République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mlle. Gherbi Chaima Nour El'Yakine

Intitulé

L'étude de la décroissance exponentielle du problème de petrovski par un terme intégrale avec une fonction perturbée

Dirigé par : Aries Mohammed Es-salih

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr. Debbouche Ammar**	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Aries M. Es-s**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Ali Ahmed**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

إهـــــــــداء

مصدقا لقوله تعالى: " وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ " سورة إبراهيم (7).

أحمد الله عزوجل الذي أنار لي درب العلم والمعرفة ووفقني للإنجاز هذا العمل المتواضع.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم: "من لم يشكر الناس لم يشكر الله." رواه أحمد الترمذي.

أتوجه بالشكر والامتنان إلى أستاذي الفاضل "عريس محمد صالح" المشرف على هاته المذكرة والذي لم يبخل علي بما جاء في رصيده المعلوماتي ولا بوقته الثمين.

كما نتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير إلى الأساتذة أعضاء لجنة المناقشة "الأستاذ دبوش عمار" و "الأستاذ علي أحمد" لقبولهم مناقشة هاته المذكرة وتخصيص لنا من وقتهم.

اللهم اجعل هذا العمل صلاحا، وأوسطه فلاحا، وآخره نجاحا.

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage de réaliser le présent travail.

Je tiens à remercier **"Monsieur Aries Mohammed ES-Salih"** , d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoups de patience, serieux et compétence.

Je voudrais également exprimer mes sincères remerciements aux honorables messieurs les membres du jury **"Monsieur Debbouche Ammar"** et **"Monsieur Ali Ahmed"** .

Merci à tous ceux qui ont contribué, avant ou jusqu'à maintenant, à l'aboutissement de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire avec un énorme plaisir, et une immense joies à mes chéres parents, pour leur patience, leurs encouragements, à mon frére, à mes soeurs, et mes chers amis.

Table des matières

Introduction

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou mécaniques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles **(EDP)**.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à etudier comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(u,t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), a étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et, si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro. Il existe plusieurs types de stabilisations :

1- la stabilisation **forte :** Elle consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e. $E(t) \to 0$, lorsque $t \to \infty$.

2- la stabilisation **exponentielle** : Dans se type on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e. $E(t) \leq Ce^{-\alpha t}$, $\forall t > 0$, où C et α sont des constantes positives, avec C dépendante des données initiales.

3- la stabilisation **polynômiale** : Elle conserne des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais de type polynomial par exemple $E(t) \leq \dfrac{C}{t^{\delta}}, \quad \forall t > 0$, ou C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

4- la stabilisation **logarithmique** : Si $E(t) \leq \dfrac{C}{\log(1+t^k)}, \quad k > 0.$

Il existe plusieures méthodes de stabilisation, par exemple la stabilisation par des feedbacks, par des termes mémoires ou les deux. Dans notre travail on s'interesse à la stabilisation du **problème de petrovski** (équation des plaques) par un **terme mémoire** avec un noyau *oscillant.* Il est bien connu que les matériaux viscoèlastiques fournissent un amortissement natural, qui est dû à la propriété particulière de ces matèriaux à garder en mémoire les déplacements antérieurs. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissment sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiels $\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds,$ où g représente le noyau dans l'expression de la mémoire.

Le problème de petrovski avec terme mémoire s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(t,x) = \partial_v u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ u(.,0) = u^0; \quad u_t(.,0) = u^1 & \quad\quad x \in \Omega \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ, g représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, v la dérivée normale orienté vers l'extérieur de Ω. Ici $u(t,x)$ est le déplacement du point x à l'instant t, u^0 la position initial et u^1 la vitesse initial,

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses(H.1)

1) Soit $A = \Delta^2 : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ l'opérateur linéaire auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$, avec $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$, tel que, pour tout $M > 0$,

$$\langle Ax, x\rangle \geq M \|x\|^2, \ \forall x \in D(A),$$

où

$$D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),$$

et

$$Ax(\xi) = \Delta^2 x(\xi), \ x \in D(A) \ \xi \in \Omega.$$

2) La fonction $g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ vérifie les conditions suivantes :

$g \in L^1(0,\infty)$, est telle que :

$$\int_0^\infty g(t)ds < 1.$$

On pose $G(t) := \int_t^\infty g(s)ds$, telle que :

$$t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)ds \geq 0.$$

Hypothèses(H.2)

Il existe $\alpha_0 \geq 0$ tels que $g_{\alpha_0} \in L^1(0,\infty)$ et $t \longrightarrow \int\limits_t^\infty g_{\alpha_0}(s)ds$; est un noyau fortement défini positif.

Ce mémoire est basé sur le travail de **Piermarco Cannarsa and Daniela Sforza**. **" Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels"**. Il est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre : Il est consacré aux rappels des notions essentielles, de même ainsi que les résultats fondamentaux concernant les espace L^P, les espace de sobolev

Dans **la deuxième chapitre** : On démontre l'existence et l'unicité de la solution forte ainsi que la solution faible du problème (1) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Enfin, dans **le troisième chapitre** : On étudiera la stabilisation exponentielle. C'est à dire on va montrer que l'énergie décroit exponentiellement. On définit l'énergie assoièe le problème (1) par la formule :

$$E_u\left(t\right) := \frac{1}{2}\left\|u'\left(t\right)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^\infty g\left(s\right)ds\right)\left\|\Delta u(t)\right\|^2.$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème Supposons que les hypothèses **(H.1)** et **(H.2)** sont vérifiées avec $\alpha_0 > 0$, alors il existe un nombre positif $\rho_1 \leq \rho_0^2$ et C tels que :
pour tout $(u_0, u_1) \in D(-\Delta) \times X$, vérifiant :

$$||\Delta u_0|| + ||u_1|| < \rho_1,$$

alors, l'énergie de la solution faible u du problème (1) décroit exponontiellement.
C'est à dire :

$$E_u(t) \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$\int_0^\infty e^{2\alpha t}E_u(t)dt \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||),$$

pour tout $\alpha \in [0, \alpha^*]$, où $\alpha^* \in (0, \min(\alpha_0, \eta_0))$ et $C(R)$ est une fonction positive semi-continue supérieurement, telle que $C(0) = 0$.

Chapitre 1

Rappels sur les espaces fonctionnels

1.1 L'espace des distributions

Notations :

1- Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, on note par : D^α, l'opérateur de dérivation d'ordre α défini par :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

2- Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{k}$, on note par $supp\,(\varphi)$ le sous-ensemble de Ω défini par :

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega,\ \varphi\,(x) = 0\}}$$

Définition 1.1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$) appartient à $D\,(\Omega)$ si φ est indéfiniment dérivable et son support est compact.

C'est espace sera appelé espace des fonctions testes.

Soient $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ et $\varphi \in D\,(\Omega)$, on dit que $\varphi_\mu \to \varphi$ dans $D\,(\Omega)$ quand $\mu \to +\infty$ si seulement si il existe K, un compact de Ω tel que :

1- $\text{supp}\,(\varphi_\mu) \subset K, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$.

2- $D^{\alpha}\varphi_{\mu} \to \varphi$ uniformément sur K, $\quad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Définition 1.1.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle espace des distributions, le dual topologique de $D(\Omega)$, et on le noter par $D'(\Omega)$.

Soit T une distribution sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La dérivée d'ordre α de T au sens des distributions est définie par :

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{\alpha}\varphi\rangle, \ \forall\varphi \in D(\Omega).$$

1.2 Les espaces L^p

Définition 1.2.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions u définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{k}$, où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, telles que u est mesurable et $|u|^p$ est intégrable au sens de lebesgue sur Ω. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } p \in [1, +\infty[$$

est un espace de Banach.

Dans le cas où $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx.$$

est un espace de Hilbert.

On appelle $L^{\infty}(\Omega)$ l'espace constitué des (classes de) fonctions mesurables et bornées presque partout sur Ω. Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)|,$$

où

$$\sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)| = \inf\{C > 0 \,/\, |u(x)| \leq C \ p.p\ sur\ \Omega\},$$

$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On appelle $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ l'espace des (classes de) fonctions u mesurables et telles que $|u|^p$ est intégrables au sens de Lebesgue sur chaque compacte K de Ω.

Proposition 1.2.1 (Inégalité de Young)**.** *Soient* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et* $a\,, b > 0$, *alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration : Voir [2].

Proposition 1.2.2 (Inégalité de Young générallisée)**.** *Soient* $1 < p_1, p_2 \cdots, p_k < +\infty$, *tels que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = 1$ *et* $a_1, a_2 \cdots, a_k > 0$, *alors :*

$$a_1 a_2 \cdots a_k \leq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \frac{a_2^{p_2}}{p_2} + \cdots + \frac{a_k^{p_k}}{p_k}.$$

Proposition 1.2.3 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient* $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors :*

$$uv \in L^1(\Omega)$$

et

$$\int_\Omega |u.v|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Démonstration : *Voir[2].*

Remarque 1.2.1. Dans $L^2(\Omega)$ cette inégalité s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corollaire 1.2.1 (Inégalité de Hölder généralisée)**.** *Soient* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_k$ *des fonctions telles que* $\varphi_i \in L^{p_i}(\Omega)$ *avec* $p_i \geq 1, 1 \leq i \leq k$ *où* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ *et* $\frac{1}{p} \leq 1$. *Alors :*

$$\varphi = \prod_{\imath=1}^{k} \varphi_i \in L^p(\Omega),$$

et

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|\varphi_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|\varphi_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz))**.** *Soient* $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors il existe une unique (de classe) fonctions* $u \in L^p(\Omega)$ *telle que :*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \forall v \in L^p(\Omega),$$

et

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|v\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'}.$$

Démonstration : Voir [2].

Proposition 1.2.4. *Si $\varphi \in \left(L^1\left(\Omega\right)\right)^{'}$, alors il existe une unique (classe de) fonctions $u \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$, telle que :*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_{\Omega} u\left(x\right) v\left(x\right) dx, \ \forall v \in L^1\left(\Omega\right),$$

et on a :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v\|_{\left(L^1(\Omega)\right)'}.$$

Démonstration : *Voir [2].*

Remarque 1.2.2. Grâce au théorème 1.2.1 et à la proposition 1.2.4, on peut identifie $\left(L^p\left(\Omega\right)\right)^{'}$ à $L^q\left(\Omega\right), \forall p \in [0, +\infty[$ telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

On peut montrer aussi que :

1- $L^q\left(\Omega\right)$ est séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.

2- L'injecion de $D\left(\Omega\right)$ dans $L^p\left(\Omega\right)$ est continue a image dense, pour tout $1 \leq p < +\infty$.

3- $L^p\left(\Omega\right)$ s'injecte continument dans $D^{'}\left(\Omega\right)$, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Lemme 1.2.1 (de Gronwall)**.** *si $f(t)$ est une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

$$f(t) \leq A + \int_0^t g(s) f(s) ds \ \ \forall t \in [0, T],$$

où A une constante positive, alors :

$$f(t) \leq A e^{\int g(s) ds} \ \ \forall t \in [0, T].$$

1.3 Convolution et régularation

Dans tout ce paragraphe, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n$. Les preuves des résultats de cette section se trouvent dans [2].

Définition 1.3.1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Le produit convolution de f par g est définie par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Théorème 1.3.1. *Soient f et g vérifiant les conditions de la définition 1.3.1, alors :*

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \;\; et \;\; \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Maintenant, on note $\check{f} = f(-x)\,, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.1. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)\, h = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\check{f} * h\right).$$

Proposition 1.3.2. *Soient f et g vérifiant les conditions de la définition 1.3.1, alors :*

$$supp\,(f * g) \subset \overline{supp\,(g)}.$$

Proposition 1.3.3. *Soient $f \in D(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, avec $K \in \mathbb{N}$ alors :*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)\,.$$

et on a :

$$D^k(f * g) = \left(D^k f\right) * g.$$

En particulier, si $f \in D(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors : $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.4 Espaces de Sobolev

Définition 1.4.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \,/\, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,,\; \forall\, |\alpha| \leq m\}\,,$$

où $D^{\alpha}u$ est la dérivée au sens des distributions. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme.

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \; ess \, |D^{\alpha}u(x)|, \quad \text{pour } p = +\infty$$

est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, alors : $W^{m,p}(\Omega) = H^{m}(\Omega)$.

Proposition 1.4.1 (L'inégalité de Poincaré). *Il existe un constante $C_{\varepsilon}(\Omega) > 0$, telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\varepsilon} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega).$$

En particulier l'expression $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^2(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^2(\Omega)}$.

Théorème 1.4.1 (Formule de Green). *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in H^4(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a :*

$$\int_{\Omega} \Delta^2 uv dx = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \nu} v d\Gamma - \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma.$$

1.5 Espaces fonctionnels à valeurs vectorielles

Dans cette section nous allons introduire de nouveaux espaces qui sont nécessaires pour donner un sens aux problèmes d'évolutions. Soient X un espace de Banach et $a, b \in \mathbb{R}$.

1- L'espce $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ est constitué par des (classes de) fonctions u mesurables sur $]a, b[$ à valeurs dans X, telles que :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(x)\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

et $\|.\|_{L^p(a,b;X)}$ est une norme sur $L^p(a, b; X)$.

$L^p(a, b; X)$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.

2- Pour $p = +\infty$, $L^p(a,b;X)$ est l'espace des (classes de) fonctions u mesurable sur $]a,b[$, à valeurs dans X et bornées p.p sur $]a,b[$. Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup\ ess\, \|u(t)\|_X,$$

$L^\infty(a,b;X)$ est un espace de Banach.

3- Soient $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(a,b;X)$ et $T \in D'(a,b;X)$. On dit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $D'(a,b;X)$ si et seulement si :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } X, \quad \forall \varphi \in D(a,b).$$

4- Soit $S \in D'(a,b;X)$, on a :

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in D(a,b).$$

La fonction $S \to \dfrac{dS}{dt}$ est une fonction continue de $D'(a,b;X)$ sur lui même.

5- Pour $p = 2$ alors $W^{m,p}(a,b;X) = H^m(a,b;X)$.

Si X est un espace de Hilbert alors l'espace $H^m(a,b;X)$, muni du produit scallaire :

$$(u,v)_{H^m(a,b;X)} = \sum_{k=0}^{m} \int_\Omega \left(u^{(k)}(t), v^{(k)}(t)\right)_X dt,$$

est une espace de Hilbert.

Proposition 1.5.1. *Soit X et Y deux espace de Banache sur la corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}^*$ où $\mathbb{C}$, alors :*

1- $C([a,b];X)$ est dense dans $L^p(a,b;X)$, et on a l'injection continue

$$C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X) \ \text{pour } 1 \le p < +\infty.$$

2- Si X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_X$, alors $L^2(a,b;X)$ est aussi un espace de Hilbert et sera muni du produit scalare suivant :

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X \, dt.$$

3- $L^p(a,b;X)$ est séparable, si X est séparable et $1 \le p < +\infty$.

4- Si $X \hookrightarrow Y$, alors $L^p(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, pour $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.

5- Pour $1 \leq p \leq +\infty$ alors :

$$L^p(a,b;X) \hookrightarrow D^{'}(a,b;X).$$

Lemme 1.5.1. *Soient H et V deux espaces de Banach tels que :*

$$H \hookrightarrow V.$$

Si $u \in L^1(0,T;H)$ et $u^{'} \in L^1(0,T;V)$, alors : $u \in C^0([0,T;V])$.

Démonstration : Voir [11].

1.6 La topologie faible et La topologie faible-étoile

1.6.1 La topologie faible

Définition 1.6.1. On appelle topologie faible sur E notée $\sigma\left(E,E^{'}\right)$, la topologie la moins fine rendant toutes les applications de $E^{'}$ continues.

Notation : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in E$. On note :

— Convergence forte : $x_n \to x$.

— Convergence faible : $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.6.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*

1- $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$. $\forall f \in E^{'}$.

1- $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

2- Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et $\|x_n\|_E \leq \lim\ \inf \|x_n\|_E$.

1.6.2 La topologie faible-étoile

Soit E un espace de Banach. On sait que $E^{'}$ est de Banach. On note $E^{''}$ son bidual qui est aussi de Banach. On souhaite munir $E^{'}$ d'une autre topologie, suffisamment faible pour que la Boule unité fermée $B_{E'}(0,1)$ soit compact même si E est de dimension infinie. Soit ζ_x tel que :

$$\zeta_x : \begin{cases} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(s) \end{cases}$$

On note ζ l'application $x \to \zeta_x$, on a alors $\zeta \in \mathcal{L}\left(E, E''\right)$.

Définition 1.6.2. On appelle topologie faible-étoile la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications ζ_x. La topologie faible-étoile se note par $\sigma\left(E', E\right)$.

Notation : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E', et $f \in E'$. On note la convergence faible-étoile par : $f_n \overset{*}{\to} f$.

Proposition 1.6.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a les propriétés suivantes :*

1- $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, pour tout $x \in E$.

2- $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

3- Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E', et $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.

Lemme 1.6.1 (de Aubin lions)**.** *Soit E espace de Banach séparable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E', alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in E'$, telle que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \ \ dans\, E'.$$

1.7 Proprietés de base sur les noyaux de types positifs et fortement définis positifs

Soit X est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$ et une norme $||.||$, pour tout $T \in (0,\infty]$ et $p \in [1,\infty]$, on note $L^p(a,T;X)$, l'espace des fonctions u mesurable, on notée $L^p_{loc}(a,\infty;X)$, l'espace des fonctions appartient à $L^p(a,T;X)$ pour tout $T \in (0,\infty)$.

Définition 1.7.1. Soit $h \in L^1_{loc}(0,\infty)$, on dit que h est un noyau défini positif, si :

$$\int_0^t \langle h * y(s), y(s)\rangle ds \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{1.7.1}$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0,\infty;X)$.

De plus, on dit que, h est un noyau fortement défini positif s'il existe une constant $\delta > 0$ telle que $h(t) - \delta e^{-t}$ est définie positif, c'est à dire :

$$\int_0^t \langle h * y(s), y(s)\rangle ds \geq \delta \int_0^t \langle e * y(s), y(s)\rangle ds, \quad t \geq 0, \tag{1.7.2}$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0, \infty; X)$, où $e(t) = e^{-t}$.

Soit $g \in L^1(0, \infty)$ est une fonction et $G(t) = \int_t^\infty g(s)ds$.

Les résultats suivants sont utiles pour étudier la decroissance exponentielle.

Proposition 1.7.1. *1- Si G est un noyau défini positif, alors :*

$$\int_0^\infty \sin(\omega t)g(t)dt \geq 0, \quad \text{Pour tout } \omega > 0. \tag{1.7.3}$$

2- Si $G \in L^1(0, \infty)$ et g verifies (1.7.3), alors G est noyau définie positif.

Maintenant, nous allons demontrer un résultat analogue pour les noyaux fortement définis positifs.

Démonstration : Voir [4].

Corollaire 1.7.1. ***(i)*** *Si G est un noyau fortement défini positif, alors il existe $\delta > 0$, telle que :*

$$\int_0^\infty \sin(\omega t)g(t)dt \geq \delta \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \quad \text{Pour tout } \omega > 0. \tag{1.7.4}$$

(ii) *Si $G \in L^1(0, \infty)$ et il existe $\delta > 0$ telle que g verifies (1.7.4), alors G est un noyau fortement défini positif.*

Lemme 1.7.1. *Si $g \in L^1(0, \infty)$ est une fonction vérifiant, (1.7.3) alors la fonction perturbée $e^{-\sigma t}g(t), \quad \sigma > 0$, vérifie (1.7.3) aussi bien.*

Proposition 1.7.2. *Soit $g \in L^1(0, \infty)$ une fonction telle que $t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)ds$. Alors :*

$t \longrightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s}g(s)ds, \sigma > 0$, *est un noyau fortement défini positif.*

De plus, si δ est la constante dans (1.7.2), correspendante à $t \longrightarrow \int\limits_t^\infty g(s)ds$, alors, la constante δ_σ pour $t \longrightarrow \int\limits_t^\infty e^{-\sigma s} g(s)ds$ est donnée par :

$$\delta_\sigma = \frac{\delta}{(\sigma+1)^2}. \tag{1.7.5}$$

Lemme 1.7.2. *Soit $h \in C([0,\infty))$ un noyau défini positif, alors $h \geq 0$ et*

$$||h * y(t)||^2 \leq 2h(0) \int\limits_0^t \langle h * y(\tau), y(\tau)\rangle \tau, \quad t \geq 0, \tag{1.7.6}$$

pour tout $y \in L^1_{loc}(0,T;X)$.

Démonstration : *Voir [12],[9].*

Remarque 1.7.1. Si h et un noyau fortement défini positif et δ est la constante de (1.7.2), alors d'après le lemme1.7.2, on a :

$$h(0) - \delta \geq 0. \tag{1.7.7}$$

Lemme 1.7.3. *Soit h et un noyau fortement défini positif vérifiant $h, h' \in L^1(0,\infty)$. Alors :*

$$\int\limits_0^t ||h * y(\tau)||^2 d\tau \leq \frac{1}{\delta}(||h||_1^2 + 4\,\|h'\|_1^2) \int\limits_0^t \langle h * y(\tau), y(\tau)\rangle d\tau, \quad t \geq 0, \tag{1.7.8}$$

pour tout $y \in L^1_{loc}(O,\infty;X)$, où δ est la constante de (1.7.2).

Démonstration : *Voir [13],[9].*

Lemme 1.7.4. *Soit $h \in L^1_{loc}(0,\infty)$ un noyau fortement défini positif, alors :*

$$\int\limits_0^t ||y(\tau)||^2 d\tau \leq ||y(0)||^2 + \frac{2}{\delta}\left(\int\limits_0^t \langle h * y(\tau), y(\tau)\rangle d\tau + \int\limits_0^t \langle h * y'(\tau), y'(\tau)\rangle d\tau\right), \tag{1.7.9}$$

pour tout $t \geq 0$ et $y \in L^2_{loc}(0,\infty;X)$, $y^{'} \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$, avec δ est la constante dans (1.7.2).

Démonstration : Voir [9],[7].

Le noyau résoulvant :

Des résultats classiques pour les équations integrales nous assure que pour tout noyau $h \in L^1_{loc}(0,\infty)$ et pour $v \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$, le problème :

$$y(t) - h * y(t) = v(t), \quad t \geq 0, \tag{1.7.10}$$

admet une unique solution $y \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$. En particulier, il existe une unique solution $r \in L^1_{loc}(0,\infty)$ de

$$r(t) - h * r(t) = h(t), \quad t \geq 0. \tag{1.7.11}$$

Une telle solution est appellée noyau résolvant de h. De plus, la solution y de (1.7.10) est donnée par la formule de variation de la constante :

$$y(t) = v(t) + r * v(t), \quad t \geq 0, \tag{1.7.12}$$

où r est le noyau résolvant de h.

Maintenant, on rappelle le théorème de Paley-Wiener qui nous donne une condition nécéssaire et suffisante pour que le noyau résonvant $h \in L^1(0,\infty)$ soit dans $L^1(0,\infty)$.

Corollaire 1.7.2. *Soit* $g \in L^1(0,\infty)$ *telle que* $\int\limits_0^\infty g(s)ds < 1$, *avec on suppose que* $G(t) = \int\limits_t^\infty g(s)ds$ *est un noyau fortement définie positif. Alors :*

1- le noyau résolvant r *de* g *appartient à* $L^1(0,\infty)$ *;*

2- pou tout $v \in L^p(0,\infty;X), 1 \leq p \leq \infty$, *la solution* y *de l'equation*

$$y(t) - g * y(t) = v(t), \quad t \geq 0,$$

appartient à $L^p(0,\infty;X)$ *et*

$$||y||_p \leq (1 + ||r||_1)||v||_p. \tag{1.7.13}$$

Démonstration : Voir [4].

Pour la convenance du lecteur, nous rappelons la notion de resolvent pour l'équation :

$$u''(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = 0, \tag{1.7.14}$$

avec A l'opératour linéaire auto-adjoint sur X à domaine dense $D(A)$ et $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$.

CHAPITRE 2

Existence et unicité de la solution du problème de petrovski avec un terme mémoire

Introduction : Dans ce chapitre on va prouver l'existence et l'unicité de la solution forte et de la solution faible, en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin**. La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode trés robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ.

On considère dans ce chapitre le problème de petrovski avec un terme mémoire :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(t,x) = \partial_v u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ u(.,0) = u^0, u_t(.,0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec un frontière Γ, g représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, ν la dérivée normale orienté vers l'extérieur de Ω,

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèse(H.1)

soit $A = \Delta^2 : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ l'éperatour linéaire auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$, avec $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$, tel que, pour tout $M > 0$,

$$\langle Ax, x\rangle \geq M \|x\|^2, \ \forall x \in D(A),$$

où

$$D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),$$

et

$$Ax(\xi) = \Delta^2 x(\xi), \ x \in D(A) \ \xi \in \Omega.$$

Hypothèse(H.2)

La fonction $g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ vérifie les conditions suivantes :

1) $g \in L^1(0, \infty)$, est telle que :

$$\int_0^\infty g(t)ds < 1.$$

2) On pose $G(t) := \int_t^\infty g(s)ds$, telle que :

$$t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)ds \geq 0.$$

La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode pédagogique et facile à comprendre, mais cependant elle exige plus de régularité des fonctions utilisées. De plus des hypothèses **1 et 2,** faites, sur g, on suppose que :

3) $g^{'}, g^{''} \in L^1(0, \infty)$.

Notations et définitions

On commence par définire les espaces suivants :

On pose :

$$D\left(\Delta^2\right) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),$$

$$D(-\Delta) = H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) ; v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

$H_0^2(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|v\|_{H_0^2(\Omega)} = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

$X = L^2(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |v|^2 \, dx.$$

On note par $\mathbb{Q}_t = \Omega \times]0, T[$, et

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx.$$

Théorème 2.0.1. *Supposons que les hypothèses **(H.1)** et **(H.2)** sont vérifées.*

1- Si $\left\{u^0, u^1\right\} \in D\left(\Delta^2\right) \times D(-\Delta)$, alors il existe une unique solution forte du problème (2.0.1) telle que :

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)\right),$$

$$u' \in L^\infty\left(0, T; H_0^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)\right),$$

$$u'' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

2- Si $\left\{u^0, u^1\right\} \in D(-\Delta) \times X$, alors il existe une unique solution faible du problème (2.0.1) telle que :

$$u \in C^1\left([0, T]; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0, T]; H_0^2(\Omega)\right).$$

2.1 Solution forte

Dans cette section, on va prouver l'existense et l'unicité de la solution forte du problème (2.0.1). En multipliant l'équation différentielle.

$$u'' + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds = 0.$$

formellement par une fonction v , et en intègrant le résultat sur Ω, puis en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} u''(t,x)\, v(t,x)\, dx + \int_{\Omega} \Delta u(t;x)\, \Delta v(t,x)\, dx + \int_{\Omega} g * \Delta u(t,x)\, \Delta v(t,x)\, dx = 0,$$

$\forall t \in \left]0, +\infty\right[$.

On considère l'espace

$$W = \left\{ \omega,\ \omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \right\}.$$

Comme l'espace W est séparable, donc il existe une suite $\left\{\omega_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ dense dans W qui est orthogonale dans $L^2(\Omega)$. On définit :

$$V_m = [\omega_1, \omega_2, ...\omega_m]$$

V_m est l'espace de dimension finie, engendré par $\omega_1, \omega_2, ...\omega_m$. Soit $u_m(t) \in V_m$ alors :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t)\, \omega_i,$$

vérifie l'équation suivante :

$$\left(u_m''(t), \omega_i\right) + \left(\Delta u_m(t), \Delta\omega_i\right) - \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta\omega_i\right) ds = 0, \tag{2.1.2}$$

avec les données initiales (quand $m \to \infty$) :

$$\begin{aligned} u_m(0) &= \sum_{i=1}^{m} \left(u_m(0), \omega_i\right) \omega_i \to u^0 \quad \text{dans} \quad H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega), \\ u_m'(0) &= \sum_{i=1}^{m} \left(u_m'(0), \omega_i\right) \omega_i \to u^1 \quad \text{dans} \quad H_0^2(\Omega) \cap L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Par des méthodes standard des EDO, on démontre l'existence de la solution approchée pour le problème (2.1.2) sur un certain intervalle $[0, t_m)$. Puis, cette solution peut être prolonger à l'intervalle entier $[0, T]$, où $T = \infty$, en employant la première estimation suivante :

2.1.1 Première estimation à priori

La première estimation à priori nous permet de prolonger la solution obtenue à tout l'intervalle $[0.T]$. Premièrment on montre que :

$$\left(u_m''(t), u_m'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m'(t)\right\|_\Omega^2.$$

On considère dans (2.1.2)$v = \omega_j,\ j = 1, 2, ..., m$. En multipliant par $h_{jm}^{'}(t)$, $t \in [0, t_m[$ et en sommant sur j de 1 à m, on obtient :

$$\left(u_m''(t), u_m'(t)\right) + \left(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)\right) - \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(t)\right) ds = 0. \quad (2.1.4)$$

Sans perte de généralité, on considère la base $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ comme étant orthonormale dans $L^2(\Omega)$. Grâce à cela et a (2.1.2), on a : pour $j = 1, 2, ..., m$:

$$h_{jm}''(t) = \left(u_m''(t), \omega_j\right) = -\left(\Delta u_m(t), \Delta\omega_j\right) + \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta\omega_j\right) ds.$$

D'où $h_{jm}''(t) \in L^2(0, t_m)$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_m} \left\|u_m''(t)\right\|_\Omega^2 dt &= \int_0^{t_m} \left\|\sum_{j=1}^m h_{jm}''(t)\,\omega_j\right\|_\Omega^2 dt \\
&\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m \left\|h_{jm}''(t)\,\omega_j\right\|_\Omega^2 dt \\
&= \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m \left|h_{jm}''(t)\right|^2 \left\|\omega_j\right\|_\Omega^2 dt \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left\|\omega_j\right\|_\Omega^2 \int_0^{t_m} \left|h_{jm}''(t)\right|^2 dt < +\infty
\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$u_m''(t) \in L^2\left(0, t_m; L^2(\Omega)\right). \quad (2.1.5)$$

Comme $u_m'(t)$ est obsolument continue sur $[0, t_m[$, on conclut que :

$$\int_\Omega u_m''(t,x), u_m'(t,x)\, dx \in L^1(0, t_m). \quad (2.1.6)$$

On considère $\Phi \in D(0, t_m)$, alors de (2.1.5) et du théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}
\langle u_m''(t), u_m'(t), \Phi \rangle_{D'(0,t_m),D(0,t_m)} &= \left\langle \int_\Omega u_m''(t)\, u_m'(t)\, dx, \Phi \right\rangle_{D'(0,t_m),D(0,t_m)} \\
&= \int_0^{t_m} \int_\Omega u_m''(t)\, u_m'(t)\, \Phi(t)\, dxdt \\
&= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} (u_m'(t))^2\, \Phi(t)\, dtdx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ (u_m'(t,x))^2\, \Phi(t)\, |_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} (u_m'(t,x))^2\, \Phi'(t)\, dt \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m} \int_\Omega (u_m'(t,x))^2\, \Phi'(t)\, dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \|u_m'(t)\|_\Omega^2, \Phi' \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|_\Omega^2, \Phi \right\rangle.
\end{aligned}$$

alors :

$$(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|_\Omega^2. \tag{2.1.7}$$

De même, on prouve que :

$$(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\Delta u_m(t)\|_\Omega^2. \tag{2.1.8}$$

En remplaçant, (2.1.7) et (2.1.8) dans (2.1.4), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|_\Omega^2 \right) - (g * \Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)) = 0$$

En intègrant sur $[0, t[$, $t \in]0, T[$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_m(t)\|_\Omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\|u_m'(0)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_m(0)\|_\Omega^2 + \int_0^t (g * \Delta u_m(s), \Delta u_m'(s))\, ds.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Grâce à hypothèse **(H.2-2)**, on a :

$$\begin{aligned}
g * \Delta u_m(s) &= -\int_0^s G'(s-\tau)\, \Delta u_m(\tau)\, d\tau \\
&= G(0)\, \Delta u_m(s) - G(s)\, \Delta u_m(0) - \int_0^s G(s-\tau)\, \Delta u_m'(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Par conséquent on déduit :

$$\int_0^t \left(g * \Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds = G(0) \int_0^t \left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds - \left(\Delta u_m(0), \int_0^t G(s) \Delta u_m'(s)\, ds\right)$$
$$- \int_0^t \left(G * \Delta u_m'(s), \Delta u_m'(s)\right) ds. \tag{2.1.10}$$

En substituant (2.1.10) dans (2.1.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_m'(t)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2 + \int_0^t \left(G * \Delta u_m'(s), \Delta u_m'(s)\right) ds \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2 + G(0) \int_0^t \left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds \\
&- \left(\Delta u_m(0), \int_0^t G(s) \Delta u_m'(s)\, ds\right).
\end{aligned}$$

Mais, $\displaystyle\int_0^t \left(G(s) * \Delta u_m'(s), \Delta u_m'(s)\right) \geq 0$ car G est un noyau fortement défini positif, alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_m'(t)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2 + G(0) \int_0^t \left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds \\
&+ \frac{1}{2}\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2 - \left\langle \Delta u_m(0), \int_0^t G(s) \Delta u_m'(s)\, ds \right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

D'autre part, de (2.1.8) on a :

$$\begin{aligned}
G(0) \int_0^t \left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) &= \frac{G(0)}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \left\|\Delta u_m(s)\right\|_\Omega^2 ds \\
&= \frac{G(0)}{2} \left(\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2 - \left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2\right).
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Comme

$$\int_0^t G(s) \Delta u_m'(s)\, ds = G(t) \Delta u_m(t) - G(0) \Delta u_m(0) + \int_0^t g(s) \Delta u_m(s)\, ds$$

alors :

$$-\left(\Delta u_m(0), \int_0^t G(s)\,\Delta u_m'(s)\,ds\right) = G(0)\,\|\Delta u_m(0)\|_\Omega^2 - (\Delta u_m(0), G(t)\,\Delta u_m(t)) - \left(\Delta u_m(0), \int_0^t g(s)\,\Delta u_m(s)\,ds\right). \tag{2.1.13}$$

En remplaçons (2.1.12) et (2.1.13) dans (2.1.11), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_\Omega^2 + \frac{1-G(0)}{2}\|\Delta u_m(t)\|_\Omega^2 \\ &\le \frac{1}{2}\|u_m'(0)\|_\Omega^2 + \frac{1+G(0)}{2}\|\Delta u_m(0)\|_\Omega^2 \\ &-(\Delta u_m(0), G(t)\,\Delta u_m(t)) - \int_0^t g(s)\,(\Delta u_m(0), \Delta u_m(s))\,ds. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Maintenant on va estimer les termes du membre droite de (2.1.14).

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, avec l'hypothèse **(H.2-2)**, on aura :

Estimation du terme $L_1 = -(\Delta u_m(0), G(t)\,\Delta u_m(t))$

$$\begin{aligned} |L_1| &= |(\Delta u_m(0), G(t)\,\Delta u_m(t))| \\ &\le \|g\|_1 \|\Delta u_m(0)\| \|\Delta u_m(t)\| \\ &\le \frac{1}{4}\|g\|_1^2 \|\Delta u_m(0)\|_\Omega^2 + \|\Delta u_m(t)\|_\Omega^2. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Estimation du terme $L_2 = -\int_0^t g(s)\,(\Delta u_m(0), \Delta u_m(s))\,ds$

$$\begin{aligned} |L_2| &= \left|\int_0^t g(s)\,(\Delta u_m(0), \Delta u_m(s))\,ds\right| \\ &\le \int_0^t |g(s)|\,\|\Delta u_m(0)\|\,\|\Delta u_m(s)\|\,ds \\ &\le \int_0^t |g(s)|\left(\frac{1}{4}\|\Delta u_m(0)\|^2 + \|\Delta u_m(s)\|^2\right)ds \\ &= \frac{1}{4}\|g\|_1 \|\Delta u_m(0)\|_\Omega^2 + \int_0^t |g(s)|\,\|\Delta u_m(s)\|_\Omega^2\,ds. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

En remplaçant (2.1.15), (2.1.16) dans (2.1.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_m'(t)\right\|_\Omega^2+\left(\frac{-1-G(0)}{2}\right)\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2\\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2+C\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2+\int_0^t |g(s)|\left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 ds
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

où

$$C=\frac{1+G(0)}{2}+\frac{1}{4}\|g\|_1\left(1+\|g\|_1\right).$$

Donc

$$\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2\leq \frac{-2}{1+G(0)}\left(\frac{1}{2}\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2+C\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2\right)+\int_0^t \frac{-2|g(s)|}{1+G(0)}\left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2\leq \frac{-2}{1+G(0)}\left(\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2+C\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2\right)\exp\left(\frac{-2\|g\|_1}{1+G(0)}\right). \tag{2.1.18}$$

Maintenant de (2.1.17) et (2.1.18) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\|u_m'(t)\right\|_\Omega^2+\left\|\Delta u_m(t)\right\|_\Omega^2\\
&\leq\left(2-\frac{2}{1+G(0)}\exp\left(\frac{-2\|g\|_1}{1+G(0)}\right)\left(1+\|g\|_1\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2+C\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$u_m(0)=u_m^0\to u^0 \quad \text{dans} \quad H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$$

et

$$u_m'(0)=u_m^1\to u^1 \quad \text{dans} \quad H_0^2(\Omega)\cap L^2(\Omega).$$

Donc, il existe un constante C indépendante de t et de m telle que :

$$\left\|u_m'(0)\right\|_\Omega^2+\left\|\Delta u_m(0)\right\|_\Omega^2\leq C,$$

d'où

$$\left\| u_m'(t) \right\|_\Omega^2 + \left\| \Delta u_m(t) \right\|_\Omega^2 \leq C. \tag{2.1.19}$$

Par conséquent, la solution approchée $u_m(t)$ peut être prolonger à tout l'itervalle $[0,T]$; $\forall m \in \mathbb{N}$, donc on a l'inégalité (2.1.19) est vraie p.p sur $[0,T]$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\{u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée} \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^2(\Omega)\right), \tag{2.1.20}$$

$$\{\Delta u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée} \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.1.21}$$

$$\left\{u_m^{'}(t)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée} \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.1.22}$$

2.1.2 Second estimation à priori

On commence par prouver, que la dérivée au sens des distributions et au sens classique du premier et du deuxième ordre, si elles existent, coïnsident, alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u_m, \Phi \right\rangle &= -\int_0^T u_m(t)\,\Phi'(t)\,dt \\
&= -\int_0^T \left(\sum_{j=1}^m h_{jm}(t)\,\omega_j\right)\Phi'(t)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^m \left(-\int_0^T h_{jm}(t)\,\Phi'(t)\,dt\right)\omega_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{-\left|h_{jm}(t)\,\Phi(t)\right|_0^T + \int_0^T h_{jm}'(t)\,\Phi(t)\,dt\right\}\omega_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{\int_0^T h_{jm}'(t)\,\Phi(t)\,dt\right\}\omega_j \\
&= \int_0^T u_m'(t)\,\Phi(t)\,dt \\
&= \left\langle u_m', \Phi \right\rangle
\end{aligned}$$

et de (2.1.5) on montre que :

$$\left\langle \frac{d}{dt}u_m', \Phi \right\rangle = \left\langle u_m'', \Phi \right\rangle.$$

De même, on prouve que :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\Delta u_m (t), \Delta \omega_j \right), \Phi \right\rangle = \left\langle \left(\Delta u'_m (t), \Delta \omega_j \right), \Phi \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-s) \left(\Delta u_m (s), \Delta u'_m (t) \right) ds \right), \Phi \right\rangle =$$
$$\left\langle \int_0^t g'(t-s) \left(\Delta u_m (s), \Delta u'_m (t) \right) ds, \Phi \right\rangle + \left\langle g(0) \left(\Delta u_m (t), \Delta u'_m (t) \right), \Phi \right\rangle .$$

On obtient la dernière égalité en appliquant la Prposition1.3.3.

A partire des relations ci-dessus et de (2.1.5), on a :

$$\frac{d}{dt} \left(u''_m (t), \omega_j \right) = -\left(\Delta u'_m (t), \Delta \omega_j \right) + \int_0^t g'(t-s) \left(\Delta u_m (s), \Delta \omega_j \right) ds + g(0) \left(\Delta u_m (t), \Delta \omega_j \right) \tag{2.1.23}$$

dans $L^2 (0.T)$, d'où : $h'''_{jm} (t) \in L^2 (0.T)$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| u'''_m (t) \right\|_\Omega^2 dt &= \int_0^T \left\| \sum_{j=1}^m h'''_{jm} (t) \omega_j \right\|_\Omega^2 dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{j=1}^m \left\| h'''_{jm} (t) \omega_j \right\|_\Omega^2 dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^m \left| h'''_{jm} (t) \right|^2 \left\| \omega_j \right\|_\Omega^2 dt \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left\| \omega_j \right\|_\Omega^2 \int_0^T \left| h'''_{jm} (t) \right|^2 dt < +\infty \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$u'''_m (t) \in L^2 \left(0.T; L^2 (\Omega) \right).$$

A partir de (2.1.23), on trouve :

$$\left(u'''_m (t), \omega_j \right) + \left(\Delta u'_m (t), \Delta \omega_j \right) - \int_0^t g'(t-s) \left(\Delta u_m (s), \Delta \omega_j \right) ds - g(0) \left(\Delta u_m (t), \Delta \omega_j \right) = 0.$$

En multipliant par h''_{jm} et en sommant sur j, on aura :

$$\left(u'''_m(t), u''_m(t)\right) + \left(\Delta u'_m(t), \Delta u''_m(t)\right) - \int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u''_m(t)\right) ds$$

$$-g(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u''_m(t)\right) = 0.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u''_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta u'_m(t)\right\|^2 - g(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u''_m(t)\right)$$

$$-\int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u''_m(t)\right) ds = 0. \tag{2.1.24}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u''_m(t)\right) ds - g(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u''_m(t)\right) \\
&= -\frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(t)\right) ds + \int_0^t g''(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(t)\right) ds \\
&+ g'(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)\right) - g(0)\frac{d}{dt}\left(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)\right) + g(0)\left(\Delta u'_m(t), \Delta u'_m(t)\right),
\end{aligned}$$

donc (2.1.24) peut être écrite, sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u''_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta u'_m(t)\right\|^2 - \frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(t)\right) ds \\
&+ \int_0^t g''(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(t)\right) ds + g'(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)\right)
\end{aligned}$$

$$-g(0)\frac{d}{dt}\left(\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)\right) + g(0)\left(\Delta u'_m(t), \Delta u'_m(t)\right) = 0,$$

en intègrant sur $(0,t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|u_m''(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left\|u_m''(0)\right\|^2+\int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s),\Delta u_m'(t)\right)ds\\ &+\frac{1}{2}\left\|\Delta u_m'(0)\right\|^2-\int_0^t\int_0^\tau g''(\tau-s)\left(\Delta u_m(s),\Delta u_m'(\tau)\right)dsd\tau\\ &-g'(0)\int_0^t\left(\Delta u_m(s),\Delta u_m'(s)\right)ds+g(0)\left(\Delta u_m(t),\Delta u_m'(t)\right)\\ &-g(0)\left(\Delta u_m(0),\Delta u_m'(0)\right)-g(0)\int_0^t\left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2 ds.\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

On a besoin d'estimer le membre de droite de l'inégalité (2.1.25).

On commence par l'estimation de la suite $\left\{u_m''(0)\right\}$, en posant $t=0$ et en prenant $v=u_m''(0)$ dans (2.1.2), alors on aura :

$$\left(u_m''(0),u_m''(0)\right)+\left(\Delta u_m(0),\Delta u_m''(0)\right)=0.$$

D'après la formule de Green, on a :

$$\left\|u_m''(0)\right\|^2+\left(\Delta^2 u_m(0),u_m''(0)\right)=0.$$

De (2.1.3), et des inégalités de Cauchy-Schwarz, et de Young, on a :

$$\begin{aligned}\left\|u_m''(0)\right\|^2 &= -\left(\Delta^2 u_m(0),u_m''(0)\right)\\ &\le \left\|\Delta^2 u_m(0)\right\|_\Omega\left\|u_m''(0)\right\|_\Omega\\ &\le \left\|\Delta^2 u_m(0)\right\|_{H^4(\Omega)}^2\left\|u_m''(0)\right\|_\Omega^2\\ &\le \frac{1}{4\epsilon}\left\|u_m(0)\right\|_{H^4(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|u_m''(0)\right\|_\Omega^2\\ &\le \frac{M}{4\epsilon}+\varepsilon\left\|u_m''(0)\right\|_\Omega^2.\end{aligned}$$

où M et un constante qui majore $\{u_m(0)\}$ dans $H^4(\Omega)$, car

$$u_m(0)\to u^0 \quad \text{dans} \quad H^4(\Omega),$$

d'où :

$$\left\| u''_m(0) \right\| \leq L_1, \tag{2.1.26}$$

où L_1 est une constante positive indépendante de m.

Estimation du terme $K_2 = \frac{1}{2}\left\| \Delta u'_m(0) \right\|^2 - g(0)\left(\Delta u_m(0), \Delta u'_m(0)\right)$.

de (2.1.3) et (2.1.19), on déduit que :

$$\frac{1}{2}\left\| \Delta u'_m(0) \right\|^2 - g(0)\left(\Delta u_m(0), \Delta u'_m(0)\right) \leq L_2, \tag{2.1.27}$$

avec L_2 une constante positif independante de m.

Estimation du terme $K_3 = \int_0^t g'(t-s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(t)\right) ds$.

En utilisant **(H.2-3)**, les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, et le théoréme 1.3.1, on aura :

$$\begin{aligned}
|K_3| &= \left| \left(\Delta u'_m(t), \int_0^t g'(t-s)\,\Delta u_m(s)\, ds \right) \right| \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| \Delta u'_m(t) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^t g'(t-s)\,\Delta u_m(s)\, ds \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| \Delta u'_m(t) \right\|_\Omega \left\| g' * \Delta u_m(t) \right\|_\Omega \\
&\leq \left\| \Delta u'_m(t) \right\|_\Omega \left\| \Delta u_m(t) \right\|_\Omega \left\| g' \right\|_1 \\
&\leq \varepsilon \left\| \Delta u'_m(t) \right\|_\Omega^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| g' \right\|_1^2 \left\| \Delta u_m(t) \right\|_\Omega^2 \\
&= \varepsilon \left\| \Delta u'_m(t) \right\|_\Omega^2 + L_3(T),
\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

où $\varepsilon > 0$.

Estimation du terme $K_4 = -\int_0^t \int_0^\tau g''(\tau - s)\left(\Delta u_m(s), \Delta u'_m(\tau)\right) ds d\tau$.

$$
\begin{aligned}
|K_4| &= \left|\int_0^t \left(\Delta u_m'(\tau), \int_0^\tau g''(\tau-s)\,\Delta u_m(s)\,ds\right) d\tau\right| \\
&\le \int_0^t \left(\int_\Omega \left|\Delta u_m'(\tau)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^\tau g''(\tau-s)\,\Delta u_m(s)\,ds\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&= \int_0^t \left\|\Delta u_m'(\tau)\right\|_\Omega \left\|g'' * \Delta u_m(\tau)\right\|_\Omega d\tau \\
&\le \int_0^t \left\|\Delta u_m'(\tau)\right\|_\Omega \left\|g''\right\|_1 \left\|\Delta u_m(\tau)\right\|_\Omega d\tau \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\Delta u_m'(\tau)\right\|_\Omega^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|g''\right\|_1^2 \left\|\Delta u_m(\tau)\right\|_\Omega^2 d\tau \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\Delta u_m'(\tau)\right\|_\Omega^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^T \left\|g''\right\|_1^2 \left\|\Delta u_m(\tau)\right\|_\Omega^2 d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\Delta u_m'(\tau)\right\|_\Omega^2 d\tau + L_4(T).
\end{aligned} \tag{2.1.29}
$$

Estimation du terme $K_5 = -g'(0)\int_0^t \left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds.$

$$
\begin{aligned}
|K_5| &= \left|\int_0^t g'(0)\left(\Delta u_m(s), \Delta u_m'(s)\right) ds\right| \\
&\le \int_0^t g'(0)\left\|\Delta u_m'(s)\right\| \left\|\Delta u_m(s)\right\| ds \\
&\le \varepsilon\left(g'(0)\right)^2 \int_0^t \left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t \left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 ds \\
&\le \varepsilon\left(g'(0)\right)^2 \int_0^t \left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T \left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 ds \\
&= \varepsilon\left(g'(0)\right)^2 \int_0^t \left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2 ds + L_5(T).
\end{aligned} \tag{2.1.30}
$$

Il reste à estimer la quantité $K_6 = -g(0)\left(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)\right).$

$$
\begin{aligned}
|K_6| &= \left|g(0)\left(\Delta u_m(t)\,\Delta u_m'(t)\right)\right| \\
&\le g(0)\left\|\Delta u_m(t)\right\| \left\|\Delta u_m'(t)\right\| \\
&\le \epsilon\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2 + \frac{(g(0))^2}{4\varepsilon}\left\|\Delta u_m(t)\right\|^2 \\
&= \epsilon\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2 + L_6(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.1.31}
$$

De (2.1.26), (2.1.27), (2.1.28), (2.1.29), (2.1.30) et (2.1.31) on conclut que :

$$\frac{1}{2}\left\|u_m''(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2\leq 2\varepsilon\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2+\left(\varepsilon\left(g'(0)\right)^2+\frac{1}{2}\right)\int_0^t\left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2ds+L_7 \tag{2.1.32}$$

où L_7 est constante positive independant de $m,$ donc :

$$\left\|u_m''(t)\right\|^2+(1-4\varepsilon)\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2\leq L_7+\left(2\varepsilon\left(g'(0)\right)^2+1\right)\int_0^t\left\|u_m''(s)\right\|^2+(1-4\varepsilon)\left\|\Delta u_m'(s)\right\|^2ds. \tag{2.1.33}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\left\|u_m''(t)\right\|^2+(1-4\varepsilon)\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2\leq L_7\exp\left(2\varepsilon\left(g'(0)\right)^2+1\right),$$

d'où :

$$\left\|u_m''(t)\right\|^2+\left\|\Delta u_m'(t)\right\|^2\leq L_8. \tag{2.1.34}$$

pour tout $t\in[0,T]$ où L_8 est constante positive indépendante de m.

L'estimation (2.1.34) implique :

$$\left\{u_m''(t)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.1.35a}$$

$$\left\{\Delta u_m'(t)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.1.36}$$

$$\left\{u_m'(t)\right\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right). \tag{2.1.37}$$

2.1.3 Passage à la limite

Initialement, en identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual, on aura :

$$L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right)\equiv\left[L^1\left(0;T;H^{-2}(\Omega)\right)\right]'$$

$$L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right)\equiv\left[L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right)\right]'$$

et comme $H^{-2}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ sont séparables alors $\left[L^1\left(0;T;H^{-2}(\Omega)\right)\right]'$ et $\left[L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right)\right]'$ sont séparables (voir le proposition1.5.1). D'apres le lemme de Aubin lions et des estimations à priori, il existe une sous suite $\{u_\mu\}$ de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall T>0$

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right), \tag{2.1.38}$$

$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right), \tag{2.1.39}$$

$$u''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right) . \tag{2.1.40}$$

Comme

$$u''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right) ,$$

alors :

$$\left\langle u''_\mu, \varphi\right\rangle \to \left\langle u'', \varphi\right\rangle, \ \forall \varphi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

C'est-à-dire :

$$\int_0^T \left(u''_\mu(t), \varphi(t)\right) dt \to \int_0^T \left(u''(t), \varphi(t)\right) dt.$$

Comme $\omega_j \in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, pour $\Phi \in D(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T)$, il s'ensuit que :

$$\int_0^T \left(u''_\mu(t), \omega_j\right) \Phi(t)\, dt \to \int_0^T \left(u''(t), \omega_j\right) \Phi(t)\, dt \tag{2.1.41}$$

De (2.1.38), on a :

$$\Delta u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right) \tag{2.1.42}$$

alors :

$$\left\langle \Delta u_\mu, \varphi\right\rangle \to \left\langle \Delta u, \varphi\right\rangle, \ \forall \varphi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

On a :

$$\Delta\omega_j\Phi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

Pour $\varphi = \Delta\omega_j\Phi$, on a :

$$\int_0^T \left(\Delta u_\mu(t), \Delta\omega_j\right) \Phi(t)\, dt \to \int_0^T \left(\Delta u(t), \Delta\omega_j\right) \Phi(t)\, dt. \tag{2.1.43}$$

De (2.1.42), on a :

$$g * \Delta u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} g * \Delta u \quad \text{dans} \quad L^\infty \left(0; T; L^2(\Omega)\right),$$

et donc :

$$\langle g * \Delta u_\mu, \varphi \rangle \to \langle g * \Delta u, \varphi \rangle, \; \forall \varphi \in L^1 \left(0; T; L^2(\Omega)\right).$$

Pour $\varphi = \Delta \omega_j \Phi$, on a :

$$\int_0^T \left(g * \Delta u_\mu(t), \Delta \omega_j\right) \Phi(t)\, dt \to \int_0^T \left(g * \Delta u(t), \Delta \omega_j\right) \Phi(t)\, dt. \tag{2.1.44}$$

Soit $j \in \mathbb{N}$ et considérons $\mu > j$. En multipliant (2.1.2) par $\Phi \in D(0,T)$, en posant $v = \omega_j$ et en intègrant sur $[0,T]$, il en résulte :

$$\int_0^T \left(u_\mu''(t), \omega_j\right) \Phi(t)\, dt + \int_0^T \left(\Delta u_\mu(t), \Delta \omega_j\right) \Phi(t)\, dt - \int_0^T \left(g * \Delta u_\mu(t), \Delta \omega_j\right) \Phi(t)\, dt = 0.$$

Compte tenu des convergences (2.1.41), (2.1.43) et (2.1.44) on peut passer à la limite dans l'équation présédante quend $\mu \to +\infty$ pour obtient :

$$\int_0^T \left(u''(t), v\right) \Phi(t)\, dt + \int_0^T \left(\Delta u(t), \Delta v\right) \Phi(t)\, dt - \int_0^T \left(g * \Delta u(t), \Delta v\right) \Phi(t)\, dt = 0.$$

Pour tout les ω_j dans $W = \left\{\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right\}$; on a :

$$\int_0^T \left(u''(t), v\right) \Phi(t)\, dt + \int_0^T \left(\Delta u(t), \Delta v\right) \Phi(t)\, dt - \int_0^T \left(g * \Delta u(t), \Delta v\right) \Phi(t)\, .dt = 0$$

$\forall \Phi \in D(0,T)$ et $\forall v \in W$. En pariculier, pour $v = \varphi \in D(\Omega)$, on a :

$$\langle u'', \varphi\Phi \rangle + \left\langle \Delta^2 u, \varphi\Phi \right\rangle - \left\langle g * \Delta^2 u, \varphi\Phi \right\rangle = 0,$$

c'est à dire :

$$\left\langle u'' + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u, \varphi\Phi \right\rangle = 0, \; \forall (\Phi, \varphi) \in D(0,T) \times D(\Omega).$$

Comme l'espace $\{\varphi\Phi, \Phi \in D(0,T), \varphi \in D(\Omega)\}$, est dense dans $D(\mathbb{Q}_t)$, alors :

$$u'' + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u = 0 \text{ dans } D'(\mathbb{Q}_t),$$

donc :

$$u'' + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u = 0 \text{ dans } L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

2.1.4 Conditions aux limites

Comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution du problème approché vérifie automatiquement les conditions au limites $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$

2.1.5 Données initiales

Dans cette section, on montre que :

$$u^0 = u(0) \text{ et } u^1 = u'(0).$$

Premièrement, on a : $u, u' \in L^1\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right)$ et $u'' \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right)$, alors d'après le lemme1.5.1, on a :

$$u \in C^0\left([0.T];H_0^2(\Omega)\right) \text{ et } u' \in C^0\left([0.T];L^2(\Omega)\right).$$

Soit $\Phi \in C^1([0.T])$ avec $\Phi(0) = 1$ et $\Phi(T) = 0$. Comme

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans} \quad L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right),$$

grâce à l'injetion

$$L^\infty(0;T;V) \hookrightarrow L^\infty\left(0;T;L^2(\Omega)\right)$$

on aura :

$$\left\langle u'_\mu, \varphi\right\rangle \to \left\langle u', \varphi\right\rangle, \forall \varphi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

C'est-à-dire :

$$\int_0^T \left(u'_\mu(t), \varphi(t)\right) dt \to \int_0^T \left(u'(t), \varphi(t)\right) dt, \quad \forall \varphi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right).$$

Comme $\omega_j\Phi \in L^1\left(0;T;L^2(\Omega)\right)$, en particulier pour $\varphi = \omega_j\Phi$ on a :

$$\int_0^T \left(u'_\mu(t), \omega_j\right)\Phi(t)\,dt \to \int_0^T \left(u'(t), \omega_j\right)\Phi(t)\,dt, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Aprés intègration par parties et convergence $u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty\left(0;T;H_0^2(\Omega)\right)$, on obtient :

$$\left[\left(u_\mu(t), \omega_j\right)\Phi(t)\right]_0^T - \int_0^T \left(u_\mu(t), \omega_j\right)\Phi'(t)\,dt \to \left[\left(u(t), \omega_j\right)\Phi(t)\right]_0^T - \int_0^T \left(u(t), \omega_i\right)\Phi'(t)\,dt$$

C'ést -à-dire :

$$\left(u_\mu(0), \omega_j\right) - \int_0^T \left(u_\mu(t), \omega_j\right)\Phi'(t)\,dt \to \left(u(0), \omega_j\right) - \int_0^T \left(u(t), \omega_j\right)\Phi'(t)\,dt,$$

ce que implique que : $\left(u_\mu(0), \omega_j\right) \to \left(u(0), \omega_j\right)$ de la densité de $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega)$, on a : $u_\mu(0) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, de (2.1.3), on a :

$$u_\mu(0) \to u^0 \quad \text{dans} \quad H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Ce que implique que : $u_\mu(0) \rightharpoonup u^0$ dans $L^2(\Omega)$. De l'unicité de la limite faible, on obtient que : $u(0) = u^0$. De manière analogue, on montre que : $u'(0) = u^1$.

2.1.6 Unicité

Soient u et v deux solutions forte du problème (2.0.1). On considère $\omega = u - v$, on a alors ω qui vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \omega_{tt} + \Delta^2\omega - \displaystyle\int_0^s g(s-\tau)\,\Delta^2\omega(\tau)d\tau = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \omega = \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ \omega(x,0) = \omega_t(x,0) = 0 & \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1.45}$$

En multipliant la première ligne de (2.1.45) par $\omega'(t)$, alors il vient :

$$\left(\omega''(t), \omega'(t)\right) + \left(\Delta^2\omega(t), \omega'(t)\right) - \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta^2\omega(\tau), \omega'(t)\right)d\tau = 0.$$

En appliquant la formule de Green, on aura :

$$\left(\omega''(t), \omega'(t)\right) + \left(\Delta\omega(t), \Delta\omega'(t)\right) - \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\omega(\tau), \Delta\omega'(t)\right) d\tau = 0,$$

donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega'(t)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta\omega(t)\right\|_\Omega^2 - \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\omega(\tau), \Delta\omega'(t)\right) d\tau = 0.$$

En intègrant sur $[0, t]$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left\|\omega'(t)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta\omega(t)\right\|_\Omega^2 - \int_0^t \left(g * \Delta\omega(s), \Delta\omega'(s)\right) ds = \frac{1}{2}\left\|\omega'(0)\right\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\left\|\Delta\omega(0)\right\|_\Omega^2.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(g * \Delta\omega(s), \Delta\omega'(s)\right) ds = G(0)\int_0^t \left(\Delta\omega(s), \Delta\omega'(s)\right) ds - \left(\Delta\omega(0), \int_0^t G(s)\,\Delta\omega'(s)\right) \\ - \int_0^t \left(G * \Delta\omega'(s), \Delta\omega'(s)\right) ds.\end{aligned}$$

Comme G est un noyau fortement défini positif, alors :

$$\int_0^t \left(G(s) * \Delta\omega'(s), \Delta\omega'(s)\right) \geq 0,$$

donc :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|\omega'(t)\right\|_\Omega^2 + \frac{1-G(0)}{2}\left\|\Delta\omega(t)\right\|_\Omega^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\omega'(0)\right\|_\Omega^2 + \frac{1+G(0)}{2}\left\|\Delta\omega(0)\right\|_\Omega^2 \\ &- G(t)\left(\Delta\omega(0), \Delta\omega(t)\right) - \int_0^t g(s)\left(\Delta\omega(0), \Delta\omega(s)\right) ds. \qquad (2.1.46)\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux pour estimer (2.1.46), on obtient :

$$\left\|\omega'(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|\Delta\omega(t)\right\|_\Omega^2 \leq \left\|\omega'(0)\right\|_\Omega^2 + \left\|\Delta\omega(0)\right\|_\Omega^2, \quad \forall t \in [0, T[\,.$$

Grâce à (2.1.45), on a :

$$\left\|\omega'(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|\Delta\omega(t)\right\|_\Omega^2 = 0.$$

On conclut alors que :

$$\omega(t) = 0, \text{ sur } H_0^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, T]$$

donc $u = v$, d'ou l'unicité de la solution.

2.2 Solution faible

Dans cette section, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (2.0.1). Soit $\left\{u^0, u^1\right\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, comme $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ sont denses respectivement dans $H_0^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, alors il existe :
$\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\} \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, telle que :

$$\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\} \to \left\{u^0, u^1\right\} \text{ dans } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

or, pour chaque $\mu \in \mathbb{N}$, il existe une solution forte u_μ du problème :

$$\begin{cases} u_\mu'' + \Delta^2 u_\mu - \int_0^t g(t-s)\,\Delta^2 u_\mu(s)ds = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u_\mu(t,x) = \partial_\nu u_\mu(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ u_\mu(x,0) = u^0 \,,\, u_\mu'(x,0) = u^1 & \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{2.2.47}$$

soit $\iota \in \mathbb{N}$, on considère : $z_{\mu\iota} = u_\mu - u_\iota$ En utilisant les mêmes arguments employés pour montrer l'unicité de la solution forte, on obtient :

$$\left\|z_{\mu\iota}'(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|\Delta z_{\mu\iota}(t)\right\|_\Omega^2 \le \left\|z_{\mu\iota}'(0)\right\|_\Omega^2 + \left\|\Delta z_{\mu\iota}(0)\right\|_\Omega^2, \quad \forall t \in [0,T[.$$

Comme le membre de droite converge vers 0, car $\left\{u_\mu^0\right\}$ converge dans $H_0^2(\Omega)$ et $\left\{u_\mu^1\right\}$ converge dans $L^2(\Omega)$, on aura :

$\left\{u_\mu\right\}$ une suite de cauchy dans $C\left([0.T]\,;H_0^2(\Omega)\right)$ et $\left\{u_\mu'\right\}$ une suite de cauchy dans $C\left([0.T]\,;L^2(\Omega)\right)$, d'ou il existe $u \in C\left([0.T]\,;H_0^2(\Omega)\right)$, tel que :

$$u_\mu \to u \text{ dans } C\left([0.T]\,;H_0^2(\Omega)\right), \tag{2.2.48}$$

$$u_\mu' \to u' \text{ dans } C\left([0.T]\,;L^2(\Omega)\right). \tag{2.2.49}$$

Maintenant on considère $\Phi \in D\left(0.T\right)$ et $\varphi \in D\left(\Omega\right)$, alors on a :

$$\left\langle u_{\mu}^{''} + \Delta^{2}u_{\mu} - g * \Delta^{2}u_{\mu}(t), \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} = 0,\ \ \forall\Phi \in D\left(0.T\right), \varphi \in D\left(\Omega\right). \tag{2.2.50}$$

On note que : $\left\langle u^{''}, \Phi\varphi\right\rangle = -\left\langle u^{'}, \Phi^{'}\varphi\right\rangle \ \ \forall\Phi \in D\left(0.T\right),\ \varphi \in D\left(\Omega\right)$. De (2.2.49), il s'ensuit que :

$$-\left\langle u_{\mu}^{'}, \Phi^{'}\varphi\right\rangle \to -\left\langle u^{'}, \Phi^{'}\varphi\right\rangle = \left\langle u^{''}, \Phi\varphi\right\rangle.$$

on conclut que :

$$\left\langle u_{\mu}^{''}, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} \to \left\langle u^{''}, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)},\ \ \forall\Phi \in D\left(0.T\right), \varphi \in D\left(\Omega\right). \tag{2.2.51}$$

En revanche :

$$\left\langle \Delta^{2}u_{\mu}, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^{2}u_{\mu}}{\partial x_i^{2}}, \Phi\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x_i^{2}}\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)}$$

et d'après (2.2.48), on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^{2}u_{\mu}}{\partial x_i^{2}}, \Phi\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x_i^{2}}\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} \to \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^{2}u}{\partial x_i^{2}}, \Phi\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x_i^{2}}\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} = \left\langle \Delta^{2}u, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)}$$

c'est à dire :

$$\left\langle \Delta^{2}u_{\mu}, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} \to \left\langle \Delta^{2}u, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} \tag{2.2.52}$$

$\forall\ \Phi \in D\left(0.T\right), \varphi \in D\left(\Omega\right)$.

De (2.2.52), on a :

$$\left\langle g * \Delta^{2}u_{\mu}, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} \to \left\langle g * \Delta^{2}u, \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)}. \tag{2.2.53}$$

pour tout $\Phi \in D\left(0.T\right), \varphi \in D\left(\Omega\right)$.

D'après (2.2.51), (2.2.52) et (2.2.53), on obtient après passage à la limite dans (2.2.50).

$$\left\langle u^{''} + \Delta^{2}u - g * \Delta^{2}u(t), \Phi\varphi\right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} = 0, \qquad \forall\Phi \in D\left(0.T\right), \varphi \in D\left(\Omega\right).$$

Comme $D(\Omega) \otimes D(0.T)$ est dense dans $D(\Omega \times]0, T[)$, donc :

$$\left\langle u^{''} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u(t), \Phi\varphi \right\rangle_{D'(\mathbb{Q}_t)D(\mathbb{Q}_t)} = 0, \quad \forall \Phi \in D(\mathbb{Q}_t).$$

alors :

$$u^{''} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u(t) = 0, \text{ dans } D^{'}(\mathbb{Q}_t).$$

donc :

$$u^{''} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u(t) = 0, \text{ dans } L^2\left(0; T; H^{-2}(\Omega)\right).$$

de (2.2.48), (2.2.49), on a :

$$u \in C\left([0.T]; H_0^2(\Omega)\right) \text{ et } u^{'} \in C\left([0.T]; L^2(\Omega)\right),$$

donc :

$$u \in C^1\left([0.T]; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0.T]; H_0^2(\Omega)\right).$$

2.2.1 Conditions aux limites

Comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution du problème approchée vérifie automatiquement les conditions au limites $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

2.2.2 Données initiales

Du fait que :

$$\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\} \to \left\{u^0, u^1\right\} \text{ dans } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

et de (2.2.47), on a :

$$u_\mu(0) = u_\mu^0 \to u^0 \text{ dans } V,$$

$$u_\mu^{'}(0) = u_\mu^1 \to u^1 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De (2.2.48) et (2.2.49), on a :

$$u_\mu(0) \to u(0) \text{ dans } H_0^2(\Omega),$$

$$u'_{\mu}(0) \to u'(0) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

d'où :

$$u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1.$$

2.2.3 Unicité

Soient u et v deux solutions du problème (2.0.1) et on considére $z = u - v$, alors :

$$z \in C^1\left([0.T]\,; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0.T]\,; H_0^2(\Omega)\right)$$

et satisfait le problème suivant :

$$\begin{cases} z_{tt} + \Delta^2 z - \int_0^t g(t-s)\,\Delta^2 z(s)ds = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ z(t,x) = \partial_v z(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ z(x,0) = z_t(x,0) = 0 & \quad\quad\; x \in \Omega \end{cases}$$

L'unicité des solutions faibles peut être également obtenue par le même argument de l'unicité de la solution forte.

CHAPITRE 3

Stabilisation exponentielle

Dans ce chapitre on étudie la stabilisation exponentelle. C'est à dire on va montrer que l'énergie décroit exponentiellement. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u(t,x) - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta^2 u(t,s)ds = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(t,x) = \partial_\nu u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty) \\ u(.,0) = u^0, u_t(.,0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ, g représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, ν la dérivée normale orienté vers l'extérieur de Ω.

On définit l'énergie assoièe à la solution faible u de (3.0.1), sur un intervalle donnée $[0.T]$, par la formule :

$$E_u(t) := \frac{1}{2}\left\|u'(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^\infty g(s)\,ds\right)\left\|\Delta u(t)\right\|^2,$$

avec les hypothèses suivantes :

Hypothèse(H.1)

1) Soit $A = \Delta^2 : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ l'éperatour linéaire auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$, avec $D(A)$ dense dans $L^2(\Omega)$, tel que, pour tout $M > 0$.

$$\langle Ax, x\rangle \geq M\left\|x\right\|^2, \quad \forall x \in D(A),$$

où :

$$D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),$$

et

$$Ax(\xi) = \Delta^2 x(\xi),\ x \in D(A)\ \xi \in \Omega.$$

2) La fonction $g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ vérifie les conditions suivantes :

$g \in L^1(0,\infty)$, est telle que :

$$\int_0^\infty g(t)ds < 1.$$

On pose $G(t) := \int_t^\infty g(s)ds$, telle que :

$$t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)ds \geq 0.$$

Hypothèse(H.2)

Il existe $\alpha_0 \geq 0$ tels que $g_{\alpha_0} \in L^1(0,\infty)$ et $t \longrightarrow \int_t^\infty g_{\alpha_0}(s)ds$, est un noyau fortement défini positif.

Théorème 3.0.1. *Supposons que les hypothèses **(H.1)** et **(H.2)** sont vérifiées avec $\alpha_0 > 0$, alors il existe un nombre positif $\rho_1 \leq \rho_0^2$ et C tels que :*

$$\forall(u_0,u_1) \in D(-\Delta) \times X, \quad ||\Delta u_0|| + ||u_1|| < \rho_1,$$

alors, l'énergie de la solution faible u du problème (3.0.1) décroit exponontiellement. C'est à dire :

$$E_u(t) \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}\ \forall t \geq 0, \tag{3.0.2}$$

et

$$\int_0^\infty e^{2\alpha t} E_u(t)dt \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||), \tag{3.0.3}$$

pour tout $\alpha \in [0,\alpha^*]$, où $\alpha^* \in (0, \min(\alpha_0,\eta_0))$ et $C(R)$ est une fonction positive semi-continue supérieurement, telle que $C(0) = 0$.

Dans une première étape, on donnes les résultats suivants qui seront utilisé dans la preuve du théorème.

Remarque 3.0.1.

1- pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, $g_\alpha \in L^1(0,\infty)$ et $G_\alpha(t) := \int_t^\infty g_\alpha(s)ds$ est un noyau fortement défini positif, avec

$$\delta_\alpha = \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0-\alpha)^2} \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)^2}, \tag{3.0.4}$$

en notant que $G_\alpha(t) = \int_t^\infty e^{-(\alpha_0-\alpha)s} g_{\alpha_0}(s)ds$ et en appliquant la Proposition 1.7.2 à g_{α_0}. En outre, d'après (1.7.7) et (3.0.4), on a :

$$G_\alpha(0) \geq \delta_\alpha \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)^2}. \tag{3.0.5}$$

2- En utilisant $g_{\alpha_0} \in L^1(0,\infty)$, et le théorème de la convèrgence dominiée et le fait que $G(0) < 1$, on a :

$$\forall \alpha \in [0, \alpha'], \quad 1 - G_\alpha(0) \geq \frac{1-G(0)}{2} > 0, \tag{3.0.6}$$

où $\alpha' \in (0, \alpha_0]$. Dans la suite on prend $\alpha' = \alpha_0$, donc (3.0.6), est vérifiée pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$.

3- $\forall \alpha \in [0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$, $G_\alpha \in L^1(0,\infty)$ et

$$||G_\alpha||_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} ||g_{\alpha_0}||_1, \tag{3.0.7}$$

car il est clair de voir que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |G_\alpha(t)|dt &\leq \int_0^\infty s e^{\alpha s} |g(s)|ds \\
&= \int_0^\infty s e^{-(\alpha_0-\alpha)s} e^{\alpha_0 s} |g(s)|ds \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty e^{\alpha_0 s} |g(s)|ds
\end{aligned}$$

4- On observer que pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$, $G_\alpha \in L^2(0,\infty)$ et aussi d'après (3.0.7), on a :

$$||G_\alpha||_2^2 \leq ||G_\alpha||_1||g_{\alpha_0}||_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0}||g_{\alpha_0}||_1^2. \tag{3.0.8}$$

Lemme 3.0.1. *Pour tout* $v \in C^1([0,T];X)$, $T > 0$, *on a pour tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$\int_0^t \langle g * v(s), v'(s)\rangle ds = -\int_0^t \langle G * v'(s), v'(s)\rangle ds + \frac{G(0)}{2}(||v(t)||^2 + ||v(0)||^2)$$
$$- G(t)\langle v(0), v(t)\rangle - \int_0^t g(s)\langle v(0), v(s)\rangle ds. \tag{3.0.9}$$

$$\langle v(t), v(t) - g * v(t)\rangle = (1 - G(0))||v(t)||^2 + G(t)\langle v(0), v(t)\rangle + \langle v(t), G * v'(t)\rangle. \tag{3.0.10}$$

De plus, si $G \in L^2(0,\infty)$, *alors on a pour tout* $t \in [0,T]$ *:*

$$\int_0^t \|v(s) - g * v(s)\|^2 ds \leq 2(1 - G(0))\int_0^t \langle v(s), v(s) - g * v(s)\rangle ds$$
$$+ 2||G||_2^2||v(0)||^2 + 2\int_0^t \left\|G * v^{'}(s)\right\|^2 ds. \tag{3.0.11}$$

Preuve. Comme $g = -G'$, le terme $g * v(t)$ peut être intégré par partie, on trouve :

$$g * v(t) = -\int_0^t G'(t-r)v(r)dr$$
$$= G(0)v(t) - G(t)v(0) - \int_0^t G(t-r)v'(r)dr. \tag{3.0.12}$$

Par conséquent, on a :

$$\int_0^t \langle g * v(s), v'(s)\rangle ds = \frac{G(0)}{2}(||v(t)||^2 - ||v(0)||^2) - \left\langle v(0), \int_0^t G(s)v'(s)ds \right\rangle$$
$$- \int_0^t \langle G * v'(s), v'(s)\rangle ds. \tag{3.0.13}$$

Une autre intégration par partie, donne :

$$\int_0^t G(s)v'(s)ds = G(t)v(t) - G(0)v(0) + \int_0^t g(s)v(s)ds.$$

Ainsi, en substituant le résultat dans (3.0.13), on obtient :

$$\int_0^t \langle g * v(s), v'(s)\rangle ds = -\int_0^t \langle G * v'(s), v'(s)\rangle ds + \frac{G(0)}{2}(||v(t)||^2 + ||v(0)||^2)$$
$$- G(t)\langle v(0), v(t)\rangle - \int_0^t g(s)\langle v(0), v(s)\rangle ds. \tag{3.0.14}$$

De (3.0.12), on a :

$$v\,(t) - g * v(t) = (1 - G(0))\, v(t) - G(t)v(0) - \int_0^t G(t-r)v'(r)dr. \tag{3.0.15}$$

En multipliant (3.0.15) par $v(t)$, on obtient (3.0.10).

En utilisant (3.0.15) pour prouver (3.0.11). En multipliant les deux membres de (3.0.15) par $v(t) - g * v(t)$; on obtient :

$$||v(t) - g * v(t)||^2 = (1 - G(0))\langle v(t), v(t) - g * v(t)\rangle + v(0)\,\langle G(t), v(t) - g * v(t)\rangle$$
$$+ \left\langle G * v'(t), v(t) - g * v(t)\right\rangle.$$

Maintenant on va estimrer les deuxième et troisième limites du membre de droite. En appliquant l'inégalité élémentaire $|ab| \leq \frac{a^2}{4+b^2}$, on a :

$$||v(t) - g * v(t)||^2$$
$$\leq 2(1 - G(0))\langle v(t), v(t) - g * v(t)\rangle + 2|G(t)|^2||v(0)||^2 + 2\left\|G * v'\right\|^2.$$

Finallement, en intègrant sur $[0, t]$, on obtient (3.0.11). □

Preuve. **[Preuve du théorème]**

Pour montrer que l'estimation (3.0.2), est vrai, il suffit de montrer que $\|u'(t)\|^2$ et $\|\Delta u\ (t)\|^2$ décroit exponentiellement. C'est à dire :

$$\left\|u^{'}(t)\right\|^2 \leq C(|| - \Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t},$$

et

$$\|\Delta u\ (t)\|^2 \leq C(|| - \Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}.$$

Supposons pour cela que $u_0 \in D(\Delta^2)$ et $u_1 \in D(-\Delta)$, alors la solution faible u est une solution forte.

En posant $u_\alpha(t) = e^{\alpha t}u(t)$ et en remplaçant dans (3.0.1), on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} u''_\alpha(t) - 2\alpha u'_\alpha(t) + \alpha^2 u_\alpha(t) + \Delta^2 u_\alpha(t) - g_\alpha * \Delta^2 u_\alpha(t) = 0 \\ u_\alpha(0) = u_0; \quad u'_\alpha(0) = u_0 + \alpha u_1. \end{cases} \tag{3.0.16}$$

Comme dans le cas non intégrable, le terme le plus difficile à estimer est l'énérgie cinétique. De plus, pour évaluer $\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds$, en appliquant (1.7.9) avec $h = G_\alpha$ et $y = u'_\alpha$, on aura pour tout $t \geq 0$:

$$\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq ||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{2}{\delta_\alpha}\left(\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds + \int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds\right). \tag{3.0.17}$$

Pour continuer la preuve, on doit estimer les intégrales du membre de droite. Ce que est donné par les lemmes suivants.

Dans la suite, on pose C_i, $i \in \mathbb{N}$, constantes positives dépendantes seulement des données et de $||\Delta u_0||$ et $\|u_1\|$ □

Lemme 3.0.2. *Pour tout* $\alpha \in [0, \alpha_0]$ *et* $t \geq 0$*, on a :*

$$\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds \leq C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha ||(-\Delta)^{-1}||^2 \int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \tag{3.0.18}$$

où $C_1 > 0$ *et*

$$H_{\alpha,1}(t) := -G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t)\rangle - \int_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds. \tag{3.0.19}$$

Preuve. En multipliant la première ligne de (3.0.16) par $\Delta^{-2}u'_\alpha(t)$, on obtient :

$$\left\langle u''_\alpha(t), \Delta^{-2}u'_\alpha(t)\right\rangle - 2\alpha \left\langle u'_\alpha(t), \Delta^{-2}u'_\alpha(t)\right\rangle + \alpha^2 \left\langle u_\alpha(t), \Delta^{-2}u'_\alpha(t)\right\rangle$$

$$+ \left\langle \Delta^2 u_\alpha(t), \Delta^{-2}u'_\alpha(t)\right\rangle - \left\langle g_\alpha * \Delta^2 u_\alpha(t), \Delta^{-2}u'_\alpha(t)\right\rangle = 0.$$

En appliquant la formule de Green, on aura :

$$\left\langle (-\Delta)^{-1}u''_\alpha(t), (-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)\right\rangle - 2\alpha \left\langle (-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t), (-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)\right\rangle + \left\langle u_\alpha(t), u'_\alpha(t)\right\rangle$$

$$+\alpha^2 \left\langle (-\Delta)^{-1}u_\alpha(t), (-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)\right\rangle - \left\langle g_\alpha * u_\alpha(t), u'_\alpha(t)\right\rangle = 0.$$

donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)||^2 - 2\alpha||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(s)||^2 + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d}{dt}||(-\Delta)^{-1}u_\alpha(t)||^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\alpha(t)||^2 - \langle g_\alpha * u_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle = 0.$$

En intègrant sur $(0.t)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)||^2 + \frac{\alpha^2}{2}||(-\Delta)^{-1}u_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{2}||u_\alpha(t)||^2 - \int_0^t \langle g_\alpha * u_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds$$

$$= \frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(0)||^2 + \frac{\alpha^2}{2}\left\|(-\Delta)^{-1}u_0\right\|^2 + \frac{1}{2}||u_0||^2 + 2\alpha\int_0^t ||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(s)||^2 ds.$$

En appliquant l'identité (3.0.9) avec $v = u_\alpha$ dans $\int_0^t \langle g_\alpha * u_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds = &-\frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)||^2 - \frac{\alpha^2}{2}||(-\Delta)^{-1}u_\alpha(t)||^2 - \frac{1}{2}||u_\alpha(t)||^2 \\ &+\frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(0)||^2 + \frac{\alpha^2}{2}||(-\Delta)^{-1}u_0||^2 + \frac{1}{2}||u_0||^2 - \int_0^t g_\alpha\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds \\ &+\frac{G(0)}{2}\left(||u_0||^2 + ||u_\alpha(t)||^2\right) - G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t)\rangle + 2\alpha\int_0^t (-\Delta)^{-1}||u'_\alpha(s)||^2 ds\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds = &H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha\int_0^t ||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(s)||^2 ds - \frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(t)||^2 \\ &-\frac{\alpha^2}{2}||(-\Delta)^{-1}u_\alpha(t)||^2 - \frac{1}{2}||u_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}u'_\alpha(0)||^2 \\ &+\frac{\alpha^2}{2}||(-\Delta)^{-1}u_0||^2 + \frac{1}{2}||u_0||^2 + \frac{G(0)}{2}\left(||u_0||^2 + ||u_\alpha(t)||^2\right),\end{aligned}$$

où :

$$H_{\alpha,1}(t) := -G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t)\rangle - \int_0^t g_\alpha\langle u_\alpha(s), u_0\rangle ds.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds \leq C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha||(-\Delta)^{-1}||^2\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds,$$

où C_1 sont constante positive dépendante seulement de $||\Delta u_0||$ et $\|u_1\|$. □

Lemme 3.0.3. *pour tout* $\alpha \in [0, \alpha_1 - \varepsilon_0], 0 < \varepsilon_0 < \alpha_1$, *avec :*

$$\alpha_1 = \min\left\{\frac{\alpha_0^2\delta_{\alpha_0}^2}{8(1+\alpha_0^2)(1+\alpha_0)^4||g_{\alpha_0}||_1^2}, \frac{\alpha_0}{2}\right\}, \tag{3.0.20}$$

et $t \geq 0$ *on a, les deux estimations suivantes :*

$$\int_0^t \langle G_\alpha * u_\alpha''(s), u_\alpha''(s)\rangle ds \leq \alpha \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right)\int_0^t ||u_\alpha'(s)||^2 ds + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}(C_2 + H_{\alpha,2}(t)), \quad (3.0.21)$$

et

$$\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha'(t)||^2 + \frac{1}{2}||(-\Delta)^{-1}(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 + \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{4}||u_\alpha(t)||^2 \leq C_2 + H_{\alpha,2}(t) + \alpha\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right)\int_0^t ||u_\alpha'(s)||^2 ds, \quad (3.0.22)$$

où $C_2 > 0$ *et*

$$H_{\alpha,2}(t) := -\int_0^t g_\alpha(s)\langle u_\alpha'(0), u_\alpha'(s)\rangle ds - \int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds + \frac{2\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}H_{\alpha,1}(t) - G_\alpha(t)\langle u_\alpha'(0), u_\alpha'(t)\rangle. \quad (3.0.23)$$

Preuve. Premièrment, en multipliant la première ligne de (3.0.16) par :

$$u_\alpha'(t) - g_\alpha * u_\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t) + g_\alpha(t)u_0. \quad (3.0.24)$$

et puis que, $u \in C^1([0,\infty); D(-\Delta))$, on obtient :

$$\langle u_\alpha''(t), u_\alpha'(t) - g_\alpha * u_\alpha'(t)\rangle - 2\alpha\langle u_\alpha'(t), u_\alpha'(t) - g_\alpha * u_\alpha'(t)\rangle + \alpha^2\langle u_\alpha(t), u_\alpha'(t) - g_\alpha * u_\alpha'(t)\rangle + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 + g_\alpha(t)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)\rangle = 0.$$

En intègrant sur $(0.t)$, on aura :

$$\frac{1}{2}||u'_\alpha(t)||^2 - \int_0^t \langle u''_\alpha(s), g_\alpha * u'_\alpha\rangle ds + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2$$
$$= \frac{1}{2}||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta u_0||^2 - \int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds$$
$$+ 2\alpha \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds - \alpha^2 \int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds.$$

En appliquant l'identité (3.0.9) avec $v = u'_\alpha$ dans $\int_0^t \langle u''_\alpha(s), g_\alpha * u'_\alpha\rangle ds$, on obtient :

$$\frac{1 - G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2$$
$$= \frac{1 + G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta u_0||^2 - G_\alpha(t)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(t)\rangle$$
$$- \int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(s)\rangle ds - \int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds$$
$$+ \underbrace{\alpha \int_0^t 2\langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds}_{L_1} - \underbrace{\alpha^2 \int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds}_{L_2}. \quad (3.0.25)$$

Maintenant, on va estimer les termes L_1 et L_2 dans (3.0.25).

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, pour estimer L_1, on aura :

$$|L_1| \leq 2 \int_0^t \left|\langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle\right| ds$$
$$\leq 2 \int_0^t ||u'_\alpha(s)||||u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)||ds$$
$$\leq \int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds + \underbrace{\int_0^t ||u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)||^2 ds}_{L_3},$$

on a besoin d'estimer L_3, alors, en appliquant l'identité (3.0.11) avec $v = u'_\alpha$, on trouve :

$$|L_1| \leq \int_0^t ||u'_\alpha||^2 ds + 2(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds$$
$$+ 2||G_\alpha||_2^2 ||u'_\alpha(0)||^2 + 2\int_0^t ||G_\alpha * u''_\alpha(s)||^2 ds,$$

donc :

$$2G_\alpha(0)\,|L_1| \leq 2||G_\alpha||_2^2||u'_\alpha(0)||^2 + 2\int_0^t ||G_\alpha * u''_\alpha(s)||^2 ds + \int_0^t ||u'_\alpha||^2 ds.$$

En utillisant le lemme1.7.3 avec $h = G_\alpha$ et $y = u''_\alpha(s)$ dans le terme $\int_0^t ||G_\alpha * u''_\alpha(s)||^2 ds$, on obtient :

$$|L_1| \leq \frac{1}{G_\alpha(0)} \left(||G_\alpha||_2^2||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{1}{2}\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \right)$$
$$+ \frac{1}{\delta_\alpha G_\alpha(0)} \left(||G_\alpha||_1^2 + 4||g_\alpha||_1^2 \right) \int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds, \quad \delta > 0. \tag{3.0.26}$$

L'estimation du terme L_2, en multipliant (3.0.24), par $u_\alpha(s)$, on obtient :

$$\langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle = \langle u_\alpha(s), \frac{d}{ds}(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle + g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle.$$

En intègrant par parties sur $(0, t)$, on aura :

$$\int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds = \langle u_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t + \int_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds$$
$$- \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds.$$

Comme

$$\int_0^t \langle u'_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds = \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u_\alpha(s)\rangle ds - \int_0^t \langle u'_\alpha(s), g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}||u_\alpha(t)||^2 ds - \int_0^t \langle u'_\alpha(s), g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds$$
$$= \frac{1}{2}||u_\alpha(t)||^2 - \frac{1}{2}||u_0||^2 - \int_0^t \langle u'_\alpha(s), g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds$$

alors :

$$\int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds = \langle u_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t + \int_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds$$
$$+ \frac{1}{2}||u_0||^2 - \frac{1}{2}||u_\alpha(t)||^2 + \int_0^t \langle g_\alpha * u_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds,$$

en appliquant l'identité (3.0.9) avec $v = u_\alpha$ dans $\int_0^t \langle g_\alpha * u_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds$, on trouve :

$$\int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds = \langle u_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t + \frac{1 + G_\alpha(0)}{2}||u_0||^2$$
$$- G_\alpha(t)\,\langle u_0, u_\alpha(t)\rangle - \frac{1 - G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2$$
$$- \int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds. \tag{3.0.27}$$

Ensuite, de (3.0.10), on a :

$$\langle u_\alpha(t), u_\alpha(t) - g_\alpha * u_\alpha(t)\rangle - G_\alpha(t)\langle u_\alpha(0), u_\alpha(t)\rangle$$
$$= (1 - G_\alpha(0))||u_\alpha(t)||^2 + \langle u_\alpha(t), G_\alpha * u'_\alpha(t)\rangle,$$

donc (3.0.27) peut être écrit sous la forme :

$$\int_0^t \langle u_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds = \frac{G_\alpha(0)-1}{2}||u_0||^2 + \frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2$$
$$+ \langle u_\alpha(t), G_\alpha * u'_\alpha(t)\rangle - \int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds. \quad (3.0.28)$$

Maintenant, en remplaçant (3.0.26) et (3.0.28) dans (3.0.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 \\
&+ \alpha^2 \frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2 \\
&\leq \frac{1+G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta u_0||^2 + \alpha\frac{2||G_\alpha||_2^2}{G_\alpha(0)}||u'_\alpha(0)||^2 \\
&+ \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_0||^2 - G_\alpha(t)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(t)\rangle - \int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(s)\rangle ds \\
&- \int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds + \frac{\alpha}{G_\alpha(0)}\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \\
&+ 2\alpha\frac{||G_\alpha||_1^2 + 4||g_\alpha||_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha}\int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds - \alpha^2\langle u_\alpha(t), G_\alpha * u'_\alpha(t)\rangle \\
&+ \alpha^2\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) ds. \qquad (3.0.29)
\end{aligned}$$

De (3.0.7), (3.0.5), et (3.0.4), pour $\alpha \leq \frac{\alpha_0}{2}$, on a :

$$\frac{||G_\alpha||_1^2 + 4||g_\alpha||_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \leq \frac{4(1+\alpha_0^2)(1+\alpha_0)^4}{\alpha_0^2\delta_{\alpha_0}^2}||g_{\alpha_0}||_1^2 \leq \frac{1}{2\alpha_1}. \quad (3.0.30)$$

En utilisant (1.7.6), (3.0.18) et les inégalités de Young et de Cauchy-Schwartz, on aura :

$$\begin{aligned}
\left|\langle u_\alpha(t), G_\alpha * u'_\alpha(t)\rangle\right| &\leq ||u_\alpha(t)||\,\left\|G_\alpha * u'_\alpha(s)\right\| \\
&\leq \frac{1-G_\alpha(0)}{4}||u_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{1-G_\alpha(0)}\left\|G_\alpha * u'_\alpha(s)\right\|^2 \\
&\leq \frac{1-G_\alpha(0)}{4}||u_\alpha(t)||^2 + \frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\int_0^t \langle G_\alpha * u'_\alpha(s), u'_\alpha(s)\rangle ds \\
&\leq \frac{2G_\alpha(0)}{1-G_\alpha(0)}\left(C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha||(-\Delta)^{-1}||^2\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds\right) \\
&+ \frac{1-G_\alpha(0)}{4}||u_\alpha(t)||^2
\end{aligned} \tag{3.0.31}$$

en substituant (3.0.30) et (3.0.31) dans (3.0.29), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 \\
&+ \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{4}||u_\alpha(t)||^2 \\
&\leq C_2 + \frac{2\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}H_{\alpha,1}(t) - G_\alpha(t)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(t)\rangle - \int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(s)\rangle ds \\
&- \int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds + \frac{\alpha}{\alpha_1}\int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds \\
&+ \alpha\left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \frac{4\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right)\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds,
\end{aligned}$$

où $C_2 > 0$.

Finallement, le terme $\frac{\alpha}{\alpha_1}\int_0^t \langle G_\alpha * u''_\alpha(s), u''_\alpha(s)\rangle ds$ peut être absorbé par terme semilaire du membre de gauche, d'où on déduit (3.0.21) et (3.0.22) pour $\alpha \leq \alpha_1 - \varepsilon_0$. □

Lemme 3.0.4. *Soit*

$$\alpha_2 = \min\left(\frac{\delta_{\alpha_0}}{4(1+\alpha_0)^2}\left(||(-\Delta)^{-1}||^2 + \frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2||(-\Delta)^{-1}||^2}{1-G(0)}\right)^{-1}, \frac{\alpha_1}{2}, \eta_0\right), \tag{3.0.32}$$

alors pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$, *et tout* $t \geq 0$, *on a :*

$$\frac{1 - G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2 \leq C_3. \quad (3.0.33)$$

$$\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq C_4, \quad (3.0.34)$$

où C_3 , $C_4 > 0$.

Preuve. Premièrment, on va estimer le terme $\int\limits_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds$, de (3.0.17), (3.0.18), et (3.0.21), on trouve :

$$\int\limits_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq ||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{2}{\delta_\alpha}\left(C_1 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}C_2\right) + \frac{2}{\delta_\alpha}\left(H_{\alpha,1}(t) + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}H_{\alpha,2}(t)\right) +$$
$$\alpha \frac{2}{\delta_\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right) + 2||(-\Delta)^{-1}||_0^2\right)\int\limits_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds$$

de (3.0.4), on a :

$$\frac{1}{\delta_\alpha} \leq \frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}.$$

D'autre part, on remarque que :

$$\alpha \frac{2}{\delta_\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right) + 2||(-\Delta)^{-1}||_0^2\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha_2},$$

alors :

$$\int\limits_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq ||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}(C_1 + 2C_2)$$
$$+ \frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}(H_{\alpha,1}(t) + 2H_{\alpha,2}(t)) + \frac{\alpha}{\alpha_2}\int\limits_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds,$$

donc :

$$\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_2}\right)\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq ||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}(C_1+2C_2)$$
$$+\frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}}(H_{\alpha,1}(t)+2H_{\alpha,2}(t)),$$

d'où, pour $\alpha \leq \alpha_1 - \varepsilon_0$, on a :

$$\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq \frac{\alpha_2}{\epsilon_0}||u'_\alpha(0)||^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\epsilon_0}(C_1+2C_2)$$
$$+\frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\epsilon_0}(H_{\alpha,1}(t)+2H_{\alpha,2}(t)). \tag{3.0.35}$$

D'après les lemmes3.0.3 et (3.0.35), on a :

$$\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 + \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2$$
$$\leq C_2 + K||u'_\alpha(0)||^2 + M\left(C_1+2C_2\right) + MH_{\alpha,1}(t) + \left(2M+1\right)H_{\alpha,2}(t), \tag{3.0.36}$$

avec :

$$M = \alpha\frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\epsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right),$$

et

$$k = \alpha\frac{\alpha_2}{\epsilon_0}\left(\frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}||(-\Delta)^{-1}||^2\right),$$

où $C_1, C_2 > 0$.

Maintenant on va estimer le membre droit de (3.0.36).

De (3.0.19) et (3.0.23), on a :

$$
\begin{aligned}
&MH_{\alpha,1}(t) + (2M+1)\,H_{\alpha,2}(t) \\
&= \left(M + (2M+1)\,\frac{2\alpha^2}{1-G(0)}\right)\left(-G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t)\rangle - \int\limits_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds\right) \\
&- (2M+1)\left(G_\alpha(t)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(t)\rangle + \int\limits_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(s)\rangle ds\right) \\
&- (2M+1)\int\limits_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds. \qquad (3.0.37)
\end{aligned}
$$

On va estimer maintenant le membre de droite de l'inégalié (3.0.37).

En utilisant les inégalités des Young et de Cauchy-Schwartz avec l'inégalité de Poincaré.

Premièrment, l'estimation du terme $G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t))\rangle$,

$$
\begin{aligned}
|G_\alpha(t)\langle u_0, u_\alpha(t))\rangle| &\leq |G_\alpha(t)|\,|\langle u_0, u_\alpha(t))\rangle| \\
&\leq \|g_\alpha(s)\|_1\,\|u_0\|\,\|u_\alpha(t)\| \\
&\leq \frac{1}{4\epsilon}\,\|g_\alpha(s)\|_1^2\,\|u_0\|^2 + \epsilon\,\|u_\alpha(t)\|^2 \\
&\leq \frac{M}{4\epsilon}\,\|g_\alpha(s)\|^2\,\|\Delta u_0\|^2 + \epsilon\,\|u_\alpha(t)\|^2, \qquad (3.0.38)
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon > 0$ et M est la constante du l'inégalité de Poincaré.

En suite, l'estimation du terme $\int\limits_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds\right| &\leq \int\limits_0^t |g_\alpha(s)|\,|\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle|\,ds \\
&\leq \int\limits_0^t |g_\alpha(s)|\,(\|u_0\|\,\|u_\alpha(s)\|)\,ds \\
&\leq \int\limits_0^t |g_\alpha(s)|\left(\frac{1}{4\epsilon}\,\|u_0\|^2 + \epsilon\,\|u_\alpha(s)\|^2\right) ds \\
&\leq \frac{M}{4\epsilon}\,\|\Delta u_0\|^2\,\|g_\alpha(s)\|_1 + \epsilon\int\limits_0^t |g_\alpha(s)|\,\|u_\alpha(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}
$$

de plus, comme $|g_\alpha(s)| \leq |g_{\alpha_0}(s)|$, alors :

$$\left|\int_0^t g_\alpha(s)\langle u_0, u_\alpha(s)\rangle ds\right| \leq \frac{M}{4\epsilon}\|\Delta u_0\|^2 \|g_\alpha(s)\|_1 + \epsilon\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)| \|u_\alpha(s)\|^2 ds. \tag{3.0.39}$$

De la même manière, on prouve que :

$$|G_\alpha(t)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(t)\rangle| \leq \frac{1}{4\epsilon}\|g_\alpha(s)\|_1^2 \left\|u'_\alpha(0)\right\|^2 + \epsilon\left\|u'_\alpha(t)\right\|^2, \tag{3.0.40}$$

$$\left|\int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(0), u'_\alpha(s)\rangle ds\right| \leq \frac{1}{4\epsilon}\left\|u'_\alpha(0)\right\|^2 \|g_\alpha(s)\|_1 + \epsilon\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)| \left\|u'_\alpha(s)\right\|^2 ds, \tag{3.0.41}$$

$$\begin{aligned}&\left|-\int_0^t g_\alpha(s)\langle \Delta u_0, \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\rangle ds\right| \\ &\leq \frac{1}{4\epsilon}\|\Delta u_0\|^2 \|g_\alpha(s)\|_1 + \epsilon\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)| \|\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)\|^2 ds.\end{aligned} \tag{3.0.42}$$

En remplaçant (3.0.38), (3.0.39), (3.0.40), (3.0.41), et (3.0.42) dans (3.0.37), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2 + \frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(t)||^2 + \alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2 \\ &\leq \varepsilon(||u'_\alpha(t)||^2 + \alpha^2||u_\alpha(t)||^2) + C_\varepsilon + C\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)|||u'_\alpha(s)||^2 ds \\ &+ C\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)|||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)||^2 ds + C\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)|||u_\alpha(s)||^2 ds,\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où $C_\varepsilon, C > 0$.

donc

$$\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2+\frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha-g_\alpha*u_\alpha)(t)||^2+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||^2$$
$$\leq C_\varepsilon+C\int_0^t |g_{\alpha_0}(s)|\left(||\Delta(u_\alpha-g_\alpha*u_\alpha)(s)||^2+||u_\alpha(s)||^2+||u'_\alpha(s)||^2\right)ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on aura :

$$\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u'_\alpha(t)||^2+\frac{1}{2}||\Delta(u_\alpha-g_\alpha*u_\alpha)(t)||^2+\alpha^2\frac{1-G_\alpha(0)}{2}||u_\alpha(t)||\leq C_\varepsilon e^{C|g_{\alpha_0}(s)|}=C_3$$

où $C_3>0$. □

Lemme 3.0.5. *Pour tout* $\alpha\in[0,\alpha_2-\varepsilon_0], 0<\varepsilon_0<\alpha_2$, *et* $t\geq 0$ *on a :*

$$\int_0^t ||\Delta(u_\alpha-g_\alpha*u_\alpha)(s)||^2ds\leq C_5,\quad C_5>0. \tag{3.0.43}$$

Preuve. En utilisant les mêmes méthodes que celle des preuves des lemmes3.0.2 et 3.0.3, en multipliant (3.0.16) par $u_\alpha(t)-g_\alpha*u_\alpha(t)$ et en intègrant sur 0 à t, on trouve :

$$\int_0^t ||\Delta(u_\alpha-g_\alpha*u_\alpha)(s)||^2ds$$
$$=-\int_0^t\langle u''_\alpha(s),u_\alpha(s)-g_\alpha*u_\alpha(s)\rangle ds+2\alpha\int_0^t\langle u'_\alpha(s),u_\alpha(s)-g_\alpha*u_\alpha(s)\rangle ds$$
$$-\alpha^2\int_0^t\langle u_\alpha(s),u_\alpha(s)-g_\alpha*u_\alpha(s)\rangle ds.$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle u''_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds \\
&= \langle u'_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t - \int_0^t \langle u'_\alpha(s), \frac{d}{ds}\left(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\right)(s)\rangle ds \\
&= \langle u'_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t - \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds + \int_0^t g_\alpha \langle u'_\alpha(s), u_0\rangle ds
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^t ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)||^2 ds \\
&= -\langle u'_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t + \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds \\
&- \int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(s), u_0\rangle ds + 2\alpha \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds \\
&- \alpha^2 \int_0^t \langle u_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds. \qquad (3.0.44)
\end{aligned}$$

Pour estimer la dernière intégrale du côté droit du l'identitie (3.0.44), en appliquant (3.0.11), on aura :

$$\begin{aligned}
&-(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \langle u_\alpha(s), u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)\rangle ds \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_0^t ||u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)||^2 ds + ||G_\alpha||_2^2 ||u_0||^2 + \int_0^t ||G_\alpha * u'_\alpha(s)||^2 ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant l'inégalité ci-dessus dans, (3.0.44), on trouve :

$$\int_0^t ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)||^2 ds + \frac{\alpha^2}{2(1-G_\alpha(0))}\int_0^t ||(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)(s)||^2 ds$$
$$\leq \int_0^t \langle u'_\alpha(s), u'_\alpha(s) - g_\alpha * u'_\alpha(s)\rangle ds - \langle u'_\alpha, u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha\rangle|_0^t$$
$$- \int_0^t g_\alpha(s)\langle u'_\alpha(s), u_0\rangle ds + \frac{\alpha^2}{1-G_\alpha(0)}\int_0^t ||G_\alpha * u'_\alpha(s)||^2 ds$$
$$+ \frac{\alpha^2||G_\alpha||_2^2}{1-G_\alpha(0)}||u_0||^2 + \frac{\alpha^2}{4(1-G_\alpha(0))}\int_0^t ||u_\alpha(s) - g_\alpha * u_\alpha(s)||^2 ds$$
$$+ 4(1-G_\alpha(0))\int_0^t ||u'_\alpha(s)||^2 ds.$$

Pour conclure, l'estimation (3.0.33) et (3.0.34) découle la combinaison de (3.0.43). □

Continue la preuve de théorème. Premièrment, on va montrer que $||\Delta u_\alpha(t)||^2$ et $||u'_\alpha(t)||^2$ est bornée par rapport une constante dépendante à $||u_0||, ||u_1||$, d'après la Remarque3.0.1 et le corollaire1.7.2 avec $y = \Delta u_\alpha(t)$ et $v = \Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)$, on donnée un estimation de la terme $\|\Delta u_\alpha(t)\|$. En effet, deplus le noyou resolvent de g_α donnée par $r_\alpha(t) = e^{\alpha t}r(t)$ et r le noyou resolvent de g.

$$||\Delta u_\alpha||_\infty \leq (1 + ||r_{\alpha_0}||_1)||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||_\infty. \tag{3.0.45}$$

Comme

$$||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||_\infty = \sup_{0\leq t\leq T} ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)|| \geq ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||. \tag{3.0.46}$$

et

$$||\Delta u_\alpha||_\infty^2 = \sup_{0\leq t\leq T} ||\Delta u_\alpha||^2 \geq ||\Delta u_\alpha||^2 \tag{3.0.47}$$

alors, de (3.0.45), (3.0.46) et (3.0.47), on conclut que :

$$||\Delta u_\alpha||^2 \leq \sup_{0\leq t\leq T} ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||^2. \tag{3.0.48}$$

D'autre part, de (3.0.33), on a :

$$||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||^2 \leq C_3$$

alors :

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||\Delta(u_\alpha - g_\alpha * u_\alpha)||^2 \leq \sup_{0\leq t\leq T} C_3 = C \tag{3.0.49}$$

où C est une constante positive qui dépend de données et de $||\Delta u_0||$ et $\|\Delta u\ (t)\|^2$.

Donc, de (3.0.48) et (3.0.49), on a :

$$||\Delta u_\alpha||^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||) \tag{3.0.50}$$

de (3.0.33), on a :

$$||u'_\alpha(t)||^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||) \tag{3.0.51}$$

d'après (3.0.50) et (3.0.51), on déduit que :

$$||\Delta u_\alpha(t)||^2 + ||u'_\alpha(t)||^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||) \tag{3.0.52}$$

avec $C(R)$ est une fonction semi-continue supérieurement et positive telle que $C(0) = 0$.

Maintenant, on montrer que $||\Delta u(t)||^2$ et $||u'(t)||^2$ est décroissent exponentiellement on commence par $||\Delta u_\alpha(t)||^2$;

De (3.0.52), on a :

$$||\Delta u_\alpha(t)||^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)$$

d'autre part

$$\begin{aligned} ||\Delta u_\alpha(t)||^2 &= \langle \Delta u_\alpha(t), \Delta u_\alpha(t)\rangle \\ &= \left\langle e^{\alpha t}\Delta u(t), e^{\alpha t}\Delta u(t)\right\rangle \\ &= e^{2\alpha t}\left\|\Delta u(t)\right\|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}. \tag{3.0.53}$$

On va prouver maintenant que le terme $||u'(t)||^2$, décroit exponentiellement.

Il est clair que : $u^{'}(t) = e^{-\alpha t}u'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t}u_\alpha(t)$. En utilisant l'inégalite de Poincaré, on aura :

$$\begin{aligned}\left\|u'(t)\right\|^2 &= \left\|e^{-\alpha t}u'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t}u_\alpha(t)\right\|^2 \\ &\leq ke^{-2\alpha t}\left(\left\|u'_\alpha(t)\right\|^2 + \left\|u_\alpha(t)\right\|^2\right) \\ &\leq ke^{-2\alpha t}\left(\left\|u'_\alpha(t)\right\|^2 + M\left\|\Delta u_\alpha(t)\right\|^2\right)\end{aligned}$$

où K et M sont deux constantes positives.

D'après (3.0.52), en deduit que :

$$\left\|u'(t)\right\|^2 \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}. \tag{3.0.54}$$

Maintenant, de (3.0.53), (3.0.54), et (3.0.6), on obtient :

$$E_u(t) \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||)e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Finalment, pour terminer la preuve du théorème il reste à montrer que :

$$\int_0^\infty E_u(t)e^{2\alpha t}dt \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||).$$

Ainsi, de (3.0.45), d'après (1.7.13) et (3.0.43), on peut montrer une estimation uniforme pour $\int_0^\infty ||\Delta u_\alpha(s)||^2 ds$, aussi de (3.0.34), on obtient :

$$\int_0^\infty ||\Delta u_\alpha(s)||^2 ds + \int_0^\infty ||u'_\alpha(s)||^2 ds \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||). \tag{3.0.55}$$

Comme

$$\int_0^\infty \left(||\Delta u(s)||^2 + ||u'(s)||^2\right)e^{2\alpha t}ds \leq \int_0^\infty M||\Delta u_\alpha(s)||^2 + K||u'_\alpha(s)||^2 ds, \tag{3.0.56}$$

d'où, l'on obtient de (3.0.55) et (3.0.56), que :

$$\int_0^\infty E_u(t)e^{2\alpha t}dt \leq C(||\Delta u_0|| + ||u_1||).$$

□

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence, l'unicité et la décroissance exponentielle de l'énergie associée au problème viscoélastique de petrovski.

– La démonstration de l'existence et l'unicité est basée sur la méthode de Galerkin.

– La stabilisation se fait grâce un terme mémoire qui consiste en la convolution d'une fonction de relaxation avec l'opérateur bi-Laplacien.

– La fonction de relaxation est un noyau fortement défini positif.

– On a obtenu une décroissance exponentielle de l'énergie associée au problème de petrovski.

Bibliographie

[1] Daniela BARBIERI intitulé :"Estabilização da equação da onda com dissipação de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel" Maringà 2010.

[2] H. Brésis, "Analyse fonctionelle, théorie et applications", Masson, 1987.

[3] **P. Cannarsa, D. Sforza, "Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels 29 March 2011**."

[4] P. Cannarsa, D. Sforza," A stability result for a class of nonlinear integrodifferential equations with L^1 kernels", Appl. Math. (Warsaw) 35 (2008) 395–430.

[5] CODDINGTON, E. ; LEVINSON, N. "Theory of Ordinary Di erential Equations. New York" : Mac Graw-Hill, 1955.

[6] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti J.S." Prates Filho and J.A. Soriano. Existance and uniform decay rates for viscolastic prblems with nonlinear boundary damping".

[7] W.J. Hrusa, J.A. Nohel, "The Cauchy problem in one-dimensional nonlinear viscoelasticity,J. Differential Equations" 59 (1985) 388-412.

[8] Jaime E. Muñoz Rivera. "Smoothing Effect and Propagations of Singularities for Viscoelastic Plates and Luci Harue Fatori".

[9] S. Kawashima," Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory, J.Differential Equations" 101 (1993) 388-420.

[10] Komornik "Exact Controllability and Stabilization.The Multiplier Method Vilmos Komornik Universit e Louis Pasteur", Strasbourg November 29, 1993.

[11] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M.," Introduction a L'analyse Numérique des EquationsAux Dérivées Partielles". Masson, Paris, 1983.

[12] O.J. Staffans," Positive definite measures with applications to a Volterra equation", Trans.Amer. Math. Soc. 218 (1976) 219- 237.

[13] O.J. Staffans, "On a nonlinear hyperbolic Volterra equation", SIAM J. Math. Anal. 11 (1980) 793-812.