République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles Et analyse numérique**

Par :

Mlle. Bentaleb Fouzia

Intitulé

Sur un problème d'ordre élevé de type p-Bilaplacien

Dirigé par : Chaoui Abderrezak

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Ellagoune Fateh**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Chaoui Abderrezak**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Frioui Assia**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Remerciement :

En premier lieu et avant tout je tiens à exprimer mes remerciements au bon << Dieu >> qui m'a entouré de sa bienveuillance et m'a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, j'exprime mon profonde gratitude à mon

Encadreur **<< Mr. Chaoui Abderrezak >>** pour avoir accepté de me suivre, et mes plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux et sa sympathie dont il m'a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnée

les bases de la science, je remercie très sincèrement les membres de jury pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail.

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail,

Je dis **Merci.**

Dédicaces :

♥ À mon source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père **<< Hamdani >>**.

♥ À la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, à toi ma mère **<< Saliha >>.**

♥ À mes chers frères **<< Khalil >>** et **<< Hamid>>**, ma sœur **<<Yamina >>.**

♥ À mon frère défunt **<< Amer >>**, paix à son âme.

Que **Dieu** lui pardonne.

♥ Aux personnes qui m'ont toujours encouragé.

Que Dieu vous garde.

Noussaiba

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce manuscrit contient une étude théorique (existence et unicité) d'une équation stationnaire non linéaire de type p-bilaplacien par la théorie des opérateurs monotones.

This manuscript contains a theoretical study (existence and uniqueness) of a nonlinear stationary p-bilaplacian equation by the theory of monotonic operators.

INTRODUCTION

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de l'existence d'une solution faible d'un problème d'ordre élevé de type p-bilaplacien en utilisant la théorie des opérateurs monotones. Une de nos motivations pour étudier ce problème vient de ses utilisations en domaine de l'élasticité, plus précisément, il peut être utilisé dans la modélisation des ondes progressives dans les ponts suspendus. Il y'a aussi une autre application intéressante dans le domaine de traitement des images endommagées si $1 < p^{-1} \leq p^{+} < 2$, et la modélisation mathématique des fluides non Newtonian.
Notre mémoire est organisée comme suit, le premier chapitre contient un rappel d'analyse fonctionnelle tel que les espaces de Sobolev, les opérateurs non linéaires monotones .... Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème d'ordre élevé de type p-bilaplacien on se basant sur la théorie des opérateurs monotones on démontre l'existence d'une solution faible, puis en utilisant la coercivité du problème posé on démontre que cette solution est unique.

CHAPITRE 1

RAPPEL D'ANALYSE FONCTIONNELLE ET ESPACES DE SOBOLEV

1.1 Notions des espaces

Définition 1.1.1
Soit V un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle dual de V noté V' l'espace des formes linéaires continues sur V.

Définition 1.1.2
Soit V un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle bidual de V noté V'' l'espace des formes linéaires continues sur V'. C'est-à-dire,

$$V'' \overset{définition}{=} (V')'.$$

Remarque 1.1.1

1. *V'' est un espace de Banach.*
2. *Soit $(V', \|.\|_*)$ et $(V'', \|.\|_{**})$, alors pour $x \in V''$,*
$$\|x\|_{**} = \sup_{\substack{x' \in V' \\ \|x'\|_* \leq 1}} |\langle x, x' \rangle|.$$
3. *Pour $W = V'$,*

$$x \in W' \Longleftrightarrow x : W \longrightarrow \mathbb{K} \tag{1.1}$$
$$x' \longmapsto x(x') = \langle x, x' \rangle. \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.1
Soit V un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), il existe une application $J \in \mathcal{L}(V, V'')$ avec les propriétés suivantes :

1. *J est injective.*
2. *$\|Jx\|_{**} = \|x\|_V$, $\forall x \in V$. Ce qui permet d'identifie V à sous-espace de V''.*

Définition 1.1.3 (Espace réflexif)
On dit que l'espace vectoriel normé V est réflexif et J une application $J \in \mathcal{L}(V, V'')$ si l'on a :

$$J(V) = V''$$

Autrement dit J est surjective.

Théorème 1.1.1 *voir [1, p7]*
Soit V un espace vectoriel normé, V est réflexif si et seulement si V' est réflexif.

Définition 1.1.4 (Espaces $L^p(\Omega)$)
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \ \textit{mesurable et} \ \int_\Omega |f|^p dx < \infty \ \textit{p.p}\}.$$

On munit l'espace $L^p(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.5 (Espaces $W^{m,p}(\Omega)$)
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\}.$$

où $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions).
On munit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivante ;

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & \textit{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^\infty(\Omega)} & \textit{si } p = +\infty \end{cases}$$

Définition 1.1.6 (Espace $W_0^{m,p}(\Omega)$)
L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.1.7 (Espace dual $W^{-m,q}(\Omega)$)
Soit p, q deux réels vérifient, $1 \leq q < \infty$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et m un entier de $\mathbb{N}^*$. On appelle espace de Sobolev et on note $W^{-m,q}(\Omega)$ le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.1.8
On a des définitions des quelques espaces :

(i) $W^{j,q}(\Omega_k)$, telle que pour $1 \leq k < n$, Ω_k est l'intersection de Ω avec plan de $\mathbb{R}^N$ de dimension k.

(ii) $C_B^j(\Omega)$ est l'espace des fonctions bornées avec des dérivés continues d'ordre supérieur ou égal à j et normé par :

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

(iii) $C^j(\overline{\Omega})$ est le sous espace fermé de $C_B^j(\Omega)$ qui contient les fonctions avec des dérivés bornées et uniformément continues d'ordre supérieur ou égal à j dans Ω, il est normé par la même norme de $C_B^j(\Omega)$.

$$\|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Cet espace est plus petit que $C_B^j(\Omega)$, alors ses éléments sont uniformément continus dans Ω.

(iv) $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ est le sous espace fermé de $C^j(\overline{\Omega})$ qui contient les fonctions qu'elle leurs dérivés d'ordre supérieur ou égal à j satisfaites la condition de Hölder d'exposant λ dans Ω, il est normé par :

$$\|u\|_{C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} = \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

1.2 Convergence faible

Théorème 1.2.1 (Théorème de la convergence dominée) *voir[1, p 18]*
Soit $V \subset \mathbb{R}^N$ *est mesurable et* f_j *est une suite des fonctions mesurables convergent vers une limite ponctuelle dans* V. *Si il existe une fonction* $g \in L^1(V)$ *telle que :* $|f_j(x)| \leq g(x)$ *pour toutes* j *et* $x \in V$, *alors ;*

$$\lim_{j\to\infty} \int_V f_j(x)dx = \int_V \left(\lim_{j\to\infty} f_j(x) \right) dx.$$

Définition 1.2.1 (La convergence faible)
Une suite u_n *converge faiblement dans un espace de Banach* V *vers* u, *si l'on a ;*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u', u_n \rangle = \langle u', u \rangle \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \langle u', u_n - u \rangle = 0, \; \forall u' \in V'.$$

avec V' *l'espace dual de* V.

Notation

1. On note par $u_n \rightharpoonup u$ la convergence faible dans V.
2. On note par $u_n \to u$ la convergence forte dans V (la convergence en norme).

Remarque 1.2.1
Si $u_n \to u$ *fortement* $(\|u_n - u\|_V \to 0) \Rightarrow u_n \rightharpoonup u$ *car :*

$$\forall u' \in V'; \langle u', u_n - u \rangle \leq \|u'\| \|u_n - u\| \to 0.$$

Remarque 1.2.2
La convergence faible n'implique pas la convergence forte. On pourra considérer une suite orthonormée dans un espace de Hilbert de dimension infinie puis monter qu'elle converge faiblement vers 0, *mais que l'on ne peut pas en extraire aucune sous suite fortement convergente.*

1.3 Notions des opérateurs

Définition 1.3.1
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est borné ssi il transforme toute partie bornée en partie bornée, i,e pour tout* $r > 0$*, il existe* $M > 0$ *(*M *dépend on* r*) telle que ;*

$$\|u\| \leq r \Rightarrow \|A(u)\| \leq M, \, \forall u \in V.$$

Définition 1.3.2
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est coercive ssi ;*

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = \infty$$

Définition 1.3.3
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est monotone ssi ;*

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle >\geq 0, \, \forall u_1, u_2 \in V.$$

Définition 1.3.4
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est strictement monotone ssi ;*

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle >> 0, \, \forall u_1, u_2 \in V, \, u_1 \neq u_2.$$

Définition 1.3.5
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est fortement monotone ssi il existe* $k > 0$ *;*

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq k\|u_1 - u_2\|,\ \forall u_1, u_2 \in V,\ u_1 \neq u_2.$$

Définition 1.3.6
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est continu ssi* $u_n \longrightarrow u$ *implique* $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ *pour toutes* $u_n, u \in V$.

Définition 1.3.7
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est fortement continu ssi* $u_n \xrightarrow{faiblement} u$ *implique* $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ *pour toutes* $u_n, u \in V$.

Définition 1.3.8
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est demi continu ssi* $u_n \longrightarrow u$ *implique* $A(u_n) \xrightarrow{faiblement} A(u)$ *pour toutes* $u_n, u \in V$.

Définition 1.3.9
Soit $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que* A *est hémicontinu si la fonction réelle*

$$t \longmapsto \langle A(u + tv), w \rangle$$

est continue de $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour toutes* $u, v, w \in V$.

Définition 1.3.10 (Opérateur de Nemytskii)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine, et soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisante les conditions de Carathéodory, i.e.,

(i) $f(x, .) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$.

(ii) $f(., \xi) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $u \in L^p(\Omega)$. On peut définir une autre fonction par composition :

$$F(u)(x) := f(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

L'opérateur de composition F est appelé l'opérateur de Nemytskii engendré par f.

1.4 Inégalité de Hölder

Théorème 1.4.1 (Inégalité de Hölder)
Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p telles que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

Corollaire 1.4.1 (Inégalité de Hölder avec trois paramètres)
Si $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$ satisfaite $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, et si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$ et :

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

1.5 Les injections de Sobolev

1.5.1 Géométrie des domaines

Propriété du cöne

On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ vérifié la propriété du cöne s'il existe un cöne fini C telle que pour toute $x \in \Omega$ est le vertex d'un cöne fini C_x inclus dans Ω et conforme à C. Notons que n'est pas évident que C_x donné par C en parallèle à une translation mais par mouvement rigide.

Propriété Lipschitzienne locale forte

On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ vérifié la propriété Lipschitzienne locale forte s'il existe deux nombres positifs δ et M, un recouvrement ouvert localement fini U_j de la frontière de Ω et pour tout j, les fonctions avec des valeurs réels f_j de $N-1$ variables vérifiés les conditions suivantes :

(i) Pour tout nombre fini R, toute collection de $R+1$ de l'ensemble U_j a une intersection vide.

(ii) pour toutes pair de points $x, y \in \Omega_\delta$ telle que $|x-y| < \delta$, il existe j telle que :

$$x, y \in V_j \equiv \{x \in U_j ; d(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

(iii) Toute fonction f_j satisfaite la propriété Lipschitzienne avec un constant M, si pour $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1})$ et $\rho = (\rho_1, ..., \rho_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{N-1}$, alors ;

$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M\,|\xi - \rho|.$$

(iv) Pour un système des coordonnés cartésiennes $(\zeta_{j,1}, ..., \zeta_{j,n})$ dans U_j, $\Omega \cap U_j$ est représenté par l'inégalité :

$$\zeta_{j,n} < f_j(\zeta_{j,1}, ..., \zeta_{j,n-1}).$$

Si Ω est borné, l'ensemble le plus compliqué de la condition réduit au plus simple condition que Ω doit avoir une frontière Lipschitzienne localement telle que toute point x dans la frontière de Ω doit avoir un voisinage U_x tel que leurs intersection avec la frontière de Ω doit être le graphe d'une fonction lipschitzienne continue.

1.5.2 Les injections de Sobolev

Définition 1.5.1 (Injection continue)
Soit V, W deux espaces vectoriels normés. On dit que V est continûment injecté dans W, et l'on écrira $V \hookrightarrow W$, si V est un sous-espace vectoriel de W et si l'injection canonique

$$\begin{aligned} j : \quad & V \longrightarrow W \\ & x \longmapsto j(x) = x, \end{aligned}$$

est continue, c'est-à-dire

$$\exists c > 0 : \|x\|_W \leq c \|x\|_V , \ \forall x \in V.$$

Définition 1.5.2 (Injection compact)
Soit V, W deux espaces vectoriels normés. On dit que V est injecté dans W avec injection compacte, et l'on écrira $V \hookrightarrow\hookrightarrow W$, si V est un sous-espace vectoriel de W et si l'injection canonique

$$\begin{aligned} j : \quad & V \longrightarrow W \\ & x \longmapsto j(x) = x, \end{aligned}$$

est compact, c'est-à-dire tout borné dans V est relativement compact dans W.

Théorème 1.5.1 (Les injections de Sobolev)
Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$ et pour $1 \leq k \leq N$, soit Ω_k l'intersection de Ω avec plan de dimension k dans $\mathbb{R}^N$. (si $\Omega_k = \Omega$). Soit $j \geq 0$ et $m \geq 1$ des entiers et soit $1 \leq p < \infty$.

Partie 1 *: Supposant que Ω satisfaite la propriété du cöne.*

1^{ier} *Cas : Si $mp > N$ ou $m = N$ et $p = 1$, alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Aussi, si $1 \leq k \leq N$, alors

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \text{ pour } p \leq q \leq \infty.$$

En particulier,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pour } p \leq q \leq \infty.$$

$2^{\text{ème}}$ *Cas : Si $1 \leq k \leq N$ et $mp = N$, alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \text{ pour } p \leq q < \infty.$$

En particulier,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pour } p \leq q < \infty.$$

$3^{\text{ème}}$ *Cas : Si $mp < N$ et si $N - mp < k \leq N$ ou $p = 1$ et $N - m \leq k \leq N$, alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k), \text{ pour } p \leq q < p* = kp/(N - mp).$$

En particulier,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ pour } p \leq q < p* = kp/(N - mp).$$

Le constant d'injection dépend on N, m, p, q, j, k et la dimension de la cöne C de la propriété du cöne.

Partie 2 *: Supposant que* Ω *satisfaite la propriété lipschitzienne forte, alors l'espace* $C_B^j(\Omega)$ *peut s'être remplacé par l'espace* $C^j(\overline{\Omega})$*, et l'injection peut s'être comme ceci ;*
Si $mp > N > (m-1)p$*, alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \text{ pour } 0 < \lambda \leq m - (N/p),$$

et si $N = (m-1)p$*, alors*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \tag{1.3}$$

pour $0 < \lambda < 1$*. Aussi, si* $N = m - 1$ *et* $p = 1$ *alors* (1.3) *détient pour* $\lambda = 1$*.*

Partie 3 *: Toutes les injectons dans la partie 1 et 2 sont validées dans un domaine arbitraire* Ω *si l'espace* W *subissant l'injection est remplacée par l'espace* W_0 *correspondant.*

Preuve 1.5.1 *voir[1,p 89]*

Théorème 1.5.2 (Les injections compacts de Sobolev)
Soit Ω *un domaine dans* $\mathbb{R}^N$*, soit* Ω_0 *un domaine borné de* Ω*, et soit* Ω_0^k *est l'intersection de* Ω_0 *avec k-dimensionnel plans dans* $\mathbb{R}^N$*. Soit* $j \geq 0$ *et* $m \geq 1$ *des entiers e soit* $1 \leq p < \infty$*.*

Partie 1 *: Si* Ω *satisfaite la propriété du cöne et* $mp \leq N$*, alors les injections suivantes sont compacts ;*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k), \tag{1.4}$$

$$\text{si } 0 < N - mp < k \leq N \text{ et } 1 \leq q < kp/(N - mp)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k), \tag{1.5}$$

si $N = mp$, $1 \leq k \leq N$ *et* $1 \leq q < \infty$.

Partie 2 *: Si* Ω *satisfaite la propriété du cône et* $mp > N$, *alors les injections suivantes sont compacts ;*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_B^j(\Omega_0) \tag{1.6}$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k),. \tag{1.7}$$

si $1 \leq q < \infty$.

Partie 3 *: Si* Ω *satisfaite la propriété lipschitzienne forte, alors les injections suivantes sont compacts ;*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^j(\overline{\Omega_0}), \tag{1.8}$$

si $mp > N$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega_0}), \tag{1.9}$$

si $mp > N \geq (m-1)p$ *et* $0 < \lambda < m - (N/p)$.

Partie 4 *: Si* Ω *est un domaine arbitraire dans* $\mathbb{R}^N$ *alors les injections de* (1.4) *à* (1.9) *sont compacts, ceci implique que* $W^{j+m,p}(\Omega)$ *est remplacé par* $W_0^{j+m,p}(\Omega)$.

Preuve 1.5.2 *voir[1, p 169]*

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE D'UN PROBLÈME P-BILAPLACIEN

2.1 Position du Problème

Dans ce mémoire on est concerné à l'existence et l'unicité de la solution faible d'un problème d'ordre élevé de type p-Bilaplacien de la forme :

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p^2 u + \lambda \ell(x)|u|^{p-2}u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u \in W_0^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

Soit Ω un ensemble borné dans $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodrie (CAR) satisfaite les hypothèses suivantes :

(H1) $f(x,s_1) \leq f(x,s_2)$ pour tout $x \in \Omega$ et $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \geq s_2$.

(H2) $|f(x,s)| \leq f_0(x) + c|s|^{p-1}$ tel qu'il existe une fonction $f_0 \in L^{p'}$, $c > 0$.

Ici on a $\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$ et $N > 1$, $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in L^r$, $\ell \neq 0$ et $r = r(N,p)$ satisfaite les conditions :

(H3)

$$\begin{cases} r > \dfrac{N}{2p} & \text{si } \dfrac{N}{p} > 2 \\ \\ r > p & \text{si } \dfrac{N}{p} = 2 \\ \\ r = 1 & \text{si } \dfrac{N}{p} < 2 \end{cases}$$

Nous assumons que $|\Omega_\ell^+| \neq 0$ telle que $\Omega_\ell^+ = \{x \in \Omega / \ell(x) > 0\}$.

Proposition 2.1.1
Pour tout ensemble borné Ω et $1 < p < \infty$, Δ_p^2 satisfaites les propositions suivantes :

(i) Δ_p^2 est un opérateur hémicontinu de $W_0^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{-2,p'}(\Omega)$.

(ii) Δ_p^2 est un opérateur borné, monotone et coercive.

(iii) $\Delta_p^2 : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,p'}(\Omega)$ est un opérateur bicontinu.

Preuve 2.1.1

(i) *On définit sue l'espace* $W_0^{2,p}(\Omega)$ *la fonction potentielle :*
$$A(u) = \frac{1}{p}\|\Delta u\|_p^p$$
Cette fonction est convexe et de classe C^1 *dans* $W_0^{2,p}(\Omega)$*. De plus ca dérivé est* $A' = \Delta_p^2$*, alors elle est hémicontinue.*

(ii) *Par un calcul simple on trouve* $\|\Delta_p^2 u\|_* = \|\Delta u\|_p^{p-1}$*, telle que* $\|.\|_*$ *est la nome dual associée à* $\|\Delta.\|_p$
Ceci implique que $\|\Delta_p^2\|$ *est un opérateur borné et monotone. La continuité et la coercivité sont évidentes.*

(iii) *On a pour toutes* $u, v \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $\|\Delta u\|_p = \|\Delta v\|_p$ *si* $\Delta_p^2 u = \Delta_p^2 v$ *et* $(W_0^{2,p}(\Omega), \|\Delta.\|_p)$ *est un espace uniformément convexe, ce que complète la preuve.*

2.2 Résultat de l'existence et l'unicité

Dans cette section, on preuve l'existence et l'unicité de la solution faible de l'équation (P) en utilisant le théorème de Browder.

Théorème 2.2.1 (Le Théorème de Browder)
Soit V *un espace réflexif de Banach, et* $A : V \longrightarrow V$ *un opérateur :* ***borné****,* ***demi continue****,* ***coercive*** *et* ***monotone*** *sur* V*. Alors l'équation* $A(u) = f$ *admet aux moins une solution* $u \in V$ *pour tout* $f \in V$*.*
De plus si A *est* ***strictement monotone*** *alors l'équation* $A(u) = f$ *a une solution* ***unique*** $u \in V$ *pour toute* $f \in V$*.*

Définition 2.2.1
On dit que $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ *est une solution faible de l'équation* (P) *si :*

$$\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta\varphi + \lambda \int_\Omega \ell(x)|u|^{p-2}u\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi$$

pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*.*

Théorème 2.2.2
Soit $p \geq 2$*,* $\lambda > 0$ *et* $f(x,u) \in CAR(\Omega \times \mathbb{R})$ *satisfaites (H1), (H2) et (H3). Alors le problème* (P) *admet une unique solution faible.*

Preuve 2.2.1

2.2.1 Existence

Pour toute $\lambda > 0$*, on définit l'opérateur :* $A : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,p'}(\Omega)$ *par :*

$$A = J + \lambda G - F$$

tels que les opérateurs $J : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,p'}(\Omega)$*,*
$G : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,p'}(\Omega)$ *et* $F : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,p'}(\Omega)$ *sont donnés par :*

$$\langle J(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta\varphi$$

$$\langle G(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \ell(x)|u|^{p-2}u\varphi$$

$$\langle F(u), \varphi\rangle = \int_\Omega f(x,u)\varphi$$

Pour toutes $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$*. Alors trouver la solution faible de* (P) *est équivalent à trouver* $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ *qui satisfaite l'équation* $A(u) = 0$*.*

Maintenant, On a les propositions suivantes pour les opérateurs J, G et F ;

(a) *Les opérateurs J, G et F sont bien définis ;*

On utilisant l'inégalité de Hölder on aura :

$$\langle J(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta\varphi$$

$$\begin{aligned}
|\langle J(u), \varphi\rangle| &\leq \int_\Omega |\Delta u|^{p-2}|\Delta u||\Delta\varphi| dx && (2.1)\\
&\leq \int_\Omega |\Delta u|^{p-1}|\Delta\varphi| dx && (2.2)\\
&\leq \left(\int_\Omega |\Delta u|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\Delta\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} && (2.3)\\
&\leq \left(\int_\Omega |\Delta u|^{p}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\Delta\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty && (2.4)
\end{aligned}$$

telle que dans $(2,4)$ *on a :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *ce qui donne* $p - 1 = \frac{p}{p'}$ *donc* $p'(p-1) = p$. *Alors J est bien défini.*

De plus on a

$$\langle G(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \ell(x)|u|^{p-2}u\varphi$$

- 1^{er} ***Cas :*** $\frac{N}{p} > 2$ *et* $r > \frac{N}{2p}$

  Soit $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$. *Par l'inégalité de Hölder on a :*

  $$|\langle G(u), \varphi\rangle| \leq \|\ell\|_r \|u\|_s^{p-1} \|\varphi\|_{p_2}$$

  telle que : $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$ *et s est donné par :*

  $$\frac{p-1}{s} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$$

  Aussi

  $$\frac{p-1}{s} = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{p_2} > 1 - \frac{2p}{N} - \frac{1}{p_2} = \frac{p-1}{p_2}$$

  Le cas suffit de prendre $\max(1, p-1) < s < p_2$, *alors G est bien défini.*

- $2^{\text{ème}}$ ***Cas :*** $\dfrac{N}{p} = 2$ *et* $r > p$.

  Dans ce cas l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ *est injecté dans l'espace* $L^q(\Omega)$*. Pour toute* $q \in [p, +\infty[$*, on a* $q \geq p$ *telle que :*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} = 1$$

  nous obtenons $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} + 1 + \dfrac{1}{p} = 1$ *alors* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}$ *donc* $\dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{p}$.

  Par l'inégalité de Hölder on arrive à :

$$|\langle G(u), \varphi \rangle| \leq \|\ell(x)\|_r \|u\|_p^{p-1} \|\varphi\|_q < \infty$$

  pour toutes $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$ *donc* G *est bien défini.*

- $3^{\text{ème}}$ ***Cas :*** $\dfrac{N}{p} < 2$ *et* $r = 1$.

  Dans ce cas l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ *est injecté dans* $C(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{L}^\infty(\Omega)$*. Alors pour toutes* $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$ *en utilisant l'inégalité de Hölder on aura :*

$$|\langle G(u), \varphi \rangle| \leq \|\ell(x)\|_1 \|u\|_\infty^{p-1} \|\varphi\|_\infty < \infty$$

  alors G *est bien défini.*

D'autre part on a :

$$\langle F(u), \varphi \rangle = \int_\Omega f(x, u)\varphi dx$$

$$|\langle F(u), \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |f(x, u)\varphi| \leq \int_\Omega (f_0(x) + c|u|^{p-1})|\varphi|.$$

Par l'inégalité de Hölder;

$$|\langle F(u),\varphi\rangle| \leq \left(\int_\Omega |f_0(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ c\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

pour toutes $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$.

Alors J, G *et* F *sont bien définis.*

(b) G *est complètement continu, en effet, soit* $(u_n) \subset W_0^{2,p}(\Omega)$ *une suite telle que :* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{2,p}(\Omega)$, *nous devons prouver* $G(u_n) \longrightarrow G(u)$ *fortement dans* $W^{-2,p'}(\Omega)$ *i,e ;*

$$\sup_{\substack{\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)\\ \|\Delta\varphi\|_p\leq 1}} |\int_\Omega \ell(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\varphi dx| \longrightarrow 0, si, n \longrightarrow \infty$$

pour $\dfrac{N}{p} > 2$, $r > \dfrac{N}{2p}$. *Soit* s *telle que* $\max(1, p-1) < s < p_2$,

et $\dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{N}$ *et* $\dfrac{p-1}{s} + \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{r} = 1$.

$$\sup_{\substack{\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)\\ \|\Delta\varphi\|_p\leq 1}} |\int_\Omega \ell(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\varphi dx|$$

$$\leq \sup_{\substack{\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)\\ \|\Delta\varphi\|_p\leq 1}} \|\ell\|_r \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{s}{p-1}} \|\varphi\|_{p_2} \tag{2.5}$$
$$\leq C\|\ell\|_r \||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\|_{\frac{s}{p-1}} \tag{2.6}$$

où C *est la constante de Sobolev. D'autre coté on a l'opérateur de Nemytskii :*
$u \longmapsto |u|^{p-2}u$ *est continue de* $L^s(\Omega)$ *dans* $L^{\frac{s}{p-1}}(\Omega)$ *et* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $W_0^{2,p}(\Omega)$.

Alors on déduire que $u_n \longrightarrow u$ *fortement dans* $L^s(\Omega)$ *car* $s < p_2$. *Alors :*

$\| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \|_{\frac{s}{p-1}} \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow +\infty$.

Si $\dfrac{N}{p} = 2$, $r > p$ *donc ;*

$$\left| \int_\Omega \ell(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\varphi dx \right| \\ \leq \|\ell\|_r \left\| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right\|_p^{p-1} \|\varphi\|_q$$

telle que q *est donné par :* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}$. *Par L'injection de Sobolev, il existe* $c > 0$ *telle que* $\|\varphi\|_q \leq c\|\Delta\varphi\|_p$, $\forall \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$.
Alors ;

$$\sup_{\substack{\varphi \in W_0^{2,p}(\Omega) \\ \|\Delta\varphi\|_p \leq 1}} \left| \int_\Omega \ell(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\varphi dx \right| \\ \leq C\|\ell\|_r \left\| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right\|_p^{p-1}$$

D'après la continuité de $u \longmapsto |u|^{p-1}u$ *de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^{p'}(\Omega)$ *et d'après l'injection compacte de* $W_0^{2,p}(\Omega)$ *dans* $L^p(\Omega)$ *nous aurons le résultat.*
Si $\dfrac{N}{p} < 2$ *et* $r = 1$, $W_0^{2,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *alors nous obtenons ;*

$$\sup_{\substack{\varphi \in W_0^{2,p}(\Omega) \\ \|\Delta\varphi\|_p \leq 1}} \left| \int_\Omega \ell(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)\varphi dx \right| \\ \leq C\|\ell\|_1 \sup_{\overline{\Omega}} \left\| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right\|$$

où C *est la constante donnée par l'injection de* $W_0^{2,p}(\Omega)$ *dans* $C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, *il est clair que ;*

$$\sup_{\overline{\Omega}} \left\| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right\| \longrightarrow 0, \; si \; n \longrightarrow +\infty.$$

alors G est complètement continu, aussi dans ce cas, J et F sont des opérateurs bornés. En effet pour toute u vérifié $\|u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq M$, on a ;

$$\|J(u)\|_{W^{-2,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle J(u), \varphi\rangle| \tag{2.7}$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega |\Delta u|^{p-1} |\Delta\varphi| dx \tag{2.8}$$

D'après l'inégalité de Hölder on obtient ;

$$\|J(u)\|_{W^{-2,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} \left(\int_\Omega |\Delta u|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\Delta\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{p}{p'}}$$

Aussi on obtient ;

$$\|F(u)\|_{W_{-2,p'}(\Omega) = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle F(u), \varphi\rangle|}$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} \left[\left(\int_\Omega |f_0(x)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_\Omega |u|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right] \left(\int_\Omega |\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k\left(\|f_0\|_{L^{p'}(\Omega)} + k\,\|u\|^{\frac{p}{p'}}_{W_0^{2,p}(\Omega)}\right) \leq k\left(\|f_0\|_{L^{p'}(\Omega)} + kM^{\frac{p}{p'}}\right)$$

où k est la constante de l'injection de $W_0^{2,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.

(c) *J et F sont des opérateurs continus, en effet ; si $u_n \longrightarrow u$ dans $W_0^{2,p}(\Omega)$, alors on a ;*

$$\|u_n - u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \longrightarrow 0 \;,\; si \; \|\Delta u_n - \Delta u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient ;

$$\left\| \, |\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n - |\Delta u|^{p-2}\Delta u \, \right\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Alors ;

$$\|J(u_n) - J(u)\|_{W^{-2,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle J(u_n) - J(u), \varphi\rangle|$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} \left(\int_\Omega \left(|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n - |\Delta u|^{p-2}\Delta u \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k \left(\int_\Omega \left(|\Delta u_n|^{p-2}\Delta u_n - |\Delta u|^{p-2}\Delta u \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0, \ si \ n \longrightarrow +\infty.$$

De même, on a ;

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{W^{-2,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle F(u_n) - F(u), \varphi\rangle|$$

$$\leq k \left(\int_\Omega (|f(x,u_n) - f(x,u)|)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0, \ si \ n \longrightarrow +\infty.$$

(d) *On va utiliser le lemme suivant pour prouver la monotonie de A.*

Lemme 2.2.1 *voir[12]*
Soit $p \geq 2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a l'inégalité suivante ;

$$|x_2|^p \geq |x_1|^p + p|x_1|^{p-2}x_1(x_2 - x_1) + \frac{|x_2 - x_1|^p}{2^{p-1} - 1} \tag{2.9}$$

Maintenant,

$$\langle J(u) - J(\varphi), u - \varphi\rangle = \int_\Omega \left[|\Delta u|^{p-2}\Delta u - |\Delta\varphi|^{p-2}\Delta\varphi \right] (\Delta u - \Delta\varphi)$$

$$= \int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u(\Delta u - \Delta\varphi) - \int_\Omega |\Delta\varphi|^{p-2}\Delta\varphi(\Delta u - \Delta\varphi) = I_1 + I_2$$

En utilisant le lemme (2.2.1), *on obtient ;*

$$I_1 + I_2 \geq \frac{2}{p(2^{p-1}-1)} \int_\Omega |\Delta u - \Delta\varphi|^p = c(p)\, \|u-\varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)},$$

alors pour $p \geq 2$,

$$\langle J(u) - J(\varphi), u-\varphi\rangle \geq c(p)\, \|u-\varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)} \tag{2.10}$$

De même, on a ;

$$\langle G(u) - G(\varphi), u-\varphi\rangle = \int_\Omega \ell(x) \left[|u|^{p-2}u - |\varphi|^{p-2}\varphi\right](u-\varphi)$$

$$\geq \frac{2}{p(2^{p-1}-1)} \int_\Omega \ell(x)\, |u-\varphi|^p \geq c(p)\, \|u-\varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)} \geq 0.$$

Alors ;

$$\langle G(u) - G(\varphi), u-\varphi\rangle \geq 0 \tag{2.11}$$

Aussi on a ;

$$\langle F(u) - F(\varphi), u-\varphi\rangle = \int_\Omega [f(x,u) - f(x,\varphi)]\,(u-\varphi)$$

Comme f *est décroissante par rapport au deuxième variable, on a ;*

$$[f(x,u) - f(x,\varphi)]\,(u-\varphi) \leq 0$$

Par conséquent ;

$$\langle F(u) - F(\varphi), u-\varphi\rangle = \int_\Omega [f(x,u) - f(x,\varphi)](u-\varphi) \leq 0 \tag{2.12}$$

Les équations (2.10), (2.11) *et* (2.12) *implique que ;*

$$\langle A(u)-A(\varphi),u-\varphi\rangle \geq c(p)\,\|u-\varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)} \tag{2.13}$$

pour $p \geq 2$.
Alors A est fortement monotone.

Maintenant, pour appliquer le Théorème de Browder, il reste de prouver que A est coercive.

D'après (2.13)*, on a ;*

$$\langle A(u),u\rangle \geq \langle A(0),u\rangle + c(p)\|u-\varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)}.$$

D'autre coté on a ;

$$\langle A(0),u\rangle = \langle J(0),u\rangle + \langle G(0),u\rangle - \langle F(0),u\rangle = -\int_\Omega f(x,0)u$$

$$\geq -\left(\int_\Omega [f_0(x)]^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq -k\,\|f_0\|_{L^{p'}(\Omega)}\,\|u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)},$$

Alors ;

$$\langle A(u),u\rangle \geq c(p)\,\|u\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)} - k\,\|f_0\|_{L^{p'}(\Omega)}\,\|u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$$

donc ;

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}\longrightarrow\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}} = \infty$$

Ce qui implique que A est coercive, en appliquant le théorème de Browder prouvons l'existence de la solution faible de l'équation (P)*.*

2.2.2 Unicité

L'unicité de la solution faible de (P) *est le résultat direct de* (2.13).
Soit $u, \varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$ *deux solutions faibles de* (P), *telle que* $u \neq \varphi$.

D'après (2.13) *on a ;*

$$0 = \langle A(u) - A(\varphi), u - \varphi \rangle \geq c(p) \|u - \varphi\|^p_{W_0^{2,p}(\Omega)} \geq 0.$$

Alors ;

$$\langle A(u) - A(\varphi), u - \varphi \rangle = 0, \; donc \; u = \varphi$$

Donc la solution faible du problème (P) *est unique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Robert A. Adams and John J . F. Fournier ; Sobolov Spaces Second Edition *Departement of Mathematics. The University of British Columbia. Vancouver, Canada.*

[2] A. Afrouzi, S. Magdavi, Z. Naghizadeh ; Existence and Uniqueness of Solution for P Laplacian Diriclet Problem. *ISSN 1794-3889 (print), 1749-3897 (online), International Journal of Nonlinear Science, Vol. 8(2009) No. 3, pp. 274-278, (Received 6 November 2008, accepted 15 july 2009).*

[3] B. Al Hamzah, N. Yebari ; Existence and Uniqueness of Weak Solution for Weighted p- Laplacian Steklov Problem *International Journal of Innovation and Applied Studies, Vol. 11 No. a Apr. 2015, pp .69-76.*

[4] Amal. Arama ; Mémoire de fin d'étude ; intitulé : Sur Quelques Résultat De La Théorie Des Opérateurs Monotones Et Application Aux EDP. *Université Larbi Ben M'Hidi ; Oum El Bouaghi ; Département de Mathématique Et Informatique.*

[5] Haim Brezis ; Functional Analysis, Sobolev Spaces and Parial Differential Equations *Univesitext.*

[6] A. R. El Amrous, S. El Habib, N. Tsouli ; Existence od Solutions for An Eiganvalue Problem with weight. *Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 45, pp. 110. ISSN : 1072-669.*

[7] A. El khalil, S. Kellati A. Touzani ; On the spectrum op the p-biharmonic operator. *2002-Fez conference on Partial Differential Equations Electronic Journal of Differential Equations, Conference 09, 2002, pp 161170.*

[8] E. El-Zahrani, H. Serag ; Existence of Weak Solutions for Nonlinear Elliptic Systems on $\mathbb{R}^n$. *Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2006, No. 69, 1-10, 2006.*

[9] S. A Khafagy ; Existence and Uniqueness of Weak Solution for Weighted p-Laplacian Dirichler Problem. *Vol. 3, 2011, Online ISSN : 1943-023X, Jouranal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems.*

[10] S. A Khafagy ; Existence and Uniquenes of Weak Solution for Quasilinear Elliptic (p, q)-Laplacian System. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics . ISSN 0973-1768 Volume 8, Number 4(2012), pp. 465475.*

[11] El. M. Hssini, M. Massar, M. Talbi and N. Tsouli ; Existence of Solutions for a Fourth Order Problem At Resonance. *Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 32 2 (2014) : 133142.SPM ISSN-2175-1188, ISSN-00378712 in Press.*

[12] P. Lindqvist ; Notes on The p-Laplace equation. *NO-7491 Trondheim, Norway.*

[13] P. Sorin Ilia$_s$; $P - LaplacianàPoidsIndéfini.Vol.LVIII, No.2/2006$.

[14] Wafa. Bouguerne ; Mémoire de fin d'étude ; intitulé : Sur Un Problème Intégro-Différentiel Parabolique Non Linéaire Avec Une Condition Au Limite De Dirichlet Inconnue. *Université 8 Mai 1945, Guelma, Département de Mathématique Et Informatique.*