République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

HACHACHNIA Boutheyna

Intitulé

Etude comparative théorique de deux fonctions noyau pour la programmation linéaire

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr. BADEAOUI Salah**	**Pr**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BOUAFIA Mousaab**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. KARRBOUA**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

REMERCIMENTENTS

Dieu merci pour cette réussite et ce succès, pour le courage et la patience que vous n'avez accordés le long de mon parcours de formation surtout.

Un grand remerciement à mon encadreur ***BOUAFIA Mousaab.*** *Maitre de conférences classe A à l'université -08 mai 1945-Guelma. Pour ses consignes, ses conseils fructueux et sa disposition. Sans sa patience, ce travail n'aurait pas pu voir le jour.*

Je tiens à remercier Pr. ***BADRAOUI SALAH****, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse*

J'adresse mes remerciements à Dr. ***KERBOUA Mourad****, d'avoir accepté d'examiner, évaluer et juger mon travail.*

Veuillez accepter ce travaille, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance.

Dédicace

Je dédie ce travail à…

*A ma chère mère **Moufida***

*A mon cher père **Rabie***

*A mes sœur «**Ikram et Takwa**», A mon seul et mon*

*bras droit «**Lotfi**»*

Qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles,

A tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur savoir de nous l'inculquer sans relâche.

A tous mes amis

A tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon cœur, je dis grand merci

De la part de Boutheyna

Résumé :

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés à l'étude de l'amélioration du comportement de l'algorithme en regardant en particulier la complexité algorithmique via de nouvelles techniques parmi les quelles fonctions noyau. pour cela nous avons donné étude comparative théorique de deux fonctions noyau pour la programmation linéaire (Fonction noyau des barrièr termes logarithmique, Fonction noyau avec des termes de barrière trigonométrique), l'étude comparative théorique prouver que la fonction noyau des barrièr termes logarithmique plus éfficace parapport la fonction noyau avec des termes de barrière trigonométrique

Les mots clés :

Méthode de point intérieur, Programmation linéaire, Fonction noyau.

ملخص:

في هذه المذكرة ، نحن مهتمون بدراسة تحسين سلوك الخوارزمية من خلال النظر بشكل خاص في تعقيد الخوارزمية عبر تقنيات جديدة المعتمدة على دالة النواة. لهذا قدمنا دراسة نظرية مقارنة لدالتي من ودوال النواة للبرمجة الخطية (دالة النواة لشروط الحاجز اللوغاريتمي ، ودالة النواة بمصطلحات الحاجز المثلثي) ، أثبتت الدراسة النظرية المقارنة أن دالة النواة لمصطلحات الحاجز اللوغاريتمي أكثر كفاءة مقارنة بدالة النواة مع شروط الحاجز المثلثي.

الكلمات المفتاحية:

طريقة النقطة الداخلية . البرمجة الخطية . دوال النواة

Summary:

In this thesis, we are interested in the study of the improvement of the behavior of the algorithm by looking in particular at the algorithmic complexity via new techniques among which kernel functions. for this we gave theoretical comparative study of two kernel functions for linear programming (Kernel function of logarithmic barrier terms, Kernel function with trigonometric barrier terms), the theoretical comparative study prove that the kernel function of logarithmic barrier terms more efficient compared kernel function with trigonometric barrier terms.

Keywords:

Interior point method, Linear programming, Kernel function.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous considérons le problème d'optimisation linéaire **LO**, dont la forme primal est donnée par :

$$(PL)\ \min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rang(A) = m, b \in \mathbb{R}^m$, et $c \in \mathbb{R}^n$, et son dual

$$(DL)\ \max\{b^t y : A^t y + s = c, s \geq 0\}.$$

En 1984, Karmarkar [7] proposé une nouvelle méthode en temps polynômial pour résoudre des programmes linéaires. Cette méthode et ses variantes qui ont été développées par la suite qu'on appelle maintenant les **IPMs**. Pour une référence sur le sujet, voir Y. Q. Bai et al[1], et J. Peng et al[9]. Sans perte de généralité, nous supposons que (PL) et (DL) satisfaisent à la condition de point intérieur **IPC,** i.e., il existe (x^0, y^0, s^0) telle que

$$Ax^0 = b, x^0 > 0, A^t y^0 + s^0 = c, s^0 > 0.$$

Il est bien connu que la recherche d'une solution optimale de (PL) et (DL) est équivalente à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b,\ x \geq 0, \\ A^t y + s = c,\ s \geq 0, \\ xs = 0. \end{cases}$$

On résout ce systeme par Les méthodes de trajectoire centrale (**TC**).

Les méthodes de trajectoire centrale (**TC**) ont été introduites et pleinement développées au début des années 90. Elles possèdent de bonnes propriétés théoriques : une complexité polynômiale et une convergence super linéaire. Les algorithmes de trajectoire centrale restreintent les itérés à un voisinage de la trajectoire centrale, ce dernier est une courbe de points strictement réalisables.

Les méthodes primales-duales de points intérieurs **IPMs** rentrent dans le cadre chemin central et sont les méthodes les plus efficaces du point de vue pratiques en particulier pour les problèmes de grande taille. Actuellement les chercheurs, s'intéressent à l'étude de l'amélioration du comportement de l'algorithme en regardant en particulier la complexité algorithmique via de nouvelles techniques parmi les quelles fonctions noyaux. En effet, plusieurs travaux montrent que l'itération théorique liée au court pas de déplacement dans les **IPMs** est meilleure que celle liée à grand pas.

Le mémoire est organisé et divisé en trois chapitres comme suit :
Dans le chapitre 1, on présente les méthodes de trajectoire centrale via une fonction noyau.

Le second chapitre, donne la fonction noyau avec un terme logarithmique de M. BOUAFIA et a l[4], définie comme suit :

$$\psi_{BL}(t) = \frac{t^2 - 1 - \ln t}{2} + \frac{1}{2(q-1)} t^{1-q} - \frac{1}{2(q-1)}, \quad q > 1.$$

Ils ont montré que l'algorithme correspondent converge avec complexité

$$\mathbf{O}\left(qn^{\frac{q+1}{2q}} \ln \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations,}$$

pour les méthodes à long-pas, cette borne est minime si on choisit $q = \frac{1}{2}\ln n$, qui donne les meilleurs bornes obtenues dans la littérature jusqu'à présent défini par $\mathbf{O}\left(\sqrt{n}\ln n \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$. Pour les méthodes petite mise à jour, s'ils ont pris $q = \mathbf{O}(1)$, ils ont obtenu le meilleur savoir itération borne, à savoir $\mathbf{O}\left(\sqrt{n}\ln \frac{n}{\epsilon}\right)$.

Le troisième chapitre, donner la fonction noyau avec un terme trigonométrique de M. BOUAFIA et al [2], définie comme suit :

$$\psi_{BT}(t) = \frac{t^2 - 1}{2} + \frac{4}{\pi p}\left[\tan^p h(t) - 1\right], \quad h(t) = \frac{\pi}{2t+2}, \ p \geq 2.$$

Ils ont montré que l'algorithme correspondent converge avec complexité

$$\mathbf{O}\left(pn^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \ln \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations,}$$

pour les méthodes à long-pas, cette borne est minime si on choisit $p = \frac{\ln n}{2} - 1$, qui donne les meilleurs bornes obtenues dans la littérature jusqu'à présent défini par $\mathbf{O}\left(\sqrt{n}\ln n \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$. Pour les méthodes petite mise à jour, s'ils ont pris $p = \mathbf{O}(1)$, ils ont obtenu le meilleur savoir itération borne, à savoir $\mathbf{O}\left(\sqrt{n}\ln \frac{n}{\epsilon}\right)$.

Enfin,l'objet principal de notre travail est de faire une comparaison théorique entre les deux fonctions de M.BOUAFIA et al [2.4].

Chapitre 1

Méthodes de trajectoire centrale via une fonction noyau

1.1 Notions fondamentales

La programmation mathématique est un domaine vaste et riche dans l'analyse numérique , elle traite plusieure modèles mathématiques et problèmes pratiques importants.

D'une façaon générale ,un programme mathématique est un problème d'optimisation avec contrainte de type :

$$PM = \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

où

$$C = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0, j = 1, ..., p \end{array} \right\}$$

et f, g_i, h_j sont des fonctions données de $\mathbb{R}^n$ver $\mathbb{R}$, f la fonction objectif ,C l'ensemble des solutions réalisables ou admissibles ,‹‹les contraintes ,le domaine ››

1.1.1 La classification des PMs

La classification des **PMs** et son traitement numérique sont établis à partir des propriétés fondamentales des fonctions f, g, h à savoir la covexité,la différentiabilité et la linéarité .

- Parmi les cas particuliers les plus étudiés on note :

∘ La programmation linéaire :(f linéaire,g, h affines).

∘ La programmation convexe :(f, g convexes, h affine,C convexe)

∘ La programmation en nombre entiers (C :ensemble discret :les variables entiers)

1.1.2 Programmation linéaire :

La programation linéaire dans $\mathbb{R}^n$ est constituée de la fammille de programmation qui traite la résolution des problèmes d'optimisation pour les quelles la fonction objectif et toutes les contraintes sont linéaires ,il s'agit des problèmes d'optimisation les plus célèbres ,les plus simples théoriquement et les plus étudiés en recherche opérationnelle,le problème suivant est appelé programme linéaire

$$\begin{cases} \min C^t x \\ Ax = b \\ Dx \geq e \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \begin{cases} ou\ A \in \mathbb{R}^{m*n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^m \\ D \in \ \mathbb{R}^{p*n} \text{ et } C \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On peut montrer que tout programme linéaire peut se ramener à l'une des deux formes suivantes :

1) Forme canonique

$$(PC) = \begin{cases} \min C^t x \\ Ax \geq b \ \ (ou \leq) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2) Forme standard

$$(PS) \begin{cases} \min c^t x \\ sc \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où A est une matrice réelle de type (m, n) supposée de pleine rang (c'est _à_dire ; $\mathrm{rg}(A) = m < n$),b un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Dans toute la suite,On s'intèresse au (PL) sous la forme standard suivant :

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ sc \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le dual du programmme (PL) est un programme linéaire défini par :

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + s = c \\ s \geq 0, s \in \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Dualité de programme linéaire

Soit un programme linéaire(PL) mis sous sa forme standard , son dual (DL),est défini comme suite

$$(DL)\begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

On note par :

- $F_{(PL)} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$, l'ensemble des solutions primales réalisables de (PL).
- Un vecteur $x \in F_{(PL)}$ est appelé solution réalisable de (PL).
- Un vecteur $x^* \in F_{(PL)}$ minimisant la fonction objectif de (PL) s'appelle solution optimale de (PL).
- Un programme linéaire (PL) réalisable est borné si la fonction objectif est bornée sur $F_{(PL)}$.
- $\overset{\circ}{F}_{(PL)} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x > 0\}$, l'ensemble des solutions primales strictement réalisables de (PL).
- $F_{(DL)} = \{y \in \mathbb{R}^m : A^t y + s = c,\ s \geq 0\}$, l'ensemble des solutions duales réalisables de (DL).
- Un vecteur $y^* \in F_{(DL)}$ maximisant la fonction objectif de (DL) s'appelle solution optimale de (DL).
- $\overset{\circ}{F}_{(DL)} = \{y \in \mathbb{R}^m : A^t y + s = c,\ s > 0\}$, l'ensemble des solutions duales strictement réalisables de (DL).
- $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{F}_{(PL)} \times \overset{\circ}{F}_{(DL)}$, l'ensemble des solutions primales-duales strictement réalisables de (PL) et (DL).

Donnons quelques résultats fondamentaux de dualité en programmation linéaire.

Théorème 1.1.1 *[8]"Dualité faible"*
si x et y sont respectivement des solutions réalisables pour (PL) et (DL),alors $c^t x \geq b^t y$

Théorème 1.1.2 *[8]"Dualité forte"*
si $\bar{x}$et $\bar{y}$ sont respectivement des solutions réalisables pour (PL) et (DL),alors $c^t \bar{x} = b^t \bar{y}$ *,alors $\bar{x}$ est une solution optimale de (PL) et $\bar{y}$solution de DL*

Remarque 1.1.1 *On peut transformer problème de maximisation à un problème de minimisation et écrivant :*$\max f = -\min(-f)$

1.2 Générique Primal-dual IPMs pour LO

Nous considérons le problème d'optimisation linéaire **LO**, dont la forme primal est donnée par :

$$(PL)\ \min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rang(A) = m, b \in \mathbb{R}^m$, et $c \in \mathbb{R}^n$, et son dual

$$(DL)\ \max\{b^t y : A^t y + s = c, s \geq 0\}.$$

En 1984, Karmarkar [7] proposé une nouvelle méthode en temps polynômial pour résoudre des programmes linéaires. Cette méthode et ses variantes qui ont été développées par la suite qu'on appelle maintenant les **IPMs**. Pour une référence sur le sujet, voir Y. Q. Bai et al[1], et J. Peng et al[9]. Sans perte de généralité, nous supposons que (PL) et (DL) satisfaissent à la condition de point intérieur **IPC,** i.e., il existe $(x^0,\ y^0,\ s^0)$ telle que

$$Ax^0 = b, x^0 > 0, A^t y^0 + s^0 = c, s^0 > 0. \tag{1.1}$$

Il est bien connu que la recherche d'une solution optimale de (PL) et (DL) est équivalente à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b,\ \ x \geq 0, \\ A^t y + s = c,\ \ s \geq 0, \\ xs = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

L'idée principale de primal-dual **I**P**Ms** est de remplacer la troisième équation (1.2), la condition dite de complémentarité pour (PL) et (DL), par l'équation paramétrée $xs = \mu e$, avec $\mu > 0$ et $e = (1, 1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Ainsi que nous considérons le système

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq 0, \\ A^t y + s = c, s \geq 0, \\ xs = \mu e. \end{cases} \tag{1.3}$$

Assez surprenant, si le **IPC** est satisfaite, alors il existe une solution, pour chaque $\mu > 0$, et cette solution est unique. Il est noté que $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$, et nous appellons $x(\mu)$ le μ-centre de (PL) et $(y(\mu), s(\mu))$ le μ-centre de (DL). Ensemble de μ-centres (Avec μ passant par tous les nombres réels positifs) donne un trajet de homotype, qui est appellée la trajectoire centrale de (PL) et (DL). Si $\mu \to 0$, est puis la limite de la trajectoire centrale existe, et étant donné que les points limites satisfont à la condition de complémentarité, la limite donne des solutions optimales pour (PL) et (DL).

IPMs suivre la trajectoire centrale approximativement. Nous décrivons brièvement l'approche habituelle. Sans perte de généralité, nous supposons que $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$, est connu depuis un certain μ positive. Par exemple, en raison de l'hypothèse ci-dessus, nous pouvons supposer ce pour $\mu = 1$, avec

$x(1) = s(1) = e$. Nous réduisons alors μ à $\mu = (1-\theta)\mu$ pour certains fixe $\theta \in]0,1[$, et on résout le système de Newton suivante :

$$\begin{array}{l} A\Delta x = 0, \\ A^t\Delta y + \Delta s = 0, \\ s\Delta x + x\Delta s = \mu e - xs. \end{array} \tag{1.4}$$

Le système (1.4) admet une solution unique désignée par $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$. Cette direction est dite la direction de Newton classique pour **LO**. Ensuite, μ est à nouveau réduite par le facteur $1-\theta$,et nous appliquons la méthode de Newton ciblant les nouveaux μ-centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que μ est assez petit, jusqu'à ce que disent que $n\mu \leq \epsilon$; à cette étape nous avons trouvé une ϵ-solution des problèmes (PL) et (DL). Le résultat d'un pas Newton avec taille de pas α est notée

$$x_+ = x + \alpha\Delta x, \quad y_+ = y + \alpha\Delta y, \quad s_+ = s + \alpha\Delta s. \tag{1.5}$$

où, les α satisfait de la taille de pas $(0 < \alpha \leq 1)$.

Maintenant, nous introduisons le vecteur réduite v et les directions de recherche réduite d_x et d_s comme suit : $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}, \quad d_x = \frac{v\Delta x}{x}, \quad d_s = \frac{v\Delta s}{s}$.

Système (1.4) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} A\Delta x = 0, \\ A^t\Delta y + \Delta s = 0, \\ s\Delta x + x\Delta s = -\mu v \nabla \mathbf{\Phi}(v). \end{cases} \tag{1.7}$$

qu' équivalent

$$\begin{cases} \overline{A}d_x = 0, \\ \overline{A}^t\Delta y + d_s = 0, \\ d_x + d_s = v^{-1} - v. \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\overline{A} = \frac{1}{\mu}AV^{-1}X, V = diag(v), X = diag(x)$. A noter que la partie droite de la troisième équation (1.8) est égale à le gradient négative de la fonction de barrière logarithmique $\Phi(v)$, i.e., $d_x + d_s = -\nabla\Phi(v)$, alors le système (1.8) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \overline{A}d_x = 0, \\ \overline{A}^t\Delta y + d_s = 0, \\ d_x + d_s = -\nabla \mathbf{\Phi}(v). \end{cases} \tag{1.9}$$

où la fonction de barrière $\Phi(v) :]0,+\infty[^n \to [0,+\infty[$ est définie comme suit :

$$\mathbf{\Phi}(v) = \mathbf{\Phi}(x, \ s; \ \mu) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i), \tag{1.10}$$

où
$$\psi\left(v_i\right)=\frac{v_i^2-1}{2}-\ln v_i. \tag{1.11}$$

Nous utilisons $\mathbf{\Phi}\left(v\right)$ que la fonction de proximité pour mesurer la distance entre le trajectoire central et l'iterate $\mu-$centre de donnée $\mu>0$. Nous définissons également la mesure de proximité basé sur la norme, $\delta(v):]0,+\infty[^n\to[0,+\infty[$, comme suit :
$$\delta(v)=\tfrac{1}{2}\left\|\nabla\mathbf{\Phi}\left(v\right)\right\|=\tfrac{1}{2}\left\|d_x+d_s\right\|. \tag{1.12}$$

Nous appellons $\psi\left(t\right)$ la fonction de noyau de la fonction barrière logarithmique $\Phi(v)$. A noter que la paire (y,s) coincide avec le μ-centre $(y(\mu),s(\mu))$ si et seulement si $v=e$. On peut facilement vérifier que la fonction du noyau $\psi\left(t\right)$ défini par (1.11) est une fonction strictement convexe, qui est définie pour chaque $t\in\mathbb{R}_{++}$ et qui est minimum pour $t=1$, alors que la valeur minimum est égale à 0. Il ressort clairement de la description précédente que la proximité de (x,s) à $(x(\mu),s(\mu))$ est mesuré par la valeur de $\Phi(v)$, avec $\tau>0$ en tant que valeur de seuil. Si $\Phi(v)\leq\tau$, alors nous commençons une nouvelle itération externe en effectuant un μ-mise à jour ; autrement, nous entrons dans une itération interne par le calcul des directions de recherche à l'itération en cours par rapport à la valeur actuelle de μ et nous appliquons (1.5) pour obtenir des nouvelles itérations. Si nécessaire, nous le répétons la procédure jusqu'à ce qu'on trouve des itérations qui sont dans le voisinage de $(x(\mu),s(\mu))$. Ensuite, μ est à nouveau réduite par le facteur $1-\theta$ avec $0<\theta<1$, et nous appliquons la méthode de Newton ciblant les nouveaux μ-centres, et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à ce que μ est suffisamment petit, disent que jusqu'à ce que $n\mu\leq\epsilon$; à ce stade, nous avons trouvé une solution de ϵ-approximative de **LO**. Les paramètres τ, θ et la taille de pas α doivent être choisis de manière à ce que l'algorithme est optimisée dans le sens où le nombre d'itérations exigées par l'algorithme est aussi petit que possible.

Algorithme : Générique Primal-dual **IPMs** pour **LO**

Données :
Une fonction de la proximité $\mathbf{\Phi}(v)$;
Un paramètre de limite $\tau > 0$;
Un paramètre de précision $\epsilon > 0$;
Un paramètre de mise à jour de la barrière fixe $\theta, 0 < \theta < 1$;
début :
Initialisation : soit (x^0, y^0, s^0) vérifie la **IPC** :
$k = 0$; $\mu^0 = 1$; $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}}$;
Tant que : $n\mu^k > \epsilon$ **faire :**
début (itération externe)
$\mu^{k+1} = (1-\theta)\,\mu^k$;
Tant que : $\mathbf{\Phi}(v) > \tau$ **faire :**
début (itération interne)
résoudre le système (1.7) pour obtenir $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$;
Calculer le pas de déplacement α ; et poser
$x = x + \alpha\Delta x$;
$y = y + \alpha\Delta y$;
$s = s + \alpha\Delta s$;
$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$;
fin (itération interne)
fin (itération externe)
fin.

1.3 Fonction noyau et propriétés

Définition 1.3.1 *On appelle $\psi :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ la fonction noyau si ψ est deux fois différentiable et vérifie les conditions suivantes :*
- $\psi'(1) = \psi(1) = 0$,
- $\psi''(t) > 0$, $\forall t > 0$,
- $\lim\limits_{t\to 0^+} \psi(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} \psi(t) = +\infty$.

Donc $\psi(t)$ et strictement convexe et minimale en 1 avec $\psi(1) = 0$, et implique que $\psi(t)$ s'écrit comme suit

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\tau) d\tau d\xi,$$

et la dernière condition indique que $\psi(t)$ est une fonction barrière.

Lemme 1.3.1 *[3]Soit $\psi(t)$ fonction du noyau alors :*

1- $t\psi'(t) \geq \psi(t), \ \ \forall t \geq 1.$
2- Si $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, *tellque* $t_1 < 1 < t_2$ *alors :*

$$\begin{aligned} \psi'(t_1) &< 0, \ \psi'(t_2) > 0. \\ \psi(\beta t_1) &< \psi(\beta t_2), \ \forall \beta > 1. \end{aligned}$$

1.3.1 Qualification de la fonction noyau

Lemme 1.3.2 *[3]Si* $\psi(t)$ *satisfait les propriétés suivantes :*

$$t\psi''(t) + \psi'(t) > 0, \forall t < 1, \tag{1.a}$$

$$t\psi''(t) - \psi'(t) > 0, \forall t > 1, \tag{1.b}$$

$$\psi'''(t) < 0, \forall t > 0, \tag{1.c}$$

$$2\left[\psi''(t)\right]^2 - \psi'(t)\psi'''(t) > 0, \forall t < 1, \tag{1.d}$$

$$\psi''(t)\psi'(\beta t) - \beta\psi'(t)\psi''(\beta t) > 0, \forall t > 1, \ \forall \beta > 1. \tag{1.e}$$

alors $\psi(t)$ *est une fonction noyau qualifiée*

1.3.2 Propriétés et relation entre les conditions de qualifications

Les trois lemmes prochaines font clairement que les conditions $(1.a)$, $(1.b)$ et $(1.c)$ admettre une belle interprétation.

Lemme 1.3.3 *([9]) Soit* $\psi(t)$ *une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\psi(\sqrt{t_1 t_2}) \leq \dfrac{(\psi(t_1) + \psi(t_2))}{2}$, pour tous t_1, $t_2 > 0$.

(ii) $\psi(e^{\xi})$ est convexe.

(iii) $t\psi''(t) + \psi'(t) \geq 0$, $t > 0$.

Lemme 1.3.4 *[3]Soit* $\psi(t)$ *une fonction deux fois différentiable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\psi(\sqrt{\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{2}}) \leq \dfrac{(\psi(\zeta_1) + \psi(\zeta_2))}{2}$, ζ_1, $\zeta_2 > 0$.

(ii) $\psi(\sqrt{t})$ est convexe, $t > 0$.

(iii) $t\psi''(t) - \psi'(t) > 0$, $t > 0$.

Lemme 1.3.5 *([1]) Si $\psi(t)$ vérifie* (1.b) *et* (1.c) *du lemme* ***1.3.2****, alors $\psi(t)$ vérifie* (1.e) *:*

$$\psi''(t)\psi'(\beta t) - \beta\psi'(t)\psi''(\beta t) > 0, \forall t > 1,\ \forall \beta > 1.$$

Lemme 1.3.6 *[3]Soit $\psi(t)$ satisfait* (1.c) *alors :*

1- nous distinguons les deux cas suivantes :

*cas **1** : Pour tout $t < 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\psi(t) &< \frac{\psi'(t)}{2}(t-1).\\ \psi''(t)(t-1) &< \psi'(t).\\ \frac{\psi''(1)}{2}(t-1)^2 &< \psi(t) \leq \frac{\psi''(t)}{2}(t-1)^2.\end{aligned}$$

*cas **2** : Pour tout $t > 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\psi'(t)}{2}(t-1) &< \psi(t).\\ \psi''(t)(t-1) &< \psi'(t).\\ \frac{\psi''(t)}{2}(t-1)^2 &< \psi(t) < \frac{\psi''(1)}{2}(t-1)^2.\end{aligned}$$

2- Si $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, tellque $t_1 < 1 < t_2$ alors :

$$\psi'(t_2) < -\psi'(t_1).$$

1.3.3 Borne supérieure de $\mathbf{\Phi}(v)$ pour chaque itération externe

Au début de chaque itération extérieure de l'algorithme, juste avant la mise à jour paramètre μ avec le facteur $(1-\theta)$, on a $\mathbf{\Phi}(v) < \tau$. Depuis le facteur μ est mis à jour $\mu^+ = (1-\theta)\mu$, avec $0 < \theta < 1$, le vecteur v est mis à jour à $v^+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$, qui conduit en général à une augmentation de la valeur de $\mathbf{\Phi}(v)$, Puis, au cours des itérations subséquentes intérieures, $\mathbf{\Phi}(v)$ diminue jusqu'à ce qu'il passe à nouveau le seuil τ. Au cours de l'algorithme des plus grandes valeurs de $\mathbf{\Phi}(v)$ se produire juste après les mises à jour de μ. Voilà pourquoi nous avons besoin pour obtenir une estimation pour l'effet d'une valeurs de μ dans la valeur de $\mathbf{\Phi}(v)$.

Il deviendra clair que dans l'analyse de l'algorithme certaines fonctions inverses en rapport avec les fonctions du noyau jacentes et sa dérivée première joue un rôle crucial. Nous introduisons ces fonctions inverses ici.

$\varrho : [0, \infty[\to [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi(t)$.

$\rho : [0, \infty[\to]0, 1]$ la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi'(t)$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 *[3]Pour tout vecteur positif v et toute $\beta > 1$, on a :*

$$\mathbf{\Phi}(\beta v) \leq n\psi\left(\beta\varrho\left(\frac{\mathbf{\Phi}(v)}{n}\right)\right).$$

En conséquence de Théorème **1.3.1** on a que si $\mathbf{\Phi}(v) \leq \tau$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$ alors, la borne supérieure pour la valeur $\mathbf{\Phi}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\theta}}\right)$, la valeur de $\mathbf{\Phi}(v)$ après la μ-mise à jour est une égalité

$$L_\psi(n,\theta,\tau) = n\psi\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}}\right),$$

car $\varrho(s)$ croisante donc

$$\mathbf{\Phi}(v) \leq \tau \Leftrightarrow \varrho\left(\frac{\mathbf{\Phi}(v)}{n}\right) \leq \varrho\left(\frac{\tau}{n}\right).$$

Corollaire 1.3.1 *[3]Pour tout vecteur positif v, si et $\mathbf{\Phi}(v) \leq \tau$ et $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} > 1$, on a :*

$$L_\psi(n,\theta,\tau) \leq (\mathbf{\Phi})_0,$$
$$(\mathbf{\Phi})_0 = \frac{n}{2}\psi''(1)\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2.$$

1.3.4 Analyse décroissance de la fonction barrière de proximité $\mathbf{\Phi}$

Dans cette sous section, on va calculer le pas de déplacement et on prouve la décroissance de la fonction barrière de proximité $\mathbf{\Phi}$ à chaque itération intérieur et on donne les résultats de complexité de l'algorithme.

Pour μ fixé, si on prend α le pas de déplacement, alors la nouvelle itération est donnée par

$$x^+ = x + \alpha\Delta x,\ s^+ = s + \alpha\Delta s,\ y^+ = y + \alpha\Delta y.$$

On utilise (1.6) on obtient :

$$x^+ = x(e + \alpha\frac{\Delta x}{x}) = x(e + \alpha\frac{d_x}{v}) = \frac{x}{v}(v + \alpha d_x)$$

et

$$s^+ = s(e + \alpha\frac{\Delta s}{s}) = s(e + \alpha\frac{d_s}{v}) = \frac{s}{v}(v + \alpha d_s),$$

on a

$$\begin{aligned} v_+ &= \sqrt{\frac{x^+s^+}{\mu}} \\ &= \sqrt{(v + \alpha d_x)(v + \alpha d_s)}, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha > 0$ on pose

$$f(\alpha) = \mathbf{\Phi}(v_+) - \mathbf{\Phi}(v).$$

Donc $f(\alpha)$ est la différence de la proximité entre la nouvelle itération et l'ancienne itération, pour μ fixé. D'après la condition $(1.a)$ (lemme **1.3.3** (i)), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(v_+) &= \mathbf{\Phi}(\sqrt{(v+\alpha d_x)(v+\alpha d_s)}) \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathbf{\Phi}(v+\alpha d_x) + \mathbf{\Phi}(v+\alpha d_s)), \end{aligned}$$

d'où on a

$$f(\alpha) \leq f_1(\alpha),$$

telle que :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathbf{\Phi}(v+\alpha d_x) + \mathbf{\Phi}(v+\alpha d_s)) - \mathbf{\Phi}(v), \tag{1.13}$$

avec

$$f(0) = f_1(0) = 0,$$

la dérivée de $f_1(\alpha)$ est :

$$f_1'(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\psi'(v_i + \alpha[d_x]_i)[d_x]_i + \psi'(v_i + \alpha[d_s]_i)[d_s]_i),$$

où $[d_x]_i$ et $[d_s]_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante des vecteurs d_x et d_s respectivement. On utilise (1.12) on obtient :

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{\Phi}(v)^t(d_x + d_s) \\ &= -\frac{1}{2}\nabla\mathbf{\Phi}(v)^t\nabla\mathbf{\Phi}(v) \\ &= -2(\delta(v))^2. \end{aligned}$$

La dérivée de $f_1'(\alpha)$ est

$$f_1''(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\psi''(v_i + \alpha[d_x]_i)[d_x]_i^2 + \psi''(v_i + \alpha[d_s]_i)[d_s]_i^2), \tag{1.14}$$

d'où $f_1''(\alpha) > 0$, si d_x, ou $d_s \neq 0$, alors dans ce cas $f_1(\alpha)$ est strictement convexe en α.

On note par $\delta = \delta(v)$, $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(v)$ et $v_{\min} = \min\limits_i(v_i)$.

Lemme 1.3.7 *([1]) Soit* $f_1(\alpha)$ *définie dans* (1.13) *et* δ *définie dans* (1.12), *alors on a :*

$$f_1''(\alpha) \leq 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta).$$

Lemme 1.3.8 *([1]) Si le pas de déplacement α vérifie l'inégalité suivante*

$$-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(v_{\min}) \leq 2\delta, \tag{1.15}$$

alors :

$$f_1'(\alpha) \leq 0.$$

Lemme 1.3.9 *([1]), Soit $\rho : [0, \infty[\rightarrow]0, 1]$ la fonction inverse de $-\frac{1}{2}\psi'(t)$ pour tout $t \in]0, 1]$.*

Alors, la valeur maximale de α vérifiant (1.16) *est donnée par*

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{2\delta}(\rho(\delta) - \rho(2\delta)).$$

Lemme 1.3.10 *Soit ρ et $\overline{\alpha}$ définies dans le lemme **1.3.9** alors on a :*

$$\overline{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))} = \widetilde{\alpha}. \tag{1.16}$$

Preuve. Par la définition de ρ on a

$$-\psi'(\rho(\delta)) = 2\delta,$$

on dérive par rapport à δ, on trouve

$$-\psi''(\rho(\delta))\rho'(\delta) = 2,$$

alors

$$\rho'(\delta) = -\frac{2}{\psi''(\rho(\delta))} < 0,$$

et comme $(\psi'' o\rho)(s)$ croisante donc

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &= \frac{1}{2\delta}\int_{2\delta}^{\delta} \rho'(s)ds \\
&= \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{2\delta} \frac{ds}{\psi''(\rho(s))} \\
&\geq \frac{1}{\delta}\frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))}\int_{\delta}^{2\delta} ds,
\end{aligned}$$

où

$$\psi''(\rho(2\delta)) = \max_{[\delta,2\delta]} (\psi'' o\rho)(s)$$

ce qui donne

$$\overline{\alpha} \geq \frac{1}{\psi''(\rho(2\delta))} = \widetilde{\alpha}.$$

Ce qui termine la preuve ■

Lemme 1.3.11 *([9]) On suppose que $h(t)$ une fonction convexe et deux fois différentiable avec*

$$h(0) = 0, \ h'(0) < 0,$$

et $h(t)$ atteint son minimum global à $t^* > 0$, et $h''(t)$ est croissante pour tout t, alors pour tout $t \in [0, t^*]$, on a

$$h(t) \leq \frac{th'(0)}{2}.$$

Preuve. Comme $h'(0) < 0$, $h'(t^*) = 0$ et $h''(t) \geq 0$, alors $h'(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, t^*]$, utilisation de l'hypothèse du lemme nous pouvons écrire

$$\begin{array}{ll} h(t) & = \int_0^t h'(\xi)\, d\xi \\ & = h'(0)\, t + \int_0^t \int_0^\xi h''(\zeta)\, d\zeta d\xi \\ & \leq h'(0)\, t + \int_0^t \int_0^\xi h''(\xi)\, d\zeta d\xi \\ & = h'(0)\, t + \int_0^t \xi h''(\xi)\, d\xi \\ & = h'(0)\, t + \int_0^t \xi dh'(\xi) \\ & = h'(0)\, t + [\xi h'(\xi)]_0^t - \int_0^t h'(\xi)\, d\xi \\ & \leq h'(0)\, t - \int_0^t h'(\xi)\, d\xi \\ & = h'(0)\, t - h(t)\, . \end{array}$$

Ce qui termine la preuve ■

Lemme 1.3.12 *Si le pas de déplacement α vérifie $\alpha \leq \overline{\alpha}$ alors*

$$f(\alpha) \leq -\alpha\delta^2.$$

Preuve. Soit $h(\alpha)$ définie par

$$h(\alpha) = -2\alpha\delta^2 + \alpha\delta\psi'(v_{\min}) - \frac{1}{2}\psi(v_{\min}) + \frac{1}{2}\psi(v_{\min} - 2\alpha\delta),$$

alors

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & f_1(0) = 0, \ h'(0) = f_1'(0) = -2\delta^2 \\ h^{''}(\alpha) & = & 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\alpha\delta) \end{array}$$

d'après le lemme **1.3.7** on a

$$f_1^{''}(\alpha) \leq h^{''}(\alpha)$$

et par conséquent on obtient

$$f_1^{'}(\alpha) \leq h^{'}(\alpha) \text{ et } f_1(\alpha) \leq h(\alpha),$$

donc si $\alpha \leq \overline{\alpha}$ on a

$$\begin{aligned} h^{'}(\alpha) &= h^{'}(0) + \int_0^{\alpha} h^{''}(\xi)d\xi, \\ &= -2\delta^2 + \int_0^{\alpha} 2\delta^2\psi''(v_{\min} - 2\xi\delta)d\xi \\ &= -2\delta^2 + \delta(-\psi'(v_{\min} - 2\alpha\delta) + \psi'(v_{\min})) \leq -2\delta^2 + 2\delta^2 = 0, \end{aligned}$$

avec $h^{''}(\alpha)$ est croissante, donc d'après le lemme **1.3.11** on a

$$f(\alpha) \leq f_1(\alpha) \leq h(\alpha) \leq \frac{\alpha h^{'}(0)}{2} = -\alpha\delta^2.$$

Ce qui termine la preuve. ■

En combinant les résultats des lemmes **1.3.10** et **1.3.12** on obtient

$$f(\widetilde{\alpha}) \leq -\frac{\delta^2}{\psi''(\rho(2\delta))}. \tag{1.17}$$

1.3.5 Analyse de la complexité de l'algorithme

Avant cela, nous avons besoin des lemmes ci-dessous utilisés par J. Peng et al. [9] pour faciliter au lecteur la compréhension des propos établis le long des différentes preuves.

Lemme 1.3.13 *([9]) Si $\alpha \in [0,1]$ alors*

$$(1+t)^{\alpha} \leq 1 + \alpha t, \quad \forall t \geq -1.$$

Preuve. On définit la fonction

$$f\,(t) = (1+t)^{\alpha} - 1 - \alpha t, \ \text{pour} \ \ t \geq -1.$$

Alors

$$\begin{aligned} &f'\,(t) = \alpha\,(1+t)^{\alpha-1} - \alpha. \\ &f''\,(t) = \alpha\,(\alpha-1)\,(1+t)^{\alpha-2}. \\ &f''\,(t) \leq 0, \end{aligned}$$

donc $f\,(t)$ concave et $f'\,(0) = 0$, alors

$$f\,(t) \leq f\,(0) = 0.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 1.3.14 *([9]). Soit $t_0, t_1, ..., t_K$ une suite des nombres positifs qui vérifie :*

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^{1-\gamma}, \ k = 0,\ 1,\ ...,\ K-1,$$

telle que $\beta > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$, et

$$K \leq \left[\frac{t_0^{\gamma}}{\beta\gamma}\right].$$

Preuve. utilisation de lemme **1.3.13** nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} t_{k+1}^{\gamma} & \leq \left(t_k - \beta t_k^{1-\gamma}\right)^{\gamma} \\ & = t_k^{\gamma}\left(1 - \beta t_k^{-\gamma}\right)^{\gamma} \\ & \leq t_k^{\gamma}\left(1 - \gamma\beta t_k^{-\gamma}\right) \\ & = t_k^{\gamma} - \gamma\beta, \end{aligned}$$

donc $t_k^{\gamma} \leq t_0^{\gamma} - \gamma\beta k$, prenant $K = k$, on obtient $t_0^{\gamma} - \gamma\beta K > 0$, alors

$$K \leq \left[\frac{t_0^{\gamma}}{\beta\gamma}\right].$$

Ce qui termine la preuve. ∎

On note par $(\mathbf{\Phi})_0$ la première $\mu-$mise à jour de $\mathbf{\Phi}(v)$ et $\mathbf{\Phi}_k$, $k = 1, 2, ..., K$ la suite des valeurs des $\mathbf{\Phi}(v)$ dans les itérations intérieures. Alors d'aprés le corollaire **1.3.1** on a :

$$(\mathbf{\Phi})_0 = \frac{n}{2}\psi''(1)\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2.$$

Autre part d'aprés (1.13) et (1.20) on a

$$\mathbf{\Phi}_{k+1} - \mathbf{\Phi}_k \leq f(\widetilde{\alpha}) \leq -\frac{\delta^2}{\psi''(\rho(2\delta))}.$$

alors on suppose qu' ils existent $\beta > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$, telle que

$$-\frac{\delta^2}{\psi''(\rho(2\delta))} \leq -\beta\mathbf{\Phi}_k^{1-\gamma}.$$

Alors

$$(\mathbf{\Phi}_{k+1} - \tau) - (\mathbf{\Phi}_k - \tau) \leq \beta\mathbf{\Phi}_k^{1-\gamma},$$

donc

$$\mathbf{\Phi}_{k+1} \leq \mathbf{\Phi}_k + \beta\mathbf{\Phi}_k^{1-\gamma},$$

utilisation de lemme **1.3.14** pour $t_k = \mathbf{\Phi}_k - \tau$, on a K le nombre d'itérations intérieures pour a chaque itération extérieur définie comme suit :

$$K \leq \frac{\left[(\mathbf{\Phi})_0\right]^{\gamma}}{\beta\gamma} = \frac{\left(\frac{n}{2}\psi''(1)\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2\right)^{\gamma}}{\beta\gamma}. \tag{1.18}$$

Pour détèrminer le nombre total d'itérations pour trouver une solution primale-duale il est nécessaire de déterminer le nombre d'itérations extérieurs.

Théorème 1.3.2 *le nombre d'itérations extérieur pour trouver une solution primale-duale approximative a valeur $\epsilon > 0$ est k tel que :*

$$k \geq \frac{1}{\theta} \ln \frac{n}{\epsilon}. \tag{1.19}$$

Preuve. Si le paramètre de la trajectoire central à la valeur $\mu^0 = 1$, et $\mu_k = (1-\theta)^k \mu^0$, $n\mu \leq \epsilon$, on a :

$$\begin{aligned}(1-\theta)^k \mu^0 n \leq \epsilon \quad &\Rightarrow (1-\theta)^k \leq \tfrac{\epsilon}{n} \\ &\Rightarrow k \ln(1-\theta) \leq \ln \tfrac{\epsilon}{n}\end{aligned}$$

Puisque $-\ln(1-\theta) \geq \theta$ on obtient

$$k\theta \geq \ln \frac{n}{\epsilon}$$

$$k \geq \frac{1}{\theta} \ln \frac{n}{\epsilon}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Le nombre d'itérations total pour trouver une solution primale-duale approximative a valeurs $\epsilon > 0$ et $\tau > 0$ est multipliant le nombre d'itérations extérieures par le nombre d'itérations internes,

nous obtenons pour le nombre total d'itérations, à savoir

$$\frac{\left[(\boldsymbol{\Phi})_0\right]^\gamma}{\beta\gamma\theta} \ln \frac{n}{\epsilon} = \frac{\left(\frac{n}{2}\psi''(1)\left(\frac{\varrho\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2\right)^\gamma}{\beta\gamma\theta}. \tag{1.20}$$

1.3.6 Complexité asymptotique de nombre d'itérations total

Définition 1.3.2 *(Notation O) Soient f et g deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. On note $f(n) = O(g(n))$ lorsqu'il existe des entiers c et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,*

$$f(n) \leq cg(n)$$

Intuitivement, cela signifie que f est inférieur à g à une constante multiplicative près, pour les instances (données) de tailles suffisamment grandes.

De même on définit :

Définition 1.3.3 *(Notations o, Ω, Θ) Soient f et g deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$*

- *On note* $f(n) = o(g(n))$ *lorsque pour tout réel* c*, il existe un entier* n_0 *tels que pour tout* $n \geq n_0$*,*
$$f(n) \leq cg(n)$$
- *On note* $f(n) = \Omega(g(n))$ *lorsqu'il existe des entiers* c *et* n_0 *tels que pour tout* $n \geq n_0$*,*
$$cg(n) \leq f(n)$$
- *On note* $f(n) = \Theta(g(n))$ *lorsque* $f(n) = O(g(n))$ *et* $f(n) = \Omega(g(n))$*.*

Pour prendre $\tau = O(n)$ et $\theta = \Theta(1)$, dans (1.20) on trouve le nombre d'itération pour **IPMs** à grand pas.

Pour prendre $\tau = O(1)$ et $\theta = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$, dans (1.20) on trouve le nombre d'itération pour **IPMs** à petit pas.

Chapitre 2

Fonction noyau avec un terme barrière logarithmique

Le deuxiéme chapitre, donner la fonction noyau avec un terme logarithmique de M. BOUAFIA et al [4], définie comme suit :

$$\psi_{BL}(t) = \frac{t^2 - 1 - \ln t}{2} + \frac{1}{2(q-1)} t^{1-q} - \frac{1}{2(q-1)}, \quad q > 1.$$

Ils ont montré que l'algorithme à correspondent converge avec complexité $\mathbf{O}\left(qn^{\frac{q+1}{2q}} \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$ itérations, pour les méthodes à long-pas, cette borne est minime s'ils ont choisi $q = \frac{1}{2} \ln n$, qui donne les meilleurs bornes obtenues dans la littérature jusqu'à présent défini par $\mathbf{O}\left(\sqrt{n} \ln n \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$. Pour les méthodes petite mise à jour, s'ils ont pris $q = \mathbf{O}(1)$, ils ont obtenu le meilleur savoir itération borne, à savoir $\mathbf{O}\left(\sqrt{n} \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$.

2.1 Propriétés de la fonction de noyau et la fonction de barrière

Dans cette section, nous présentons une fonction noyau paramétrée et donnons ses propriétés qui sont essentiels à notre analyse de la complexité.

Maintenant, nous rappelons que notre fonction univariée paramétré $\psi_{BL}(t)$ est défini par :

$$\psi_{BL}(t) = \frac{t^2 - 1 - \ln t}{2} + \frac{1}{2(q-1)} t^{1-q} - \frac{1}{2(q-1)}, \quad q > 1. \tag{2.1}$$

A cet effet, nous donnons les trois premières dérivées par rapport à t comme suit :

$$\begin{aligned} \psi'_{BL}(t) &= t - \tfrac{1}{2t} - \tfrac{1}{2}t^{-q}, \\ \psi''_{BL}(t) &= 1 + \tfrac{1}{2t^2} + \tfrac{q}{2}t^{-q-1}, \\ \psi'''_{BL}(t) &= -\tfrac{1}{t^3} - \tfrac{q(q+1)}{2}t^{-q-2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De toute évidence, $\psi_{BL}(t)$ est une fonction de noyau et

$$\psi_{BL}(t) > 1. \tag{2.3}$$

Lemme 2.1.1 *pour $\psi_{BL}(t)$, nous avons les résultats suivants.*
(i) $\psi_{BL}(t)$ est exponentielle convexe pour tout $t > 0$; c'est

$$\psi_E\left(\sqrt{t_1 t_2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\psi_{BL}(t_1) + \psi_{BL}(t_2)\right).$$

(ii) $\psi_{BL}(t)$ est monotone décroissante pour tout $t > 0$.
(iii) $t\psi_{BL}(t) - \psi_{BL}(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
(iv) $\psi_{BL}(t)\psi_{BL}(\beta t) - \beta\psi_{BL}(t)\psi_{BL}(\beta t) > 0,\ \ t > 1,\ \beta > 1.$

Preuve. Pour (i), utilisant (2.2), on a

$$t\psi_{BL}(t) + \psi_{BL}(t) = t\left(1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{q}{2}t^{-q-1}\right) + \left(t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}t^{-q}\right) > 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

et par le lemme **1.3.3**, on a le résultat.
Pour (ii), utilisant (2.2), on a $\psi'''_E(t) < 0$, nous avons donc le résultat.
Pour (iii), utilisant (2.2), on a

$$t\psi_{BL}(t) + \psi_{BL}(t) = t\left(1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{q}{2}t^{-q-1}\right) + \left(t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}t^{-q}\right) > 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Pour (iv), utilisant le lemme **1.3.5**, (ii) et (iii), on a le résultat.
Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 2.1.2 *pour $\psi_{BL}(t)$, on a*

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi_{BL}(t) \leq \frac{1}{2}\left[\psi_{BL}(t)\right]^2, \quad t > 0. \tag{2.4}$$

$$\psi_{BL}(t) \leq \frac{q+3}{4}(t-1)^2, \qquad t > 1. \tag{2.5}$$

Preuve. Pour (2.4), utilisant (2.3) , on a

$$\psi_{BL}(t) = \int_1^t \int_1^x \psi_{BL}(y)\, dy dx \geq \int_1^t \int_1^x 1 dy dx = \frac{1}{2}(t-1)^2$$

$$\begin{aligned}
\psi_{BL}(t) &= \int_1^t \int_1^x \psi_{BL}(y)\, dy dx \\
&\leq \int_1^t \int_1^x \psi_{BL}(y)\, \psi_{BL}(x)\, dy dx \\
&= \int_1^t \psi_{BL}(x)\, \psi_{BL}(x)\, dx \\
&= \int_1^t \psi_{BL}(x)\, d\psi_{BL}(x) \\
&= \tfrac{1}{2} \left[\psi_{BL}(t)\right]^2 .
\end{aligned}$$

Pour (2.5), depuis $\psi_{BL}(1) = \psi_{BL}(1) = 0, \psi_{BL}(t) < 0$, $\psi_{BL}(1) = \frac{q+3}{2}$, et en utilisant le théorème de Taylor, nous avons

$$\begin{aligned}
\psi_{BL}(t) &= \psi_{BL}(1) + \psi_{BL}(1)(t-1) + \tfrac{1}{2}\psi_{BL}(1)(t-1)^2 + \tfrac{1}{6}\psi_{BL}(\xi)(\xi-1)^3 \\
&= \tfrac{1}{2}\psi_{BL}(1)(t-1)^2 + \tfrac{1}{6}\psi_{BL}(\xi)(\xi-1)^3 \\
&\leq \tfrac{1}{2}\psi_{BL}(1)(t-1)^2 \\
&= \tfrac{q+3}{4}(t-1)^2 .
\end{aligned}$$

pour certains ξ, $1 \leq \xi \leq t$.

Ce qui termine la preuve. ■

Soit $\varrho : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi_{BL}(t)$ pour $t \geq 1$ et soit $\rho : [0, +\infty[\to]0, 1]$ la fonction inverse de $\frac{-1}{2}\psi_{BL}(t)$ pour tout $t \in]0, 1]$. Alors nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.1.3 *Pour $\psi_{BL}(t)$, on a*

$$1 + \sqrt{\frac{4}{q+3}s} \leq \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s}, \quad s \geq 0. \tag{2.6}$$

$$\rho(z) > \frac{1}{(4z+2)^{\frac{1}{q}}}, \quad z \geq 0. \tag{2.7}$$

Preuve. Pour (2.6), soit

$$s = \psi_{BL}(t), t \geq 1, \text{ i.e., } \sigma(s) = t, \quad t \geq 1.$$

Par (2.4), on a

$$\psi_{BL}(t) \geq \frac{1}{2}(t-1)^2 .$$

alors

$$s \geq \frac{1}{2}(t-1)^2, t \geq 1.$$

ce qui implique que

$$t = \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s}.$$

Par (2.5), on a

$$s = \psi_{BL}(t) \leq \frac{q+3}{4}(t-1)^2,$$

donc

$$t = \sigma(s) \geq 1 + \sqrt{\frac{4}{q+3}s}.$$

Pour (2.7), soit

$$z = \frac{-1}{2}\psi_{BL}(t), t \in \left]0, 1\right].$$

Par la définition on a

$$\rho : \rho(z) = t,\ t \in \left]0, 1\right].$$

et Par la définition de $\psi_{BL}(t)$, on a

$$\begin{array}{ll} z & = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}t^{-q}\right) \\ & > \frac{1}{4}\left(t^{-q} - 2t\right) > \frac{1}{4}\left(t^{-q} - 2\right), \end{array}$$

ce qui implique que

$$t = \rho(z) > \frac{1}{(4z+2)^{\frac{1}{q}}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 2.1.4 *Soit* $0 \leq \theta < 1$, $v_+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$, *Si* $\mathbf{\Phi}_{BL}(v) \leq \tau$, *alors on a*

$$\mathbf{\Phi}_{BL}(v_+) \leq \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}.$$

Preuve. Depuis $\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$ et $\varrho\left(\frac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}\right) \geq 1$, nous obtenons $\frac{\varrho\left(\frac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}\right)}{\sqrt{1-\theta}} \geq 1$. Et pour $t \geq 1$, on a

$$\psi_{BL}(t) \leq \frac{t^2 - 1}{2}.$$

En utilisant théorème **1.3.1**, avec $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}$, (2.6) et $\mathbf{\Phi}_{BL}(v) \leq \tau$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{BL}(v_+) &\leq n\psi_{BL}\left(\tfrac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}\right)\right) \\
&\leq \tfrac{n}{2}\left(\left[\tfrac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}\right)\right]^2 - 1\right) \\
&= \tfrac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}\right)\right]^2 - \sqrt{1-\theta}\right) \\
&\leq \tfrac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[1+\sqrt{2\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}}\right]^2 - \sqrt{1-\theta}\right) \\
&= \tfrac{n}{2(1-\theta)}\left(\left[1+2\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}+2\sqrt{2\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BL}(v)}{n}}\right] - \sqrt{1-\theta}\right) \\
&\leq \tfrac{n}{2(1-\theta)}\left(\left(1-\sqrt{1-\theta}\right)+2\tfrac{\tau}{n}+2\sqrt{2\tfrac{\tau}{n}}\right) \\
&= \tfrac{\left(\theta n+2\tau+2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Lorsque la dernière inégalité est de $1-\sqrt{1-\theta} = \frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}} \leq \theta$.

Ce qui termine la preuve. ■

Dénoter

$$(\mathbf{\Phi}_{BL})_0 = \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)} = BTL(n,\theta,\tau), \tag{2.8}$$

alors, $(\mathbf{\Phi}_{BL})_0$ majorant de $\mathbf{\Phi}_{BL}(v_+)$ pendant le processus de l'algorithme.

Lemme 2.1.5 *Soit* $\delta(v)$ *est défini dans* (1.12)*. Alors, on a*

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BL}(v)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BL}}.$$

Preuve. utilisant (1.12), on a

$$\mathbf{\Phi}_{BL}(v) = \sum_{i=1}^{n}\psi_{BL}(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\psi_{BL}(v_i)\right)^2 = \frac{1}{2}\left\|\nabla\mathbf{\Phi}_{BL}(v)\right\|^2 = \frac{4}{2}\delta(v)^2,$$

donc

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BL}(v)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BL}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.1.1 Détermination de la taille du pas de déplacement

dans tout au long de la sous-section, nous supposons que $\tau \geq 1$. en utilisant le lemme **2.1.5** et l'hypothèse que $\mathbf{\Phi}_E(v) \geq \tau$, on a

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

A partir lemmes **1.3.7-1.3.9** , on a

Lemme 2.1.6 *Soit $\bar{\alpha}$ celle définie dans le lemme **1.3.9**. Si*

$$\mathbf{\Phi}_{BL} = \mathbf{\Phi}_{BL}(v) \geq \tau \geq 1,$$

alors on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{2}{2 + (q+1)(8\delta + 2)^{\frac{q+1}{q}}}.$$

Preuve. en utilisant le lemme **1.3.10**, la définition de $\psi_{BL}(t)$ et (2.7), on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{\psi_{BL}(\rho(2\delta))}$$

comme $\delta \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$, et les fonctions croissantes $\frac{1}{\psi_{BL}(t)}$ et $\rho(\delta)$, on a

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\geq \tfrac{1}{\psi_{BL}(\rho(2\delta))} \\ &= \tfrac{1}{1+\frac{1}{2\rho(2\delta)^2}+\frac{q}{2}(\rho(2\delta))^{-(q+1)}} \\ &\geq \tfrac{1}{1+\frac{1}{2}(4(2\delta)+2)^{\frac{2}{q}}+\frac{q}{2}(4(2\delta)+2)^{\frac{q+1}{q}}} \\ &= \tfrac{2}{2+(q+1)(8\delta+2)^{\frac{q+1}{q}}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Dénotant

$$\widetilde{\alpha} = \frac{2}{2 + (q+1)(8\delta + 2)^{\frac{q+1}{q}}}. \tag{2.9}$$

$\widetilde{\alpha}$ le pas de déplacement et $\widetilde{\alpha} \leq \bar{\alpha}$.

Lemme 2.1.7 *Pour $\widetilde{\alpha}$ le pas de déplacement définie dans* (2.9) *et soit*

$$\mathbf{\Phi}_{BL}(v) \geq 1.$$

Alors

$$f\left(\widetilde{\alpha}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{(q+1)\,148}\left[\mathbf{\Phi}_{BL}(v)\right]^{\frac{q-1}{2q}}. \tag{2.10}$$

Preuve. en utilisant le lemme **1.3.12** pour $\alpha = \widetilde{\alpha}$ et (2.9), on a

$$\begin{aligned} f\left(\widetilde{\alpha}\right) &\leq -\widetilde{\alpha}\delta^2 \\ &= -\frac{2\delta^2}{2+(q+1)(8\delta+2)^{\frac{q+1}{q}}} \\ &\leq -\frac{2\delta^2}{2(2\delta)+(q+1)(4(2\delta)+2(2\delta))^{\frac{q+1}{q}}} \\ &\leq -\frac{2\delta^2}{2(2\delta)^{\frac{q+1}{q}}+(q+1)(12\delta)^{\frac{q+1}{q}}} \\ &= -\frac{2\delta^2}{\left(2(2)^{\frac{q+1}{q}}+(q+1)(12)^{\frac{q+1}{q}}\right)(\delta)^{\frac{q+1}{q}}} \\ &\leq -\frac{2\delta^{2-\frac{q+1}{q}}}{\left(2(2)^2+(q+1)(12)^2\right)} \\ &= -\frac{2\delta^{\frac{q-1}{q}}}{(q+1)148} \\ &\leq -\frac{\sqrt{2}}{(q+1)148}\left[\mathbf{\Phi}_{BL}(v)\right]^{\frac{q-1}{2q}} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \delta &\geq \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BL}(v)} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}. \\ 2\delta &\geq \sqrt{2} \geq 1. \end{aligned}$$

■

Ce qui termine la preuve.

Après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\mu$, on a

$$\mathbf{\Phi}_{BL}(v_+) \leq \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)} = (\mathbf{\Phi}_{BL})_0 .$$

D'aprés la définition de $f(\alpha)$, on a

$$f\left(\widetilde{\alpha}\right) = \mathbf{\Phi}_{BL}\left(v^+\right) - \mathbf{\Phi}_{BL}(v) \leq -\frac{\sqrt{2}}{(q+1)\,148}\left[\mathbf{\Phi}_{BL}(v)\right]^{\frac{q-1}{2q}} .$$

Pour K le nombre total d'itérations internes dans l'itération extérieure. En utilisant (3.21), on a

$$\begin{aligned} K &\leq \frac{\left[(\mathbf{\Phi}_{BL})_0\right]^{\gamma}}{\kappa\gamma} \\ &= \left(148\sqrt{2}q\right)\left[(\mathbf{\Phi}_{BL})_0\right]^{\frac{q+1}{2q}} . \end{aligned}$$

soit $(\mathbf{\Phi}_{BL})_0$ celle définie dans (2.8) et soit $\tau \geq 1$, en utilisant (1.20) alors, le nombre total d'itérations pour avoir une solution approchée avec $n\mu < \epsilon$ est majorant par

$$\left(148\sqrt{2}q\right)\left[(\mathbf{\Phi}_{BL})_0\right]^{\frac{q+1}{2q}} \frac{\ln\frac{n}{\epsilon}}{\theta}.$$

Pour les méthodes de grande mise à jour avec $\tau = \mathbf{O}(n)$ et $\theta = \mathbf{\Theta}(1)$, on a

$$\mathbf{O}\left(qn^{\frac{q+1}{2q}} \ln \frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Chapitre 3

Fonction noyau avec un terme de barrière trigonométrique

Le troisiéme chapitre, donner la fonction noyau avec un terme trigonométrique de M. BOUAFIA et al [2], définie comme suit :

$$\psi_{BT}(t) = \frac{t^2-1}{2} + \frac{4}{\pi p}\left[\tan^p h(t) - 1\right], \quad h(t) = \frac{\pi}{2t+2}, \ p \geq 2.$$

Ils ont montré que l'algorithme à correspondent converge avec complexité $\mathbf{O}\left(pn^{\frac{p+2}{2(p+1)}} \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$ itérations, pour les méthodes à long-pas, cette borne est minime s'ils ont choisi $p = \frac{\ln n}{2} - 1$, qui donne les meilleurs bornes obtenues dans la littérature jusqu'à présent défini par $\mathbf{O}\left(\sqrt{n} \ln n \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$. Pour les méthodes petite mise à jour, s'ils ont pris $p = \mathbf{O}(1)$, ils ont obtenu le meilleur savoir itération borne, à savoir $\mathbf{O}\left(\sqrt{n} \ln \frac{n}{\epsilon}\right)$.

3.1 Propriétés de la fonction noyau

Dans cette section, nous présentons une fonction noyau paramétrée et donnons ses propriétés qui sont essentiels à notre analyse de la complexité.

Maintenant, nous rappelons que cette fonction univariée paramétré $\psi_{BT}(t)$ est défini par :

$$\psi_{BT}(t) = \frac{t^2-1}{2} + \frac{4}{\pi p}\left[\tan^p h(t) - 1\right], \quad h(t) = \frac{\pi}{2t+2}, \ p \geq 2. \tag{3.1}$$

De toute évidence, $\psi_{BT}(t)$ est une fonction noyau et

$$\psi'_{BT}(t) = t + \frac{4}{\pi}\left(1 + \tan^2 h(t)\right)\left(\tan^{p-1} h(t)\right) h'(t), \tag{3.2}$$

$$\psi''_{BT}(t) = 1 + u(t) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (p-1)\tan^{p-2} h(t) + \\ (p+1)\tan^{p} h(t) \end{bmatrix} (h'(t))^2 + \\ [\tan^{p-1} h(t)]\, h''(t) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\psi'''_{BT}(t) = u(t) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (p-1)(p-2)\tan^{p-3} h(t) + \\ 2p^2 \tan^{p-1} h(t) + \\ (p+1)(p+2)\tan^{p+1} h(t) \end{bmatrix} (h'(t))^3 + \\ \begin{bmatrix} 3(p-1)\tan^{p-2} h(t) + \\ 3(p+1)\tan^{p} h(t) \end{bmatrix} h''(t)\, h'(t) + \\ [\tan^{p-1} h(t)]\, h'''(t) \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

tel que

$$u(t) = \frac{4}{\pi}\left(1 + \tan^2 h(t)\right),$$

et

$$\begin{aligned} h'(t) &= \tfrac{-\pi}{2(t+1)^2}. \\ h''(t) &= \tfrac{\pi}{(t+1)^3}. \\ h'''(t) &= \tfrac{-3\pi}{(t+1)^4}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemme 3.1.1 *[4]Pour $h(t)$ défini en (5.1) et $p \geq 2$, alors*

$$0 < h(t) < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0. \tag{3.6}$$

$$\tan h(t) > 0, \quad t > 0. \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} [(p-1)\tan^{p-2} h(t) + (p+1)\tan^{p} h(t)]\,(h'(t))^2 + \\ [\tan^{p-1} h(t)]\, h''(t) \end{bmatrix} > 0, \quad t > 0. \tag{3.8}$$

$$\tan h(t) - \frac{2}{(p+1)\pi t} \geq 0, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

3.1.1 Eligibilité de la nouvelle fonction noyau

Le lemme suivant sert à prouvé que la nouvelle fonction du noyau (3.1) est éligible.

Lemme 3.1.1 *[4]Soit $\psi_{BT}(t)$ défini dans (3.1) et $t > 0$. Alors,*

$$\psi''_{BT}(t) > 1. \tag{3.a}$$

$$\psi'''_{BT}(t) < 0. \tag{3.b}$$

$$t\psi''_{BT}(t) - \psi'_{BT}(t) > 0. \tag{3.c}$$

$$t\psi''_{BT}(t) + \psi'_{BT}(t) > 0. \tag{3.d}$$

La derniére propriété (3.d) dans le lemme 3.1.1 est équivalente à la convexité de la fonction composée $t \mapsto \psi_{BT}(e^t)$ et cela vaut si et seulement si

$$\psi_{BT}\left(\sqrt{t_1 t_2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\psi_{BT}(t_1) + \psi_{BT}(t_2)\right)$$

Lemme 3.1.2 *[4] pour $\psi_{BT}(t)$, on a*

$$\frac{1}{2}(t-1)^2 \leq \psi_{BT}(t) \leq \frac{1}{2}\left[\psi'_{BT}(t)\right]^2, \quad t > 0. \tag{3.10}$$

$$\psi_{BT}(t) \leq \left(1 + \frac{\pi}{8}p\right)(t-1)^2, \qquad t > 1. \tag{3.11}$$

Soit $\sigma : [0, +\infty[\, \rightarrow [1, +\infty[$ la fonction inverse de $\psi_{BT}(t)$ pour $t \geq 1$ et $\rho : [0, +\infty[\, \rightarrow]0, 1]$ la fonction inverse de$\frac{-1}{2}\psi'_{BT}(t)$ et pour tout $t \in]0, 1]$. alors on a le lemme suivant.

Lemme 3.1.3 *[4]Pour $\psi_{BT}(t)$, on obtient*

$$1 + \sqrt{\frac{8}{8 + \pi p}s} \leq \sigma(s) \leq 1 + \sqrt{2s}, \quad s \geq 0. \tag{3.12}$$

$$\tan h(t) \leq (4z + 2)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad z \geq 0. \tag{3.13}$$

Lemme 3.1.4 *[4]Soit $0 \leq \theta < 1$, $v_+ = \frac{v}{\sqrt{1-\theta}}$, Si $\mathbf{\Phi}_{BT}(v) \leq \tau$, alors on a*

$$\mathbf{\Phi}_{BT}(v_+) \leq \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}.$$

Dénoter

$$(\mathbf{\Phi}_{BT})_0 = \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)} = L(n, \theta, \tau), \tag{3.14}$$

alors, $(\mathbf{\Phi}_{BT})_0$ majorant de $\mathbf{\Phi}_{BT}(v_+)$ pendant le processus de l'algorithme.

Lemme 3.1.5 *[4] Soit $\delta(v)$ est défini dans (3.12). Alors, on a*

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}.$$

3.1.2 Analyse de la complexité

Dans tout au long de la sous-section, nous supposons que $\tau \geq 1$. en utilisant le lemme **3.1.5** et l'hypothèse que $\mathbf{\Phi}_{BT}(v) \geq \tau$, on a

$$\delta(v) \geq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

A partir lemmes **1.3.7-1.3.9** , on a

Lemme 3.1.6 *[4] Soit $\bar{\alpha}$ celle définie dans le lemme **1.3.9**. Si*

$$\mathbf{\Phi}_{BT} = \mathbf{\Phi}_{BT}(v) \geq \tau \geq 1,$$

alors on a

$$\bar{\alpha} \geq \frac{1}{(9+4p\pi)(8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}}$$

Dénotant

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{(9+4p\pi)(8\delta+2)^{\frac{p+2}{p+1}}}. \tag{3.15}$$

$\widetilde{\alpha}$ le pas de déplacement et $\widetilde{\widetilde{\alpha}} \leq \bar{\alpha}$.

Lemme 3.1.7 *[4]Pour $\widetilde{\alpha}$ le pas de déplacement définie dans* (3.15) *et soit*

$$\mathbf{\Phi}_{BT}(v) \geq 1.$$

Alors

$$f\left(\widetilde{\alpha}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{288(13p+9)}\left[\mathbf{\Phi}_{BT}(v)\right]^{\frac{p}{2(p+1)}}. \tag{3.16}$$

Après la mise à jour de μ à $(1-\theta)\mu$, on a

$$\mathbf{\Phi}_{BT}(v_+) \leq \frac{\left(\theta n + 2\tau + 2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)} = \left(\mathbf{\Phi}_{BT}\right)_0.$$

D'aprés la définition de $f(\alpha)$, on a

$$f\left(\widetilde{\alpha}\right) = \mathbf{\Phi}_{BT}\left(v^+\right) - \mathbf{\Phi}_{BT}(v) \leq -\frac{\sqrt{2}}{288(13p+9)}\left[\left(\mathbf{\Phi}_{BT}\right)_0\right]^{\frac{p}{2(p+1)}}.$$

Pour K le nombre total d'itérations internes dans l'itération extérieure. En utilisant (1.18), on a

$$\begin{aligned} K &\leq \frac{\left[\left(\mathbf{\Phi}_{BT}\right)_0\right]^{\gamma}}{\kappa\gamma} \\ &= \left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{(p+2)}\right)\left(\mathbf{\Phi}_{BT}\right)_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}}. \end{aligned}$$

soit $(\mathbf{\Phi}_{BT})_0$ celle définie dans (3.10) et soit $\tau \geq 1$, en utilisant (1.20) alors, le nombre total d'itérations pour avoir une solution approchée avec $n\mu < \epsilon$ est majorant par

$$\left(\frac{288\,(13p+9)\,(p+1)\,\sqrt{2}}{(p+2)}\right)(\mathbf{\Phi}_{BT})_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\,\frac{\ln\frac{n}{\epsilon}}{\theta}. \tag{3.17}$$

Pour les méthodes de grande mise à jour avec $\tau = \mathbf{O}\,(n)$ et $\theta = \mathbf{\Theta}\,(1)$, on a

$$\mathbf{O}\left(pn^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\ln\frac{n}{\epsilon}\right) \text{ itérations.}$$

Dans le cas d'un procédé à petite mise à jour, on a $\tau = \mathbf{O}\,(1)$ et $\theta = \mathbf{\Theta}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Remplacement de ces valeurs dans (3.17) ne donne pas la limite mieux possible. Une meilleure borne est obtenu comme suit.

Par (3.11), avec

$$\psi_{BT}\,(t) \leq \left(1+\frac{\pi}{8}p\right)(t-1)^2, \qquad t>1,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{BT}\,(v_+) &\leq n\psi_{BT}\left(\tfrac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}{n}\right)\right)\\
&\leq n\left(1+\tfrac{\pi}{8}p\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}{n}\right)-1\right)^2\\
&= \tfrac{n\left(1+\frac{\pi}{8}p\right)}{(1-\theta)}\left(\sigma\left(\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}{n}\right)-\sqrt{1-\theta}\right)^2\\
&\leq \tfrac{n\left(1+\frac{\pi}{8}p\right)}{(1-\theta)}\left(\left(1+\sqrt{2\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}{n}}\right)-\sqrt{1-\theta}\right)^2\\
&= \tfrac{n\left(1+\frac{\pi}{8}p\right)}{(1-\theta)}\left(\left(1-\sqrt{1-\theta}\right)+\sqrt{2\tfrac{\mathbf{\Phi}_{BT}(v)}{n}}\right)^2\\
&\leq \tfrac{n\left(1+\frac{\pi}{8}p\right)}{(1-\theta)}\left(\theta+\sqrt{2\tfrac{\tau}{n}}\right)^2\\
&= \tfrac{\left(1+\frac{\pi}{8}p\right)}{(1-\theta)}\left(\theta\sqrt{n}+\sqrt{2\tau}\right)^2 = (\mathbf{\Phi}_{BT})_0\,.
\end{aligned}$$

où ils ont également utilisé cette $1-\sqrt{1-\theta} = \frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta}} \leq \theta$ et $\mathbf{\Phi}_{BT}\,(v) \leq \tau$, en utilisant cette borne supérieure $(\mathbf{\Phi}_{BT})_0$, ils ont obtenu un majorant de nombre total d'itérations suivant :

$$\left(\frac{288\,(13p+9)\,(p+1)\,\sqrt{2}}{(p+2)}\right)(\mathbf{\Phi}_{BT})_0^{\frac{p+2}{2(p+1)}}\,\frac{\ln\frac{n}{\epsilon}}{\theta}.$$

noter la maintenant $(\mathbf{\Phi}_{BT})_0 = \mathbf{O}\,(p)$, et la complexité d'itérations devient $\mathbf{O}\left(p^2\sqrt{n}\ln\frac{n}{\epsilon}\right)$ iterations

3.2 Tableaux comparatifs

On pose la fonction $g(\tau, \theta, p, q)$, définie comme suit :

$$\begin{aligned} g(\tau,\theta,p,q) &= \frac{\textbf{nombre total d/itérations}(\psi_{BL})}{\textbf{nombre total d/itérations}(\psi_{BT})} \\ &= \frac{\left(148\sqrt{2}q\right)\left(\frac{\left(\theta n+2\tau+2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{q+1}{2q}}}{\left(\frac{288(13p+9)(p+1)\sqrt{2}}{(p+2)}\right)\left(\frac{\left(\theta n+2\tau+2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{p+2}{2(p+1)}}} \end{aligned}$$

1.pour $p = 2$ et $q = 2$

$$g(\tau,\theta,2,2,n) = \frac{37\left(\frac{\left(\theta n+2n+\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{3}{4}}}{945\left(\frac{\left(\theta n+2\tau+2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

n	5	10	50	$n \longrightarrow +\infty$
cas 01 : $\theta = 1/2, \tau = 2$	0.0446	0.0439	0.0548	0
cas 02 : $\theta = 1/2, \tau = n$	0.0487	0.0489	0.0127	0
cas 03 : $\theta = 1/\sqrt{n}, \tau = 2$	0.0514	0.0545	0.0623	0
cas 04 : $\theta = 1/\sqrt{n}, \tau = n$	0.0510	0.0529	0.0592	0

2.pour $q = \ln(n)$ et $p = \frac{\ln(n)}{2} - 1$

$$g\left(\tau,\theta,\ln n,\frac{\ln(n)}{2}-1,n\right) = \frac{148\ln(n)\left(\frac{\left(\theta n+2n+\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{\ln(n)+1}{2\ln(n)}}}{\left(\frac{288\left(13\frac{\ln(n)}{2}-4\right)\left(\frac{\ln(n)}{2}\right)}{\left(\frac{\ln(n)}{2}+1\right)}\right)\left(\frac{\left(\theta n+2\tau+2\sqrt{2\tau n}\right)}{2(1-\theta)}\right)^{\frac{\ln(n)+2}{2\ln(n)}}}$$

n	5	10	50	$n \longrightarrow +\infty$
cas 01 : $\theta = 1/2, \tau = 2$	0.0981	0.0854	0.0754	0
cas 02 : $\theta = 1/2, \tau = n$	0.1018	0.0932	0.0803	0
cas 03 : $\theta = 1/\sqrt{n}, \tau = 2$	0.0828	0.0703	0.0587	0
cas 04 : $\theta = 1/\sqrt{n}, \tau = n$	0.0857	0.0771	0.0634	0

Conclusion :

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés à résoudre une programmation linéaire par les méthodes primales-duales de points intérieurs **IPMs** rentrent dans le cadre chemin central et sont les méthodes les plus efficaces du point de vue pratiques en particulier pour les problèmes de grande taille. Actuellement les chercheurs, s'intéressent à l'étude de l'amélioration du comportement de l'algorithme en regardant en particulier la complexité algorithmique via de nouvelles techniques parmi les quelles ,les fonctions noyaux. pour cela nous avons donné une étude comparative théorique de deux fonctions noyaux pour la programmation linéaire (Fonction noyau à terme barriére logarithmique, Fonction noyau à terme barriére trigonométrique). Pour prouver l'efficacité de deux fonctions noyaux et évaluer son influence sur le comportement de l'algorithme, l'étude comparative théorique a prouvé que la fonction noyau à terme barriére logarithmique est plus éfficace parapport à la fonction noyau à terme barriére trigonométrique

.

Bibliographie

[1] Y. Q. Bai, M El Ghami, C. Roos, *A comparative study of kernel functions for primal-dual interior point algorithms in linear optimization*, SIAM Journal on Optimization, 15 101–128, (2004).

[2] M. Bouafia, D. Benterki, A. Yassine, *An efficient primal-dual Interior Point Method for linear programming problems based on a new kernel function with a trigonometric barrier term*, J Optim Theory Appl, 170 : 528–545 (2016).

[3] M. Bouafia, *Étude asymptotique des méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire*, Thèse de doctorat, université du havre (2017).

[4] . Bouafia, D. Benterki , A. Yassine, *An efficient parameterized logarithmic kernel function for linear optimization.* Optim Lett 12(5) :1079–1097 (2018)

[5] M. El Ghami, I.D. Ivanov, C. Roos, T. Steihaug, *A polynomial-time algorithm for BTLO based on generalized logarithmic barrier functions*, International Journal of Applied Mathematics, 21 99–115, (2008)..

[6] Z. Kebbiche, *étude et extentions d'algorithmes de points intérieurs pour la programmation non linéaire*, Thèse doctorat d'état, Université Farhat Abbas - Setif (2007).

[7] N. K. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, in : Proceedings of the 16$^{\text{th}}$ Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 4 373–395, (1984).

[8] V. Klee, G. Minty, "*How good is the simplex algorithm ?*". In Shisha, Oved. Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1–9, 1969, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). New York-London : Academic Press, 159–175 (1972).

[9] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky, *Self-Regularity : A New Paradigm for Primal-Dual Interior-Point Algorithms, Princeton University Press*, Princeton, NJ, 2002.