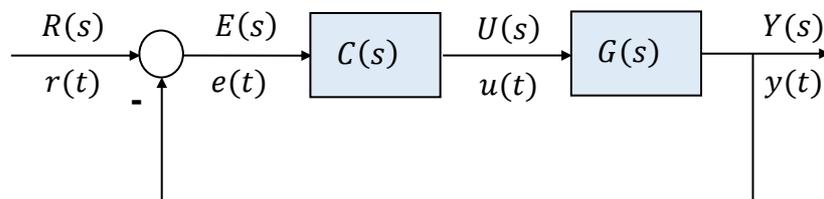


Fig. 4.1. Système de commande classique.

4.3.1 Le correcteur PID

Le correcteur PID classique est basée sur le présent (P), le passé (I) et le future (D) de l'erreur de commande $e(t)$. Son comportement peut être décrit, dans sa structure parallèle, par l'équation suivante :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.1)$$

avec k_p , k_i et k_d sont respectivement le gain proportionnel, intégral et dérivé.

La fonction de transfert du correcteur PID défini par (4.1) est :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4.2)$$

La figure (4.2) présente la structure interne du correcteur PID. Elle est constituée de la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale et dérivée.

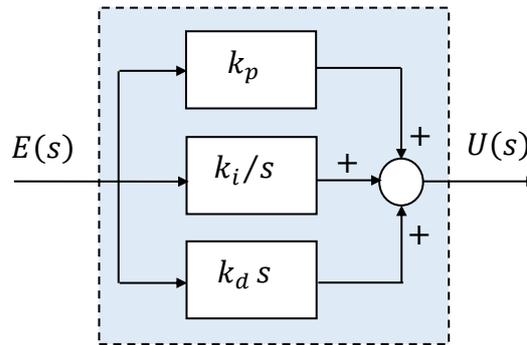


Fig. 4.2. Structure du correcteur PID.

Les trois actions proportionnelle, intégrale et dérivée possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire [Gar07]. La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain k_p . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation de l'action intégrale. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, l'action intégrale est souvent interprétée dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'action dérivée est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée de l'action dérivée est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition.

4.3.2 Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Afin d'améliorer le comportement du correcteur PID, Podlubny a proposé une nouvelle version qui est le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ (FOPID) [Pod99b]. Ce correcteur est une généralisation du correcteur PID, comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ , où λ et μ sont des nombres réels positifs.

L'équation de la sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dans le domaine temporel est donnée par l'expression :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i D^{-\lambda}(e(t)) + k_d D^\mu(e(t)) \quad (4.3)$$

avec λ et μ représentent respectivement l'ordre d'intégration et de dérivation.

Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ défini par (4.3) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (4.4)$$

La figure (4.3) présente la structure interne du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. Elle est constituée de la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.

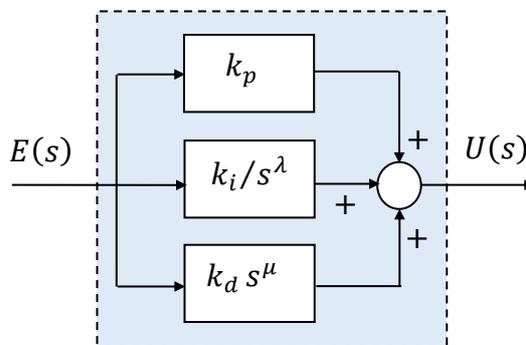


Fig. 4.3. Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$.

La figure (4.4) représente le correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ dans le plan (λ, μ) . De cette figure, on peut voir que les deux paramètres λ et μ permettent d'avoir une infinité de correcteurs d'ordre fractionnaire dont les correcteurs classiques P, PI, PD et PID sont des cas particuliers.

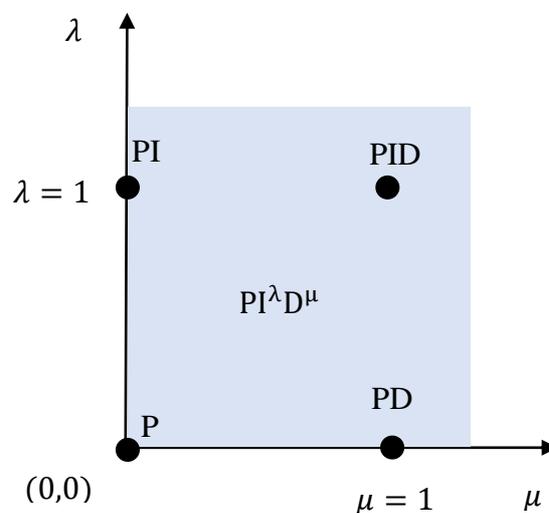


Fig. 4.4. Le correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ dans le plan (λ, μ) .

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ défini par (4.4) est représenté par la figure (4.5).

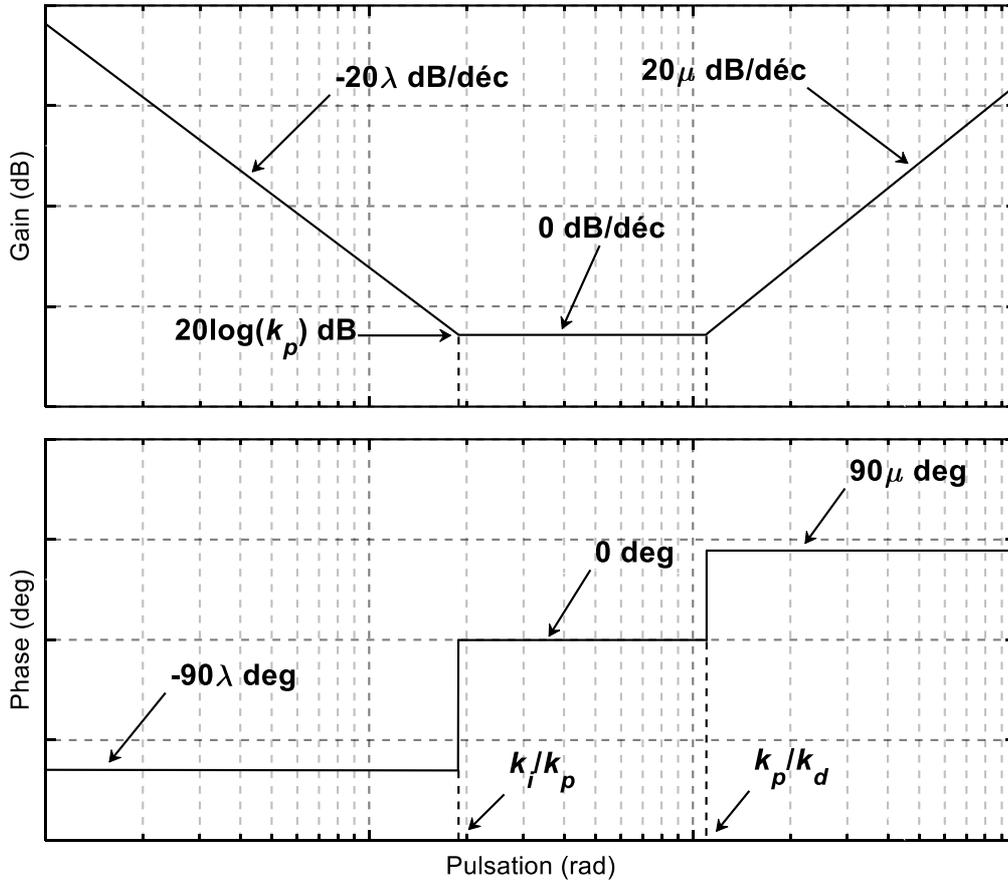


Fig. 4.5. Diagramme de Bode asymptotique du correcteur fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$.

On peut observer que ce correcteur se comporte comme :

- Un correcteur intégrateur fractionnaire I^λ pour les basses fréquences de pente $-20\lambda \text{ dB/déc}$ et de phase $-90\lambda \text{ deg}$.
- Un correcteur dérivateur fractionnaire D^μ aux hautes fréquences de pente $+20\mu \text{ dB/déc}$ et de phase $+90\mu \text{ deg}$.
- Un correcteur proportionnel aux fréquences intermédiaires qui se manifeste avec une asymptote horizontale et une phase nulle.

Pour analyser l'effet de chaque paramètre $(k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sur la réponse en boucle fermée, on considère à titre d'exemple le système de fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1} \quad (4.5)$$

La réponse indicielle est représentée par la figure (4.6).

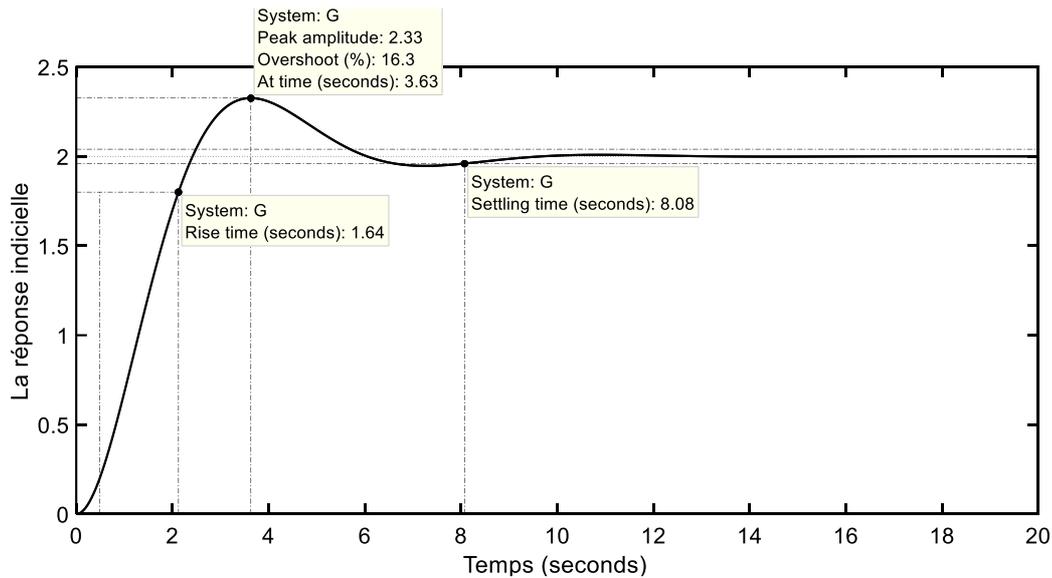


Fig. 4.6. Réponse indicielle du système en BO.

Une analyse a été faite en fixant quatre paramètres du $PI^\lambda D^\mu$ à l'unité et en variant le cinquième. Les figures de (4.7) à (4.11) montrent les diagrammes de Bode du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sous l'effet de chaque paramètre ainsi que la réponse indicielle du système en boucle fermée.

Les figures de (4.7) à (4.11) montrent respectivement que :

- Le gain $k_p > 1$ translate le diagramme de Bode (gain) du système de $20 \log(k_p)$ ce qui augmente la bande passante à 0dB (du système en BO). Par conséquent, le système est plus rapide en termes de temps de montée et temps de réponse mais la stabilité est dégradée.
- Quelle que soit la valeur de k_i différente de zéro, la FTBO comporte une intégration de pente de -20dB/décade aux basses pulsations, ce qui entraîne une erreur statique nulle pour une consigne en échelon. Plus k_i augmente, plus le système est lent et moins stable.
- La présence de k_d apporte une avance de phase de $+90$ deg en hautes fréquences. Il a un effet stabilisant en augmentant la marge de phase. Plus k_i augmente, plus le système est stable avec un temps de montée plus court et un temps de réponse plus lent.
- L'augmentation de l'ordre d'intégration fractionnaire λ diminue l'erreur statique en l'annulant pour $\lambda \geq 1$ mais la stabilité et la rapidité en termes de temps de réponse sont dégradées tout en gardant le temps de montée presque inchangé.
- L'augmentation de l'ordre d'intégration fractionnaire μ améliore la stabilité mais dégrade la rapidité en termes de temps de réponse et temps de montée.

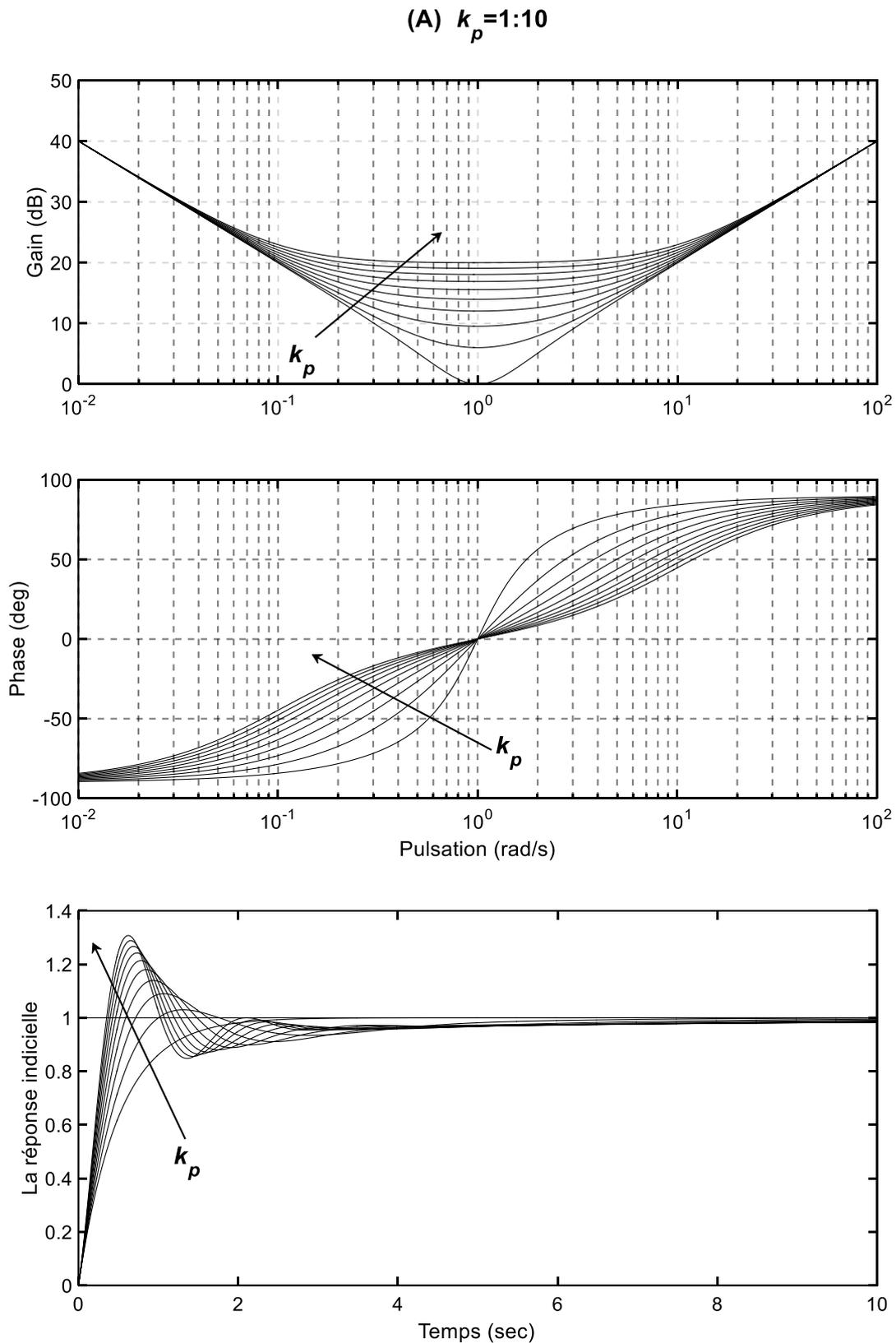


Fig. 4.7. Effet du paramètre k_p sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.

(B) $k_i=0:0.1:2$

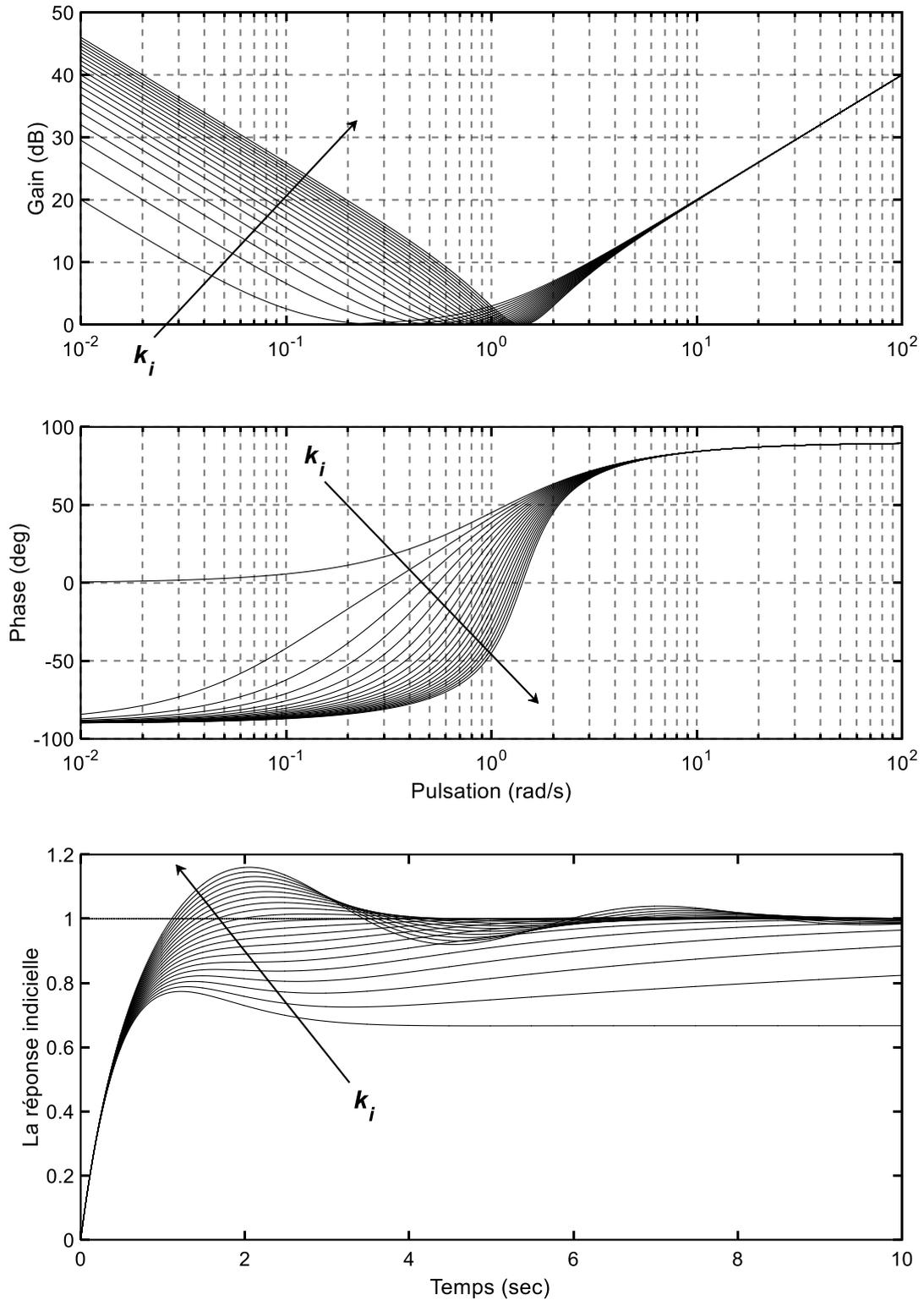


Fig. 4.8. Effet du paramètre k_i sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.

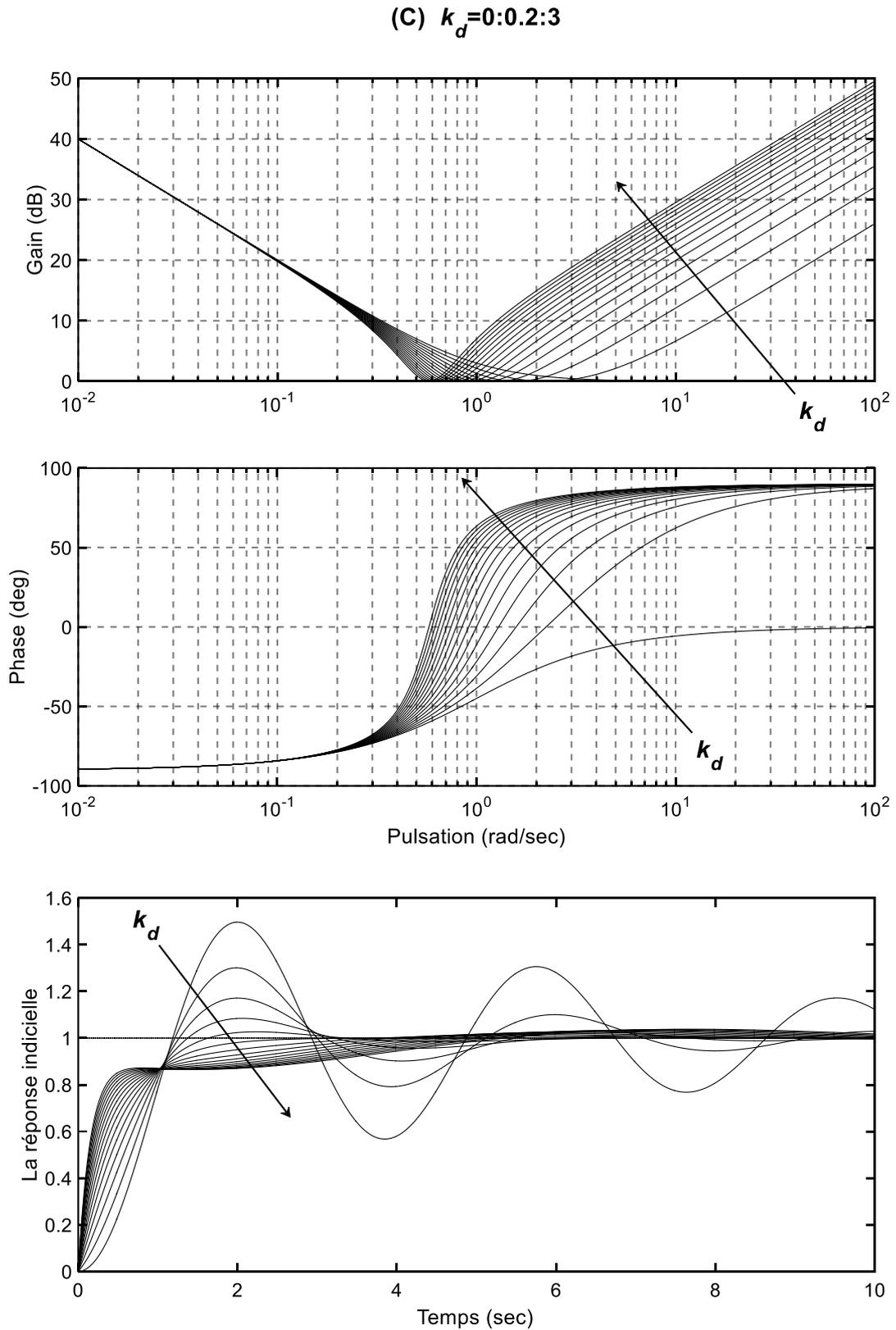


Fig. 4.9. Effet du paramètre k_d sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.

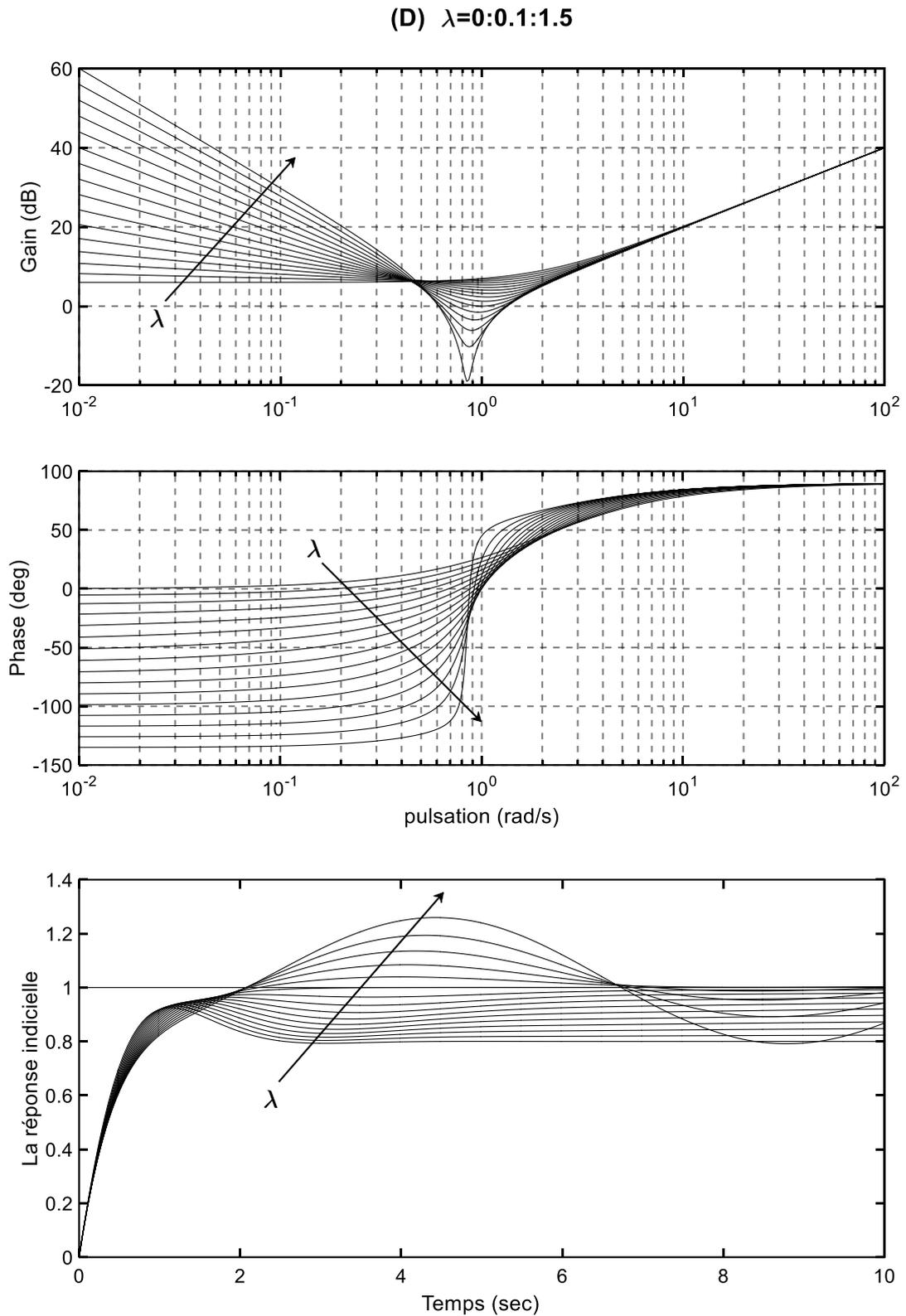


Fig. 4.10. Effet du paramètre λ sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.

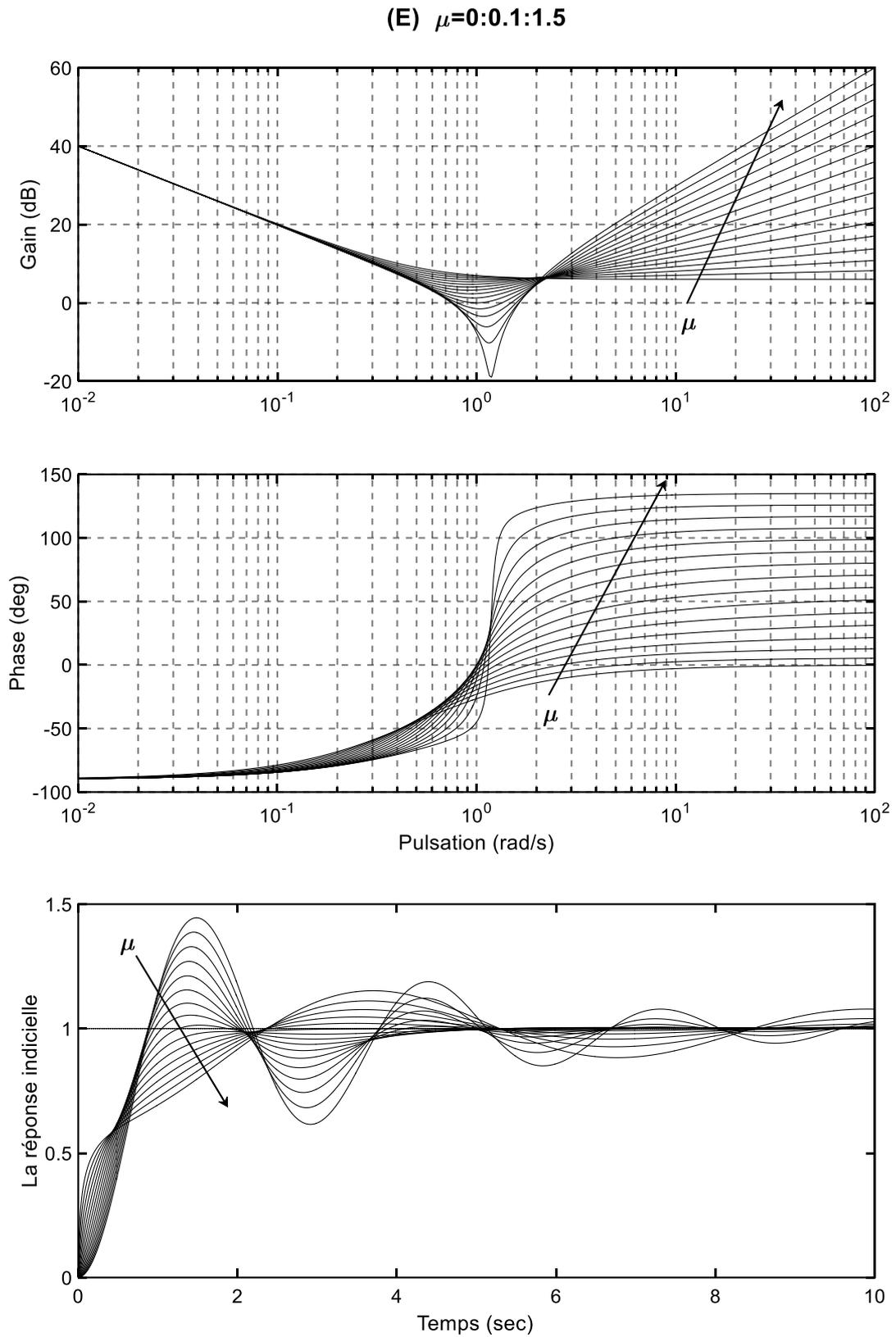


Fig. 4.11. Effet du paramètre μ sur la réponse fréquentielle du correcteur et sur la réponse indicielle du système en BF.

On remarque que les notions classiques de réglage restent conservées pour le cas de la commande fractionnaire. En effet, le gain proportionnel k_p agit sur la rapidité, le gain intégral k_i agit sur le fonctionnement en régime permanent tandis-que le gain dérivé k_d agit sur le fonctionnement en régime transitoire. Les paramètres additionnels λ et μ offrent plus de flexibilité et robustesse au correcteur $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au correcteur PID classique.

Par un choix adéquat des actions et de leurs paramètres, il est possible d'obtenir un comportement désiré en boucle fermée, traduisant les performances souhaitées et formulées dans un cahier des charges en termes de rapidité, précision et stabilité.

4.4 Conclusion

Le correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$, proposé par Podlubny [Pod99b], est une généralisation du correcteur PID classique comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ , avec λ et μ sont des nombres réels positifs.

Dans ce chapitre, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ est présenté avec une analyse profonde de l'effet de chacun de ses paramètres $(k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu)$ sur la réponse du système en boucle fermée. A travers des diagrammes de Bode (amplitude et phase), c'est démontré que les effets des trois paramètres classiques (k_p, k_i, k_d) restent conservés pour la commande fractionnaire. Tandis que les paramètres additionnels λ et μ offrent plus de flexibilité et robustesse au correcteur $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au correcteur PID classique.

Pour atteindre les performances souhaitées en termes de rapidité, précision et stabilité, un réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ est nécessaire.

Chapitre 5

L'optimisation mono- et multi-objectif

5.1 Introduction

Le réglage de la plupart des contrôleurs est une tâche difficile. Dans le cas d'un contrôleur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$, dit contrôleur FOPID, il y a cinq paramètres à régler pour sa conception. En raison du surplus dans le nombre des paramètres, il est difficile de régler ce contrôleur [Ast95]. Selon Valerio et Costa [Val10], les méthodes de réglage peuvent être divisées en trois catégories différentes :

- Méthodes basées sur des règles ;
- Méthodes analytiques ;
- Méthodes numériques.

Ces deux dernières décennies, plusieurs travaux ont été effectués pour la synthèse des correcteurs FOPID par les méthodes de réglage numériques qui sont basées sur les méthodes d'optimisation avec ses deux types : mono-objectif [Cao05, Cao06, Kari07, Cha09, Das12] et multi-objectif [Man09, Pan12, Pan15]. Pour faire un tour d'horizon sur les travaux effectués, le lecteur peut se référer à [Shah16].

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base de l'optimisation mono- et multi-objectif puis nous faisons un tour d'horizon sur les méthodes de résolution métaheuristiques. L'algorithme des baleines à bosses, qui est un algorithme relativement intuitif et simple à implémenter, est présenté en détail dans sa version mono-objectif (WOA : Whale Optimisation Algorithm) et sa version multi-objectif (MOWOA : Multi-Objective Whale Optimisation Algorithm) à des fins d'optimisation dans le chapitre suivant.

5.2 Optimisation mono-objectif

Un problème d'optimisation mono-objectif consiste à rechercher la valeur maximale ou minimale, appelée optimum global, d'une fonction $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée la fonction objectif. \mathcal{S} est couramment appelé espace de décision et le plus souvent on utilise $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$. Un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{S} est appelé une solution du problème d'optimisation. Les composantes x_i de x sont les variables de décision. Une solution $x \in \mathcal{S}$ est dite réalisable si elle respecte un ensemble de contraintes de la forme $g(x) \geq 0$. L'ensemble $\Omega \in \mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions réalisables que l'on appelle ensemble réalisable. Formellement, un problème d'optimisation mono-objectif s'écrit donc (pour un problème de minimisation) [Joz04]:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{t. q. } x \in \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Optimum global, optimum local

- Si l'on peut prouver que $\forall x \in \Omega, f(xg) \leq f(x)$, alors on dira que xg est l'optimum (minimum) global du problème d'optimisation.
- S'il existe un ensemble $E \subset \Omega$, contenant $xloc$, tel que $\forall x \in E, f(xloc) \leq f(x)$, avec $x \neq xloc$, alors on dira que $xloc$ est un optimum (minimum) local du problème d'optimisation.

La figure (5.1) illustre la notion d'optimum global et local pour un problème d'optimisation mono-objectif à une seule variable de décision x .

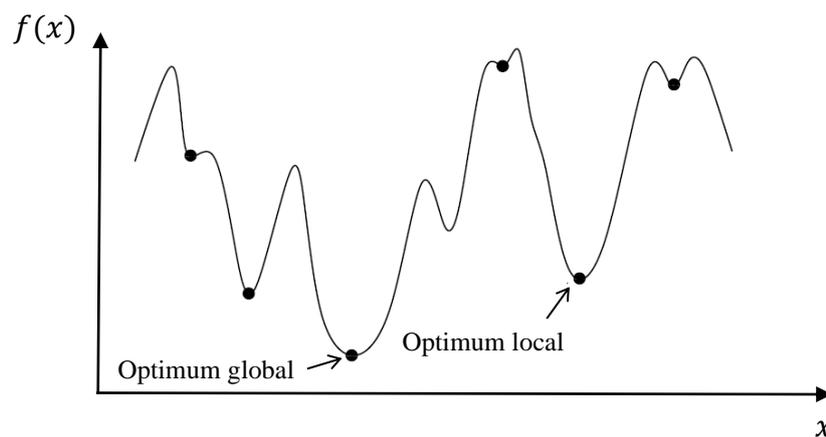


Fig. 5.1. Optimum global vs optimum local.

En contrôle, f est fonction du vecteur x qui représente les paramètres du correcteur à synthétiser. Les fonctions objectifs peuvent être un critère de performance exprimé dans le domaine temporel ou fréquentiel. Les fonctions les plus couramment utilisées sont les critères de performance temporels basés sur le calcul de l'intégrale de l'erreur [Kro01] :

– L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE : Integrated Absolute Error)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (5.2)$$

– L'intégrale de l'erreur quadratique (ISE : Integrated Square Error)

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (5.3)$$

– L'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps (ITSE : Integrated Time multiplied Square Error)

$$ITSE = \int_0^{\infty} t e(t)^2 dt \quad (5.4)$$

– L'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE : Integrated Time multiplied Absolute Error)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (5.5)$$

Un inconvénient des critères IAE et ISE est qu'ils peuvent donner une réponse avec un dépassement relativement faible mais un temps de réponse long car toutes les erreurs sont pondérées de manière uniforme dans le temps [Kro01]. Les critères de performance ITAE et ITSE permettent de pallier cet inconvénient, mais ne garantissent pas une marge de stabilité souhaitable [Kro01]. Cependant, les deux critères ISE et ITAE sont souvent les plus utilisés dans la littérature pour leurs meilleures performances par rapport aux critères IAE et ITSE.

5.3 Problème d'optimisation multi-objectif

5.3.1 Définition

Dans un problème d'optimisation multi-objectif, on ne cherche pas à optimiser une fonction objectif unique mais un vecteur de fonctions [Joz04] :

$$\begin{cases} \min F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ t. q. \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (5.6)$$

où $m \geq 2$ est le nombre des fonctions objectifs et $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ est le vecteur des fonctions objectifs à optimiser. Le vecteur x et les ensembles \mathcal{S} et Ω sont définis de la même manière que pour un problème d'optimisation mono-objectif.

En optimisation, le décideur est la personne qui souhaite choisir une solution pour répondre au problème auquel il est confronté. Dans le cadre multi-objectif, le décideur raisonne en termes d'évaluation d'une solution pour chaque objectif et se place naturellement dans l'espace $F(\mathcal{S})$, appelé espace des objectifs. L'ensemble $\mathcal{Y} = F(\Omega)$ représente les points réalisables de l'espace des objectifs où $y = (y_1, \dots, y_m)$, avec $y_i = f_i(x)$ et $x \in \Omega$, est un point de cet espace.

La figure (5.2) présente un exemple avec deux variables de décision et deux fonctions objectifs. Dans cette figure, on peut voir la façon dont la fonction F projette les solutions de l'ensemble réalisable Ω de l'espace de décision \mathcal{S} , dans l'ensemble réalisable \mathcal{Y} de l'espace des fonctions objectif.

En contrôle, la fonction multi-objectif regroupe le plus souvent les indices de performances temporels tels que : le temps de montée, le temps de réponse, le dépassement et l'erreur statique; ou bien les indices de performances fréquentiels tels que : la bande passante, la marge de gain et la marge de phase.

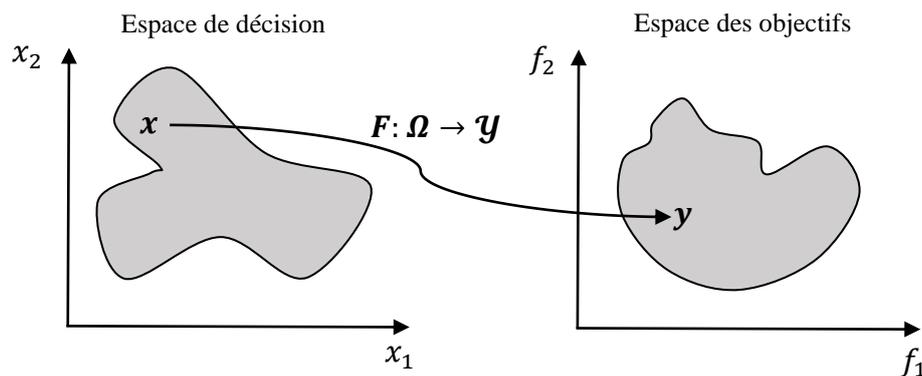


Fig. 5.2. Espace de décision et espace des objectifs d'un problème d'optimisation multi-objectif.

5.3.2 Optimalité multi-objectif au sens de Pareto

Alors que dans un problème d'optimisation mono-objectif, il n'existe qu'un seul optimum global avec éventuellement plusieurs solutions correspondantes, ce n'est plus le cas pour un problème d'optimisation multi-objectif où les fonctions objectifs sont généralement contradictoires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solution unique optimisant tous les objectifs en même temps. D'où la question suivante : Comment comparer les solutions d'un problème multi-objectif ?

Pour comparer des solutions dans un contexte d'optimisation multi-objectif, il est courant d'utiliser la relation de dominance de Pareto [Edg81, Par96].

5.3.2.1 La notion de dominance

En 1896, Vilfredo Pareto, un mathématicien Italien, formule le concept suivant [Par96] : « Dans un problème multi-objectif, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères ». Cet équilibre est appelé optimum de Pareto. Un point y est dit Pareto-optimal s'il n'est dominé par aucun autre point appartenant à \mathcal{Y} . Un tel point est également appelé solution non dominée.

Définition 5.1 : Soit un couple de vecteurs de décision $(u, v) \in \Omega$, alors (pour un problème de minimisation):

$$\begin{cases} u < v \text{ (} u \text{ domine } v\text{)} & \text{ssi } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} f_i(u) < f_i(v) \\ u \preceq v \text{ (} u \text{ domine faiblement } v\text{)} & \text{ssi } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} f_i(u) \leq f_i(v) \\ u \sim v \text{ (} u \text{ et } v \text{ sont incomparables)} & \text{ssi } \exists i, j \in \{1, 2, \dots, m\} f_i(u) > f_i(v) \text{ et } f_j(v) > f_j(u) \end{cases} \quad (5.7)$$

Sur la figure (5.3), la région de l'espace des objectifs dominée par la solution « A » est représentée en gris foncé. La région contenant les solutions qui dominent apparaît en gris clair. Les deux régions blanches contiennent les vecteurs objectifs qui sont incomparables avec le vecteur « A ».

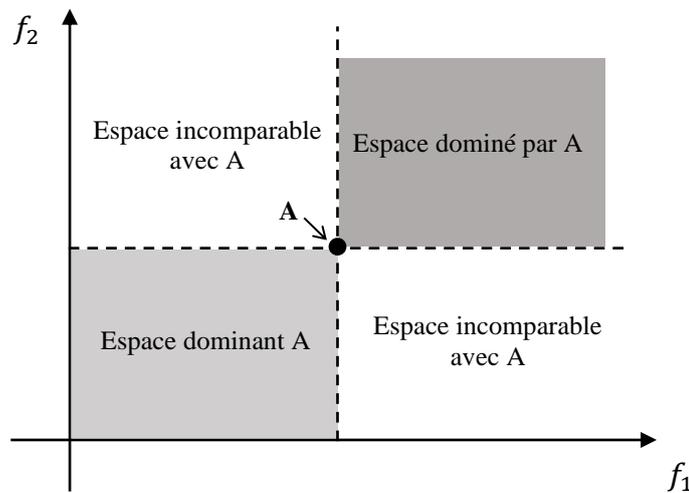


Fig. 5.3. Visualisation, dans l'espace des objectifs, des relations de dominance possibles par rapport à la solution A.

5.3.2.2 Ensemble de Pareto et front de Pareto

Pour un problème d'optimisation multi-objectif, l'ensemble de Pareto-optimal (\mathcal{P}^*) est défini comme suit :

$$\mathcal{P}^* = \{x \in \Omega \mid \nexists x' \in \Omega F(x) \preceq F(x')\} \quad (5.8)$$

L'image de l'ensemble de Pareto optimal dans \mathcal{Y} est appelée front de Pareto, frontière Pareto ou surface de compromis. Formellement, le front de Pareto se définit comme suit :

$$\mathcal{PF}^* = \{y = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) | x \in \mathcal{P}^*\} \quad (5.9)$$

Selon que les fonctions objectifs doivent être minimisées ou maximisées, le front de Pareto a une forme particulière. La figure (5.4) illustre les différentes possibilités dans le cas bi-objectif.

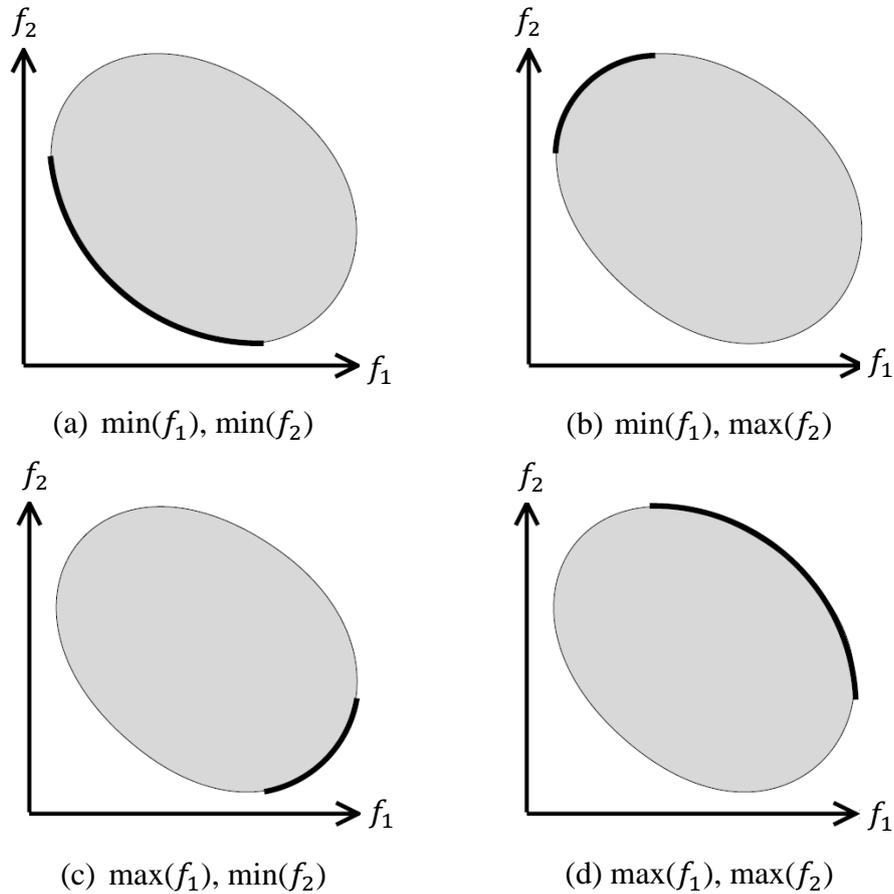


Fig. 5.4. Front de Pareto pour un problème bi-objectif.

5.3.3 Approches de résolution

La résolution des problèmes multi-objectifs peut être divisé en deux phases :

- 1- **La recherche des solutions de meilleur compromis** : C'est la phase d'optimisation multi-objectif.
- 2- **Le choix de la solution à retenir** : C'est la tâche du décideur qui, parmi l'ensemble des solutions de compromis, doit extraire celle(s) qu'il utilisera. On parle alors ici de décision multi-objectif et cela fait appel à la théorie de la décision.

Dans la littérature, nous rencontrons deux classifications différentes des approches de résolution de problèmes multi-objectifs. Le premier classement adopte **un point de vue décideur**, les approches sont classées en fonction de l'usage que l'on désire en faire. Le deuxième classement adopte **un point de vue concepteur**, les approches sont triées de leur façon de traiter les fonctions

objectifs. Ainsi avant de se lancer dans la résolution d'un problème multi-objectif, il faut se poser la question du type de l'approche de résolution à utiliser.

➤ Classification « point de vue décideur »

La solution d'un problème multi-objectif est un ensemble de solutions. Cependant, pour un problème réel, une seule solution pourra être déployée. Un choix par un décideur doit donc être effectué; le décideur pouvant intervenir en amont de la résolution, après celle-ci, ou de manière interactive [Van99] (Fig. 5.5) :

- Les approches à préférence *a priori* : le décideur définit ses préférences entre les différents objectifs avant d'utiliser la méthode d'optimisation.
- Les approches à préférence *progressive* : le décideur affine son choix de compromis au fur et à mesure du déroulement de la méthode d'optimisation.
- Les approches à préférence *a posteriori* : le décideur choisit la solution qui correspond à ses préférences parmi un ensemble de solutions fourni par la méthode de résolution.

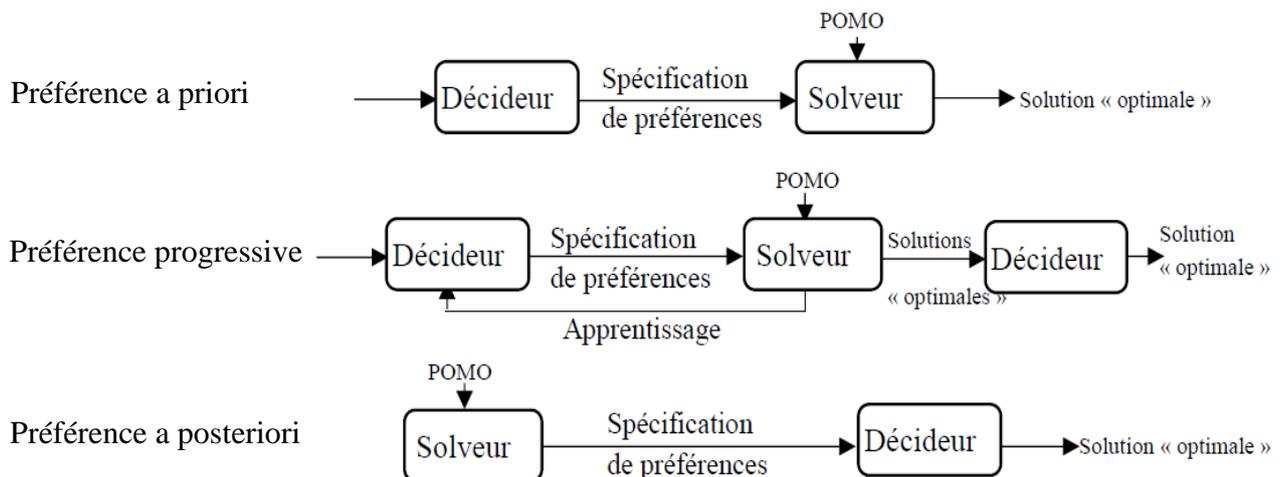


Fig. 5.5. Approches de résolution d'un problème multi-objectif de point de vue « décideur ».

➤ Classification « point de vue concepteur »

Les approches de cette classe sont deux catégories [Bari03] : les approches non Pareto et les approches Pareto (Fig. 5.6).

- **Les approches non Pareto** ne traitent pas le problème comme un véritable problème multi-objectif. Elles cherchent à ramener le problème initial à un ou plusieurs problèmes mono-objectifs.
- **Les approches Pareto** ne transforment pas les objectifs du problème, ceux-ci sont traités sans aucune distinction pendant la résolution.

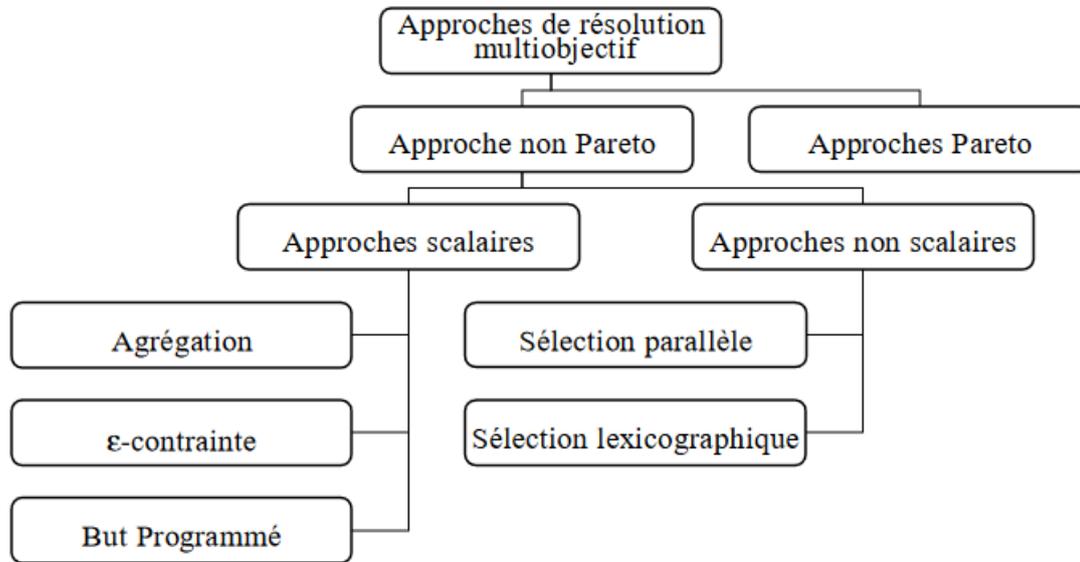


Fig. 5.6. Approches de résolution d'un problème multi-objectif de point de vue « concepteur ».

Ces approches sont décrites avec plus de détails dans les sous sections suivantes.

5.3.3.1 Approches non Pareto

Les approches non Pareto sont classées en deux catégories : les méthodes scalaires, qui transforment le problème multi-objectif en un problème mono-objectif et les méthodes non scalaires, qui gardent l'aspect multi-objectif, mais en traitant séparément chacun des objectifs.

5.3.3.1.1 Approches scalaires

A l'origine, les problèmes multi-objectifs ont été transformés en problèmes mono-objectifs. Pour cela, plusieurs méthodes ont été mises au point telles que : les approches d'agrégation, programmation par but, et les approches ε -contraintes, etc.

a) Approche d'agrégation (La somme pondérée)

C'est l'une des premières méthodes utilisées pour résoudre les problèmes multi-objectifs [Ish98]. Elle consiste à transformer un problème multi-objectif en un problème mono-objectif, en définissant une fonction objectif unique \mathcal{F} comme étant la somme pondérée des différentes fonctions objectifs du problème initial. En affectant à chaque objectif un poids qui représente l'importance relative que le décideur attribue à l'objectif :

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \quad (5.10)$$

où les poids w_i sont compris dans l'intervalle $[0;1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^m w_i = 1$. Il existe d'autres approches d'agrégation mais l'agrégation linéaire est la plus couramment utilisée.

La figure (5.7) illustre le fonctionnement de la méthode d'agrégation. Choisir un vecteur de poids revient à trouver un hyperplan dans l'espace objectif (une droite pour un problème bi-objectif) avec une orientation fixée. La solution optimale est le point où l'hyperplan possède une tangente commune avec l'espace réalisable (point x dans la figure (5.7.a)).

L'avantage de cette méthode est sa facilité d'implémentation du fait qu'elle puisse utiliser les méthodes et mécanismes définis pour l'optimisation mono-objectif. Cependant, cette méthode est incapable de trouver les zones concaves du front Pareto quels que soient les poids choisis. Dans la figure (5.7.b), où le problème possède une frontière Pareto non convexe, seules les solutions extrêmes y et z peuvent être générées.

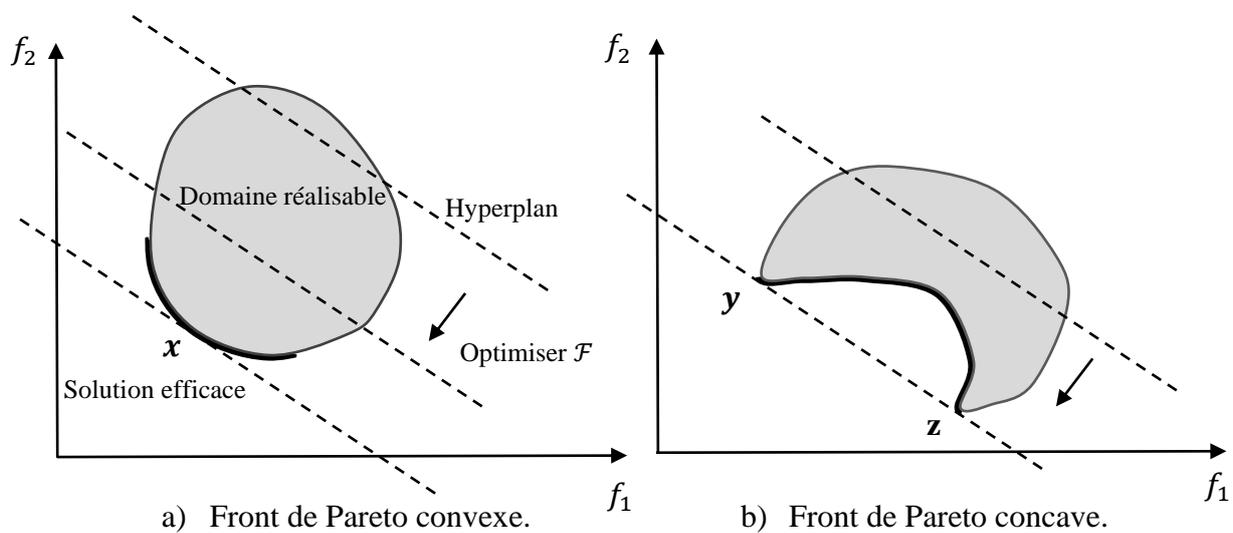


Fig. 5.7. Méthode d'agrégation.

b) Programmation par but

Charnes et al. [Char55] ont développé une méthode dite : « programmation par but ». Dans cette approche, le décideur doit définir des buts ou références qu'il désire atteindre pour chaque objectif f_i . Ces valeurs sont introduites dans la formulation du problème, le transformant en un problème mono-objectif. La nouvelle fonction objectif est modifiée de façon à minimiser les écarts entre les objectifs f_i et les buts à atteindre B_i comme suit (Fig. 5.8) :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m |f_i(x) - B_i| \\ t. q. \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (5.11)$$

Cependant, en dépit de sa popularité et sa large gamme d'applications, il n'y a aucune garantie qu'elle offre une solution optimale au sens de Pareto. Cette technique présente l'avantage de ne

pas être trompée par les problèmes non convexes. Reste néanmoins le problème du choix de la pondération, transféré dans celui du choix de la cible.

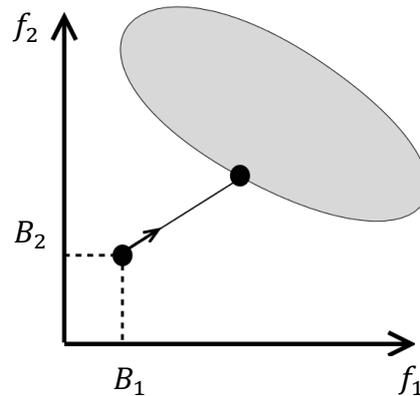


Fig. 5.8. Méthode du but à atteindre.

c) L'approche ε -contrainte

Haimes et al. [Hai71] ont introduit une nouvelle approche scalaire dite « ε -contrainte » (appelée également approche de compromis). Dans cette méthode, une seule fonction objectif f_k est optimisée tandis que les autres fonctions objectifs sont sujettes à des contraintes. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min f_k(x) \\ t. q. \\ x \in \Omega \\ f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq k \end{cases} \quad (5.12)$$

où ε_j est la borne supérieure de la fonction objectif $f_j(x)$. La figure (5.9) illustre la méthode ε -contrainte pour un problème d'optimisation bi-objectif en ajoutant la contrainte $f_2(x) \leq \varepsilon_2$ puis en minimisant la fonction f_1 .

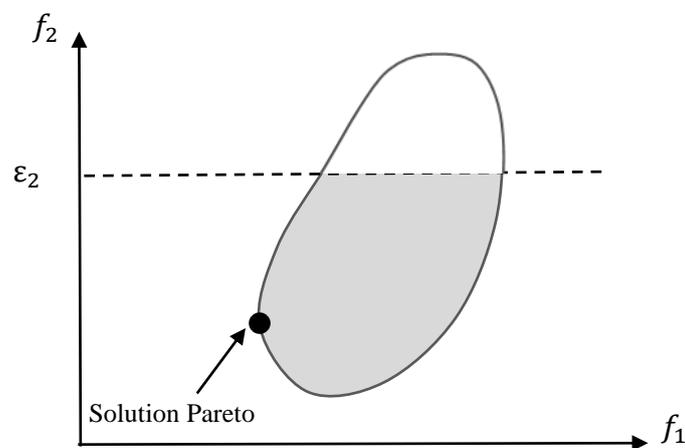


Fig. 5.9. Méthode de ε -contrainte.

L'objectif f_k représente l'objectif primaire ou l'objectif préféré. L'ensemble Pareto optimal est généré en faisant varier les valeurs des ε_j . Il est ainsi possible de générer l'ensemble Pareto optimal en n'ayant à résoudre qu'un ensemble de problèmes d'optimisation mono-objectif. Une variante de cette approche a été proposée dans [Fu04], où Fu et Diwekar ont prouvé que leur algorithme est capable de trouver toutes les solutions de Pareto même sous la contrainte de concavité à la différence de la méthode d'agrégation. Cependant, l'ajout des contraintes modifie le polyèdre, ce qui peut avoir un effet négatif sur le calcul d'une borne inférieure par exemple.

Sur les approches scalaires

Ces approches transforment un problème d'optimisation multi-objectif en un ou plusieurs problèmes à un seul objectif. Que ce soit sous la forme d'une somme pondérée, ou sous la forme d'une distance à un but, cette transformation permet d'utiliser facilement les méthodes d'optimisation issues de l'optimisation à un seul objectif. Mais ces méthodes ont aussi des inconvénients. Certaines ne peuvent traiter complètement des problèmes non convexes et sont donc très sensibles à la forme du front Pareto. Les autres, bien que pouvant traiter les problèmes non convexes, restent quand même sensibles à la forme du front Pareto. Un autre inconvénient important est qu'il faille relancer plusieurs fois les algorithmes de résolution avec des valeurs différentes pour certains paramètres (vecteur de poids par exemple) pour obtenir plusieurs points distincts de la surface de compromis. Ces méthodes nécessitent aussi souvent une bonne connaissance du problème a priori, notamment pour fixer les vecteurs de poids ou les points de référence.

5.3.3.1.2 Approches non-scalaires et non-Pareto

Ces approches ne transforment pas le problème multi-objectif en un problème mono-objectif, mais utilisent des opérateurs qui traitent séparément les différents objectifs, elles n'utilisent pas non plus la notion de dominance Pareto : sélection parallèle, sélection lexicographique.

a) La sélection lexicographique

Cette approche, proposée par Fourman [Fou85], classe les objectifs en fonction d'un ordre d'importance proposé par le décideur. Ensuite, les fonctions objectifs sont traitées dans cet ordre pour obtenir l'optimum.

La méthode lexicographique peut s'exprimer de la manière suivante : supposons que l'on ait les fonctions objectifs f_i avec $i = 1, \dots, m$ classées de telle sorte que $i < j$ alors f_i est prioritaire que f_j . On résout d'abord le problème :

$$\begin{cases} \min f_1(x) \\ t. q. \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (5.13)$$

On obtient alors x_1^* la meilleure solution trouvée pour f_1 , associée à la valeur $f_1^* = f_1(x_1^*)$. $f_1(x) = f_1^*$ devient alors une contrainte du problème associé à f_2 :

$$\begin{cases} \min f_2(x) \\ t. q. \\ x \in \Omega \\ f_1(x) = f_1^* \end{cases} \quad (5.14)$$

La meilleure solution trouvée est alors x_2^* , associée à la valeur $f_2^* = f_2(x_2^*)$ et on pose $f_2(x) = f_2^*$ comme contrainte supplémentaire pour la résolution de f_3 . La procédure est itérée jusqu'à ce que tous les objectifs aient été traités. Ainsi le problème associé à la fonction f_i est le suivant :

$$\begin{cases} \min f_i(x) \\ t. q. \\ x \in \Omega \\ f_1(x) = f_1^* \\ f_2(x) = f_2^* \\ \dots \\ f_{i-1}(x) = f_{i-1}^* \end{cases} \quad (5.15)$$

où $f_j^* = f_j(x_j^*)$ avec x_j^* la meilleure solution trouvée ($j < i$).

La figure (5.10) illustre le fonctionnement de la méthode lexicographique dans le cas d'un problème bi-objectif.

La difficulté de cette méthode réside dans le classement des objectifs. En effet, deux ordonnancements différents n'aboutissent généralement pas à la même solution. De plus, si toutes les variables de décision participent au calcul du premier objectif, elles sont fixées pour les objectifs suivants et ces derniers ne peuvent être optimisés.

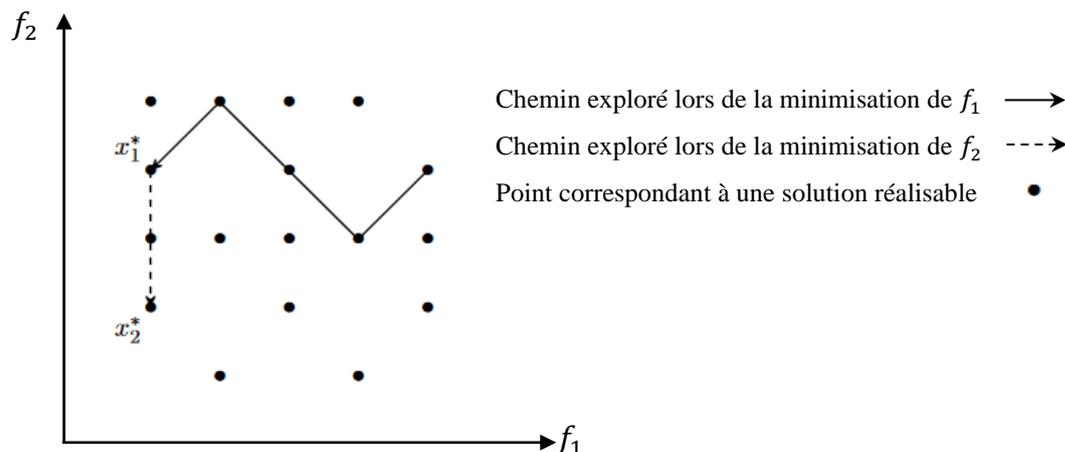


Fig. 5.10. Méthode lexicographique.

b) Sélection parallèle

Cette approche a été la première proposant un algorithme génétique pour la résolution des problèmes multi-objectifs [Scha85]. L'algorithme proposé, VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), sélectionne les individus selon chaque objectif de manière indépendante. L'idée est simple : Pour K objectifs et une population de n individus, une sélection de n/K meilleurs individus est effectuée pour chaque objectif. Ainsi K sous-populations vont être créées et ensuite mélangées afin d'obtenir une nouvelle population de taille n . Le processus se termine par l'application des opérateurs génétiques (croisement et mutation) (Fig. 5.11).

Comparé aux approches basées sur la dominance de Pareto, l'algorithme VEGA offre des performances très honorables sur les problèmes convexes. Toutefois, il est équivalent à une méthode de pondération. Il en partage donc les inconvénients et ne permettent pas de trouver de solutions appartenant à une concavité.

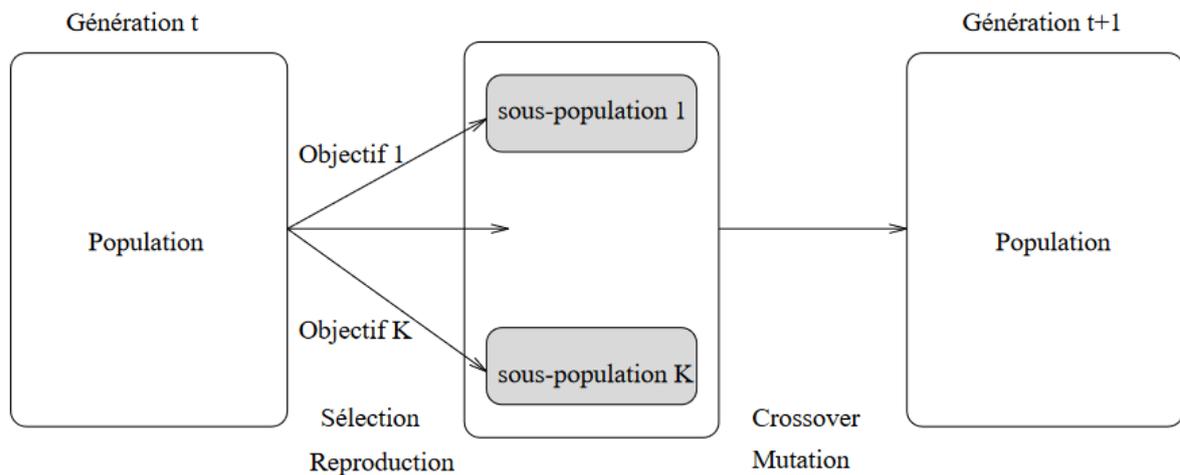


Fig. 5.11. Sélection parallèle dans l'algorithme VEGA.

Sur les approches non-scalaires et non-Pareto

L'inconvénient de ces approches est qu'elles tendent à générer des solutions qui sont largement optimisées pour certains objectifs et très peu pour les autres. Les solutions de compromis sont négligées, et ainsi l'aspect multi-objectif du problème est contourné [Meu02]. Nous présentons dans les sections suivantes l'approche Pareto traitant les problèmes multi-objectifs sans transformation, sans favoriser un objectif par rapport à un autre et fournissant au décideur un ensemble compromis de solutions en une seule résolution du problème.

5.3.3.2 Approches Pareto

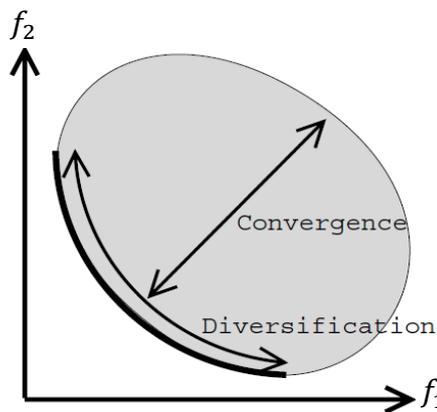
Les approches Pareto utilisent directement la notion de dominance au sens de Pareto pour la sélection des solutions. Cette idée a été introduite initialement dans les algorithmes génétiques par

Goldberg en 1989 [Gol89] pour résoudre les problèmes proposés par Schaffer [Scha85]. Le principal avantage de ces approches, est l'optimisation simultanée d'objectifs contradictoires. A la fin du processus d'optimisation, l'algorithme fournit un ensemble de solutions qui approchent le front de Pareto. Le choix de la solution optimale revient au décideur qui va choisir, parmi l'ensemble des solutions possibles, celle qui lui semble la meilleure. De nos jours, la majorité des algorithmes utilisent l'approche Pareto pour traiter les problèmes multi-objectifs.

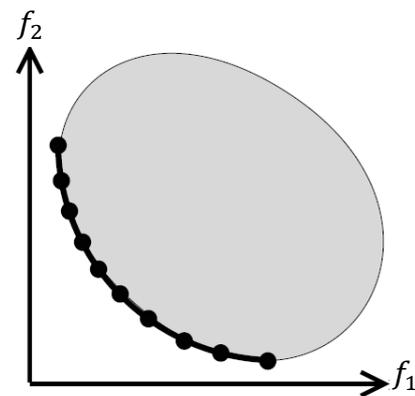
a) Objectifs des approches Pareto

Les méthodes Pareto doivent prendre en compte deux objectifs principaux [Col11] :

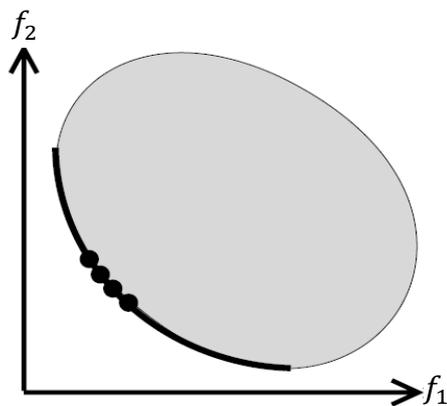
- **L'intensification** : Afin de converger vers la frontière de Pareto, plusieurs mécanismes ont été développés tels que : le mécanisme de classement [Gia15], le mécanisme d'élitisme [Deb02], etc.
- **La diversification** : Afin de trouver des solutions bien distribuées le long de la frontière de Pareto, des mécanismes de diversification ont été utilisés tels que : le nichage séquentiel [Bea93], la restriction de voisinage [Lou34], la distance d'encombrement [Deb02], la fonction de partage [Gol89], etc.



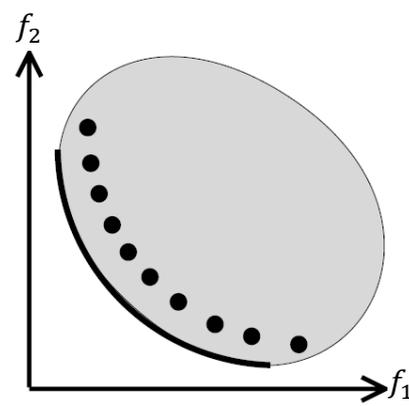
(a) Les deux buts d'une méthode multi-objectif.



(b) Une solution idéale.



(c) Une solution qui répond au but de convergence mais qui est mauvais pour le but de diversification.



(d) Une solution qui répond au but de diversification mais qui est mauvaise pour le but de convergence.

Fig. 5.12. Intensification et diversification dans l'approche de Pareto [Joz04].

La figure (5.12.a) illustre les deux buts d'une méthode d'optimisation Pareto, (5.12.b) représente un ensemble de solutions répondant idéalement à ces deux buts, (5.12.c) montre une approximation qui répond au premier but mais qui est mauvaise par rapport au second, (5.12.d) illustre le cas opposé.

b) Les approches Pareto de point de vue « élitisme »

Dans un contexte mono-objectif, l'utilisation de l'élitisme se traduit par le maintien de la meilleure solution au fil des générations. De la même manière, dans le contexte multi-objectif, l'ensemble des solutions non dominées sont considérées comme les élites de la génération. Ces solutions sont alors conservées d'une génération à l'autre, tant qu'elles occupent ce statut. Cependant, la mise en place de l'élitisme est alors plus complexe que dans le cadre mono-objectif. L'élitisme peut être implémenté de deux manières [Jen03] :

- **L'élitisme avec population externe** sert à maintenir un ensemble externe d'individus appelé *archive* qui stocke les solutions non-dominées trouvées au cours du processus de recherche [Coe02, Bar03].
- **L'élitisme sans population externe** qui combine l'ancienne et la nouvelle population, puis utilise une sélection pour préserver les meilleures solutions dans la prochaine génération [Moo99, Ray02].

La figure (5.13) illustre ces deux approches.

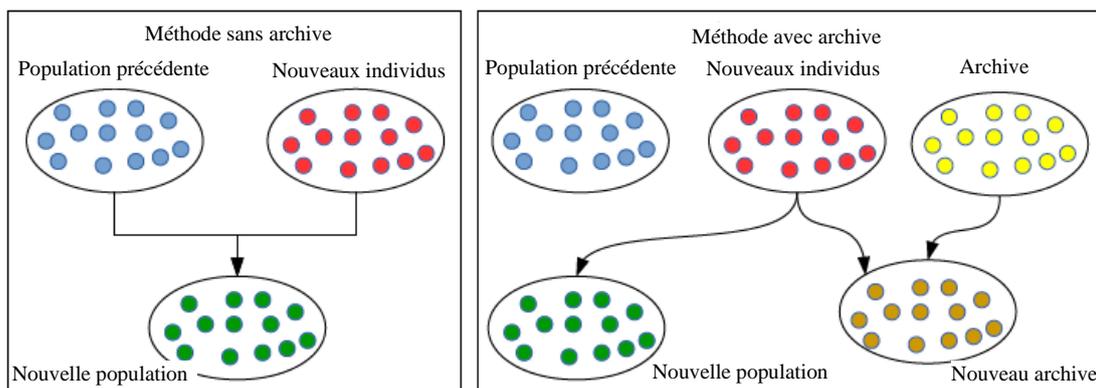


Fig. 5.13. Méthodes d'élitisme : sans et avec archive [Cher16].

De nos jours, la majorité des algorithmes d'optimisation multi-objectif utilisent l'approche Pareto pour traiter les problèmes multi-objectif dont nous nous intéresserons plus particulièrement aux algorithmes *métaheuristiques à population* et nous prenons comme exemple l'algorithme des baleines à bosse multi-objectif (MOWOA : Multi-Objective Whale Optimization Algorithm).

5.4 Méthodes d'optimisation : les métaheuristiques

Les métaheuristiques sont des méthodes approchées dédiées aux problèmes d'optimisation difficiles [Yan10]. Elles ont été conçues à l'origine pour résoudre les problèmes mono-objectifs puis étendues aux problèmes multi-objectifs. Comme c'est illustré dans la figure (5.14), on distingue deux types de métaheuristiques : les algorithmes basés sur une solution unique et les algorithmes basés sur une population.

Les algorithmes appartenant à la première classe travaillent sur un seul point de l'espace de décision. Le processus de recherche commence par un point aléatoire ensuite une amélioration itérative est garantie par la sélection d'une solution meilleure dans le voisinage de la solution actuelle. Cette classe regroupe une variante d'algorithmes tels que l'algorithme du recuit simulé (SA : Simulated Annealing) [Kir83], l'algorithme de la recherche tabou (TS : Tabu Search algorithm) [Glo89, Glo90, Glo97], l'algorithme de recherche par variable de voisinage (VNS : Variable Neighborhood Search) [Mla97], la recherche locale guidée (GLS : Guided Local Search) [Vou99], etc.

La deuxième classe repose sur l'utilisation d'une population d'individus. L'intérêt de ses algorithmes est leur capacité à explorer une vaste partie de l'espace en une seule itération. Cette classe est plus riche en algorithmes et plus adaptée dans la littérature. Ses algorithmes se catégorisent selon leur fondement/source d'inspiration. La première catégorie est inspirée du comportement humain tels que l'algorithme d'optimisation basé sur l'enseignement-apprentissage (TLBO : Teaching Learning Based Optimization) [Rao11]. La deuxième catégorie est basée sur les lois naturelles de l'évolution où l'optimisation débute avec une population qui évolue en combinant les meilleurs individus d'une génération à l'autre. Les algorithmes génétiques (GA : Genetic algorithm) [Hol75, Gol89] est la métaheuristique la plus populaire de cette catégorie [Mir16]. Certaines métaheuristiques sont fondées sur les principes des lois de la physique; l'une des plus populaires est l'algorithme de l'optimisation par la force centrale (CFO : Central Force Optimization) [For07]. Finalement, la dernière catégorie est fondée sur les principes de la nature. Elle regroupe les algorithmes d'optimisation qui imitent les comportements de groupes d'individus tels que les insectes et les animaux. Parmi ces algorithmes, on cite: l'optimisation par essaims particuliers (PSO : Particle Swarm Optimization) [Ken95], l'algorithme des colonies de fourmis (ACO : Ant Colony Optimization) [Colo91], l'algorithme de recherche coucou (CS : Cuckoo Search Algorithm) [Yan09], l'algorithme des colonies d'abeilles artificielles (ABC : Artificial Bee Colony Algorithm) [Kara07], l'algorithme des loups gris (GWO : Grey Wolf Optimization) [Mir14], l'algorithme des baleines à bosse (WOA : Whale Optimization Algorithm) [Mir16], etc.

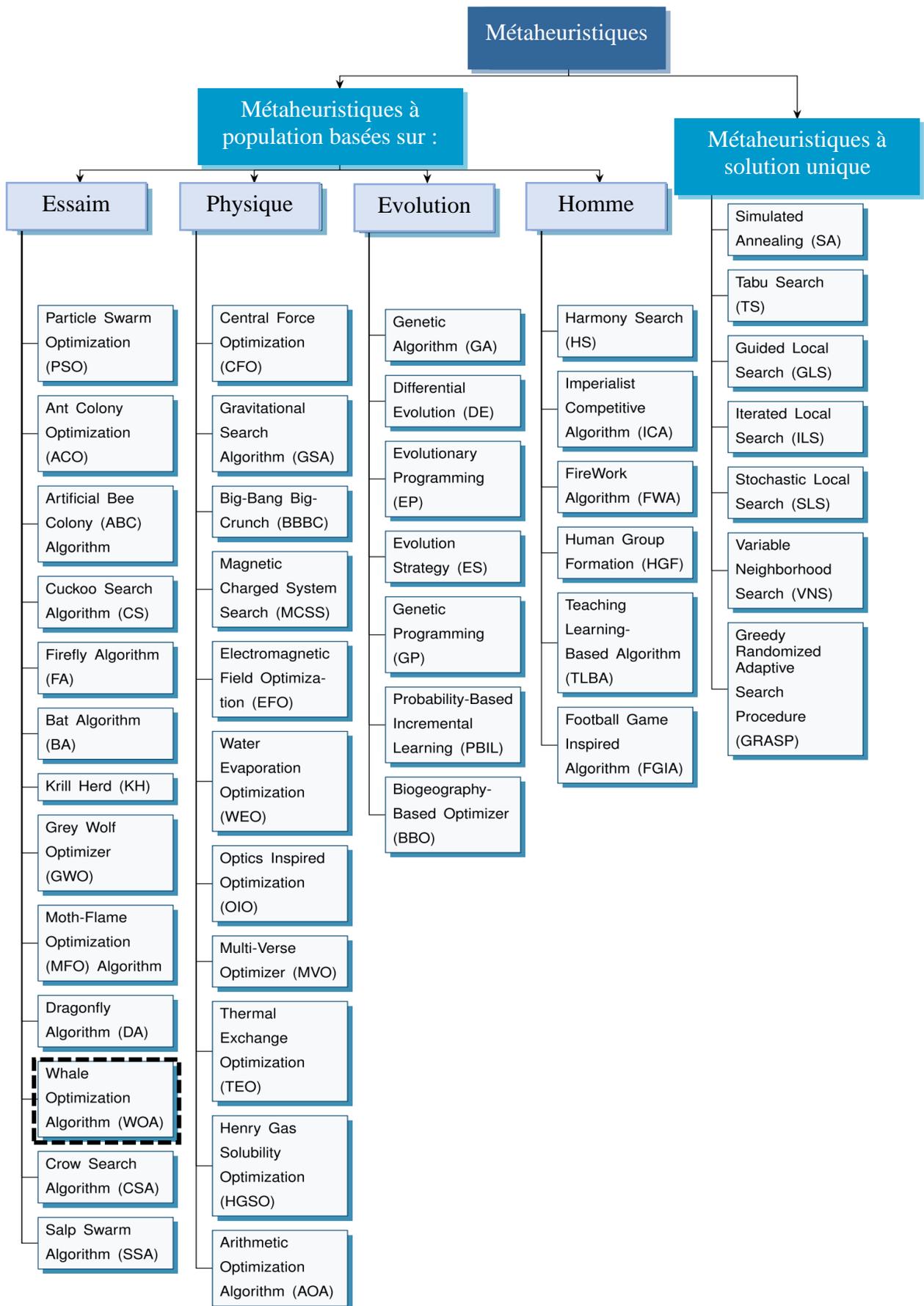


Fig. 5.14. Classification des algorithmes métaheuristiques.

Quelle que soit la catégorie, les algorithmes métaheuristiques reposent principalement sur l'équilibre entre deux processus [Dit15] :

- **La diversification** qui se réfère à l'exploration de nouvelles régions de l'espace de recherche pour générer des solutions qui se différencient de manière significative des solutions déjà visitées;
- **L'intensification** qui se réfère à l'utilisation des informations déjà récoltées pour intensifier la recherche dans les zones intéressantes, c'est-à-dire au voisinage des meilleures solutions rencontrées.

Cet équilibre passe par le réglage des différents paramètres internes de la méthode tels que : le nombre d'individus dans une population, le nombre d'itérations, la pondération des différents opérateurs, etc.

Les métaheuristiques sont relativement simples de point de vue implémentation, et contournent efficacement les zones de minimums locales et s'appliquent facilement à divers problèmes d'optimisation de différents domaines. Pour ces raisons, plusieurs scientifiques ont proposé et continuent de développer de nouvelles métaheuristiques afin de répondre à des besoins spécifiques aux domaines de leur applications [Bous13]. Le développement de nouvelles métaheuristiques demeure un axe de recherche d'actualité.

Dans cette thèse, pour le réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID (Chapitre 6), nous nous sommes intéressés à l'optimisation par les métaheuristiques à population, plus particulièrement à l'algorithme des baleines à bosse dans sa version mono-objectif (WOA : Whale Optimisation Algorithm) et à sa version multi-objectif (MOWOA : Multi-Objective Whale Optimisation Algorithm) qui sont des méthodes relativement intuitives et simples à implémenter.

5.5 Algorithme des baleines à bosses (WOA et MOWOA)

5.5.1 Algorithme des baleines à bosses (WOA)

L'algorithme des baleines à bosses est un nouvel algorithme d'optimisation métaheuristique développé par Mirjalili et Lewis en 2016 [Mir16]. Cet algorithme est inspiré de la méthode de chasse des baleines à bosse appelée méthode de chasse par filet à bulles comme l'illustre la figure (5.15).

Les baleines à bosse sont l'un des plus grands mammifères au monde. Une baleine adulte peut atteindre 30 m de long et pèse jusqu'à 190 tonnes. Les groupes de petits poissons sont la nourriture préférée des baleines à bosse. Ces dernières peuvent percevoir la distance entre elles et la proie

pour l'entourer par la suite. Elles remontent avec une trajectoire en spirale à environ 15 m de profondeur, et crachent un certain nombre de bulles de différentes tailles. La première et la dernière bulle crachée remontent à la surface en même temps pour former un réseau de bulles cylindriques ou tubulaires qui ressemble à une énorme toile d'araignée nouée pour entourer étroitement la proie et la diriger vers le centre du filet. Ainsi, les baleines à bosse, presque debout, ouvrent la bouche dans le cercle des bulles et avalent la proie qui est dans le filet. Selon les descriptions ci-dessus, le comportement de chasse de la baleine à bosse peut être divisé en trois étapes [Mir16] : rechercher une proie, encercler la proie, manœuvrer pour se nourrir avec un filet à bulles en spirale.

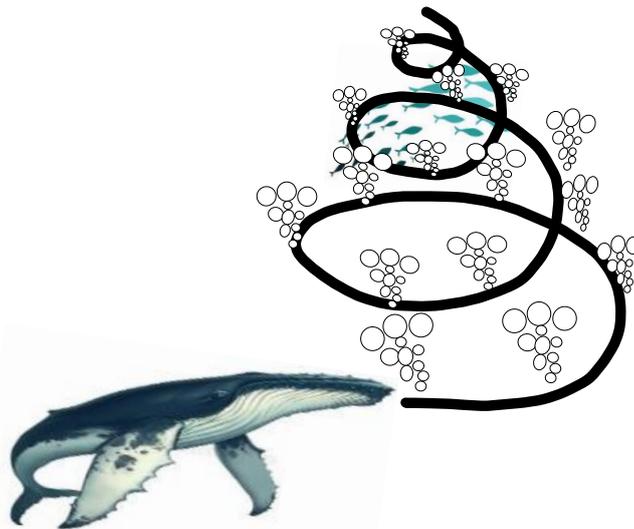


Fig. 5.15. Méthode de chasse par filet à bulles.

L'idée de WOA est d'imiter le comportement de chasse des baleines à bosse. Dans les problèmes d'optimisation qui utilisent cet algorithme l'optimum représente la proie et chaque solution (agent) de la population correspond à une baleine. L'organigramme de cet algorithme est illustré dans la figure (5.16), où p est un nombre aléatoire dans $[0,1]$ et A est un scalaire dont la définition est donnée par la formule (5.16).

Avant la mise à jour de la position des agents de recherche, un scalaire aléatoire $r \in [0, 1]$ est généré pour calculer les scalaires A et C comme suit :

$$A = 2ar - a \quad (5.16)$$

$$C = 2r \quad (5.17)$$

avec a est un scalaire linéairement décroissant de 2 à 0 au cours des itérations.

Le modèle mathématique de WOA est présenté par deux phases : phase d'exploration et phase d'exploitation.

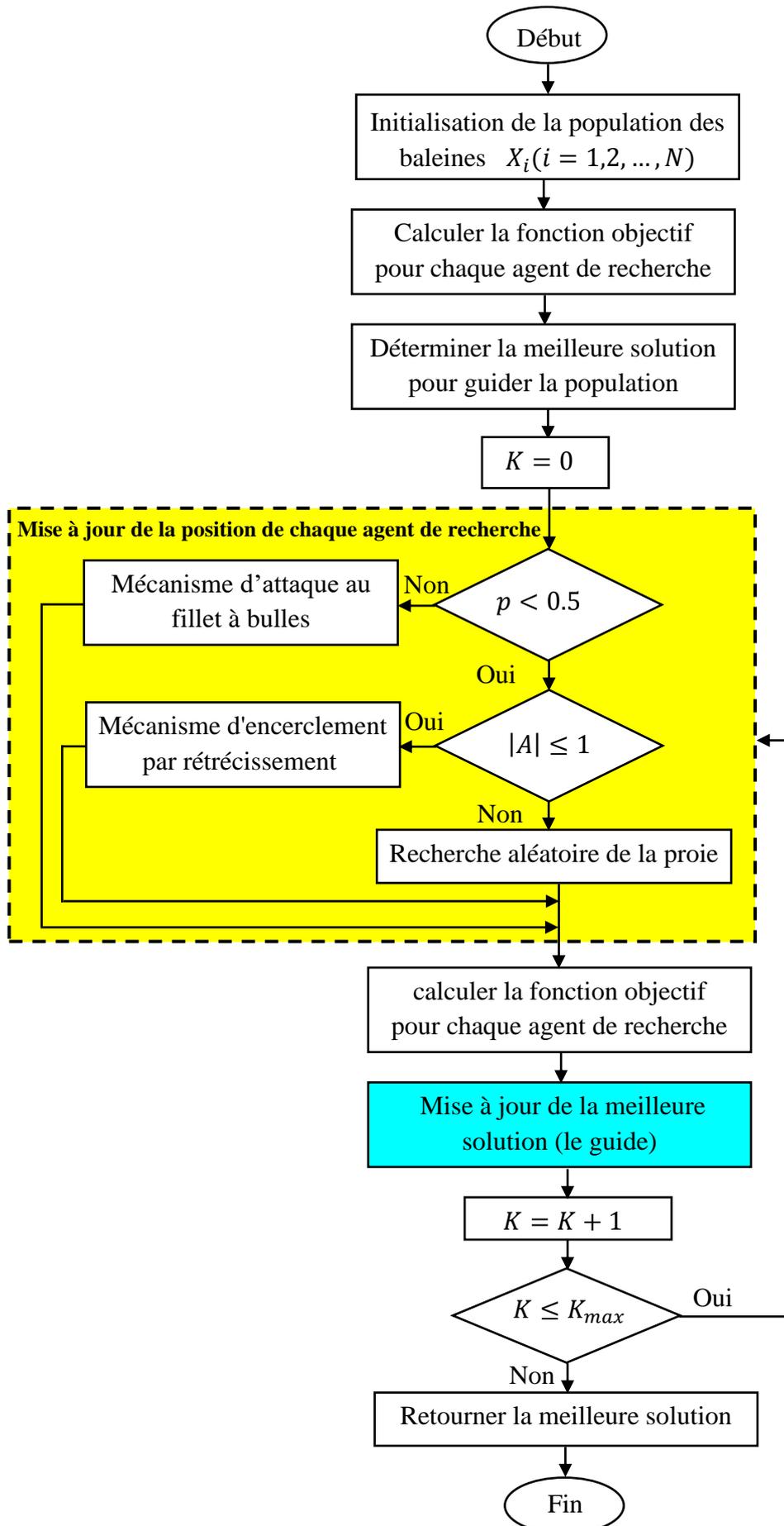


Fig. 5.16. Organigramme de l'algorithme des WOA.

a) Phase d'exploration : Recherche aléatoire de la proie

Si $p < 0.5$ et $|A| > 1$, l'étape de la recherche aléatoire de la proie commence. Cette phase est responsable de l'exploration de l'espace de recherche pour déterminer la meilleure solution. La mise à jour des positions des agents est exprimée par les formules mathématiques suivantes :

$$\vec{D} = |C \cdot \vec{X}_{rand}(t) - \vec{X}(t)| \tag{5.18}$$

$$\vec{X}(t + 1) = \vec{X}_{rand}(t) - A \cdot \vec{D} \tag{5.19}$$

avec t est l'itération courant, $\vec{X}(t)$ est un vecteur de position d'un agent, \vec{X}_{rand} est un vecteur de position généré aléatoirement de la population et $(.)$ est le produit.

Cette phase est illustrée dans la figure (5.17) pour un problème d'optimisation 2D. La position (X, Y) d'un agent de recherche est mise à jour en fonction de la position de l'agent (X^*, Y^*) , choisi aléatoirement. Puisque $|A| > 1$, la nouvelle position de l'agent de recherche est à l'extérieur.

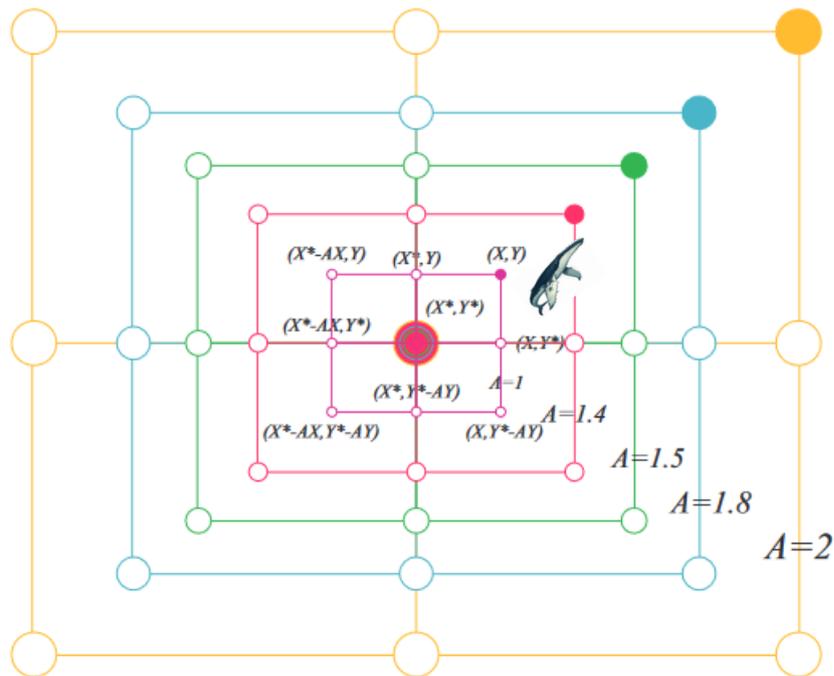


Fig. 5.17. Phase d'exploration (\vec{X}^* est un agent de recherche choisi aléatoirement).

b) Phase d'exploitation : Méthode d'attaque au filet à bulles

Afin de modéliser mathématiquement le comportement du filet à bulles des baleines à bosse, deux mécanismes sont conçus qui sont : le mécanisme d'encerclage par rétrécissement et le mécanisme d'attaque.

1) Mécanisme d'encerclage par rétrécissement

Si $p < 0.5$ et $|A| \leq 1$, la phase d'encerclage des proies commence. La meilleure solution actuelle est supposée l'optimum (la proie) ou elle est proche de l'optimum. Une fois cette solution

est définie, les autres solutions de recherche essaieront de mettre à jour leurs positions vers elle. Ce comportement est représenté par les équations suivantes

$$\vec{D} = |C \cdot \vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \tag{5.20}$$

$$\vec{X}(t + 1) = \vec{X}^*(t) - A \cdot \vec{D} \tag{5.21}$$

avec $\vec{X}(t)$ est le vecteur position, $\vec{X}^*(t)$ est le vecteur position de la meilleure solution obtenue jusqu'à t et $||$ est la valeur absolue,

La figure (5.18) illustre cette phase pour un problème 2D. La position (X, Y) d'un agent de recherche peut être mise à jour en fonction de la position de la meilleure solution actuelle (X^*, Y^*) . Lorsque $|A| \leq 1$, la nouvelle position de l'agent de recherche peut être n'importe où entre la position de la meilleure solution et sa position actuelle.

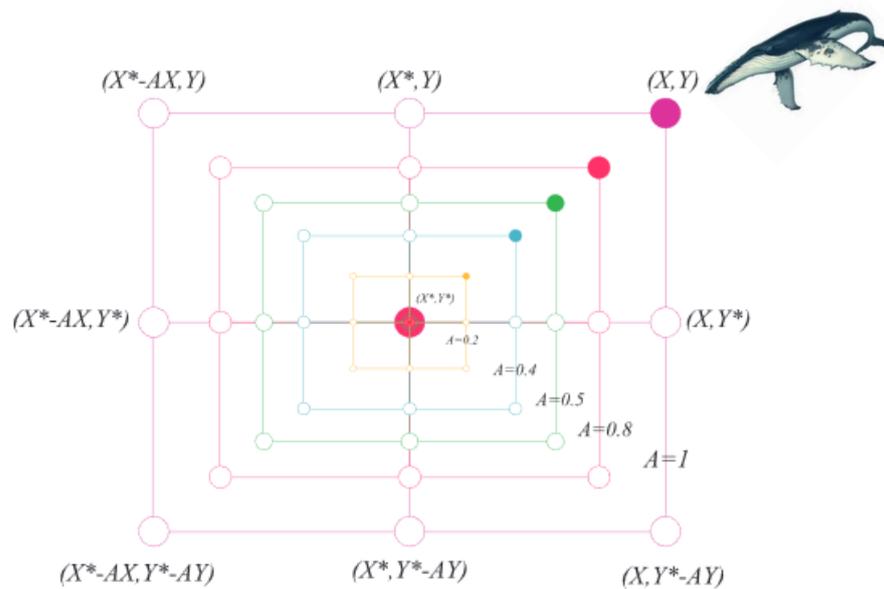


Fig. 5.18. Mécanisme d'encerclement par rétrécissement (\vec{X}^* est le meilleur agent).

2) Mécanisme d'attaque au filet à bulles

Si $p \geq 0.5$, la phase d'attaque par filet à bulles commence. Afin de simuler le mouvement d'attaque chez les baleines, l'algorithme WOA calcule tout d'abord la distance entre l'agent de recherche (la baleine) et la meilleure solution (la proie), puis il met à jour la position de cet agent suivant une trajectoire en spirale. La formule mathématique est la suivante :

$$\vec{D}' = |\vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \tag{5.22}$$

$$\vec{X}(t + 1) = \vec{X}^*(t) + \vec{D}' \cdot e^{bt} \cdot \cos(2\pi l) \tag{5.23}$$

avec b est une constante et l est un nombre aléatoire dans l'intervalle $[-1, 1]$. La figure (5.19) illustre cette technique.

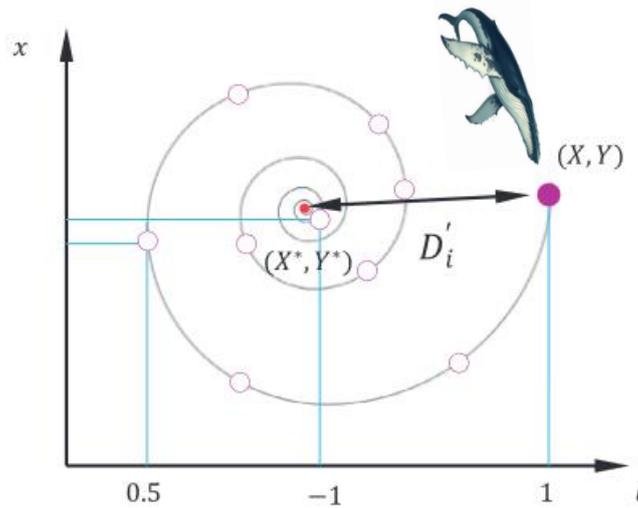


Fig. 5.19. Mécanisme d'attaque au filet à bulles (\vec{X}^* est le meilleur agent).

Les détails de l'algorithme WOA sont présentés pas à pas ci-dessous :

1. Initialiser la population :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,d} \\ x_{2,1} & \dots & x_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & \dots & x_{N,d} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

avec N est le nombre d'agents ou solutions et d est le nombre des paramètres à optimiser.

2. Pour chaque solution, évaluer la fonction objectif à optimiser comme suit :

$$F(X) = \begin{bmatrix} F(X_1) \\ F(X_2) \\ \vdots \\ F(X_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X_1) \\ f(X_2) \\ \vdots \\ f(X_N) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

3. Déterminer la meilleure solution X^* pour guider la population (X^* = la solution ayant la valeur minimale de F).
4. **Tant que** le nombre d'itérations maximum n'est pas achevé, alors :
5. Mettre à jour les positions des agents comme suit :

Pour chaque agent de la population, mettre à jour les paramètres A , C , l , et p

Si $p < 0.5$ et $|A| \leq 1$

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.21).

Si non Si $p < 0.5$ et $|A| > 1$

Sélectionner un agent de façon aléatoire (X_{rand}).

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.19).

Si non Si $p \geq 0.5$

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.23).

Fin Si

-
6. Vérifier si les agents appartiennent au domaine de recherche si non ramener les aux limites ou à l'intérieur de façon aléatoire.
 7. Pour chaque agent, évaluer la fonction multi-objectif.
 8. Mettre à jour le guide X^* s'il y a une amélioration de F .
 9. **Fin Tant que**
 10. Retourner la meilleure solution X^* .

5.5.2 Algorithme multi-objectif des baleines à bosses (MOWOA)

L'algorithme WOA original a été conçu pour l'optimisation mono-objectif. Kumawat et al. [Kum17] ont modifié cet algorithme pour résoudre des problèmes multi-objectifs. Ce nouveau algorithme est connu sous le nom MOWOA (Multi-Objective Whale Optimization Algorithm). L'organigramme de l'algorithme MOWOA, la mise à jour de l'archive et la sélection du guide sont présentés respectivement dans les paragraphes qui suivent.

5.5.2.1 Organigramme

L'organigramme de l'algorithme MOWOA est donné par la figure (5.20), tandis que les détails sont présentés pas à pas ci-dessous :

1. Initialiser la population :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,d} \\ x_{2,1} & \dots & x_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & \dots & x_{N,d} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

avec N est le nombre des agents (baleines) et d est le nombre des paramètres à optimiser.

2. Pour chaque agent, évaluer la fonction multi-objectif contenant m fonctions objectifs à optimiser comme suit :

$$F(X) = \begin{bmatrix} F(X_1) \\ F(X_2) \\ \vdots \\ F(X_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X_1) & \dots & f_m(X_1) \\ f_1(X_2) & \dots & f_m(X_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(X_N) & \dots & f_m(X_N) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

3. Déterminer les solutions non-dominées et initialiser l'archive avec ces solutions.
4. **Tant que** le nombre d'itérations maximum n'est pas achevé, alors :
 5. Déterminer la meilleure solution X^* pour guider la population selon §5.5.2.3;
 6. Mettre à jour les positions des agents comme suit :

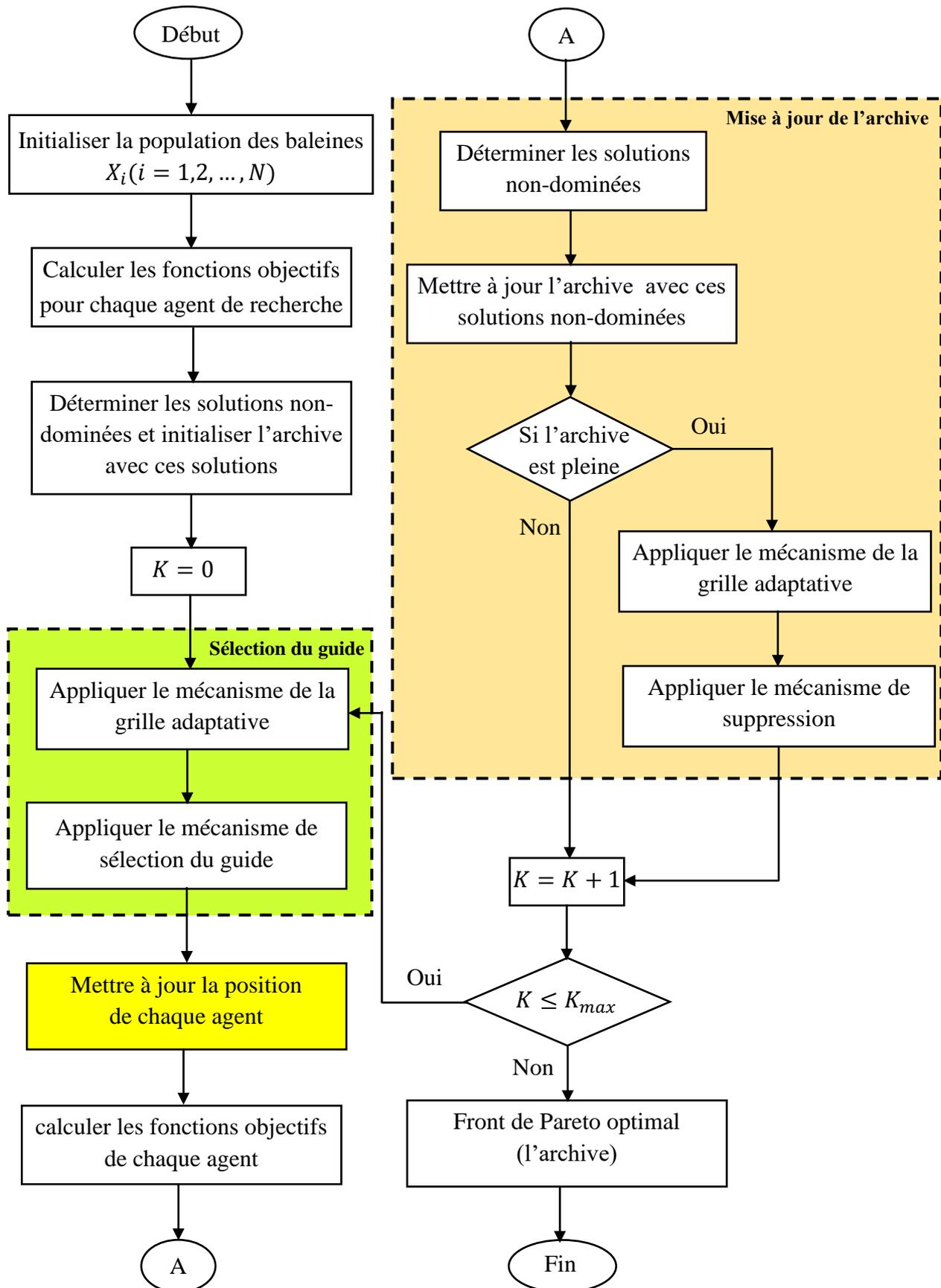


Fig. 5.20. Organigramme de l'algorithme MOWOA.

Pour chaque agent de la population, mettre à jour les paramètres A, C, l , et p

Si $p < 0.5$ et $|A| \leq 1$

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.21).

Si non Si $p < 0.5$ et $|A| > 1$

Sélectionner un agent de façon aléatoire (X_{rand}).

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.19).

Si non Si $p \geq 0.5$

Mettre à jour la position de l'agent en cours par l'équation (5.23).

Fin Si

7. Vérifier si les agents appartiennent au domaine de recherche si non ramener les aux limites ou à l'intérieur aléatoirement.
8. Pour chaque agent, évaluer les fonctions objectifs.
9. Déterminer les solutions non-dominées et mettre à jour l'archive selon §5.5.2.2
10. **Fin Tant que**
Retourner le front de Pareto.

5.5.2.2 Mise à jour de l'archive

L'objectif principal de l'archive est de conserver un historique des solutions non-dominées trouvées tout au long du processus de recherche. La procédure de mise à jour de l'archive se compose de deux parties principales : le contrôleur d'archives et la grille adaptative [Coe04]. Nous aborderons chacune de ces deux composantes avec plus de détails.

A) *Le contrôleur d'archives*

Le contrôleur d'archives a été initialement proposé pour l'algorithme MOPSO (MOPSO : Multi-Objective Partical Swarm Optimization) [Coe02]. Sa fonction est de décider si une certaine solution non-dominée de la population doit être ajoutée à l'archive ou non. Le processus de prise de décision est le suivant :

Cas 1 : Si l'archive est vide, toutes les solutions non-dominées seront stockées dans l'archive telles quelles sont ;

Cas 2 : Si cette nouvelle solution est dominée par un individu au sein de l'archive externe, alors une telle solution est automatiquement rejetée ;

Cas 3 : S'il existe des solutions dans l'archive qui sont dominées par la nouvelle solution, alors ces solutions sont supprimées de l'archive et cette solution sera rajoutée.

Cas 4 : Si aucun des éléments contenus dans l'archive ne domine la solution souhaitant entrer, ni dominée par celle-là, alors une telle solution est stockée dans l'archive.

Cas 5 : Une fois l'archive est pleine, une procédure de suppression est appliquée.

Dans cette thèse, une technique de suppression basée sur la grille adaptative est appliquée.

B) La grille adaptative

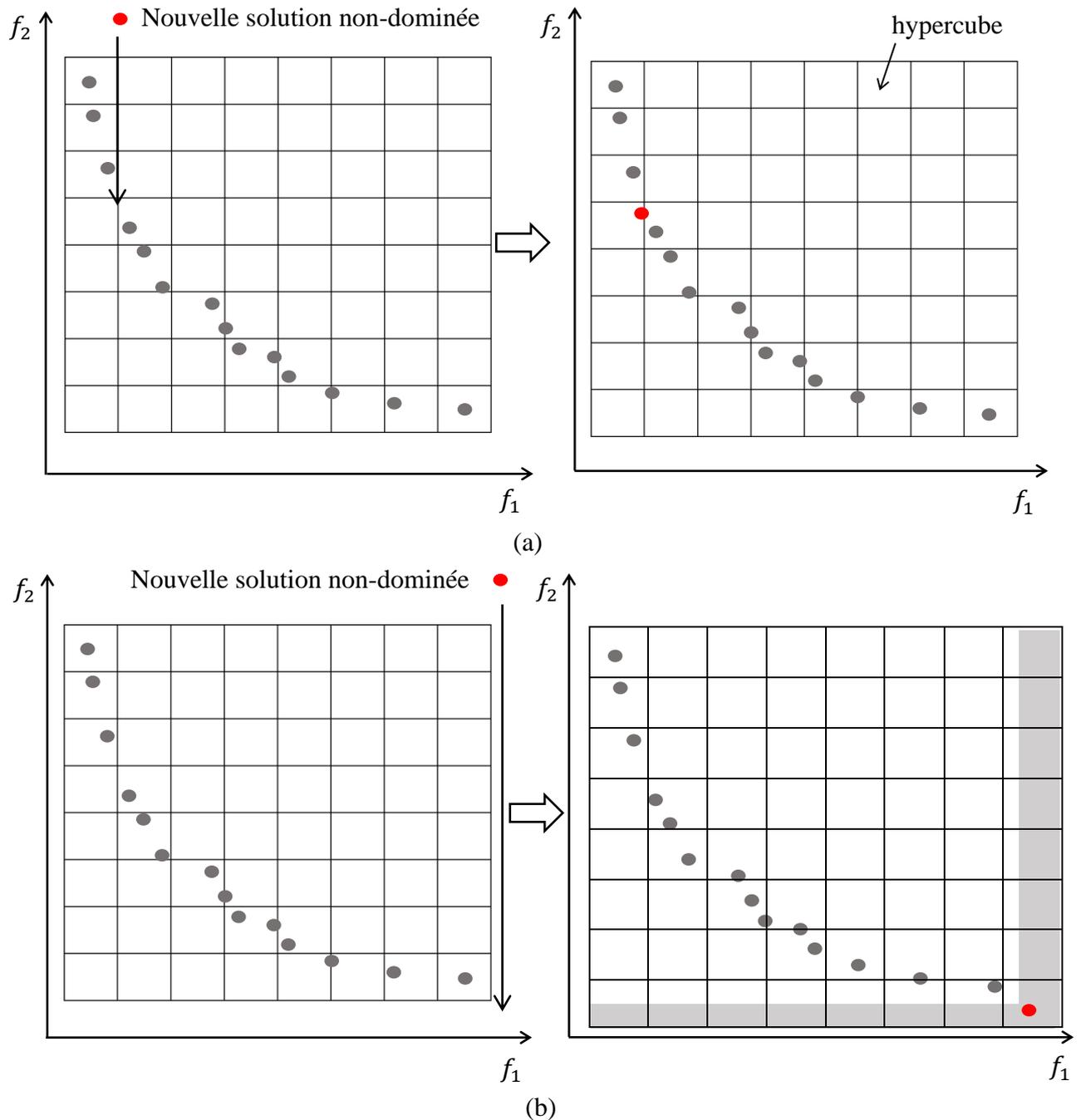


Fig. 5.21. Mise à jour de la grille adaptative selon que la nouvelle solution est : (a) à l'intérieur ou (b) à l'extérieur de la grille.

Pour produire des fronts de Pareto bien répartis, l'algorithme utilise une variante de la grille adaptative proposée dans [Kno00]. Dans l'archive, l'espace des fonctions objectifs est divisé en régions nommées « hypercubes » pour former une grille. Chaque hypercube peut être interprété comme une région possédant un certain nombre d'éléments dans l'espace des fonctions objectifs. Pour ne pas perdre les nouvelles solutions non-dominées au cours des itérations, la grille est mise à jour comme le montre la figure (5.21). Si l'élément inséré dans la population externe (l'archive) se trouve à l'intérieur des limites actuelles de la grille, alors la grille reste telle qu'elle est (Fig. 5.21.a). Par contre si cet élément se trouve en dehors des limites de la grille, cette dernière doit être recalculée pour que chaque élément de l'archive soit à l'intérieur de celle-ci (Fig. 5.1.b).

La figure (5.22) illustre comment la grille adaptative change de position et de taille au fur et à mesure que les solutions non-dominées changent au cours des itérations.

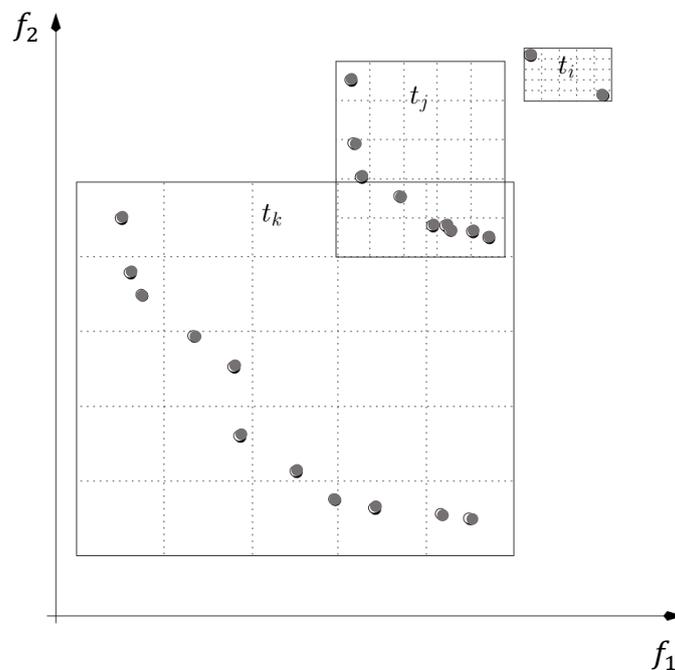


Fig. 5.22. Grille adaptative au cours des itérations $t_k > t_j > t_i$.

Lorsque la nouvelle solution augmente la taille de la grille selon une certaine fonction objectif f_k , la nouvelle taille (*the range*) selon cette fonction notée $range_{k,t}$ et les limites ($lb_{k,t}$ et $ub_{k,t}$) de la grille se calculent comme suit :

$$range_{k,t} = \max_{Archive,t} (f_k) - \min_{Archive,t} (f_k) \quad (5.28)$$

$$lb_{k,t} = \min_{Archive,t} (f_k) - \frac{1}{2div} range_{k,t} \quad (5.29)$$

$$ub_{k,t} = \max_{Archive,t} (f_k) + \frac{1}{2div} range_{k,t} \quad (5.30)$$

où div est le nombre de divisions par dimension.

Les équations (5.29) et (5.30) signifient que les deux extrémités de l'archive se situent au centre des hypercubes extrêmes de la grille (Fig. 5.23).

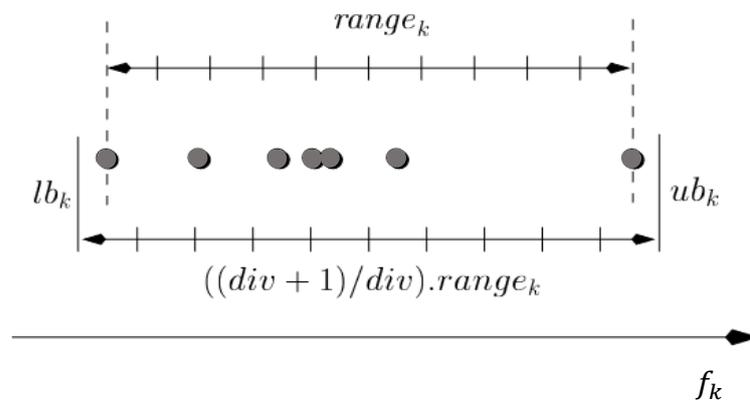


Fig. 5.23. Mise à jour de la grille selon la fonction objectif f_k .

La figure (5.24) illustre les limites de la grille $lb_{k,t}$ et $ub_{k,t}$ dans un espace à deux fonctions objectifs.

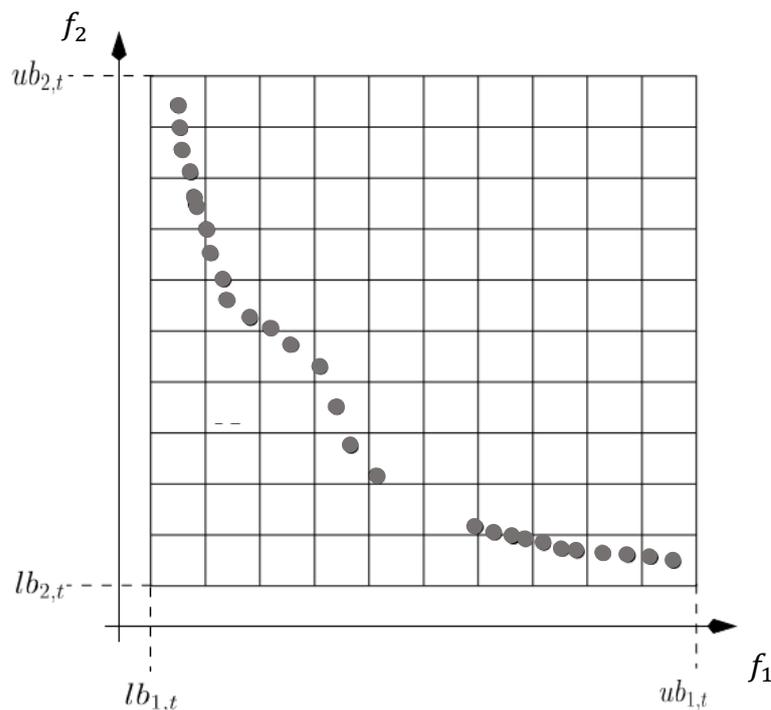


Fig. 5.24. Limites de la grille dans un espace bi-objectif.

L'archive peut stocker un nombre limité de solutions. Il se peut donc qu'il n'y ait pas assez de place pour stocker de nouvelles solutions. En effet, **un mécanisme de suppression de solutions** est nécessaire. Pour le faire, plusieurs techniques ont été développées. D'après [Hab17], en utilisant la méthode de Boltzmann, l'équation (5.31) représente la probabilité de sélection attribuée à chaque cellule de la grille. La sélection de la cellule se fait en appliquant le mécanisme de roulette

de Weel puis un élément est choisi de façon arbitraire de la cellule sélectionnée pour qu'il soit supprimé. De l'équation (5.31), les cellules avec un nombre le plus élevé de solutions ont plus de chance d'être sélectionnées pour assurer une meilleure diversification sur le front de Pareto comme le montre la figure (5.24).

$$p_i = \frac{e^{\gamma \cdot n_i}}{\sum_j e^{\gamma \cdot n_j}} \quad (5.31)$$

Dans l'équation (5.31), p_i est la probabilité de sélection de la cellule i , n_i est le nombre d'éléments de la cellule i , γ est le paramètre de la pression de sélection de la cellule.

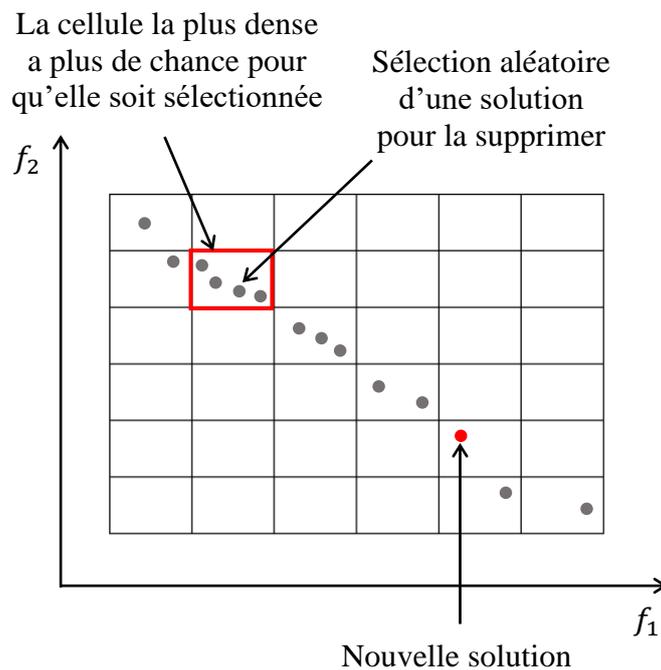


Fig. 5.25. Mécanisme de suppression lorsque l'archive est pleine.

5.5.2.3 Sélection du guide

Dans la littérature, plusieurs techniques pour la sélection du guide (leader) ont été employées. Selon [Hab17], le mécanisme de sélection du leader est similaire à celui de suppression. Dans ce mécanisme, l'équation (5.32) est utilisée pour attribuer à chaque cellule une probabilité de sélection par roulette de Weel. Le guide est choisi, de façon aléatoire, de la cellule sélectionnée. Selon l'équation (5.32) et comme l'illustre la figure (5.26), les cellules avec moins de solutions de Pareto ont plus de chance d'être sélectionnées. Donc, leurs éléments ont plus de chance d'être choisis comme guide. Ce mécanisme assure également une diversification satisfaisante sur le front de Pareto comme le montre la figure (5.25).

$$p_i = \frac{e^{-\beta \cdot n_i}}{\sum_j e^{-\beta \cdot n_j}} \quad (5.32)$$

Dans l'équation (5.32), p_i est la probabilité de sélection de la cellule i , n_i est le nombre d'éléments de la cellule i , et β est le paramètre de la pression de sélection de la cellule.

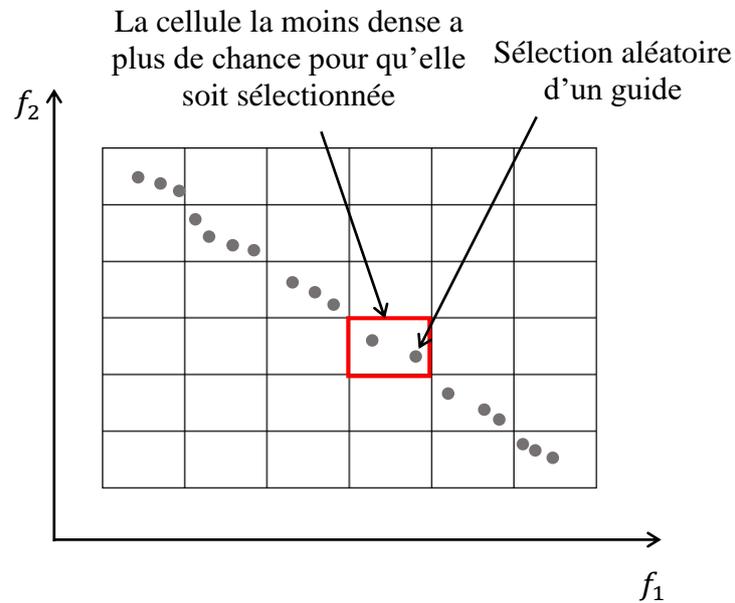


Fig. 5.26. Mécanisme de sélection du guide.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes d'optimisation mono- et multi-objectif ont été présentées de façon exhaustive en passant par les principaux concepts de base. Particulièrement, l'algorithme des baleines à bosse, dans sa version mono-objectif (WOA) et multi-objectif (MOWOA), a été détaillé pour qu'il sera implémenté pour le réglage des paramètres des correcteurs PID/FOPID dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Réglage des contrôleurs PID/FOPID

6.1 Introduction

Les moteurs à courant continu sans balais (BLDC : Brushless Direct Current) sont généralement des moteurs synchrones à aimants permanents. Ils ont plusieurs avantages tels que : plages de vitesse plus élevées, efficacité plus élevée, meilleures caractéristiques de vitesse par rapport au couple, longue durée de vie, et fonctionnement silencieux, etc [Zha11]. Dans les applications d'entraînement hautes performances, telles que dans les domaines de la robotique, des machines-outils et des laminoirs, le moteur BLDC est souhaité pour fonctionner à diverses conditions de vitesse et de charge avec des performances améliorées et un contrôle de vitesse robuste [Vanc21].

Au cours des dernières décennies, de nombreux contrôleurs ont été suggérés pour le contrôle de la vitesse des moteurs BLDC tels que PI [Bay07, Ahm15, Xie19, Jig19], PD [Pre16], PID [Nas07, Sha14, Pot19, Mah20a, Mah20b], logique floue [Redd14, Pre14, Ahm17, Ami19], LQR [Vis15], etc. Dans ce contexte, il existe plusieurs travaux de recherche liés au réglage des contrôleurs fractionnaires FOPID [Vanc21, Khl19, Bal20] en minimisant une seule fonction objectif, mais aucun travail n'a tenté d'optimiser ces contrôleurs à l'aide de l'optimisation multi-objectif d'après [Ola20]. Cela nous a motivé de travailler dans ce domaine pour bénéficier des avantages des contrôleurs fractionnaires et de l'optimisation multi-objectif afin d'améliorer les performances du moteur BLDC en boucle fermée.

Ce chapitre présente *une deuxième contribution de cette thèse [Bou22]*. Cette contribution offre un réglage optimal des paramètres des contrôleurs PID/FOPID pour le contrôle de la vitesse du moteur BLDC, en utilisant l'optimisation mono- et multi-objectif. Pour l'optimisation mono-objectif, le processus de réglage a été effectué via l'algorithme d'optimisation des baleines (WOA) sous la fonction objectif (ITAE). La meilleure solution représentant les valeurs des gains des contrôleurs PID/FOPID, est obtenue directement à la fin du processus d'optimisation. Pour

l'optimisation multi-objectif, l'algorithme MOWOA a été utilisé avec trois fonctions objectif à minimiser, à savoir : le temps de réponse, le dépassement et l'erreur statique. L'algorithme MOWOA génère des solutions non-dominées formant le front de Pareto optimisé. La meilleure solution de compromis a été obtenue en utilisant une approche de prise de décision floue satisfaisant les préférences souhaitées. Pour la comparaison des différents contrôleurs, les réponses indicielles, les réponses fréquentielles et les réponses de suivi de consignes et de rejet de perturbations de charge ont toutes été réalisées et analysées.

6.2 Présentation

La boucle de contrôle conventionnelle avec un contrôleur PID/FOPID parallèle est illustrée dans la figure (6.1), avec $G(s)$ est le modèle du système (moteur BLDC), $V(s)$ est la sortie du système qui représente la vitesse du moteur, $R(s)$ est l'entrée de référence et $D(s)$ est la perturbation de charge. Le contrôleur reçoit le signal d'erreur $E(s)$ et génère le signal de commande $U(s)$. Les contrôleurs PID/FOPID sont représentés par les fonctions de transfert comme suit :

$$C(s)|_{PID} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (6.1)$$

$$C(s)|_{FOPID} = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, \quad \lambda, \mu > 0 \quad (6.2)$$

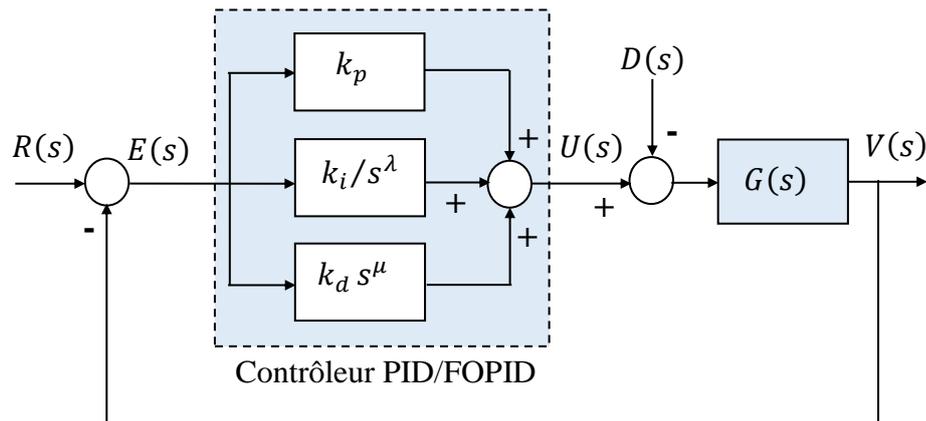


Fig. 6.1. Schéma bloc du système de contrôle du moteur BLDC.

où k_p est le gain proportionnel, k_i est le gain intégral, k_d est le gain dérivé, λ est l'ordre d'intégration et μ est l'ordre dérivé. Le PID conventionnel peut être obtenu à partir du contrôleur FOPID en définissant λ et μ dans l'équation (6.2) comme 1 ($\lambda = 1$ and $\mu = 1$).

6.3 Le modèle du moteur BLDC

Récemment, Khluabwannarat et al. [Khl18] ont étudié un moteur BLDC de 350 W, 24 VDC, 0,7 A, 300 tr/min dans leur laboratoire. En utilisant l'algorithme de pollinisation des fleurs (FPA : Flower Pollination Algorithm) sous la fonction objectif SSE (Sum-Squared Error), les modèles d'ordre entier (IO : Integer Order) et d'ordre fractionnaire (FO : Fractional Order) de ce moteur BLDC ont été identifiés comme indiqué respectivement par les équations (6.3) et (6.4) :

$$G(s)|_{IO} = \frac{148.80}{1.328s^3 + 13.05s^2 + 77.81s + 149.4} \quad (6.3)$$

$$G(s)|_{FO} = \frac{1.0}{0.0290s^{2.6582} + 0.4784s^{1.2376} + 1.1075s^{0.0443}} \quad (6.4)$$

La figure (6.2) donne les réponses indicielles des deux modèles. Comme c'est observé, les deux réponses sont presque superposées sur l'intervalle [0;5]. Après avoir évalué leurs valeurs de fonction de coût, les auteurs [Khl18] ont constaté que le modèle FO est plus précis que le modèle IO. Par conséquent, dans leur travail [Khl19], le modèle FO a été adopté pour représenter le moteur dans le but de concevoir des contrôleurs PID/FOPID en utilisant le même algorithme d'optimisation (FPA) sous la même fonction objectif (SSE).

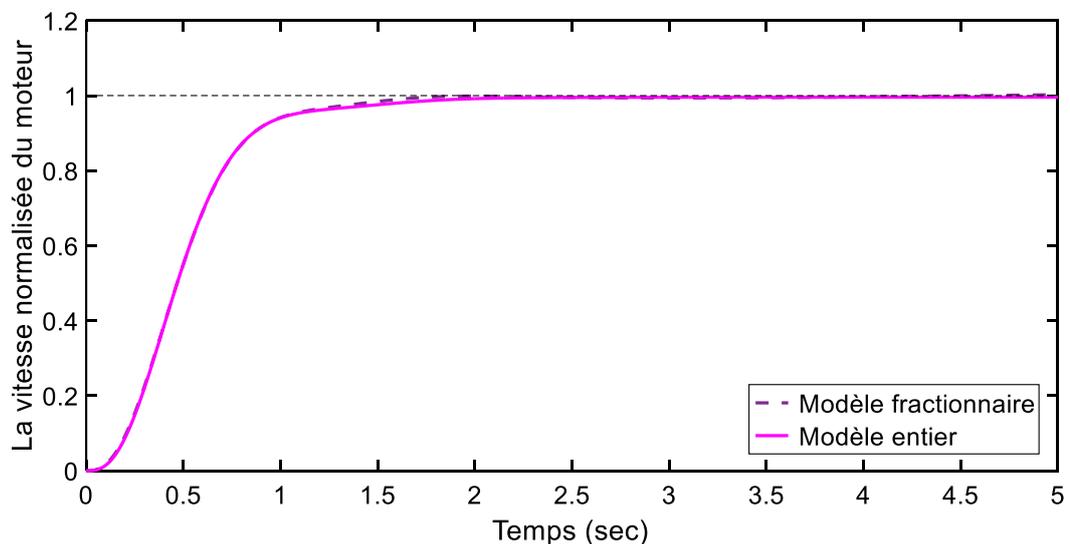


Fig. 6.2. Les réponses indicielles des modèles d'ordre entier et fractionnaire sur l'intervalle [0;5].

Reprenons la fonction de transfert du modèle FO (6.4). Cette fonction peut être réécrite comme suit :

$$G(s)|_{FO} = \frac{1.0}{s^{0.0443}(0.029043s^{2.6139} + 0.47836s^{1.1933} + 1.1075)} \quad (6.5)$$

Au régime permanent, le modèle FO devient un intégrateur d'ordre fractionnaire de fonction de transfert :

$$G(s)|_{FO,permanent} = \frac{1}{1.1075s^{0.0443}} \quad (6.6)$$

La figure (6.3) montre les réponses indicielles des modèles IO et FO, mais cette fois-ci sur une plage plus étendue [0;40]. Il est clair que la réponse du modèle FO augmente indéfiniment, ce qui ne représente pas la réalité où la vitesse du moteur se stabilise à une valeur finie. Par conséquent, le modèle FO que les auteurs [Kh18, Kh19] ont choisi n'est pas apte pour représenter le moteur au-delà de 5 sec. Par conséquent, dans cette thèse, le moteur BLDC sera représenté par le modèle IO (6.3) pour concevoir des contrôleurs PID/FOPID en utilisant une optimisation mono- et multi-objectif.

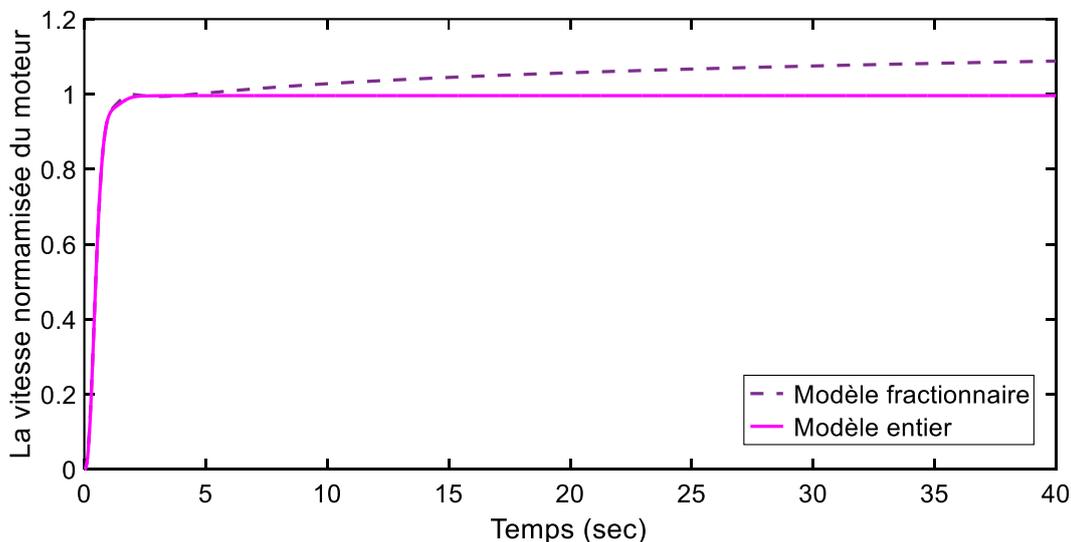


Fig. 6.3. Les réponses indicielles des modèles d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sur l'intervalle [0;40].

6.4 Réglage des contrôleurs PID/FOPID par optimisation mono-objectif

Dans cette section, le réglage optimal des paramètres du contrôleur PID/FOPID à l'aide de l'optimisation mono-objectif est discuté. Dans la théorie du contrôle, la fonction objectif utilisée peut être un des indices de performance standard [Kro01]; l'intégrale de l'erreur absolue (IAE), l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE), l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE) ou l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps (ITSE). La meilleure solution qui correspond aux valeurs des gains du contrôleur PID/FOPID est obtenue directement à la fin du

processus d'optimisation. La figure (6.4) montre les différentes étapes du réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID à l'aide de l'optimisation mono-objectif. Dans cette thèse, le processus d'optimisation est réalisé via l'algorithme des baleines (WOA) sous la fonction objectif (ITAE).

A) *La fonction objectif*

La fonction objectif utilisée est l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE). Elle est définie comme suit :

$$ITAE = \int_0^{t_{sim}} t|e(t)|dt \quad (6.7)$$

avec t_{sim} est le temps de simulation et $e(t)$ est le signal d'erreur (Fig. 6.1).

B) *Les étapes de l'optimisation mono-objectif*

Le processus de l'optimisation, illustré dans la figure (6.4), suit les étapes suivantes :

Etape 1: ($K = 0$) Initialiser la population de N agents où chaque agent représente les paramètres du contrôleur à optimiser.

Etape 2: Calculer la fonction objectif pour chaque agent de la population.

Etape 3: Mettre à jour le guide (la meilleure solution) qui correspond à la valeur minimale de la fonction objectif.

Etape 4: Incrémenter le nombre d'itérations ($K = K + 1$).

Si le critère ($K \leq K_{max}$) est satisfait, alors :

- ✓ Mettre à jour la position de chaque agent de la population par l'algorithme WOA.
- ✓ Aller à l'**Etape 2**.

Si non, retourner la meilleure solution qui représente le guide.

FinSi

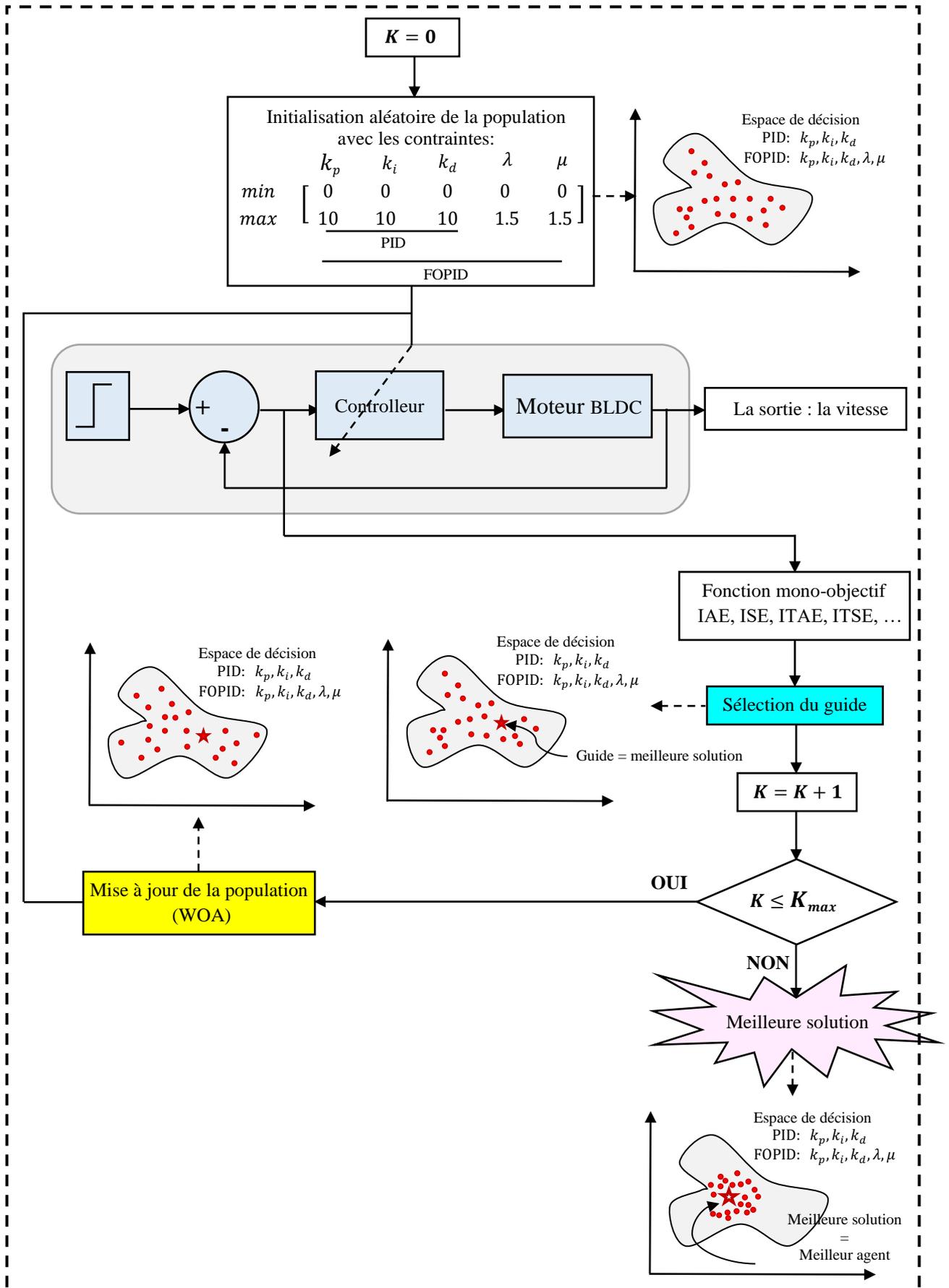


Fig. 6.4. Réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID en utilisant l'optimisation mono-objectif.

6.5 Réglage des contrôleurs PID/FOPID par optimisation multi-objectif

Dans ce paragraphe, Le réglage optimal des paramètres des régulateurs PID/FOPID par optimisation multi-objectif est présenté. Le résultat du processus d'optimisation est un ensemble de solutions non-dominées, dans l'espace des fonctions objectif, formant le front de Pareto optimisé. Cependant, la principale préoccupation du décideur est de trouver la meilleure solution à partir du front de Pareto. Une approche de prise de décision floue est utilisée dans ce travail pour trouver la meilleure solution du front Pareto en fonction des préférences du décideur [Ahm18]. Cette solution est un compromis entre les différents objectifs.

Dans la suite de cette section, les fonctions objectifs, les étapes du processus d'optimisation multi-objectif et la méthode du décideur flou seront présentées.

A) Les fonctions objectifs

Pour approcher la sortie du système à l'entrée de référence, trois fonctions objectifs sont considérées qui sont :

1) **Le temps de réponse (tr)** est défini comme le temps nécessaire à la réponse pour atteindre, et rester à moins de, 2 % de sa valeur finale.

$$f_1 = tr \quad (6.8a)$$

2) **Le dépassement maximal ($Dm\%$)** est la différence entre l'amplitude du pic le plus élevé de la réponse et l'amplitude de son état permanent.

$$f_2 = Dm(\%) \quad (6.8b)$$

3) **L'erreur statique (Es)** est l'écart entre l'état final de la réponse et la valeur de la réponse désirée (la référence).

$$f_3 = Es \quad (6.8c)$$

Le but de l'optimisation multi-objectif est de minimiser la fonction

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} \quad (6.9)$$

avec $x = [k_p, k_i, k_d]$ ou $x = [k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu]$ représente respectivement les paramètres des contrôleurs PID/FOPID.

Pour le moteur BLDC, les inégalités des contraintes sont [Kh119]:

$$\begin{cases} tr \leq 2s \\ Dm \leq 10\% \\ Es \leq 0.01\% \end{cases} \quad (6.10)$$

qui se traduisent dans l'espace de recherche par :

$$PID: \begin{cases} k_{p_min} \leq k_p \leq k_{p_max} \\ k_{i_min} \leq k_i \leq k_{i_max} \\ k_{d_min} \leq k_d \leq k_{d_max} \end{cases} \quad (6.11a)$$

$$FOPID: \begin{cases} k_{p_min} \leq k_p \leq k_{p_max} \\ k_{i_min} \leq k_i \leq k_{i_max} \\ k_{d_min} \leq k_d \leq k_{d_max} \\ \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \\ \mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max} \end{cases} \quad (6.11b)$$

avec k_{p_min} , k_{i_min} , k_{d_min} et k_{p_max} , k_{i_max} , k_{d_max} sont respectivement les limites inférieures et supérieures des paramètres du contrôleur PID. Tandis que k_{p_min} , k_{i_min} , k_{d_min} , λ_{min} , μ_{min} et k_{p_max} , k_{i_max} , k_{d_max} , λ_{max} , μ_{max} sont respectivement les limites inférieures et supérieures des paramètres du contrôleur FOPID.

B) Les étapes de l'optimisation multi-objectif

Pour l'optimisation multi-objectif, l'algorithme MOWOA est utilisé. Les étapes de l'optimisation des contrôleurs PID/FPID, illustrées dans la figure (6.5), sont :

Etape 1: ($K = 0$) Initialiser la population de N agents où chaque agent représente les paramètres du contrôleur à optimiser.

Etape 2: Calculer la fonction objectif pour chaque agent de la population.

Etape 3: Mettre à jour l'archive de Pareto comme suit :

- ✓ Déterminer les solutions non-dominées de la population,
- ✓ Les stocker dans l'archive de Pareto,
- ✓ Mettre à jour l'archive de Pareto (§5.5.2.2)

Etape 4: Incrémenter le nombre des itérations ($K = K + 1$)

Si le critère ($K \leq K_{max}$) est satisfait, alors:

- ✓ Sélectionner le guide de l'archive (le mécanisme de sélection §5.5.2.3)
- ✓ Mettre à jour la position de chaque agent de la population en utilisant l'algorithme WOA.
- ✓ Aller à **Etape 2**.

Si non, retourner l'archive de Pareto final.

FinSi

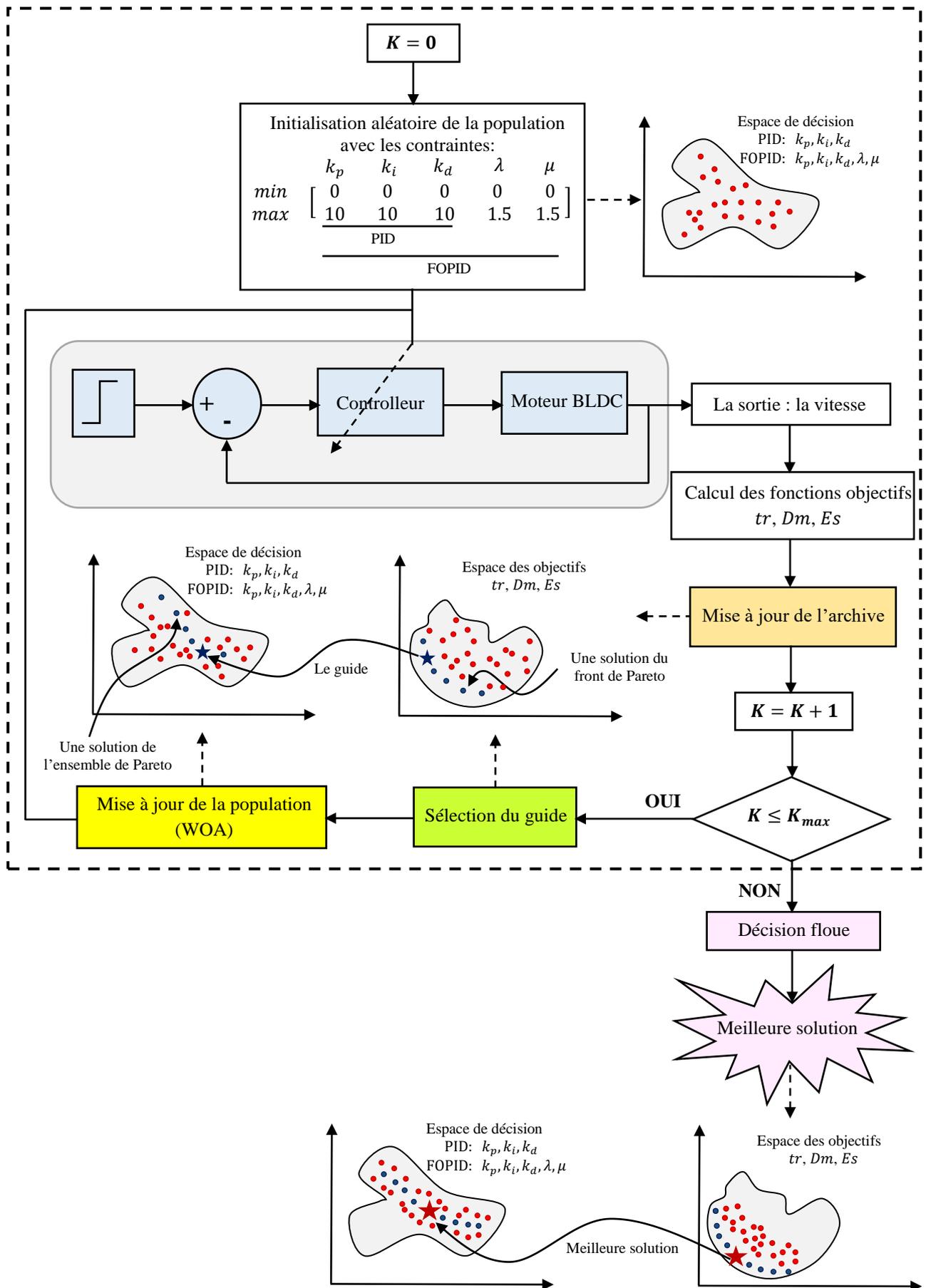


Fig. 6.5. Réglage des paramètres des contrôleurs PID/FOPID en utilisant l'optimisation multi-objectif.

C) Décideur flou

Une fois le front de Pareto optimal est obtenu, c'est le temps d'extraire la meilleure solution satisfaisant les préférences désirées [Ahm18]. Dans cette thèse, une procédure de décision floue est implémentée dont les étapes principales sont les suivantes (Fig. 6.6) :

- 1) Préparer les entrées normalisées des solutions non-dominées (front de Pareto optimisé) comme suit [Sak87] :

$$u_i^j = \frac{f_i^{max} - f_i^j}{f_i^{max} - f_i^{min}} \quad \text{pour } i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,2, \dots, n \quad (6.12)$$

avec, u_i^j indiquent la valeur normalisée de la solution non-dominée j selon la fonction objectif f_i , n est le nombre des solutions non-dominées, f_i^{min} et f_i^{max} sont respectivement les valeurs minimale et maximale de toutes les solutions du front de Pareto.

- 2) Les entrées normalisées sont ensuite fuzzifiées en utilisant trois fonctions d'appartenance (MF : Membership Function) comme le montre la figure (6.7).
- 3) La sortie floue du poids, noté P , de chaque solution du front de Pareto est déterminée en utilisant les règles d'inférence données par le tableau (6.1).
- 4) La valeur de P pour chaque solution du front de Pareto est déduite par défuzzification en utilisant la fonction d'appartenance de la sortie. P est un nombre de l'intervalle [0; 1].

Après avoir appliqué l'approche du décideur flou sur le front de Pareto, la meilleure solution est celle qui a la valeur maximale du poids P .

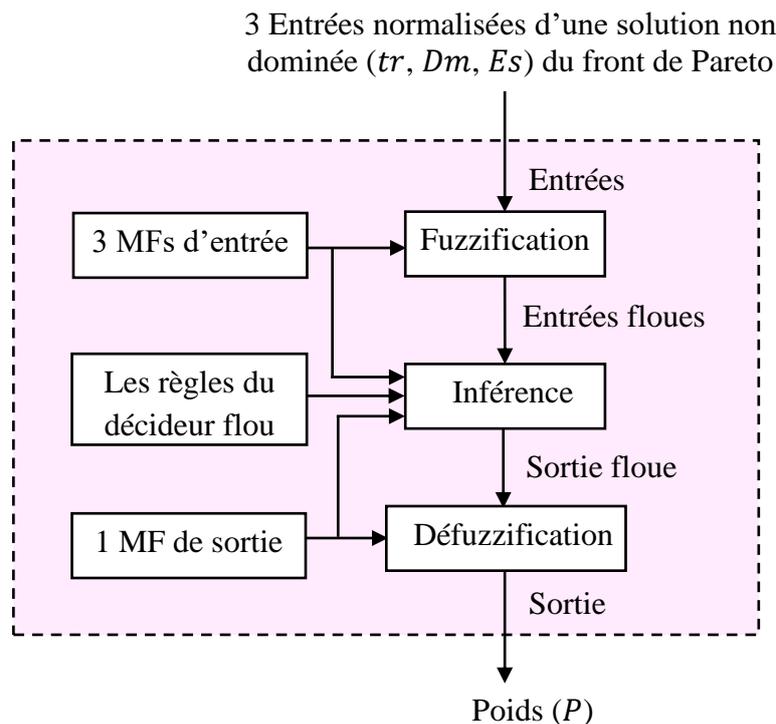


Fig. 6.6. Décideur flou.

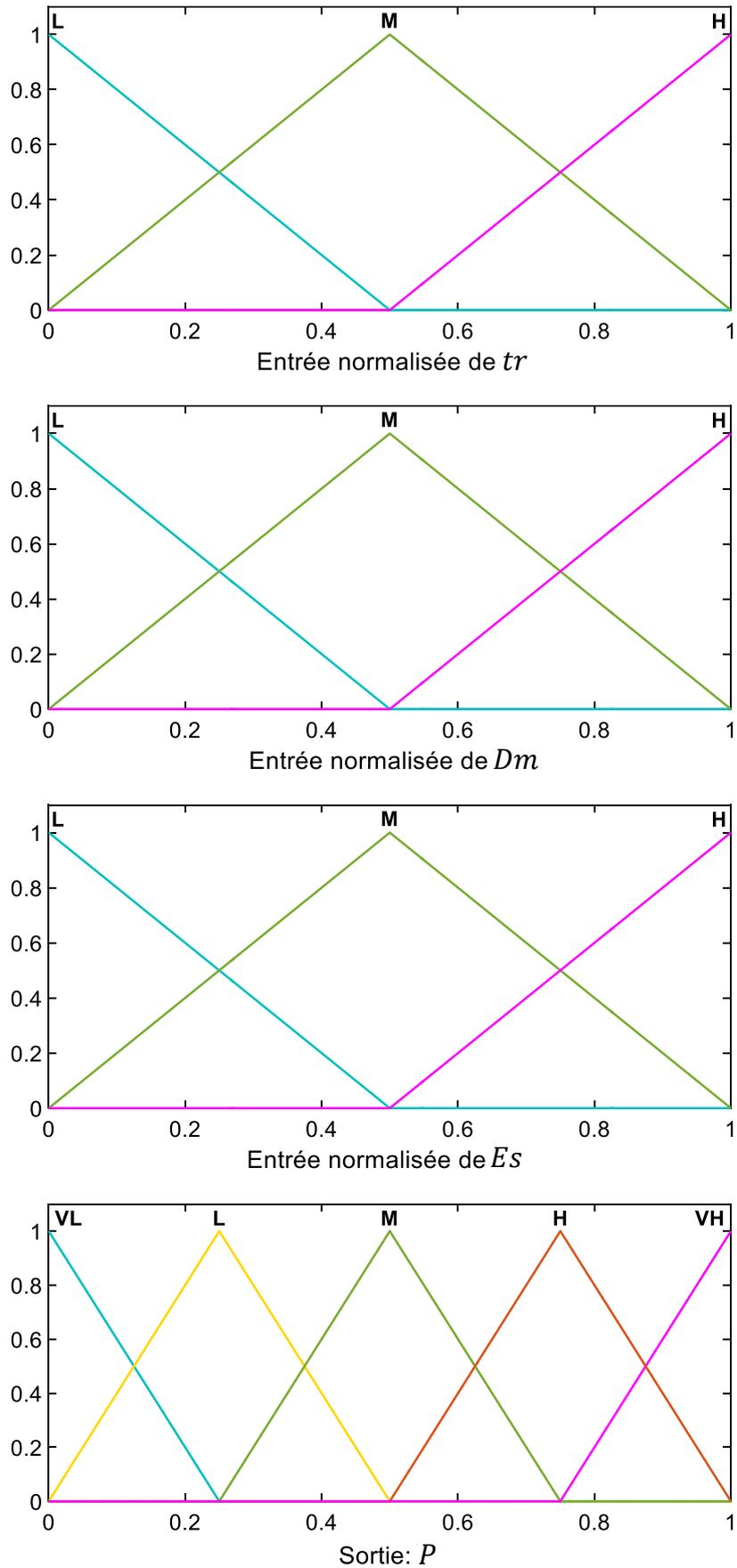


Fig. 6.7. Degrés d'appartenance des entrées normalisées et de la sortie.

Tab. 6.1. Règles de décision floue.

(VL =Very Low, L= Low, M= Medium, H= High, and VH= Very High)

Entrées normalisées de:			Sortie:
tr	Dm	Es	P
H	H	H	VH
H	H	M	H
H	M	H	
M	H	H	
M	M	M	M
M	M	H	
M	H	M	
H	M	M	
\bar{L}	L	X	L
L	X	\bar{L}	
X	\bar{L}	L	
L	L	L	VL

6.6 Résultats de simulation

Pour comparer les résultats de réglage des contrôleurs PID/FOPID par l'optimisation mono- et multi-objectif en utilisant respectivement les algorithmes WOA et MOWOA, les réponses indicielles, les réponses fréquentielles, les réponses au suivi de la consigne et aux perturbations de charge ont été effectuées et analysées. La simulation de différentes réponses a été faite au moyen du logiciel Matlab/Simulink via un ordinateur personnel CORE i7 CPU avec 8GB RAM. Pour la simulation des contrôleurs FOPID, FOMCON toolbox a été intégré [Tep11]. Ces contrôleurs ont été approximés par la méthode d'Oustaloup avec $\omega_l = 10^{-3}$, $\omega_h = 10^{+3}$ et un ordre d'approximation $N=5$. Les valeurs des paramètres utilisés par les algorithmes WOA et MOWOA sont données dans le tableau (6.2).

Tab. 6.2. Paramètres des algorithmes WOA/MOWOA.

Paramètres	Valeurs
Nombre d'agents : N	25
Nombre d'itérations : K_{max}	200

Min $[k_p k_i k_d \lambda \mu]$	[0 0 0 0 0]
Max $[k_p k_i k_d \lambda \mu]$	[10 10 1 1.5 1.5]
WOA : b	1
MOWOA	
Taille de l'archive de Pareto	100
Nbr de grilles/dimension : div	10
Pression de sélection du guide : β	4
Pression de sélection de suppression : γ	2

Les résultats de simulation sont exposés dans ce qui suit.

A) Analyse de la réponse indicielle

Pour l'optimisation mono-objectif, la simulation est faite à travers 10 exécutions indépendantes de l'algorithme WOA. A la fin du processus d'optimisation, les meilleures courbes de convergence de la fonction objectif (ITAE) obtenues pour les contrôleurs PID/FOPID sont représentées par la figure (6.8). Comme on l'observe sur cette figure, le contrôleur FOPID a la valeur de la fonction objectif (ITAE) la plus basse. Ainsi, les box-plots de l'ITAE des deux contrôleurs obtenus après les 10 exécutions sont illustrés dans la figure (6.9). Il est clair que par rapport au contrôleur PID, le contrôleur FOPID offre beaucoup plus de polyvalence dans le réglage car il dispose d'un large éventail de paramètres qui régissent le système contrôlé, ce qui augmente la fiabilité de la boucle de contrôle. Les paramètres des contrôleurs WOA-PID et WOA-FOPID sont respectivement : $k_p = 2.2183$, $k_i = 6.9518$, $k_d = 0.4119$ et $k_p = 5.5376$, $k_i = 9.9972$, $k_d = 0.4668$, $\lambda = 1.0097$, $\mu = 1.3516$.

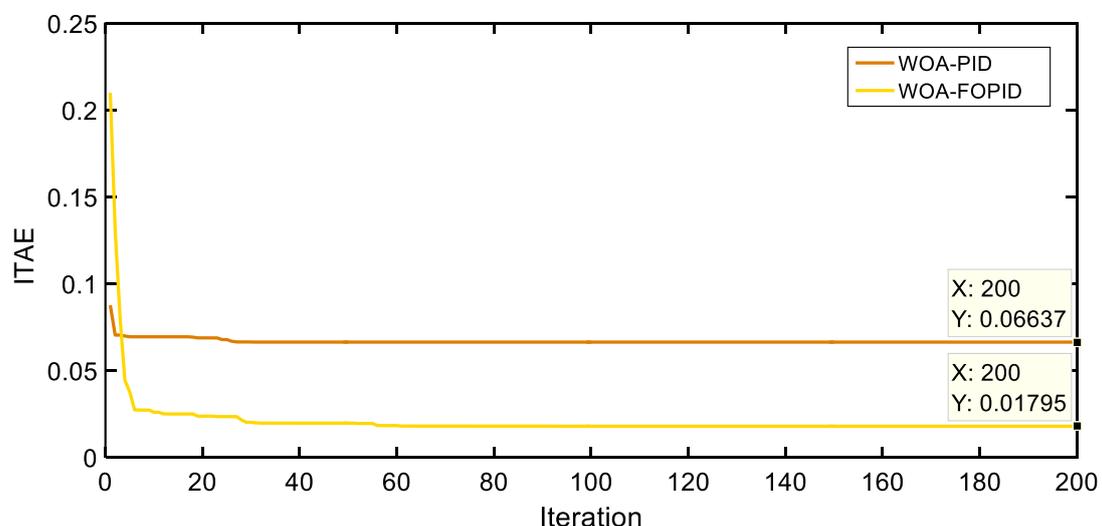


Fig. 6.8. Convergence de la fonction objectif (ITAE) pour les contrôleurs PID/FOPID.

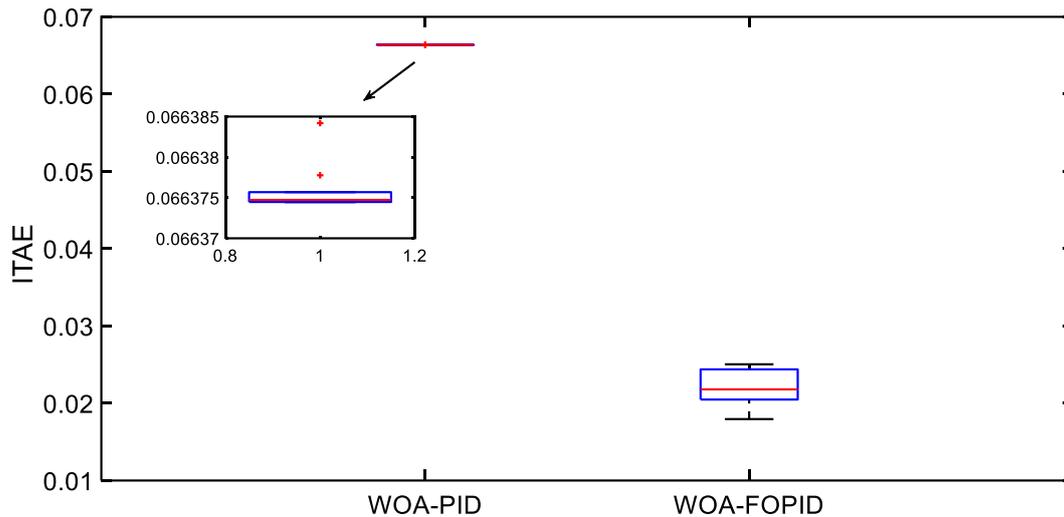


Fig. 6.9. Box-plots de la fonction objectif (ITAE) des contrôleurs PID/FOPID pour 10 exécutions indépendantes.

Pour l'optimisation multi-objectif, l'algorithme MOWOA génère un ensemble de solutions non-dominées qui représente le front de Pareto optimisé. Les figures (6.10.a) et (6.10.b) illustrent respectivement les fronts de Pareto optimisés pour les contrôleurs PID/FOPID avec les meilleures solutions obtenues en appliquant l'approche de décision floue. La meilleure solution pour le contrôleur MOWOA-PID est obtenue avec un poids de sortie $W = 0.7688$ qui correspond à la solution dans l'espace des objectifs : $tr = 0.6624$ s, $Dm\% = 1.3843$ et $Es = 1.37e-6$. Cette combinaison correspond aux paramètres du contrôleur MOWOA-PID : $k_p = 1.1189$, $k_i = 3.0017$ et $k_d = 0.1125$. Cependant, la meilleure solution pour le contrôleur MOWOA-FOPID est obtenue avec un poids de sortie $W = 0.8783$ qui correspond à : $tr = 0.2314$ s, $Dm\% = 0$ et $Es = 2.36e-6$. Cette combinaison de fonctions objectifs correspond aux paramètres du contrôleur MOWOA-FOPID : $k_p = 6.0993$, $k_i = 8.5166$, $k_d = 0.4572$, $\lambda = 1.0045$ et $\mu = 1.4230$. Les résultats obtenus par le décideur flou sont présentés en détail dans **l'Annexe B**.

Le tableau (6.3) regroupe les paramètres des contrôleurs PID/FOPID optimisés par les algorithmes WOA et MOWOA. La figure (6.11) présente les réponses indicielles du moteur BLDC avec ces différents contrôleurs. Pour une analyse comparative, toutes ces réponses ont été regroupées dans la figure (6.12). Le tableau (6.4) regroupe leurs performances qui sont : le temps de réponse (tr), le dépassement ($Dm\%$) et l'erreur statique (es) dont les meilleurs résultats sont mentionnés en gras. Il est clair de ce tableau que le contrôleur MOWOA-FOPID possède la réponse la plus rapide sans aucun dépassement.

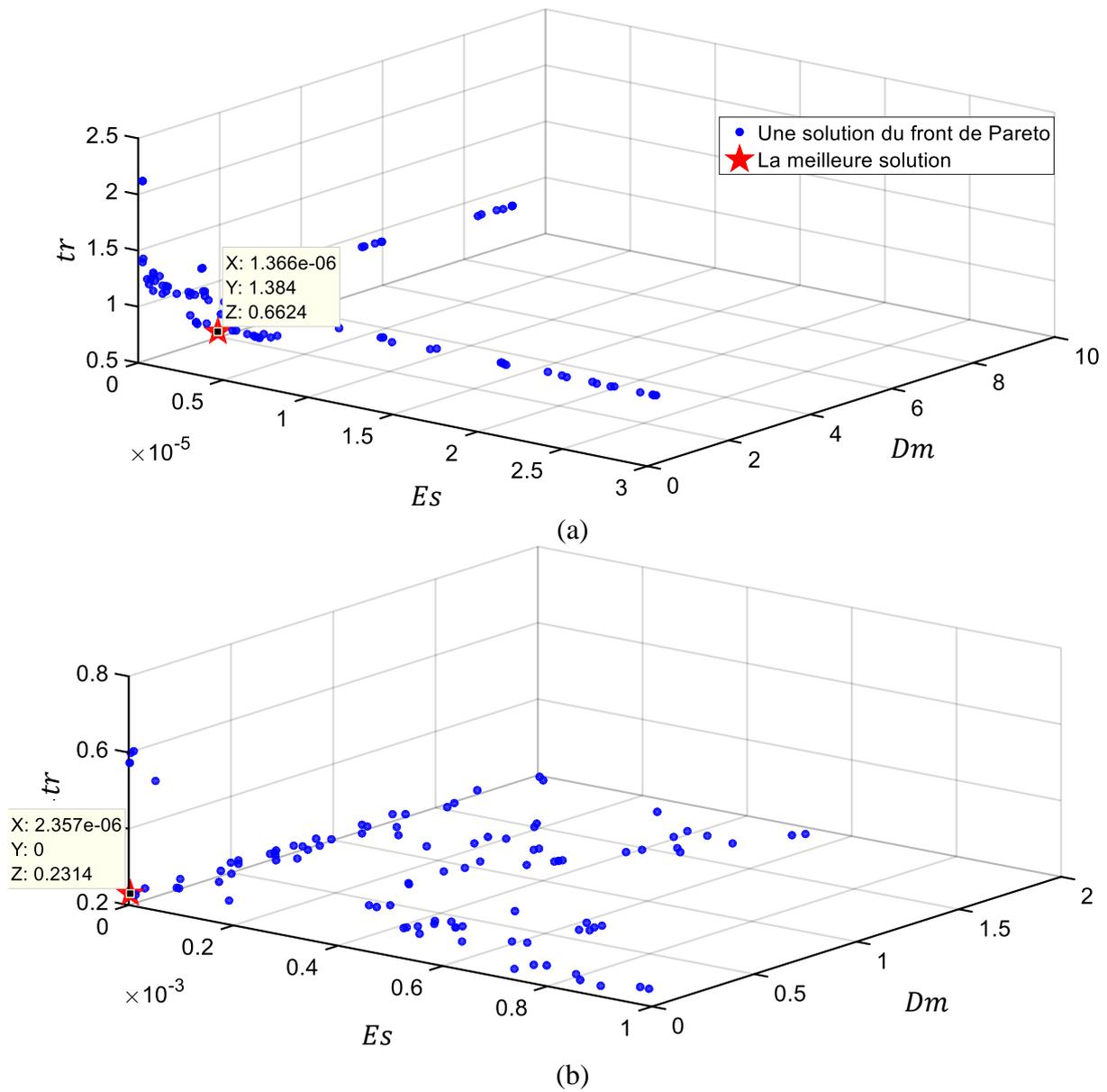
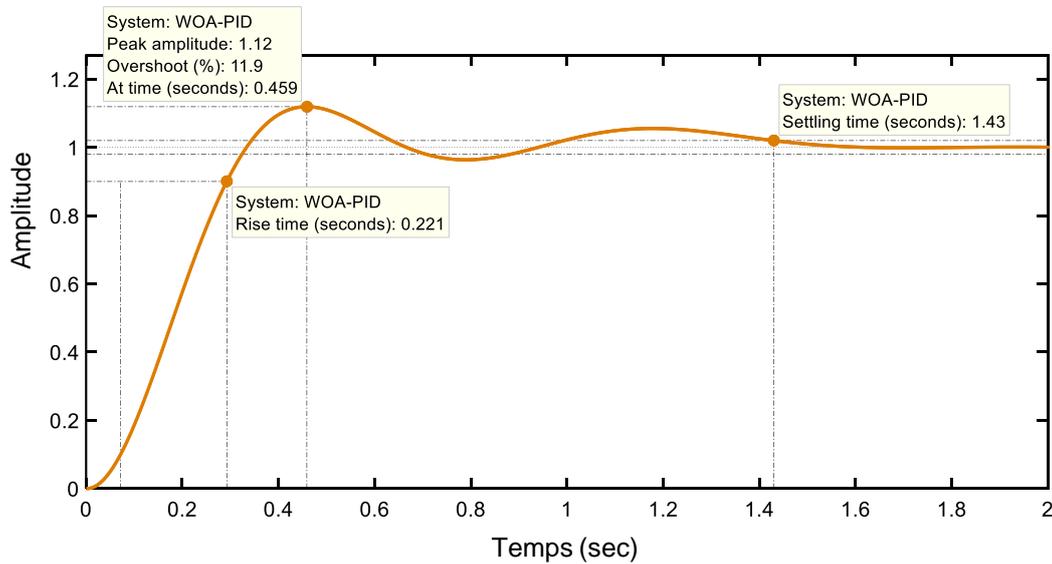
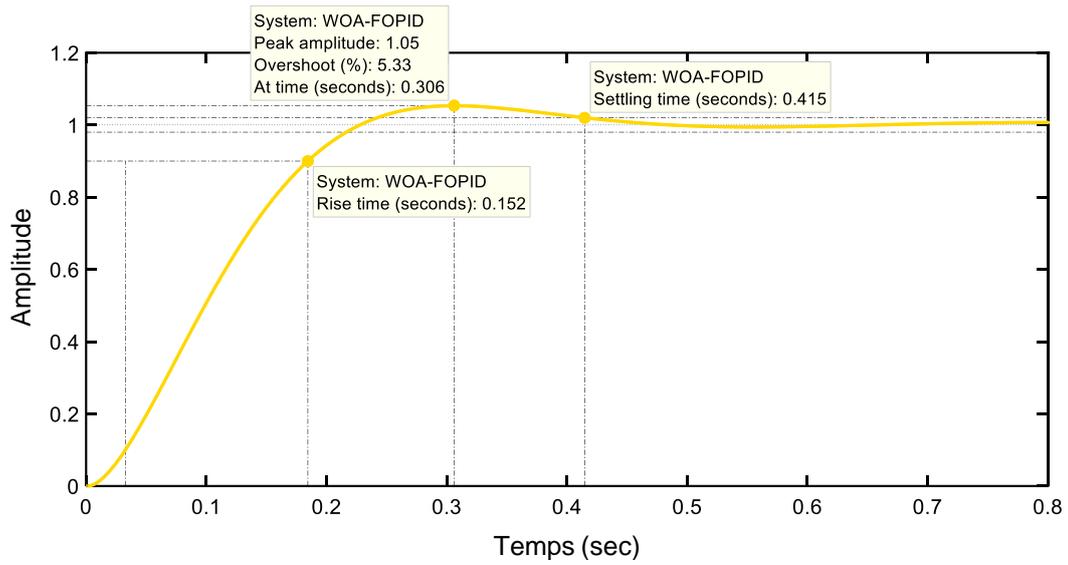


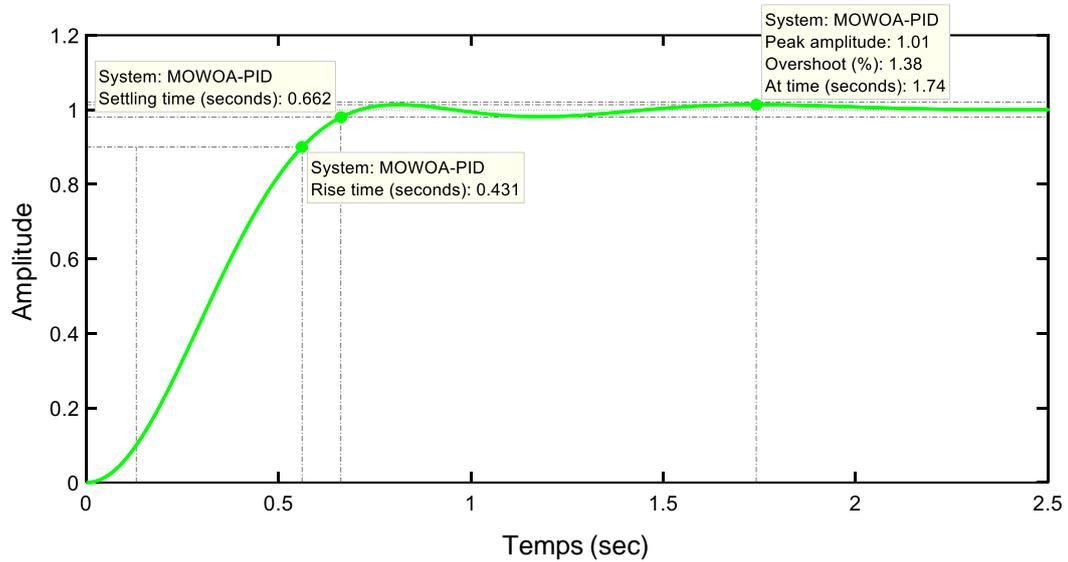
Fig. 6.10. Front de Pareto optimisé pour le contrôleur : (a) PID, (b) FOPID.



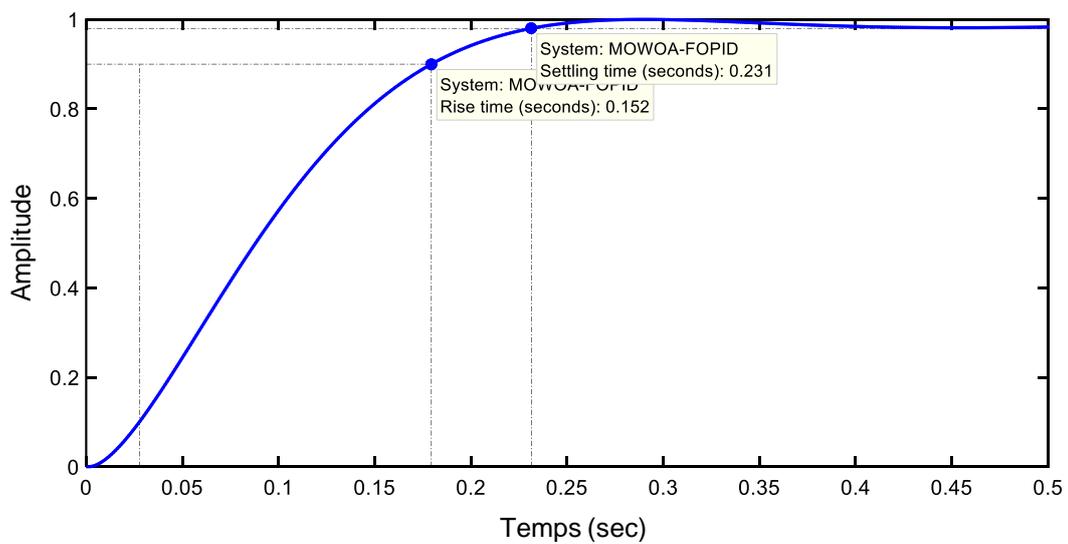
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6.11. Réponses du moteur avec les différents contrôleurs :
(a) WOA-PID (b) WOA-FOPID (c) MOWOA-PID (d) MOWOA-FOPID.

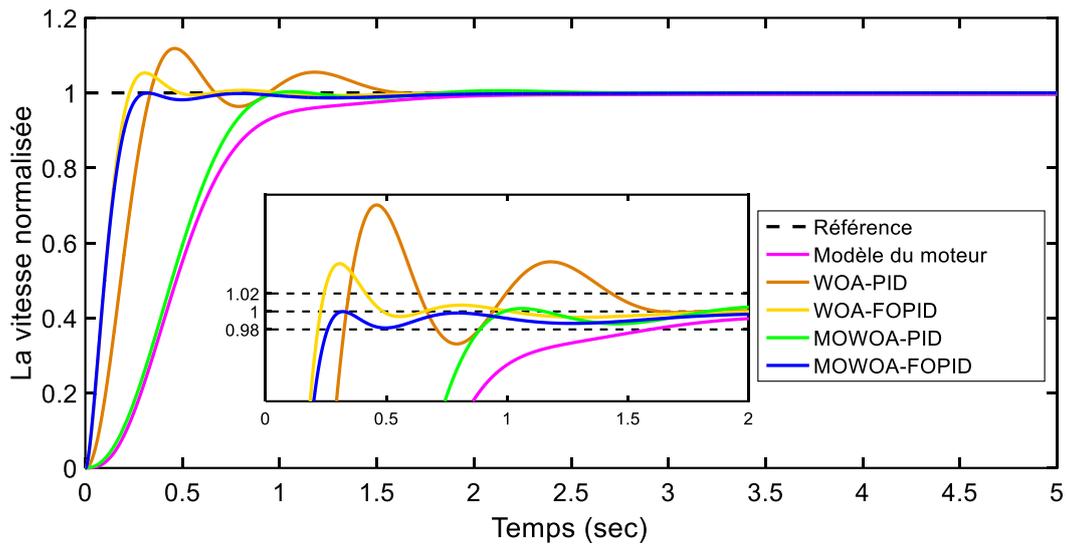


Fig. 6.12. Réponses du moteur avec les différents contrôleurs.

Tab. 6.3. Paramètres des contrôleurs PID/FOPID optimisés par les algorithmes WOA/MOWOA.

Contrôleur	k_p	k_i	k_d	λ	μ
WOA-PID	2.2183	6.9518	0.4119	1	1
WOA-FOPID	5.5376	9.9972	0.4668	1.0097	1.3516
MOWOA-PID	1.1189	3.0017	0.1125	1	1
MOWOA-FOPID	6.0993	8.5166	0.4572	1.0045	1.4230

Tab. 6.4. Performances des réponses indicielles.

	tr (s) (2%)	$Dm\%$	Es
Moteur en BO	1.5063	0	0.0040
WOA-PID	1.4299	11.9288	9.92e-6
WOA-FOPID	0.4144	5.3051	1.91e-4
MOWOA-PID	0.6624	1.3843	1.37e-6
MOWOA-FOPID	0.2314	0	2.36e-6

La figure (6.13) représente les réponses du moteur soumis à une référence multi-échelle. Les résultats de simulation montrent que le contrôleur MOWOA-FOPID offre une meilleure capacité de suivi par rapport aux autres contrôleurs.

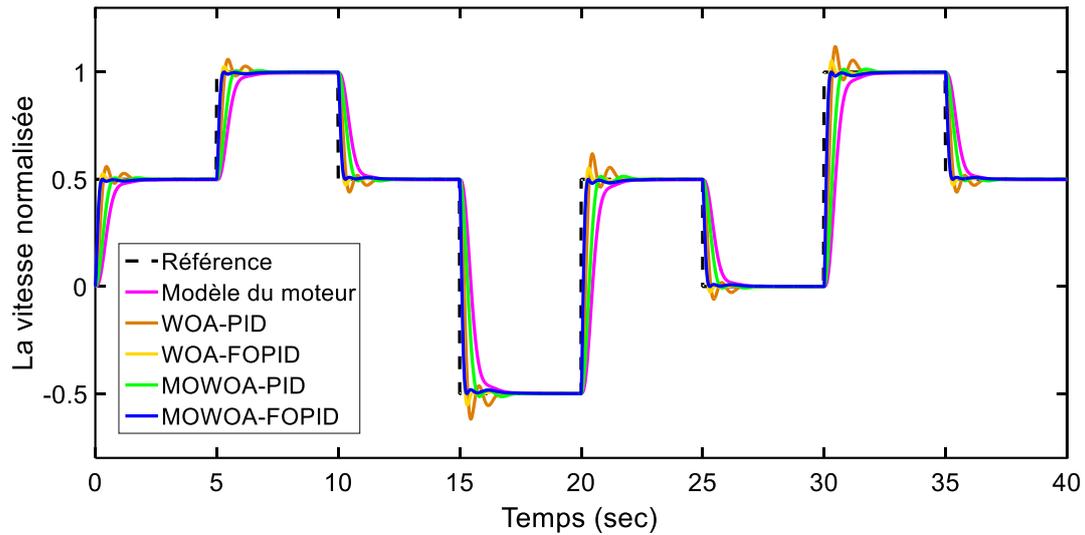


Fig. 6.13. Réponses du moteur à une référence multi-échelette.

B) Analyse de la réponse fréquentielle

Afin d'évaluer les performances de stabilité et de rapidité dans le domaine fréquentiel, les réponses fréquentielles des systèmes de contrôle en boucle ouverte et en boucle fermée ont été analysées (voir les figures (6.14) et (6.15)). Le tableau (6.5) regroupe ces performances qui sont : la marge de gain (MG), la marge de phase (MP) et la bande passante (BP) dont les meilleurs résultats sont mentionnés en gras. Comme le montre le tableau, le contrôleur MOWOA-FOPID a les meilleures performances avec une marge de gain infinie, une marge de phase et une bande passante les plus élevées par rapport aux autres contrôleurs. Ces résultats valident l'efficacité du contrôleur MOWOA-FOPID.

Tab. 6.5. Performances des réponses fréquentielles.

Contrôleur	MG (dB)	MP (deg)	BP (rad/s)
WOA-PID	∞	57.5926	10.3757
WOA-FOPID	∞	66.0288	14.0006
MOWOA-PID	137.3066	69.2599	5.69840
MOWOA-FOPID	∞	73.0123	14.3270

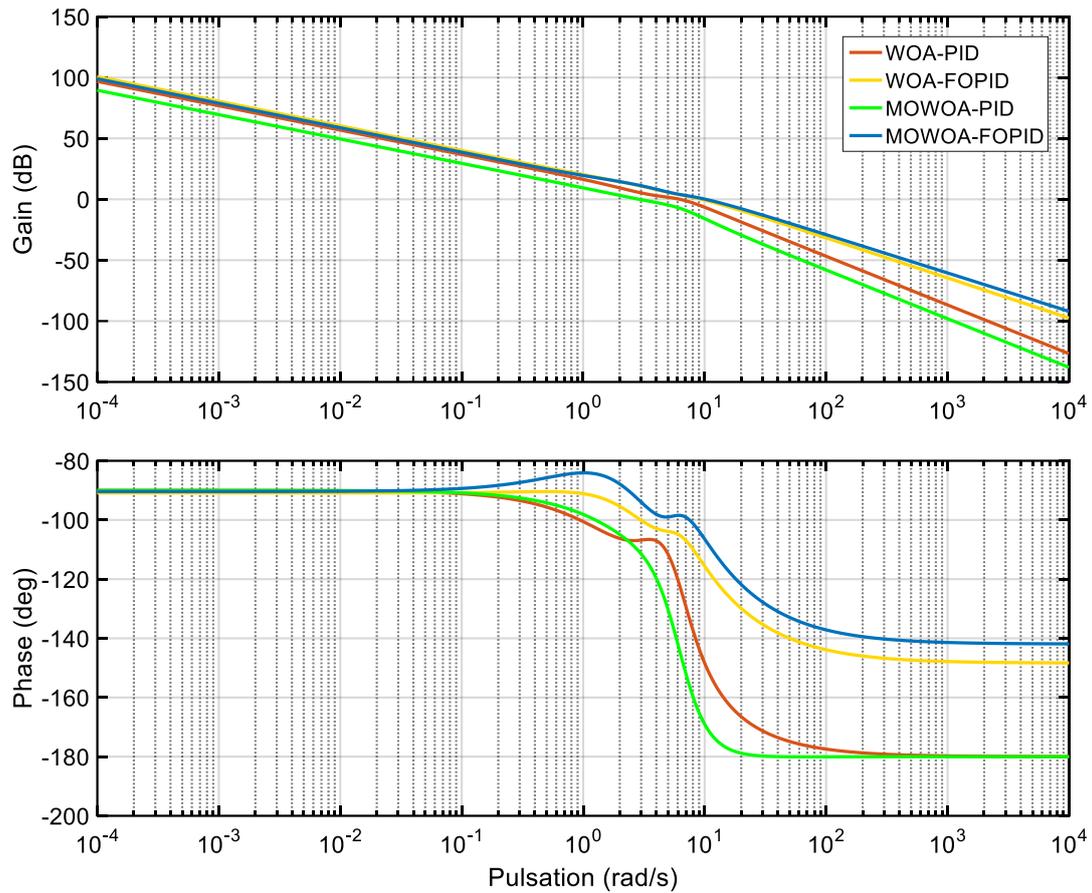


Fig. 6. 14. Diagrammes de Bode pour le système (moteur-contrôleur) en boucle ouverte.

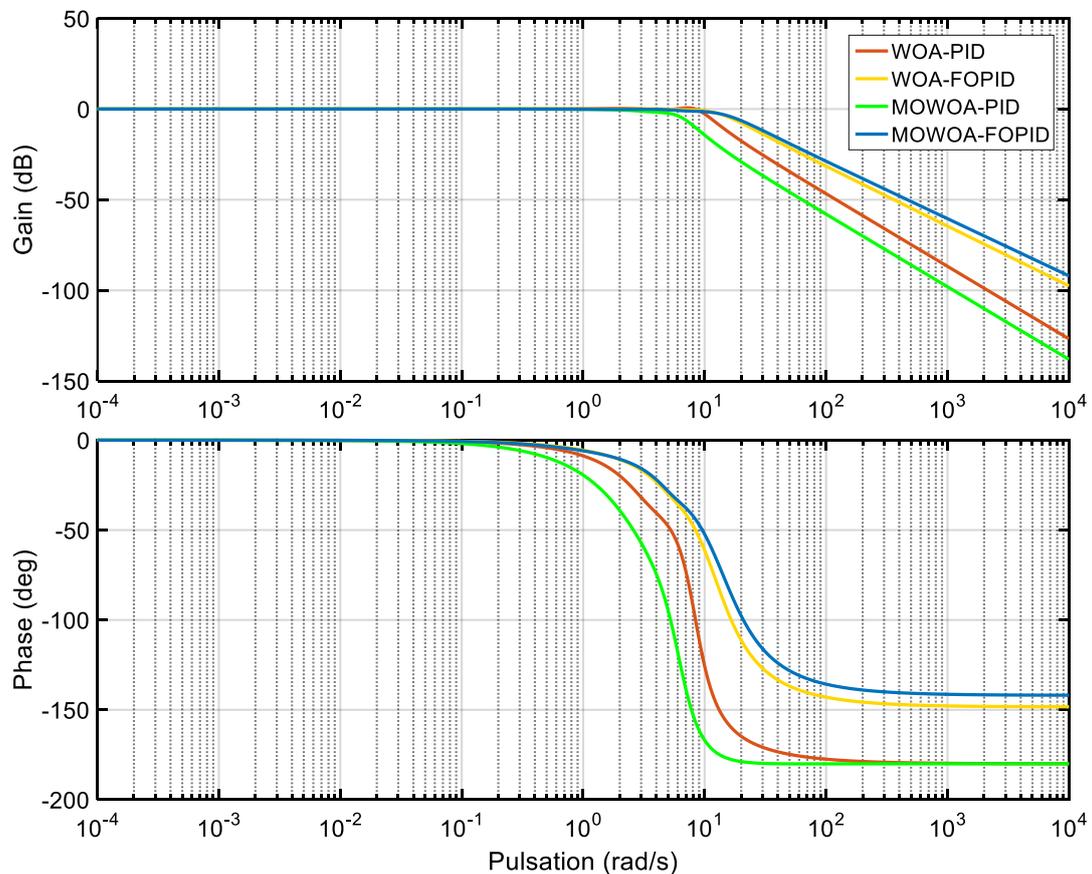


Fig. 6.15. Diagrammes de Bode pour le système (moteur-contrôleur) en boucle fermée.

C) Analyse de la réponse à une perturbation de charge

Afin de tester la capacité de rejet du système de contrôle de la vitesse du moteur BLDC en boucle fermée avec les contrôleurs proposés, le système de la figure (6.1) est soumis à une perturbation de charge de type échelon. Grâce aux contrôleurs, lorsqu'un changement de charge se produit, la vitesse de sortie est ramenée à zéro dès que possible. La figure (6.16) montre les réponses du moteur BLDC soumis à une perturbation de charge de type échelon. Les performances des réponses sont données dans le tableau (6.6). Il est clair que le contrôleur MOWOA-FOPID possède la meilleure réponse avec un dépassement minimum et un bon temps de réponse, par rapport aux autres contrôleurs. Par conséquent, le contrôleur MOWOA-FOPID est efficace pour supprimer les perturbations de charge. De plus, les réponses du moteur pour une perturbation de charge à plusieurs échelons sont présentées dans la figure (6.17).

Tab. 6.6. Performances des réponses à une perturbation de charge de type échelon.

Contrôleur	tr (s) (2%)	$Dm\%$	Es
WOA-PID	1.7340	28.8700	2.67e-6
WOA-FOPID	1.0080	16.7830	1.91e-4
MOWOA-PID	1.7610	47.6276	8.95e-6
MOWOA-FOPID	1.1320	16.0800	1.08e-4

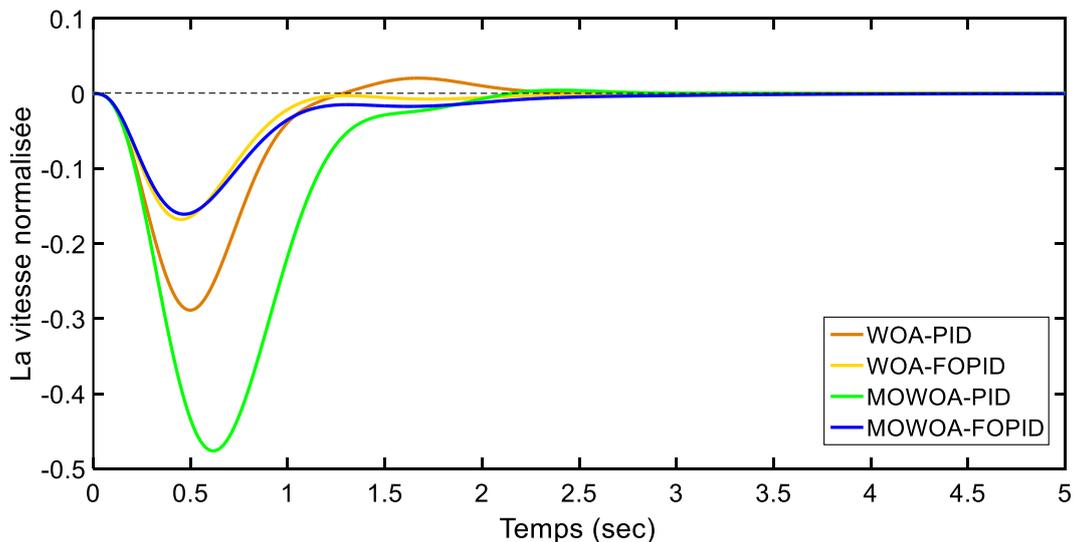


Fig. 6.16. Réponses du moteur à une perturbation de charge de type échelon.

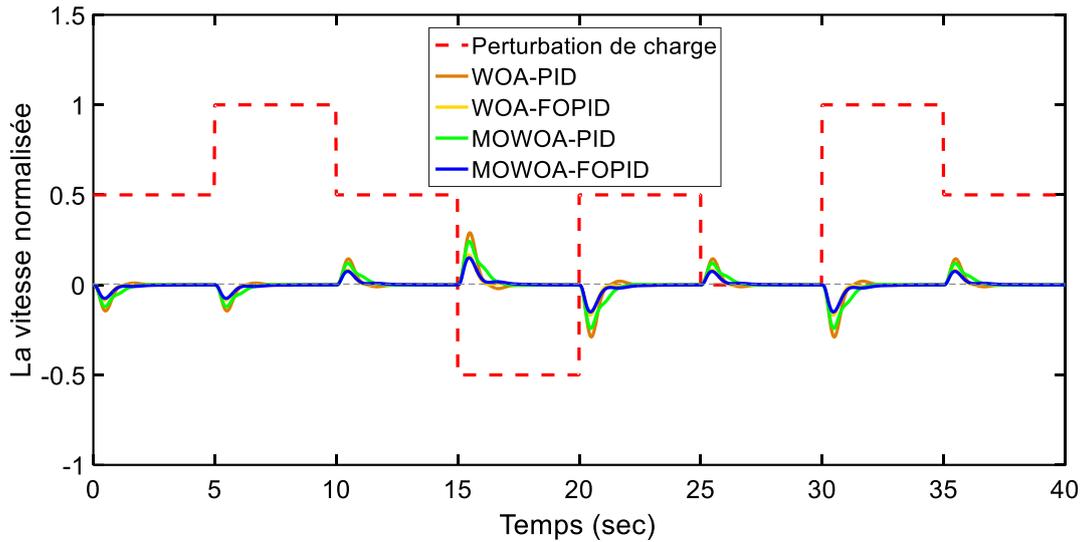


Fig. 6.17. Réponses du moteur à une perturbation de charge de type multi-échelle.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, un réglage optimal des paramètres des contrôleurs PID/FOPID pour le contrôle de la vitesse d'un moteur BLDC a été présenté. Les paramètres des contrôleurs ont été réglés via des algorithmes d'optimisation mono- et multi-objectif qui sont respectivement WOA et MOWOA. Pour l'optimisation mono-objectif, la fonction (ITAE) a été prise comme principale fonction objectif à minimiser. La meilleure solution qui correspond aux valeurs des paramètres du régulateur PID/FOPID a été obtenue directement à la fin du processus d'optimisation en fonction de la valeur minimale de la fonction objectif. Tandis que pour l'optimisation multi-objectif, trois fonctions objectifs à minimiser ont été employées; à savoir : le temps de réponse, le dépassement et l'erreur statique. La meilleure solution a été déterminée par l'approche de décision floue appliquée au front de Pareto archivée par l'algorithme MOWOA. Les résultats de simulation ont montré que le contrôleur MOWOA-FOPID offre la réponse la plus rapide sans aucun dépassement. De plus, ce contrôleur est le plus efficace en poursuite et en rejet de perturbations de charges. Les performances du contrôleur MOWOA-FOPID ont également été observées dans le domaine fréquentiel avec une marge de gain, une marge de phase et une bande passante supérieures.

Ce travail a fait l'objet d'un article soumis dans des journaux internationaux [Bou22].

Conclusion générale et perspectives

Nous sommes familiers avec le calcul traditionnel où la dérivée et l'intégrale sont d'ordres entiers. Or, il y a un autre type de calcul qui est le calcul fractionnaire, où l'ordre de dérivation et d'intégration peut être réel ou complexe. Le concept du calcul fractionnaire a changé énormément la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la « nature » autour de nous. En effet, beaucoup de processus réels sont mieux régis par des modèles d'ordres fractionnaires, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration d'ordre non entier. Les outils fractionnaires apparaissent aussi en automatique, notamment dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le régulateur sont décrits par des équations différentielles fractionnaires.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie du calcul fractionnaire où deux contributions ont été présentées.

La première contribution offre une étude analytique des limites et des régions de résonance de la fonction de transfert élémentaire d'ordre fractionnaire commensurable du deuxième type. Le point de départ de cette étude était de formuler mathématiquement le problème des limites de résonance qui a commencé par une équation cubique obtenue en mettant la première dérivée de l'amplitude de la réponse fréquentielle du système égale à zéro. Comme dans le cas conventionnel (entier), le système fractionnaire du deuxième type est à la limite de résonance, si le discriminant de la dernière équation est nul. Ce qui a conduit à l'obtention d'une deuxième équation cubique résolue en appliquant la méthode trigonométrique en tangente où la solution représente l'expression analytique des limites de résonance. De plus, les régions de résonance ont été déterminées et prouvées mathématiquement en appliquant le signe du discriminant et la règle des signes de Descartes. Pour valider ce travail, les résultats trouvés ont été testés à travers des exemples numériques puis appliqués sur un filtre d'ordre fractionnaire.

Quant à *la deuxième contribution, elle fournit un réglage optimal des correcteurs PID/FOPID, pour le contrôle de la vitesse d'un moteur BLDC, en utilisant l'optimisation mono- et multi-objectif via deux algorithmes qui sont respectivement WOA et MOWOA.* Les résultats de simulation dans le domaine temporel ont montré que le régulateur MOWOA-FOPID offre la réponse la plus rapide sans aucun dépassement avec une bonne capacité de suivi et un bon rejet des perturbations de charge. Les performances du correcteur MOWOA-FOPID ont également été

observées dans le domaine fréquentiel avec une marge de gain, une marge de phase et une bande passante supérieures. Par analyse des résultats obtenus, on peut conclure que le correcteur MOWOA/FOPID dépasse tous les autres correcteurs grâce :

- ✓ Aux paramètres additionnels d'intégration et de dérivation qui offrent plus de flexibilité et de robustesse au correcteur fractionnaire FOPID par rapport au correcteur PID classique.
- ✓ A l'optimisation multi-objectif qui est plus efficace que l'optimisation mono-objectif car elle présente un équilibre entre les différents objectifs.

Perspectives de recherche

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux réalisés et en cours de réalisation. On suggère alors :

- ✓ D'hybrider dans le futur des algorithmes d'optimisation métaheuristiques pour bénéficier des avantages de chacun;
- ✓ De travailler avec d'autres structures de régulateurs d'ordre fractionnaire;
- ✓ D'étendre la commande d'ordre fractionnaire aux systèmes à retard;
- ✓ De s'ouvrir sur d'autres applications dans divers domaines tels que la robotique, la bio-informatique, les énergies renouvelables,

Bibliographie

- [Abd18] A.M. AbdelAty, A.S. Elwakil, A.G. Radwan, C. Psychalinos and B.J. Maundy, "Approximation of the fractional-order Laplacian s^α as a weighted sum of first-order high-pass filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 65(8): 1114-1118, 2018.
- [Abi12] R. Abi Zeid Daou, X. Moreau, R. Assaf and F. Christohpy, "Analysis of the Fractional Order System in the thermal diffusive interface - Part 1: Application to a semi-infinite plane medium", In *Proceedings of the second International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering Applications*, Lebanon, 140-144, 2012.
- [Ahm15] A. M. Ahmed, A. Ali-Eldin, M.S. Elksasy and F.F. Areed, "Brushless dc motor speed control using both PI controller and fuzzy PI controller", *International Journal of Computer Applications*, 109(10): 29-35, 2015.
- [Ahm17] H. Ahmed and A. Rajoriya, "A hybrid of sliding mode control and fuzzy logic control using a fuzzy supervisory switched system for DC motor speed control", *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 25(3): 1993-2004, 2017.
- [Ahm18] W. Ahmed, A. Selim, S. Kamel, J. Yu and F. Jurado, "Probabilistic load flow solution considering optimal allocation of SVC in radial distribution system", *International Journal of Interactive Multimedia Artificial Intelligence*, 5(3): 152-161, 2018.
- [Ala94] M.A. Al-Alaoui, "Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Fundamental Theory and Applications*, 41(2): 186-187, 1994.
- [Ami19] R. Amirthalingam, B. Mahadevan and K. Vijayarajan, "Adaptive MF tuned fuzzy logic speed controller for BLDC motor drive using ANN and PSO technique", *The Journal of Engineering*, 17: 3947-3950, 2019.
- [Aou04] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, "Numerical simulations of fractional systems: an overview of existing methods and improvements", *Nonlinear Dynamics*, 38(1): 117-131, 2004.
- [Aou05] M. Aoun, "Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières", *Thèse de doctorat*, Université Bordeaux 1, France, 2005.
- [Ast01] K.J. Astrom, P. Albertos and J. Quevedo, "PID control", *Control Engineering Practice*, 9(11): 1159-1161, 2001.
- [Ast95] K.J. Astrom and T. Hagglund, "PID controllers: theory, design and tuning", *Instrument Society of America*. 2nd edition, 1995.
- [Bag79] R.L. Bagley, "Application of Generalized Derivatives to Viscoelasticity", *PhD thesis*, Air Force Institute of Technologie, USA, 1979.
- [Bag86] R.L. Bagley and P.J. Torvik, "On fractional calculus models of viscoelastic behavior", *Journal of Rheology*, 30: 133-155, 1986.
- [Bal20] K. Balamurugan and R. Mahalakshmi, "ANFIS-fractional order PID with inspired oppositional optimization based speed controller for brushless dc motor", *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 18(1): 1941004, 1-18, 2020.

- [Bar03] T. Bartz-Beielstein, P. Limbourg, K.E. Parsopoulos, M.N. Vrahatis, J. Mehnen and K. Shmitt, "Particle Swarm Optimizers for Pareto Optimization with Enhanced Archiving Techniques", In Congress on Evolutionary Computation, Australia, 3: 1780-1787, 2003.
- [Bari03] V. Barichard, "Approches hybrides pour les problèmes multiobjectifs", Thèse de Doctorat, école doctorale d'Angers, France, 2003.
- [Bay07] E.H.E. Bayoumi and H.M. Soliman, "PID/PI tuning for minimal overshoot of permanent-magnet brushless DC motor drive using particle swarm optimization", *Electromotion Scientific Journal*, 14(4): 198-208, 2007.
- [Bea93] D. Beasley, D. R. Bull and R. R. Martin, "A sequential niche technique for multimodal function optimization", *Evolutionary Computation*, 1(2): 101-125, 1993.
- [Ben15] A. Ben Hmed, M. Amairi and M. Aoun, "Stability and resonance conditions of the non-commensurate elementary fractional transfer functions of the second kind", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22: 842-865, 2015.
- [Bou21] A. Boubidi, S. Kechida and H. Tebbikh, "Analytical study of resonance regions for second kind commensurate fractional systems", *Discrete and Continuous, Dynamical Systems-Series B*, 26(7): 3579-3594, 2021.
- [Bou22] A. Boubidi and S. Kechida, "Comparative Study of Integer- and Fractional-Order PID Controller Tuning for BLDC Motor Speed Using Single- and Multi-Objective Optimization", *soumis pour publication*.
- [Bous13] I. Boussaïd, J. Lepagnot and P. Siarry, "A survey on optimization metaheuristics", *Information Sciences*, 237: 82-117, 2013.
- [Cao05] J.Y. Cao, J. Liang and B.G. Cao, "Optimization of fractional order PID controllers based on genetic algorithms", In Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 9: 5686-5689, 2005.
- [Cao06] J.Y. Cao and B.G. Cao, "Design of Fractional Order Controller Based on Particle Swarm Optimization", *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 4(6): 775-781, 2006.
- [Cap10] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petras, "Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications", World scientific series on nonlinear science, Series A. World scientific, Singapore, 2010.
- [Car64] G. E. Carlson and C. A. Halijak, "Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process", *IEE Transactions on Circuit Theory*, 11(2): 210-213, 1964.
- [Cha09] L-Y. Chang and H-C. Chen, "Tuning of fractional PID controllers using adaptive genetic algorithm for active magnetic bearing system", *WSEAS Transactions on Systems*, 8(1): 158-167, 2009.
- [Char55] A. Charnes, W.W. Cooper and R.O. Ferguson, "Optimal estimation of executive compensation by linear programming", *Management Science*, 1(2): 138-151, 1955.
- [Che02a] Y.Q. Chen and K.L. Moore, "Discretization schemes for fractional order differentiators and integrators", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3): 363-367, 2002
- [Che02b] Y.Q. Chen and D. Xue, "A comparative introduction of four fractional order controllers". In Proceedings of the 4th IEEE World Congress on Intelligent Control and Automatic, China, 3228-3235, 2002.

- [Che09] Y.Q. Chen, I. Petras and D. Xue, "Fractional order control: A tutorial", In Proceedings of the 2009 American Control Conference, USA, 1397-1411, 2009.
- [Cher16] A. Cheriet, "Métaheuristique hybride pour l'optimisation multi-objectif", Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie, 2016.
- [Chi96] C.J. Chien, K.C. Sun, A.C. Wu and L.C. Fi, "A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants", *Automatica*, 32(6): 833-848, 1996.
- [Coe02] C.A.C. Coello and M.S. Lechuga, "MOPSO: A Proposal for Multiple Objective Particle Swarm Optimization", In Proceedings of 2002 IEEE Congress on Evolutionary Computation 2, 1051-1056, 2002.
- [Coe04] C.A.C. Coello, G.T. Pulido and M.S. Lechuga, "Handling multiple objectives with particle swarm optimization", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(3): 256-279, 2004.
- [Coi00] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia and J.L. Battaglia, "Non integer model from modal decomposition for time domain system identification", In Proceedings of IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara, USA, 2000.
- [Col11] Y. Collette et P. Siarry, "Optimisation multiobjectif: Algorithmes", Editions Eyrolles, France, 2011.
- [Colo91] A. Colomi, M. Dorigo and V. Maniezzo, "Distributed optimization by ant colonies", Actes de la première conférence européenne sur la vie artificielle, France, 134-142, 1991.
- [Cur18] D.R. Curtiss, "Recent extensions of Descartes' rule of signs", *Annals of Mathematics*, 19(4): 251-278, 1918.
- [Das08] S. Das, "Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [Das12] S. Das, I. Pan, S. Das and A. Gupta, "Improved model reduction and tuning of fractional-order controllers for analytical rule extraction with genetic programming", *ISA Transactions*, 51(2): 237-261, 2012.
- [Deb02] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal and T.A.M.T. Meyarivan, "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2): 182-197, 2002.
- [Die05] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed and Y. Luchko, "Algorithms for the fractional calculus: A selection for numerical methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194: 743-773, 2005.
- [Dit15] G. Di Tollo, F. Lardeux, J. Maturana and F. Saubion, "An experimental study of adaptive control for evolutionary algorithms", *Applied Soft Computing*, 35: 359-372, 2015.
- [Dor94] L. Dorckak, "Numerical models for simulation the fractional-order control systems", Technical Report UEF-04-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovak, 1994.
- [Edg81] F. Y. Edgeworth, "Matemathical physics", P. Keagan, London, 1881.
- [Eul38] L. Euler. "De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt", *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5:36-57, 1738.

- [For07] R. A. Formato, "Central force optimization: A new metaheuristic with applications in applied electromagnetics", *Progress In Electromagnetics Research*, 77(1): 425-491, 2007.
- [Fou85] M.P. Fourman, "Compaction of symbolic layout using genetic algorithm", In proceedings of the first international conference on genetic algorithms, USA, 141-153, 1985.
- [Fu04] Y. Fu and U.M. Diwekar, "An efficient sampling approach to multiobjective optimization", *Annals of Operations Research*, 132(1-4): 109-134, 2004.
- [Gan05] C. Gang, Y. Haibin, X. Weihua, and C. Jian, "PID control of unstable process with large dead time", *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 26(3): 301-303, 2005.
- [Gar07] D. Garcia, A. Karimi and R. Longchamp, "Robust proportional integral derivative controller tuning with specifications on the infinity-norm of sensitivity functions", *IET Control Theory Application*, 1(1): 263-272, 2007.
- [Gia15] I. Giagkiozis, R.C. Purshouse and P.J. Fleming, "An overview of population-based algorithms for multi-objective optimisation", *International Journal of Systems Science*, 46(9): 1572-1599, 2015.
- [Glo89] F. Glover, "Tabu search - part I", *ORSA Journal on Computing*, 1(3): 190-206, 1989.
- [Glo90] F. Glover, "Tabu search - part II", *ORSA Journal on Computing*, 2(1): 4-32, 1990.
- [Glo97] F. Glover and M. Laguna, "Tabu search", Kluwer Academic Publishers, USA, 1997.
- [Gol87] D.E. Goldberg and J. Richardson, "Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization", In proceedings of the second international conference on genetic algorithms, USA, 41-49, 1987.
- [Gol89] D.E. Goldberg, "Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning", Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [Hab17] F. Habibi, E. Asadi, S.J. Sadjadi and F. Barzinpour, "A multi-objective robust optimization model for site-selection and capacity allocation of municipal solid waste facilities: A case study", *Journal of Cleaner Production*, 166: 816-834, 2017.
- [Hai71] Y. Haimes, L. Ladson and D. Wismer, "Bicriterion formulation of problems of integrated system identification and system optimization", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 296(3): 34-41, 1971.
- [Hil00] R. Hilfer, "Applications of fractional calculus in physics", Singapore: World Scientific Publishing Company, 2000.
- [Hol75] J. Holland, "Adaptation in natural and artificial systems", University of Michigan Press, 1975.
- [Hwa03] C. Hwang and J.H. Hwang, "On stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers", *IEE Proceeding on Control theory Applications*, 151(1): 89-94, 2004.
- [Ike77] M. Ikeda and S. Takahashi, "Generalization of Routh's algorithm and stability criterion for non-integer integral system", *Electronics and Communications in Japan*, 60(2): 41-50, 1977.
- [Ish98] H. Ishibuchi and T. Murata, "A multi-objective genetic local search algorithm and its application to the flowshop scheduling", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics -C*, 28(3): 392-403, 1998.

- [Iva18] E. Ivanova, X. Moreau and R. Malti, "Stability and resonance conditions of second-order fractional systems", *Journal of Vibration and control*, 24(4): 659-672, 2018.
- [Jen03] M.T. Jensen, "Reducing the run-time complexity of multiobjective EAs : the NSGA-II and other algorithms", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(5): 503-515, 2003.
- [Jig19] H. Jigang, F. Hui and W. Jie, "A PI controller optimized with modified differential evolution algorithm for speed control of BLDC motor", *Automatika*, 60(2): 135-148, 2019.
- [Joz04] N. Jozefowicz, "Modélisation et résolution approchée de problèmes de tournées de véhicules", thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 2004.
- [Kar81a] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek and T.J. Sinclair, "The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. I. Variation with state of charge", *Journal of Applied Electrochemistry*, 11: 365–372, 1981.
- [Kar81b] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek and T.J. Sinclair, "The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. II. An interpretation of the data", *Journal of Applied Electrochemistry*, 11: 715–721, 1981.
- [Kara07] D. Karaboga and B. Basturk, "Artificial bee colony (ABC) optimization algorithm for solving constrained optimization problems", In proceedings of the 12th international fuzzy systems association world congress on foundations of fuzzy logic and soft computing, Germany, 789-798, 2007
- [Kari07] M. Karimi-Ghartemani, M. Zamani, N. Sadati and M. Parniani, "An optimal fractional order controller for an AVR system using particle swarm optimization algorithm". In proceedings of the 2007 large engineering systems conference on power engineering, Canada, 244-249, 2007.
- [Ken95] J. Kennedy and R. Eberhart, "Partical swarm optimization", In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Australia, 4: 1942-1948, 1995.
- [Khe11] F. Khemani, "Estimation fréquentielle par modèle non-entier et approche ensembliste: Application à la modélisation de la dynamique du conducteur", thèse PhD, Université Bordeaux 1, France, 2011.
- [Khl18] P. Khluabwannarat, A. Nawikavatan and D. Puangdownreong, "Fractional-order model parameter identification of BLDC motor by flower pollination algorithm", *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 13: 573-579, 2018.
- [Khl19] P. Khluabwannarat and D. Puangdownreong, "Design of fractional-order PID Controller for fractional-order System via flower pollination algorithm", In Proceedings of the second Artificial Intelligence and Cloud Computing Conference, Japan, 191-196, 2019.
- [Kil06] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, "Theory and applications of fractional differential equations", North-Holland Mathematical Studies 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 2006.
- [Kir83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, and M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing", *Science*, 220(4598): 671-680, 1983.
- [Kno00] J.D. Knowles and D.W. Corne, "Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy", *Evolutionary Computer*, 8(2): 149-172, 2000.

- [Kro01] R.A. Krohling and J.P. Rey, "Design of optimal disturbance rejection PID controllers using genetic algorithms", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 5(1): 78-82, 2001.
- [Kum17] I.R. Kumawat, S.J. Nanda and R.K. Maddila, "Multi-objective Whale Optimization", In *Proceedings of the TENCON 2017-2017 IEEE Region 10 Conference*, Malaysia, 2159-3450, 2017.
- [Kwa72] H. Kwakernaak and R. Sivan, "Linear Optimal Control", Wiley Interscience, New York, USA, 1972.
- [Las95] A. Lasia, "Impedance of porous electrodes", *Journal of Electroanalytical chemistry*, 397(1): 27-33, 1995.
- [Las99] A. Lasia, "Modern Aspects of Electrochemistry", Kluwer Academic/Plenum, New York, USA, 1999.
- [Lio32] J. Liouville, "Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques", *Journal de l'Ecole Polytechnique - Paris*. 13, section 21, 71-162, 1832.
- [Lou97] D. H. Loughlin and S.R. Ranjithan, "The Neighborhood Constraint Method: A Genetic Algorithm-Based Multiobjective Optimization Technique", In *Proceedings of the 7th International Conference on Genetic Algorithms*, USA, 666-673, 1997.
- [Lur94] B.J. Lurie, "Three-parameter tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) controller", United States Patent, US 5 371 670, USA, 1994.
- [Mah20a] M. Mahmud, S.M.A. Motakabber, A.H.M.Z. Alam and A.N. Nordin, "Control BLDC motor speed using PID controller", *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 11(3): 477-481, 2020.
- [Mah20b] M. Mahmud, S.M.A. Motakabber, A.H.M.Z. Alam, A.N. Nordin and A.K.M. Ahasan Habib, "Modeling and performance analysis of an adaptive PID speed controller for the BLDC motor", *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 11(7): 272-276, 2020.
- [Mai06] G. Maione, "Concerning Continued fractions representation of non-integer order digital differentiator", *IEEE Signal Processing Letters*, 13(12): 725-728, 2006.
- [Mai08] G. Maione, "Continued fractions approximation of the impulse response of fractional-order dynamic systems", *IET Control Theory and Applications*, 2(7): 564-572, 2008.
- [Mai11] G. Maione, "High-Speed digital realization of Fractional operators in Delta domain", *IEEE Transactions on Automatic control*, 56(3): 697-702, 2011.
- [Maj00] S. Majhi and D.P. Atherton, "Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 147(4): 421-427, 2000.
- [Maj98] S. Majhi and D.P. Atherton, "Autotuning and controller design for unstable time delay processes", In *Proceedings of IEEE Conference: UKACC International Conference on Control*, UK, 769-774, 1998.
- [Mal11] R. Malti, X. Moreau, F. Khemane and A. Oustaloup, "Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions", *Automatica*, 47(11): 2462-2467, 2011.
- [Mat96] D. Matignon and B. Andrea-Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems", In *Proceedings of IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, France, 952-956, 1996.

- [Mat97] D. Matignon and B. Andrea-Novel, "Observer-based for fractional differential systems", In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, USA, 4967-4972, 1997.
- [Mat98] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems", In Proceedings of the Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications, France, 5: 145-158, 1998.
- [Mats93] K. Matsuda and H. Fuji, "H1 optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 16(6): 1146-1153, 1993.
- [Men09] L. Meng, D. Xue, "Design of an optimal fractional-order PID controller using multi-objective GA optimization", In Proceedings of Control and Decision Conference, Chinese, 3849-53, 2009.
- [Mer09] F. Merrikh-Bayat, M. Afshar and M. Karimi-Ghartemani, "Extension of the root-locus method to a certain class of fractional-order systems", ISA Transactions, 48(1): 48-53, 2009.
- [Meu02] H. Meunier, "Algorithmes évolutionnaires parallèles pour l'optimisation multi-objectif de réseaux de télécommunications mobiles", Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 2002.
- [Mil93] K.S. Mille and B. Ross, "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations", John Wiley and Sons, USA, 1993.
- [Mir14] S. Mirjalili, S.M. Mirjalili and A. Lewis, "Grey wolf optimizer", Advances in Engineering Software, 69: 46-61, 2014.
- [Mir16] S. Mirjalili and A. Lewis, "The whale optimization algorithm", Advances in Engineering Software, 95: 51-67, 2016.
- [Mit03] G.M. Mittag-Leffler, "Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ ", C.R. Académie des Sciences, 137: 554-558, 1903.
- [Mit05] G.M. Mittag-Leffler, "Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. Acta Mathematica, 29: 101-182, 1905.
- [Mla97] N. Mladenović and P. Hansen, "Variable neighborhood search", Computers and Operations Research, 24(11): 1097-1100, 1997.
- [Mon05] C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu and Y.Q. Chen, "Self-tuning of fractional lead-lag compensators", In Proceedings of 16th IFAC World Congress, Prague, 2005.
- [Moo99] J. Moore and R. Chapman, "Application of particle swarm to multiobjective optimization", Technical report, Departement of Computer Science and Software Engineering, Auburn University, 1051-1056, 1999.
- [Mor05] X. Moreau, O. Altet and A. Oustaloup, "Fractional differentiation: an example of phenomenological interpretation", Chapter in Fractional differentiation and its applications, Germany: U-Books Edition, 275-287, 2005.
- [Moz05] M. Moze, J. Sabatier and A. Oustaloup, "LMI tools for stability analysis of fractional systems", In Proceedings of ASME 2005 IDETC/CIE Conferences, 1-9, 2005.
- [Mra04] N. Mrani, "Contribution à l'étude des Systèmes Fractionnaires: Théorie et Applications", Thèse de Doctorat, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Maroc, 2004.

- [Nas07] M. Nasri, H. Nezamabadi-Pour and M. Maghfoori, "A PSO-based optimum design of PID controller for a linear brushless DC motor", *International Journal of Electrical and Information Engineering*, 1(2): 171-175, 2007.
- [Ndo11] I. N'doye, "Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires", Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, France, 2011.
- [Ola20] S. Oladipo, Y. Sun and Z. Wang, "Optimization of PID Controller with Metaheuristic Algorithms for DC Motor Drives: Review", *International Review of Electrical Engineering*, 15(5): 352-381, 2020.
- [Old74] K.B. Oldham and J.S. Spanier, "The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", Academic Press, USA, 1974.
- [Ous00] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F.M. Nanot, "Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1): 25-39, 2000.
- [Ous05] A. Oustaloup, O. Cois and L. Le Lay, "Représentation et identification par modèle non entier", Hermès, Paris, 2005.
- [Ous91] A. Oustaloup, "La commande CRONE (Commande Robuste Non Entière)", Hermès, Paris, 1991.
- [Ous95] A. Oustaloup, "La dérivation non entière", Hermès, Paris, 1995.
- [Pan12] I. Pan and S. Das, "Chaotic multi-objective optimization based design of fractional order $PI^\lambda D^\mu$ controller in AVR system", *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 43(1): 393-407, 2012.
- [Pan15] I. Pan and S. Das, "Fractional-order load-frequency control of interconnected power systems using chaotic multi-objective optimization", *Applied Soft Computing*, 29: 328-344, 2015.
- [Par96] V. Pareto, "Cours d'économie politique", F. Rouge, Lausanne, 1 et 2, Paris, 1896.
- [Pfi04] T. Pfitzenreiter, "A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations", *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 84(4): 284-287, 2004.
- [Pod02] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4): 367-386, 2002.
- [Pod05] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", Chapter in *Fractional differentiation and its applications*, Germany: U-Books Edition, 3-18, 2005.
- [Pod94] I. Podlubny. "Fractional-order system and fractional-order controllers", Technical Report UEF-03-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [Pod99a] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications", Academic Press, New York, 1999.
- [Pod99b] I. Podlubny, "Fractional order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1): 208-214, 1999.
- [Pot19] D. Potnuru and A.S.L.V. Tummala, "Grey wolf optimization based improved closed-loop speed control for a BLDC motor drive", In *Proceedings of Smart Innovation, Systems and Technologies*, 104: 145-152, 2019.

- [Pre14] K. Premkumar and B.V. Manikandan, "Adaptive neuro-fuzzy inference system based speed controller for brushless DC motor", *Neurocomputing*, 138: 260-270, 2014.
- [Pre16] K. Premkumar and B.V. Manikandan, "Bat algorithm optimized fuzzy PD based speed controller for brushless direct current motor", *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(2): 818-840, 2016.
- [Rao11] R.V. Rao, V.J. Savsani and D.P. Vakharia, "Teaching-learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems", *Computer-Aided Design*, 43(3): 303-315, 2011.
- [Ray02] T. Ray and K.M. Liew, "A swarm metaphor for multiobjective design optimization", *Engineering Optimization*, 34(2): 142-153, 2002.
- [Rayn00] H.F. Raynaud and A. Zergaino, "State-space representation for fractional order controllers", *Automatica*, 36(7): 1017-1021, 2000.
- [Red08] A.G. Redwan, A.M. Soliman and A.S. Elwakil, "First-order filters generalized to the fractional domain", *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 17(1): 55-66, 2008.
- [Red09] A.G. Redwan, A.S. Elwakil and A.M. Soliman, "On the generalization of second-order filters to the fractional-order domain", *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 18(2): 361-386, 2009.
- [Redd14] C.S.R. Reddy and M.S. Kalavathi, "Performance analysis of BLDC motor drive using new simulation model with fuzzy and ANFIS speed controllers", *Global Journal of Research in Engineering: F*, 14(4): 13-20, 2014.
- [Rie92] B. Riemann, "Gesammelte Werke", Nachtrage, Leipzig (Teubner), 1902.
- [Sab13] J. Sabatier, Ch. Farges and J.-C. Trigeassou, "A stability test for non-commensurate fractional order systems", *Systems and Control Letters*, 62(9): 739-746, 2013.
- [Sak87] M. Sakawa, H. Yano, and T. Yumine, "An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear-programming problems and its application", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 17(4): 654-661, 1987.
- [Sam93] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, "Fractional integrals and derivatives: theory and applications", Gordon and Breach, New York, USA, 1993.
- [Sch71] V.H. Schmidt, J.E. Drumheller and F.L. Howell, "Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate", *Physical Review*, B 4, 4582-4597, 1971.
- [Scha85] D. Schaffer, "Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithm", In *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, 93-100, 1985.
- [Ser08] P. Serrier., "Analyse de l'influence des non-linéarités dans l'approche CRONE: Application en isolation vibratoire", Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, France, 2008.
- [Sha14] P. Sharma and G. Rajeev, "Tuning of PID Controller for a linear brushless DC motor using swarm intelligence technique", *International Journal of Engineering Research and Applications*, 4(5): 125-128, 2014.
- [Shah16] P. Shah and S. Agashe. "Review of fractional PID controller", *Mechatronics*, 38: 29-41, 2016.
- [Sou96] M. Soula. "Etude du Comportement Mécanique des Matériaux Viscoélastiques par les Dérivées Fractionnaires", Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 1996.

- [Tab71] D. Tabak, "Digitalization of control systems", *Computer-Aided Design*, 3(2):13-18, 1971.
- [Tav13] M.H. Tavassoli, A. Tavassoli and M.R. Ostad Rahimi, "The geometric and physical interpretation of fractional order derivatives of polynomial functions", *Differential geometry-Dynamical systems*, 15: 93-104, 2013.
- [Tep11] A. Tepljakov, E. Petlenkov, and J. Belikov, "FOMCON: Fractional-Order Modeling and Control Toolbox for MATLAB", In *Proceedings of the 18th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and Systems*, Poland, 684-689, 2011.
- [Tri09] J.-C. Trigeassou and N. Maamri, "A new approach to the stability of linear fractional systems", In *Proceedings of the 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, Tunisia, 1-14, 2009.
- [Val10] D. Valerio and J. Sa da Costa, "A review of tuning methods for fractional PIDs", In *Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Spain, 2010.
- [Van99] D.A. Van Veldhuizen, "Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analysis, and new innovations", PhD thesis, Graduate school of engineering, Air Force Institute of Technology, USA, 1999.
- [Vanc21] K. Vanchinathan and N. Selvagesan, "Adaptive fractional order PID controller tuning for brushless DC motor using artificial bee colony algorithm", *Results in Control and Optimization*, 4: 1-18, 2021.
- [Vin00] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, V. Feliu, "Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(3): 231–248, 2000.
- [Vis15] C.S. Vishnu and Riya Mary Francis, "Speed control of BLDC motor using a tuned LQR controller", *International Journal of Scientific Engineering and Search*, 3(8): 2347-3878, 2015.
- [Vou99] C. Voudouris and E. Tsang, "Guided local search and its application to the traveling salesman problem", *European Journal of Operational Research*, 113(2): 469-499, 1999.
- [Xie19] W. Xie, J-S. Wang and H-B. Wang, "PI controller of speed regulation of brushless DC motor based on particle swarm optimization algorithm with improved inertia weights", *Mathematical Problems in Engineering*, 1-12, 2019.
- [Yan09] X.S. Yang and S. Deb, "Cuckoo search via Lévy flights", In *Proceedings of World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing*, India, 210-214, 2009.
- [Yan10] X.S. Yang, "Engineering optimization: An introduction with metaheuristic applications", John Wiley & Sons, New York, 2010.
- [Zha11] J. Zhao and Y. Yu, "Brushless DC motor fundamentals", *MPS Application Note (AN047)*, 2011.

Annexe A

Résolution d'une équation cubique

Considérons l'équation cubique :

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec a, b, c, d sont des nombres réels.

Pour résoudre l'équation (A.1), le discriminant D est calculé comme suit :

$$D = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d \quad (\text{A.2})$$

Le signe de D détermine le nombre et le type des racines de l'équation (A.1) comme le montre le tableau (A.1).

Tab. A.1. Nombre et nature des racines d'une équation cubique.

$D < 0$	L'équation a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
$D = 0$	L'équation a une racine réelle triple ou deux racines réelles dont une est double.
$D > 0$	L'équation a trois racines réelles distinctes.

Il existe plusieurs méthodes de résolution de l'équation cubique (A.1). Une de ces méthodes est la méthode trigonométrique en tangente. Cette méthode est applicable ssi $(b^2 - 3ac \neq 0)$.

Par un changement de variable :

$$y = z - T \quad (\text{A.3})$$

avec

$$T = \frac{bc - 9ad}{2(b^2 - 3ac)} \quad (\text{A.4})$$

l'équation (A.1) devient équivalente à une nouvelle équation cubique :

$$rz^3 + sz^2 + pz + q = 0 \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\begin{cases} r = a \\ s = -3aT + b \\ p = 3aT^2 - 2bT + c \\ q = -aT^3 + bT^2 - cT + d \end{cases} \quad (\text{A. 6})$$

La résolution de (A.5) présente trois cas :

1^{er} cas : si $pr < 0$ (condition équivalente à $D > 0$)

En posant :

$$z = \sqrt{-\frac{3r}{p}} \tan(\theta) \quad (\text{A. 7})$$

l'équation (A.5) donne:

$$\frac{\tan^3(\theta) - 3\tan(\theta)}{3\tan^2(\theta) - 1} = -\frac{3q}{p} \sqrt{-\frac{3r}{p}} \quad (\text{A. 8})$$

Le membre de gauche est le développement de $\tan(3\theta)$. Ce qui donne :

$$\tan(3\theta) = -\frac{3q}{p} \sqrt{-\frac{3r}{p}} \quad (\text{A. 9})$$

D'où les trois racines réelles de (A.5):

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{-\frac{p}{3r}} \tan\left(\frac{\varphi}{3}\right) \\ z_2 = \sqrt{-\frac{p}{3r}} \tan\left(\frac{\varphi + \pi}{3}\right) \\ z_3 = \sqrt{-\frac{p}{3r}} \tan\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{A. 10})$$

avec

$$\varphi = \operatorname{arctan}\left(-\frac{3q}{p} \sqrt{-\frac{3r}{p}}\right) \quad (\text{A. 11})$$

2^e cas : si $pr > 0$ (condition équivalente à $D < 0$)

a) Si $p^2 - 3sq > 0$

En posant:

$$z = \sqrt{\frac{p}{3r}} \operatorname{th}(\theta) \quad (\text{A. 12})$$

l'équation (A.5) donne :

$$\frac{th^3(\theta) + 3th(\theta)}{3th^2(\theta) + 1} = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \quad (\text{A.13})$$

Le membre de gauche est le développement de $th(3\theta)$. Nous arrivons donc à :

$$th(3\theta) = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \quad (\text{A.14})$$

Ce qui conduit à :

$$\theta = \operatorname{artanh}\left(-\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}}\right) \quad (\text{A.15})$$

Par conséquent, la racine réelle unique est définie (A.12).

b) Si $p^2 - 3sq < 0$

En posant :

$$z = \sqrt{\frac{p}{3r}} \operatorname{coth}(\theta) \quad (\text{A.16})$$

l'équation (A.5) donne :

$$\frac{\operatorname{coth}^3(\theta) + 3\operatorname{coth}(\theta)}{3\operatorname{coth}^2(\theta) + 1} = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \quad (\text{A.17})$$

Le membre de gauche est le développement de $\operatorname{coth}(3\theta)$. Nous arrivons donc à :

$$\operatorname{coth}(3\theta) = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}} \quad (\text{A.18})$$

Ce qui conduit à :

$$\theta = \operatorname{argcoth}\left(-\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3r}{p}}\right) \quad (\text{A.19})$$

Par conséquent, la seule racine réelle est définie (A.16).

3^e cas : si $p = 0$ (condition équivalente à $D = 0$)

L'équation (A.4) se réduit à

$$rz^3 + sz^2 = 0 \quad (\text{A.20})$$

On distingue deux situations :

$s = 0$: L'équation (A.5) possède une racine réelle triple

$$z = 0 \tag{A.21}$$

s ≠ 0: L'équation (A.5) possède deux racines réelles dont une est double.

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{s}{r} \\ z_2 = z_3 = 0 \end{cases} \tag{A.22}$$

Annexe B

Résultats du décideur flou

Après avoir obtenu le front de Pareto optimal à la fin de l'optimisation multi-objectif (MOWOA), la meilleure solution satisfaisant les préférences désirées est extraite en appliquant une procédure de décision floue (§6.5) implémentée sous Matlab comme c'est illustré dans la figure (B.1). Notons que les entrées et la sortie du décideur flou sont désignées, sous Matlab, en anglais comme suit :

Nts : Normalized settling time (temps de réponse normalisé), **NMp** : Normalized Maximum overshoot (dépassement maximum normalisé), **Ness** : Normalized steady-state error (erreur statique normalisée), **W** : Weight (poids).

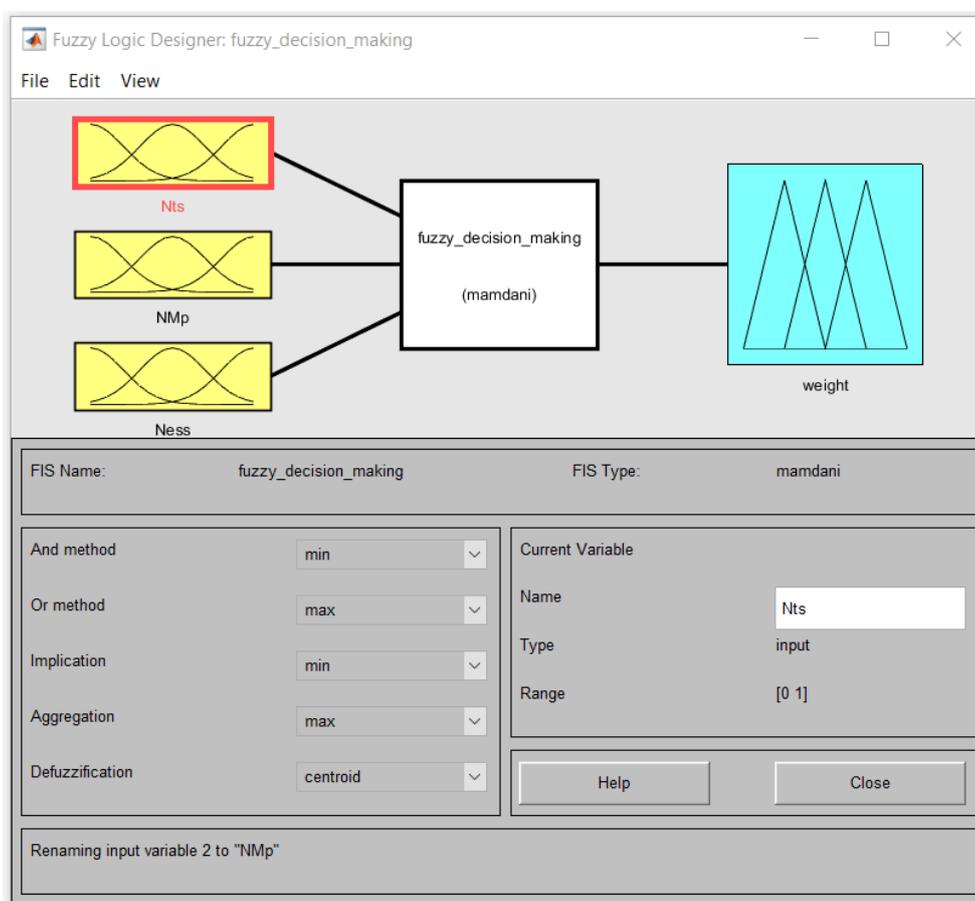


Fig. B.1. Implémentation des entrées/sortie du décideur flou.

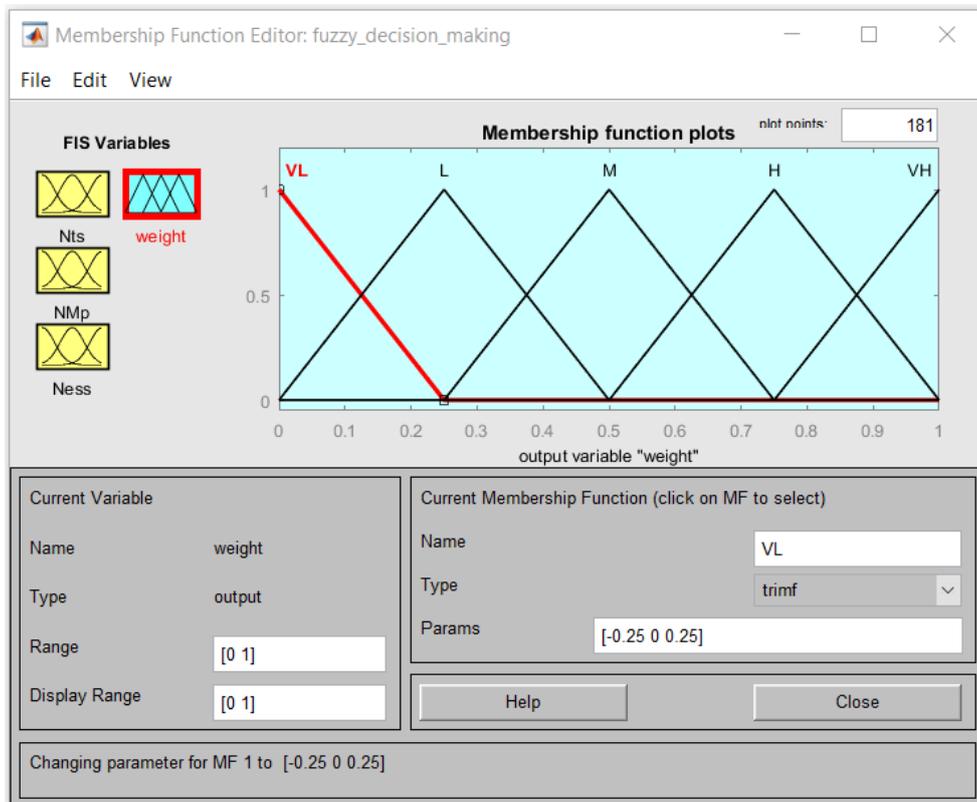
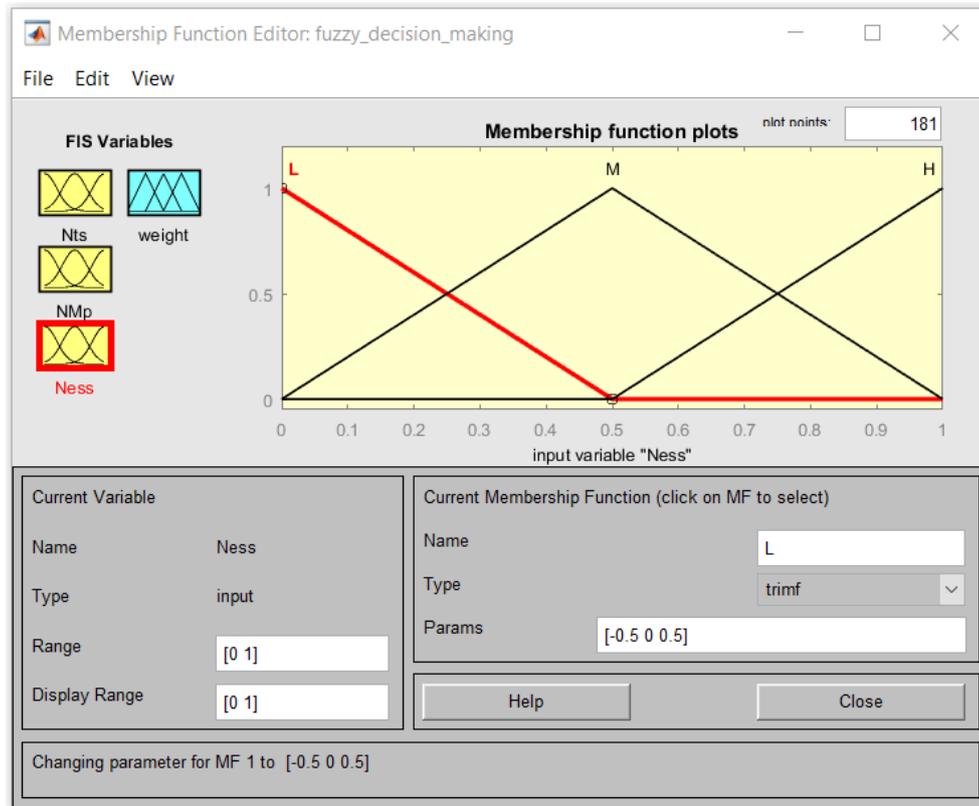


Fig. B.2. Fonctions d'appartenance des entrées/sortie du décideur flou.

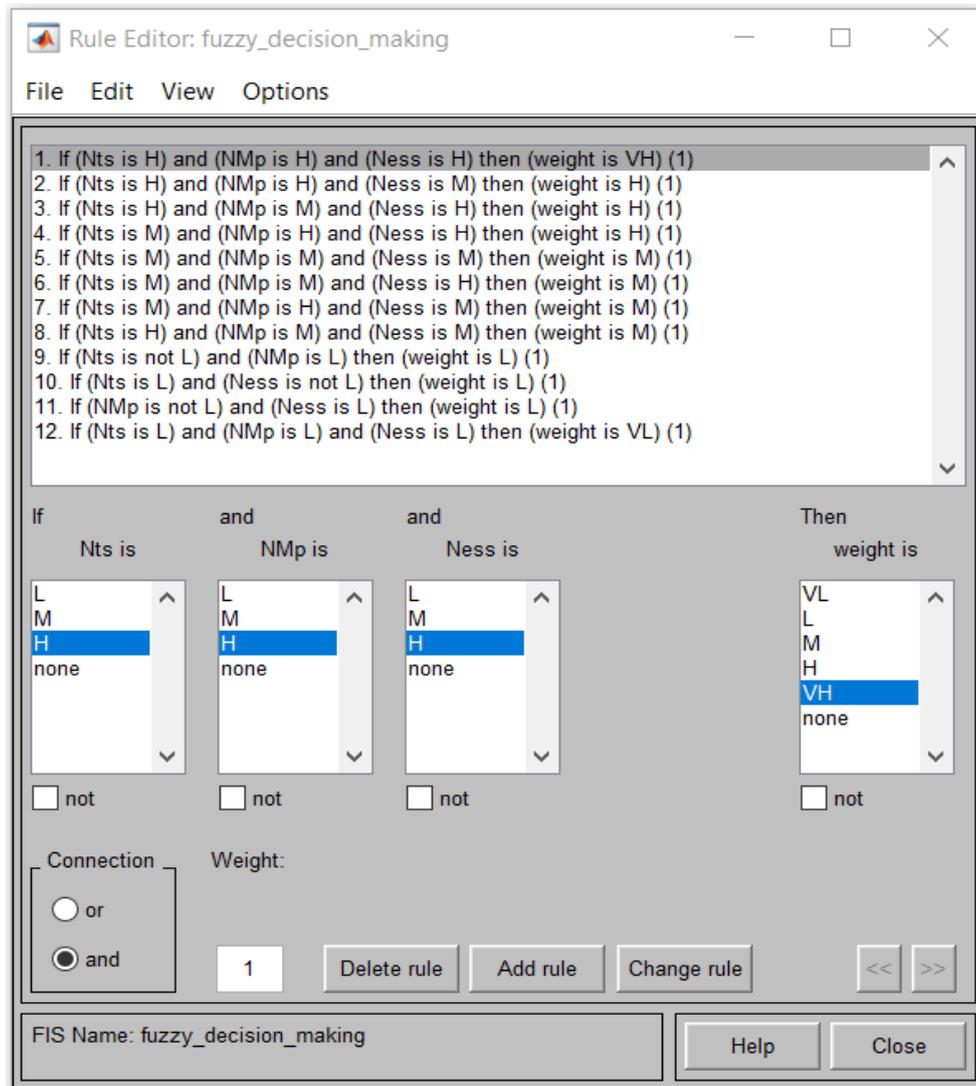


Fig. B.3. Les règles d'inférence du décideur flou.

Une fois le décideur est configuré, le front de Pareto optimisé par MOWOA et normalisé est appliqué comme entrée. Les résultats de simulation des correcteur PID et FOPID, sont donnés respectivement par les tableaux (B.1) et (B.2). Pour chaque contrôleur, la meilleure solution, surlignée en bleu, correspond à la valeur du poids W la plus élevée.

Tab. B.1. Résultats de simulation du décideur flou pour l'obtention des paramètres du contrôleur MOWOA-PID.

N°	Ensemble de Pareto			Front de Pareto			Les entrées du décideur			La sortie W
	k_p	k_i	k_d	ts	M_p	ess	Nts	NM_p	$Ness$	
1	1.9867	2.7262	0.4850	2.1257	0	0.0000	0	1.0000	0.9913	0.2500
2	1.9867	2.7262	0.4850	2.1257	0	0.0000	0	1.0000	0.9913	0.2500
3	1.7217	3.1621	0.3433	1.2856	0.1824	0.0000	0.5569	0.9801	0.9852	0.7379
4	2.1357	4.0169	0.4147	1.0635	0.5650	0.0000	0.7041	0.9385	0.6390	0.6194
5	1.6827	3.0408	0.2304	1.3092	0	0.0000	0.5412	1.0000	0.9561	0.7217
6	2.1107	3.9579	0.3843	1.0821	0.4712	0.0000	0.6917	0.9487	0.8370	0.6778
7	1.8794	3.4903	0.2912	1.1871	0.1762	0.0000	0.6221	0.9808	0.9127	0.7034

8	1.8690	3.4536	0.2974	1.1888	0.1600	0.0000	0.6210	0.9826	0.9049	0.6996
9	2.1920	4.1474	0.4330	1.0433	0.6467	0.0000	0.7175	0.9296	0.5617	0.6150
10	2.1584	4.0218	0.4419	1.0555	0.5847	0.0000	0.7093	0.9363	0.4434	0.5695
11	1.5082	2.7311	0.2223	1.4341	0	0.0000	0.4584	1.0000	0.9904	0.6807
12	2.1852	3.9549	0.4617	1.0635	0.4500	0.0000	0.7041	0.9510	0.4444	0.5681
13	1.7908	3.2784	0.3477	1.2236	0.1911	0.0000	0.5980	0.9792	0.9975	0.7404
14	1.7079	3.2644	0.2909	1.2170	0.2387	0.0000	0.6023	0.9740	0.9856	0.7373
15	2.5638	5.3838	0.6169	0.8988	5.5485	0.0000	0.8132	0.3959	0.9998	0.5785
16	1.4578	2.7421	0.1998	1.4027	0.0003	0.0000	0.4792	1.0000	0.9912	0.7122
17	1.7162	3.1481	0.3421	1.2968	0.1751	0.0000	0.5494	0.9809	0.9845	0.7380
18	1.2122	3.2517	0.1364	0.6175	1.7146	0.0000	0.9996	0.8133	0.8976	0.7211
19	2.1071	3.8303	0.3704	1.1044	0.3021	0.0000	0.6769	0.9671	0.9756	0.7416
20	0.6781	2.1312	0.0339	0.9438	0.7269	0.0000	0.7834	0.9209	0.8686	0.7011
21	1.6740	3.2371	0.2823	1.2230	0.2559	0.0000	0.5983	0.9721	0.9953	0.7356
22	1.8216	3.3631	0.3302	1.1926	0.2051	0.0000	0.6185	0.9777	0.9680	0.7349
23	2.1281	3.9788	0.3928	1.0765	0.4814	0.0000	0.6955	0.9476	0.8191	0.6721
24	2.1577	4.0710	0.4047	1.0618	0.5700	0.0000	0.7052	0.9379	0.7462	0.6473
25	2.1408	4.0126	0.4262	1.0605	0.5771	0.0000	0.7061	0.9372	0.5510	0.6096
26	2.8623	5.8939	0.7408	0.8444	8.9363	0.0000	0.8493	0.0270	0.9980	0.2981
27	2.8825	5.9264	0.7459	0.8417	9.1710	0.0000	0.8511	0.0014	1.0000	0.2529
28	1.8163	3.3490	0.3299	1.1962	0.1961	0.0000	0.6161	0.9786	0.9559	0.7269
29	1.2085	3.2350	0.1356	0.6206	1.6945	0.0000	0.9976	0.8155	0.9022	0.7242
30	1.2126	3.2563	0.1367	0.6170	1.7223	0.0000	1.0000	0.8125	0.8961	0.7201
31	2.2534	4.8720	0.5246	0.9511	1.5945	0.0000	0.7786	0.8264	0.9999	0.6829
32	0.6676	2.1228	0.0307	0.9348	0.7933	0.0000	0.7894	0.9136	0.8983	0.7172
33	0.7023	2.1815	0.0386	0.9251	0.7672	0.0000	0.7958	0.9165	0.8608	0.6993
34	1.0766	2.9199	0.1113	0.7021	1.3908	0.0000	0.9436	0.8486	0.9970	0.7607
35	1.0659	2.8574	0.1099	0.7272	1.3132	0.0000	0.9270	0.8570	0.9699	0.7502
36	1.0750	2.9183	0.1111	0.7026	1.3908	0.0000	0.9432	0.8486	0.9976	0.7605
37	1.0654	2.9069	0.1090	0.7045	1.3811	0.0000	0.9420	0.8496	0.9971	0.7598
38	2.2567	4.8772	0.5257	0.9505	1.6287	0.0000	0.7790	0.8227	0.9996	0.6816
39	0.8520	2.4097	0.0577	0.8204	0.7796	0.0000	0.8652	0.9151	0.7954	0.7012
40	0.7765	2.2573	0.0376	0.8458	0.9094	0.0000	0.8484	0.9010	0.9695	0.7302
41	2.8119	5.8140	0.7355	0.8495	8.3209	0.0000	0.8459	0.0940	0.9979	0.3836
42	1.0716	2.8964	0.1082	0.7024	1.3326	0.0000	0.9434	0.8549	0.9903	0.7624
43	2.6002	5.4457	0.6318	0.8919	5.9605	0.0000	0.8178	0.3510	0.9991	0.5570
44	2.5591	5.3759	0.6149	0.8997	5.4959	0.0000	0.8126	0.4016	0.9996	0.5815
45	2.5999	5.4457	0.6316	0.8919	5.9597	0.0000	0.8178	0.3511	0.9978	0.5571
46	2.5865	5.4225	0.6262	0.8945	5.8056	0.0000	0.8161	0.3679	0.9994	0.5647
47	2.8491	5.8696	0.7324	0.8474	8.7948	0.0000	0.8473	0.0424	0.9992	0.3214
48	2.8836	5.9284	0.7464	0.8415	9.1843	0.0000	0.8512	0	0.9998	0.2500
49	2.8154	5.8127	0.7187	0.8531	8.4155	0.0000	0.8435	0.0837	0.9996	0.3727
50	1.1377	3.0133	0.1313	1.1651	1.5663	0.0000	0.6367	0.8295	0.9987	0.6684
51	1.1283	2.9938	0.1283	1.1638	1.5318	0.0000	0.6376	0.8332	0.9981	0.6701
52	0.9481	2.6085	0.0836	0.7911	1.0308	0.0000	0.8846	0.8878	0.8309	0.7170
53	1.1189	3.0017	0.1125	0.6624	1.3843	0.0000	0.9699	0.8493	0.9530	0.7688
54	0.9025	2.5198	0.0742	0.8164	0.9478	0.0000	0.8679	0.8968	0.7964	0.7027
55	2.4276	5.1597	0.5865	0.9186	3.7335	0.0000	0.8001	0.5935	0.9980	0.6510
56	2.4283	5.1622	0.5871	0.9183	3.7419	0.0000	0.8003	0.5926	0.9978	0.6510
57	2.2496	4.1202	0.4999	1.0340	0.6003	0.0000	0.7236	0.9346	0.0309	0.3042
58	2.2216	4.1324	0.4669	1.0361	0.6383	0.0000	0.7222	0.9305	0.3172	0.5134
59	2.1963	4.0062	0.4706	1.0542	0.5171	0.0000	0.7102	0.9437	0.3008	0.5037

60	0.9891	2.7048	0.0890	0.7476	1.1008	0.0000	0.9135	0.8801	0.8701	0.7221
61	1.8617	3.5170	0.3062	1.1714	0.2622	0.0000	0.6325	0.9715	1.0000	0.7387
62	2.1084	3.6950	0.3720	1.1237	0.1190	0.0000	0.6642	0.9870	0.8154	0.6667
63	2.0560	3.7434	0.3687	1.1158	0.2870	0.0000	0.6694	0.9687	0.9934	0.7417
64	2.1526	3.7690	0.3801	1.1099	0.2028	0.0000	0.6733	0.9779	0.8224	0.6710
65	2.8810	5.9245	0.7456	0.8419	9.1544	0.0000	0.8510	0.0033	0.9983	0.2564
66	1.1077	2.9923	0.1079	0.6598	1.8702	0.0000	0.9716	0.7964	0.9636	0.7628
67	2.2335	4.1765	0.4757	1.0288	0.6892	0.0000	0.7271	0.9250	0.2266	0.4863
68	1.0101	2.7511	0.0950	0.7409	1.1677	0.0000	0.9179	0.8729	0.9044	0.7381
69	0.9808	2.6908	0.0862	0.7466	1.0763	0.0000	0.9141	0.8828	0.8543	0.7205
70	1.0051	2.7320	0.0942	0.7488	1.1463	0.0000	0.9127	0.8752	0.8963	0.7332
71	1.9841	3.6324	0.3372	1.1439	0.2323	0.0000	0.6508	0.9747	0.9631	0.7353
72	1.8974	3.4600	0.3225	1.1771	0.1540	0.0000	0.6288	0.9832	0.8977	0.6968
73	1.9725	3.5373	0.3425	1.1581	0.1357	0.0000	0.6413	0.9852	0.8689	0.6855
74	1.8695	3.2592	0.2928	1.2341	0.0024	0.0000	0.5910	0.9997	0.9431	0.7171
75	2.2838	4.2129	0.4985	1.0203	0.6921	0.0000	0.7327	0.9246	0.1355	0.4221
76	2.2460	4.1288	0.4777	1.0347	0.5916	0.0000	0.7232	0.9356	0.3031	0.5086
77	1.8652	3.3597	0.2920	1.2101	0.0424	0.0000	0.6069	0.9954	0.8681	0.6814
78	2.2471	4.1315	0.4873	1.0331	0.6079	0.0000	0.7242	0.9338	0.1809	0.4566
79	2.2057	4.0042	0.4570	1.0558	0.4696	0.0000	0.7092	0.9489	0.5240	0.6093
80	2.2846	4.2232	0.5015	1.0186	0.6850	0.0000	0.7338	0.9254	0.0909	0.3804
81	2.1836	4.0575	0.4591	1.0474	0.6097	0.0000	0.7147	0.9336	0.3121	0.5091
82	2.2019	4.0456	0.4766	1.0473	0.5750	0.0000	0.7148	0.9374	0.1886	0.4619
83	2.2653	4.1647	0.4980	1.0271	0.6281	0.0000	0.7282	0.9316	0.0938	0.3834
84	1.8914	3.3839	0.3319	1.1923	0.0698	0.0000	0.6187	0.9924	0.8031	0.6552
85	1.9499	3.5129	0.3589	1.1584	0.1747	0.0000	0.6411	0.9810	0.9105	0.7040
86	1.8952	3.3899	0.3324	1.1908	0.0708	0.0000	0.6197	0.9923	0.8050	0.6561
87	1.9218	3.4438	0.3401	1.1771	0.1041	0.0000	0.6288	0.9887	0.8336	0.6691
88	1.9829	3.6069	0.3759	1.1358	0.2703	0.0000	0.6561	0.9706	0.9445	0.7242
89	1.9101	3.4231	0.3368	1.1822	0.0944	0.0000	0.6254	0.9897	0.8255	0.6652
90	1.8574	3.3199	0.3213	1.2097	0.0573	0.0000	0.6072	0.9938	0.7760	0.6430
91	1.9094	3.4230	0.3381	1.1819	0.0979	0.0000	0.6256	0.9893	0.8269	0.6658
92	2.2508	4.1223	0.5021	1.0337	0.6031	0.0000	0.7238	0.9343	0.0026	0.2550
93	2.2478	4.0979	0.4954	1.0377	0.5627	0.0000	0.7211	0.9387	0.1166	0.4055
94	2.2536	4.1318	0.5021	1.0321	0.6111	0.0000	0.7249	0.9335	0.0073	0.2640
95	2.2537	4.1344	0.5024	1.0317	0.6155	0.0000	0.7252	0.9330	0	0.2500
96	2.2519	4.1240	0.5024	1.0334	0.6033	0.0000	0.7240	0.9343	0.0026	0.2551
97	1.0960	2.9851	0.1003	0.9189	2.8778	0.0000	0.7999	0.6867	0.9993	0.6643
98	1.0960	2.9851	0.1003	0.9189	2.8778	0.0000	0.7999	0.6867	0.9993	0.6643
99	1.0960	2.9851	0.1003	0.9189	2.8778	0.0000	0.7999	0.6867	0.9993	0.6643
100	1.0960	2.9851	0.1003	0.9189	2.8778	0.0000	0.7999	0.6867	0.9993	0.6643

Tab. B.2. Résultats de simulation du décideur flou pour l'obtention des paramètres du contrôleur MOWOA-FOPID.

N°	Ensemble de Pareto					Front de Pareto			Les entrées du décideur			La sortie
	k_p	k_i	k_d	λ	μ	ts	M_p	ess	Nts	NM_p	$Ness$	W
1	6.7796	8.7505	0.6080	1.0065	1.4345	0.5977	0.0076	0.0000	0.0078	0.9961	0.9995	0.2649
2	6.0993	8.5166	0.4572	1.0045	1.4230	0.2314	0	0.0000	0.9606	1.0000	0.9981	0.8783
3	6.1190	8.5275	0.4606	1.0042	1.4228	0.2304	0	0.0000	0.9632	1.0000	0.9869	0.8624
4	6.0929	8.5026	0.4583	1.0050	1.4172	0.2272	0.5008	0.0000	0.9715	0.7405	0.9860	0.7561

5	6.2066	8.6029	0.4672	1.0065	1.4171	0.2219	0.6757	0.0001	0.9854	0.6499	0.9402	0.7210
6	6.1638	8.5549	0.4664	0.9996	1.4170	0.2226	0.6453	0.0003	0.9835	0.6656	0.7094	0.6260
7	6.1147	8.4943	0.4660	0.9912	1.4201	0.2264	0.1763	0.0006	0.9736	0.9087	0.4142	0.6229
8	6.1005	8.5180	0.4572	1.0046	1.4223	0.2307	0.0763	0.0000	0.9624	0.9605	0.9995	0.8256
9	6.0928	8.5109	0.4563	1.0044	1.4209	0.2298	0.2383	0.0000	0.9646	0.8765	0.9953	0.7887
10	6.1494	8.5344	0.4676	0.9990	1.4105	0.2193	1.2066	0.0003	0.9921	0.3748	0.6889	0.5254
11	6.2336	8.6507	0.4685	1.0118	1.4118	0.2180	1.2680	0.0002	0.9954	0.3430	0.7678	0.5381
12	6.0788	8.5015	0.4576	1.0045	1.4170	0.2277	0.4961	0.0000	0.9703	0.7429	0.9996	0.7557
13	6.0893	8.5024	0.4582	1.0045	1.4169	0.2271	0.5314	0.0000	0.9718	0.7247	0.9987	0.7531
14	6.0831	8.4906	0.4583	1.0041	1.4154	0.2263	0.6534	0.0000	0.9737	0.6615	0.9853	0.7440
15	6.0977	8.5111	0.4586	1.0052	1.4183	0.2278	0.3986	0.0000	0.9699	0.7935	0.9793	0.7673
16	6.1030	8.5185	0.4585	1.0065	1.4195	0.2286	0.2835	0.0001	0.9679	0.8531	0.9364	0.7563
17	6.4706	8.6394	0.5410	1.0056	1.4266	0.5739	0	0.0000	0.0697	1.0000	0.9989	0.3545
18	6.8154	8.7633	0.6158	1.0066	1.4354	0.6007	0.0227	0.0000	0	0.9883	1.0000	0.2500
19	6.1065	8.4839	0.4671	0.9894	1.4185	0.2254	0.2684	0.0006	0.9761	0.8609	0.3527	0.5688
20	6.1415	8.4808	0.4663	0.9915	1.4056	0.2166	1.8731	0.0006	0.9990	0.0295	0.4216	0.2705
21	6.1500	8.5145	0.4672	0.9958	1.4068	0.2172	1.6800	0.0004	0.9976	0.1296	0.5768	0.3851
22	6.1038	8.5537	0.4610	1.0035	1.4202	0.2288	0.1526	0.0000	0.9674	0.9209	0.9674	0.8106
23	6.0717	8.5315	0.4581	1.0032	1.4201	0.2303	0.1428	0.0000	0.9636	0.9260	0.9588	0.8033
24	6.1881	8.5744	0.4660	1.0030	1.4126	0.2196	1.1740	0.0001	0.9912	0.3917	0.9453	0.6049
25	6.1804	8.5809	0.4656	1.0045	1.4157	0.2219	0.7947	0.0000	0.9852	0.5883	0.9960	0.7438
26	6.1720	8.6004	0.4653	1.0048	1.4074	0.2177	1.6826	0.0000	0.9962	0.1282	0.9917	0.4118
27	6.1436	8.6124	0.4658	1.0045	1.4095	0.2198	1.2862	0.0000	0.9908	0.3336	0.9986	0.5579
28	6.2318	8.6464	0.4681	1.0114	1.4104	0.2173	1.4369	0.0002	0.9972	0.2555	0.7803	0.5033
29	6.2211	8.6469	0.4678	1.0109	1.4118	0.2184	1.2491	0.0002	0.9943	0.3528	0.7958	0.5511
30	6.0976	8.5042	0.4652	0.9933	1.4195	0.2270	0.1644	0.0005	0.9720	0.9148	0.4936	0.6909
31	6.1845	8.6089	0.4663	1.0055	1.4052	0.2163	1.9301	0.0000	1.0000	0	0.9689	0.2500
32	6.1706	8.5904	0.4669	1.0034	1.4125	0.2203	1.0447	0.0000	0.9895	0.4587	0.9615	0.6803
33	6.2077	8.5986	0.4674	1.0056	1.4095	0.2174	1.5136	0.0000	0.9970	0.2158	0.9691	0.4771
34	6.1743	8.5511	0.4683	0.9994	1.4142	0.2204	0.9024	0.0003	0.9893	0.5325	0.7013	0.6065
35	6.1889	8.5834	0.4707	1.0047	1.4197	0.5042	0.1290	0.0000	0.2510	0.9331	1.0000	0.5006
36	6.1614	8.5366	0.4676	0.9998	1.4144	0.2211	0.8321	0.0003	0.9873	0.5689	0.7146	0.6146
37	6.1473	8.5330	0.4675	0.9989	1.4102	0.2192	1.2306	0.0003	0.9923	0.3624	0.6880	0.5196
38	6.1762	8.5711	0.4651	1.0035	1.4154	0.2219	0.8401	0.0000	0.9854	0.5647	0.9625	0.7269
39	6.1851	8.5873	0.4661	1.0053	1.4168	0.2225	0.6641	0.0000	0.9837	0.6559	0.9788	0.7468
40	6.1817	8.5828	0.4659	1.0048	1.4125	0.2200	1.1265	0.0000	0.9902	0.4164	0.9946	0.6301
41	6.1823	8.5821	0.4658	1.0047	1.4164	0.2223	0.7156	0.0000	0.9842	0.6293	0.9986	0.7473
42	6.1778	8.5768	0.4656	1.0041	1.4155	0.2219	0.8058	0.0000	0.9853	0.5825	0.9827	0.7414
43	6.1984	8.6019	0.4670	1.0058	1.4097	0.2179	1.4616	0.0000	0.9958	0.2427	0.9615	0.4951
44	6.2273	8.6457	0.4679	1.0111	1.4100	0.2173	1.4717	0.0002	0.9973	0.2375	0.7896	0.4925
45	6.1906	8.6061	0.4660	1.0061	1.4058	0.2164	1.9007	0.0000	0.9997	0.0152	0.9500	0.2785
46	6.1987	8.6197	0.4668	1.0073	1.4130	0.2197	1.0974	0.0001	0.9910	0.4314	0.9118	0.6365
47	6.2059	8.6407	0.4676	1.0097	1.4132	0.2197	1.0430	0.0002	0.9910	0.4596	0.8337	0.6267
48	6.1433	8.4837	0.4664	0.9918	1.4059	0.2167	1.8389	0.0005	0.9987	0.0472	0.4342	0.2816
49	6.1619	8.5120	0.4686	0.9957	1.4074	0.2170	1.5995	0.0004	0.9982	0.1713	0.5706	0.3960
50	6.1571	8.5043	0.4677	0.9946	1.4071	0.2169	1.6735	0.0005	0.9982	0.1329	0.5346	0.3556
51	6.1682	8.5150	0.4690	0.9954	1.4093	0.2176	1.4152	0.0004	0.9965	0.2667	0.5589	0.4229
52	6.1838	8.5858	0.4660	1.0052	1.4126	0.2200	1.1201	0.0000	0.9902	0.4196	0.9814	0.6335
53	6.2249	8.6371	0.4654	1.0138	1.4183	0.2225	0.6373	0.0003	0.9838	0.6698	0.7044	0.6249
54	6.0773	8.4336	0.4664	0.9818	1.4209	0.2280	0	0.0009	0.9693	1.0000	0.0701	0.3554
55	6.1396	8.5247	0.4662	0.9989	1.4052	0.2171	1.8093	0.0003	0.9978	0.0626	0.6880	0.3482
56	6.1426	8.5470	0.4657	0.9994	1.4131	0.2211	0.9914	0.0003	0.9875	0.4864	0.7069	0.5974

57	6.1832	8.5835	0.4659	1.0049	1.4166	0.2224	0.6917	0.0000	0.9839	0.6416	0.9920	0.7486
58	6.0940	8.4607	0.4656	0.9862	1.4208	0.2275	0.0791	0.0007	0.9708	0.9590	0.2334	0.4890
59	6.1605	8.4983	0.4685	0.9930	1.4073	0.2167	1.6498	0.0005	0.9987	0.1452	0.4750	0.3315
60	6.1716	8.5094	0.4692	0.9944	1.4087	0.2171	1.4983	0.0005	0.9979	0.2237	0.5235	0.3828
61	6.1757	8.5322	0.4692	0.9977	1.4126	0.2192	1.0503	0.0003	0.9922	0.4558	0.6399	0.5488
62	6.1675	8.5066	0.4691	0.9938	1.4089	0.2173	1.4664	0.0005	0.9973	0.2402	0.5050	0.3750
63	6.1768	8.5289	0.4696	0.9970	1.4116	0.2186	1.1525	0.0004	0.9940	0.4029	0.6184	0.5100
64	6.1766	8.5282	0.4696	0.9970	1.4115	0.2185	1.1644	0.0004	0.9941	0.3967	0.6149	0.5054
65	6.1772	8.5295	0.4697	0.9971	1.4117	0.2186	1.1411	0.0004	0.9938	0.4088	0.6212	0.5142
66	6.1684	8.5173	0.4690	0.9957	1.4097	0.2178	1.3660	0.0004	0.9959	0.2922	0.5713	0.4399
67	6.0685	8.4219	0.4658	0.9804	1.4203	0.2278	0.0636	0.0010	0.9700	0.9670	0.0181	0.2834
68	6.4705	8.6393	0.5410	1.0056	1.4266	0.5739	0	0.0000	0.0697	1.0000	0.9989	0.3545
69	6.0978	8.4720	0.4664	0.9881	1.4162	0.2240	0.5237	0.0007	0.9798	0.7287	0.3032	0.5104
70	6.0960	8.4628	0.4657	0.9864	1.4218	0.2283	0	0.0007	0.9687	1.0000	0.2398	0.4932
71	6.0922	8.4573	0.4654	0.9857	1.4207	0.2274	0.0973	0.0008	0.9709	0.9496	0.2153	0.4769
72	6.1531	8.5435	0.4670	0.9979	1.4191	0.2244	0.3503	0.0003	0.9787	0.8185	0.6527	0.6662
73	6.1721	8.5741	0.4656	1.0035	1.4155	0.2221	0.7828	0.0000	0.9848	0.5944	0.9631	0.7294
74	6.1793	8.5851	0.4652	1.0054	1.4145	0.2213	0.9277	0.0000	0.9868	0.5193	0.9747	0.7326
75	6.1559	8.5471	0.4670	0.9985	1.4191	0.2244	0.3576	0.0003	0.9789	0.8147	0.6707	0.6675
76	6.1517	8.5415	0.4669	0.9977	1.4187	0.2242	0.3946	0.0003	0.9794	0.7956	0.6444	0.6558
77	6.1765	8.5808	0.4653	1.0048	1.4146	0.2215	0.9018	0.0000	0.9864	0.5327	0.9946	0.7411
78	6.1000	8.4748	0.4664	0.9885	1.4164	0.2241	0.5111	0.0007	0.9796	0.7352	0.3184	0.5180
79	6.0781	8.4968	0.4572	1.0031	1.4164	0.2271	0.6032	0.0000	0.9718	0.6875	0.9527	0.7335
80	6.0827	8.5020	0.4587	1.0059	1.4174	0.2280	0.3885	0.0000	0.9693	0.7987	0.9553	0.7568
81	6.0908	8.5259	0.4577	1.0091	1.4205	0.2304	0.1178	0.0001	0.9633	0.9390	0.8497	0.7574
82	6.0946	8.4695	0.4659	0.9882	1.4159	0.2240	0.5631	0.0007	0.9799	0.7083	0.3093	0.5060
83	6.1726	8.5728	0.4650	1.0041	1.4109	0.2195	1.3097	0.0000	0.9916	0.3214	0.9836	0.5489
84	6.2152	8.6274	0.4662	1.0112	1.4130	0.2194	1.1597	0.0002	0.9917	0.3992	0.7864	0.5714
85	6.0814	8.4393	0.4662	0.9831	1.4208	0.2279	0.0202	0.0009	0.9698	0.9895	0.1183	0.4035
86	6.0855	8.4448	0.4665	0.9838	1.4203	0.2273	0.0700	0.0008	0.9712	0.9638	0.1462	0.4269
87	6.0661	8.4188	0.4656	0.9799	1.4203	0.2279	0.0634	0.0010	0.9698	0.9671	0	0.2500
88	6.1041	8.4800	0.4670	0.9889	1.4183	0.2253	0.2890	0.0006	0.9764	0.8503	0.3317	0.5532
89	6.1051	8.4839	0.4666	0.9890	1.4157	0.2234	0.5962	0.0006	0.9814	0.6911	0.3384	0.5108
90	6.1044	8.4780	0.4668	0.9882	1.4157	0.2234	0.5948	0.0007	0.9815	0.6918	0.3078	0.4999
91	6.1106	8.5048	0.4654	0.9940	1.4187	0.2258	0.2944	0.0005	0.9751	0.8474	0.5167	0.6656
92	6.1091	8.5047	0.4655	0.9943	1.4183	0.2256	0.3203	0.0005	0.9756	0.8340	0.5263	0.6601
93	6.1126	8.5075	0.4656	0.9943	1.4192	0.2262	0.2389	0.0005	0.9742	0.8762	0.5272	0.6789
94	6.1139	8.5094	0.4657	0.9946	1.4195	0.2264	0.2060	0.0005	0.9737	0.8933	0.5353	0.6874
95	6.1142	8.5097	0.4657	0.9946	1.4196	0.2264	0.1948	0.0004	0.9735	0.8991	0.5363	0.6903
96	6.1086	8.5019	0.4653	0.9937	1.4182	0.2255	0.3496	0.0005	0.9759	0.8189	0.5050	0.6531
97	6.1103	8.4993	0.4649	0.9927	1.4166	0.2241	0.5688	0.0005	0.9795	0.7053	0.4686	0.5842
98	6.1257	8.5082	0.4668	0.9929	1.4189	0.2251	0.2995	0.0005	0.9769	0.8448	0.4775	0.6450
99	6.1257	8.5082	0.4668	0.9929	1.4189	0.2251	0.2995	0.0005	0.9769	0.8448	0.4775	0.6450
100	6.1255	8.5075	0.4668	0.9928	1.4187	0.2250	0.3233	0.0005	0.9773	0.8325	0.4729	0.6364

A travers les figures (B.4) et (B.5), nous examinons deux exemples de prise de décision en appliquant les 12 règles d'inférence sur les deux meilleures solutions surlignées en bleu respectivement ans les tableaux (B.1) et (B.2).

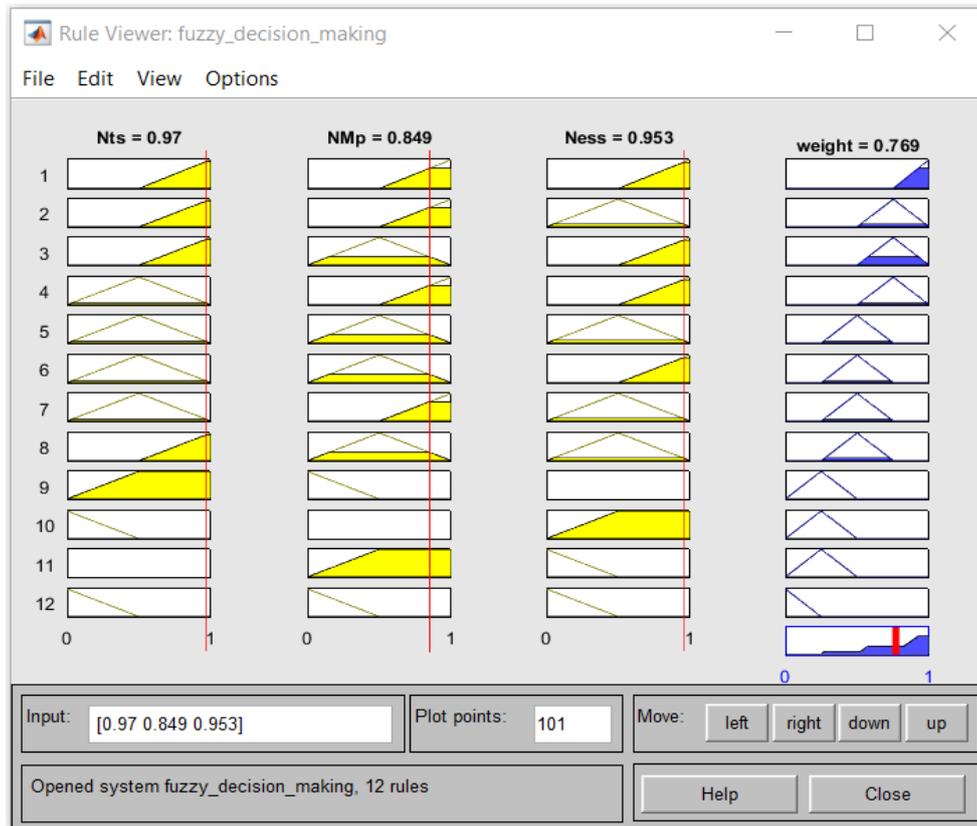


Fig. B.4. Application des règles d'inférence sur la solution du front Pareto N°53 pour le correcteur MOWOA-PID.

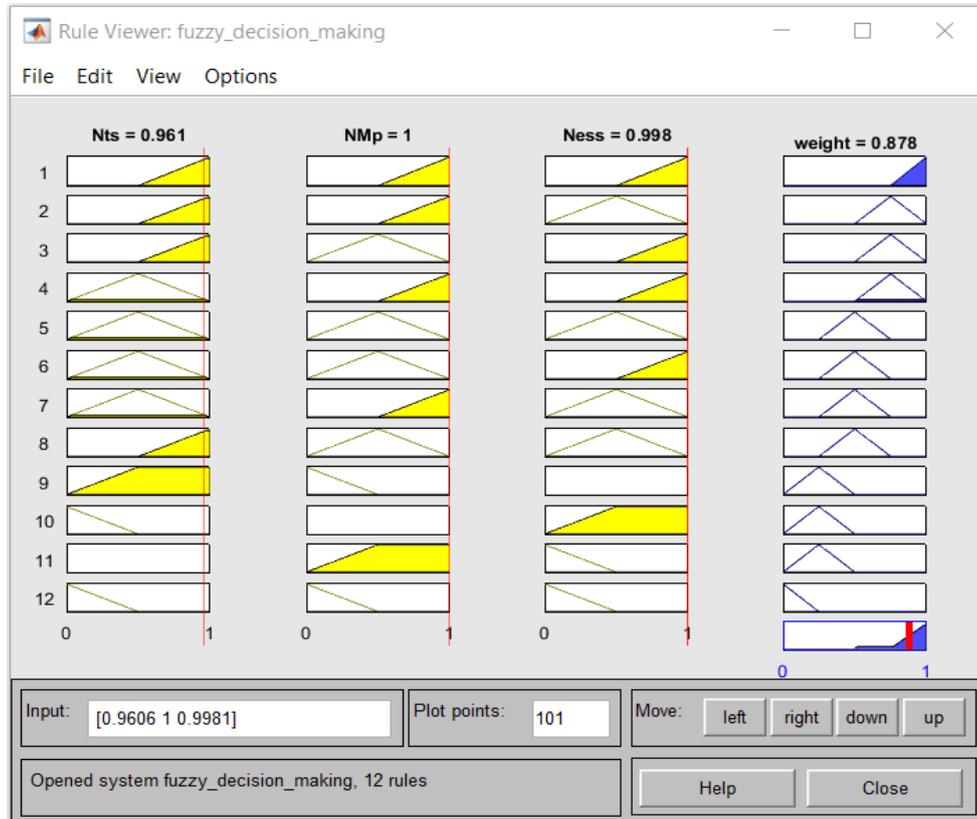


Fig. B.5. Application des règles d'inférence sur la solution du front Pareto N°2 pour le correcteur MOWOA-FOPID.