

**Université 8 mai 1945 Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES**

Présenté par

**ATHMANIA Ammar**

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Construction Mécanique

=====

**COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE D'UN PALIER A**  
**COUSSINET POREUX LUBRIFIE PAR DES NANOFUIDES**

=====

Sous la direction de :

**Pr. LAHMAR Mustapha**

Année académique : 2021-2022

## ***Remerciements***

*Je tiens à remercier du fond du cœur*

*Dieu le tout puissant*

*Qui m'a aidé jusqu'à l'atteinte de ce niveau*

*Et qui m'a donné l'inspiration, la volonté, le courage et la  
persévérance dans mes études.*

*Je tiens à remercier monsieur le Professeur*

***Mustapha LAHMAR***

*Pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour la confiance qu'il m'a  
accordée*

*Je remercie les membres du jury pour avoir accepté d'honorer par leur  
présence et d'avoir accepté de juger mon travail*

*Sans oublier tous les responsables du département de génie mécanique  
de l'université 8 mai 1945 Guelma*

## *Dédicaces*

*Grâce à Dieu le tout puissant, j'ai achevé la réalisation de ce modeste travail d'initiation à la recherche que je tiens très chaleureusement à le dédier à mes très chers parents, en témoignage de ma gratitude pour leurs dévouements, de leur soutien permanent durant toutes mes années d'études, leurs sacrifices illimités, leur réconfort moral, eux qui ont fourni tant d'effort pour mon éducation, mon instruction et pour me voir atteindre ce but, pour tout cela et pour ce qui ne peut être dit, mes affectations sans limite.*

*A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage, à qui je dois de l'amour et de la reconnaissance :*

*Ma sœur, mes frères et toute ma famille et mes amis.*

## Résumé

L'étude entreprise dans le cadre de ce mémoire consiste à mettre en place un modèle de lubrification Poro-Elasto-Hydrodynamique (PEHD) amélioré permettant de prendre en compte à la fois le comportement rhéologique non Newtonien du nanolubrifiant, la complexité de l'écoulement au sein du milieu poro-élastique ainsi que la vitesse de glissement à l'interface film fluide-matrice poreuse. Le code de calcul développé à partir de cette modélisation peut être exploité comme un outil d'aide à la conception rapide de paliers à coussinet poreux de dimension finie statiquement et dynamiquement chargés.

Dans cette étude, l'écoulement du nanolubrifiant dans le palier est décrit par la théorie du micro-continuum de Vijay Kumar Stokes qui prend en considération la taille caractéristique des nanoparticules dispersées dans une huile de base. L'écoulement du nanolubrifiant dans le milieu poreux est modélisé par la loi de Darcy modifiée où la condition de glissement de Beavers – Joseph est appliquée à l'interface film fluide-matrice poreuse. La déformation de l'interface due à la pression hydrodynamique est prise en compte à l'aide d'un modèle analytique simplifié dit « Modèle Couche Elastique mince ». Le comportement du film hydrodynamique est gouverné par l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de mouvement et de continuité en utilisant le processus de dérivation classique de Reynolds. La porosité du coussinet est introduite dans l'équation de Reynolds en utilisant l'approximation de Morgan-Cameron.

L'équation de Reynolds modifiée est discrétisée par la méthode des différences finies. Le système d'équations algébriques résultant est résolu numériquement par la méthode itérative de Gauss – Seidel avec relaxation. Le problème fortement non linéaire de couplage de l'équation de Reynolds et de l'équation géométrique du film est résolu par la méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation.

L'analyse statique montre que pour une excentricité imposée, la capacité de charge augmente avec la taille caractéristique et la concentration des NPs tandis que l'angle de calage, le débit de fuite, et le coefficient de frottement diminuent. D'autre part, la perméabilité fait diminuer la pression hydrodynamique, la capacité de charge, et le débit de fuite, et fait augmenter l'angle de calage et le coefficient de frottement.

L'analyse dynamique a permis de mettre en évidence les effets positifs de la taille et de la concentration des NPs sur les orbites stationnaires du tourillon et l'épaisseur minimale du film. Comme prévu, la perméabilité joue un rôle négatif vis-à-vis de l'épaisseur minimale du film.

**Mots clés :** Lubrification poro-élastohydrodynamique, Paliers poreux, Nanolubrifiant, Nanoparticule, Fluide non Newtonien, Couples de contraintes, Modèle de Morgan – Cameron.

# Abstract

The thrust of this report is to develop new numerical simulation models of porous journal bearings taking into account the fluid film – poroelastic matrix interaction and the non-Newtonian rheological behavior of the nanolubricant consisting of base fluid and nanoparticles (NPs).

The computer code developed from this modeling can be used as a rapid design tool of steadily and dynamically loaded finite length porous plain journal bearings.

In this investigation, the flow of nanolubricant in the bearing clearance space is described by the micro-continuum theory of Vijay Kumar Stokes which takes into account the characteristic size of nanoparticles dispersed in a base oil. The flow of the nanolubricant in the porous medium is modeled by the modified Darcy's law where the Beavers–Joseph slip condition is applied at the fluid film-porous matrix interface.

The hydrodynamic pressure induced deformation of the fluid film- porous matrix interface is calculated by using a simplified analytical model called "Thin Elastic Liner Model".

The hydrodynamic behavior of lubricating film is governed by the modified Reynolds equation obtained from the motion and continuity equations using the classical Reynolds derivation process. The bearing porosity is introduced into the Reynolds equation by means of the Morgan-Cameron approximation.

The modified Reynolds equation is first normalized and discretized by the finite difference method. The resulting system of algebraic equations is solved numerically by the iterative Gauss–Seidel method with over-relaxation factor.

The strong nonlinear coupling problem of the Reynolds equation and the film geometric equation is solved by the sub-relaxed iterative fixed point method in order to ensure the convergence of the iterative procedure.

The steady-state analysis shows that for an imposed operating eccentricity, the load capacity increases with the characteristic size and the concentration of NPs while the attitude angle, the leakage flow rate, and the coefficient of friction decrease. On the other hand, the permeability decreases the hydrodynamic pressure, the load capacity, and the leakage flow rate, and increases the attitude angle and the coefficient of friction.

The dynamic analysis made it possible to highlight the positive effects of the size and the concentration of the NPs on the stationary orbits of the crankshaft and the minimum film thickness. As expected, the permeability plays a negative role on the minimum film thickness.

**Keywords :** Poro-elastohydrodynamic Lubrication, Porous bearings, Nanolubricant, Nanoparticule, Non-Newtonien Fluid, Couple-stresses, Morgan – Cameron approximation.

## المخلص

المدفوع من هذا التقرير هو تطوير نماذج محاكاة عددية جديدة للمجال المسامية مع الأخذ بعين الاعتبار تفاعل المصفوفة المسامية والغشاء المرن و كذا السلوك الريولوجي غير النيوتوني لمادة التشحيم النانوية المصنوعة من السائل الأساسي والجسيمات النانوية (NPs).

تم تطوير برنامج الكمبيوتر من خلال هذه النمذجة كأداة تصميم سريعة للمجال المسامية ذات الأبعاد المحددة التي تشغل بشكل ثابت وديناميكي.

في هذه الدراسة، تم وصف تدفق مادة التشحيم النانوية في المجال بواسطة نظرية لفيجاي كومان ستوكس والتي تأخذ في الاعتبار الحجم المميز للجسيمات النانوية المشتتة في الزيت الأساسي. يتم نمذجة تدفق مادة التشحيم النانوية في الوسط المسامي من خلال قانون دارسي المعدل حيث يتم تطبيق حالة انزلاق بيفارز-جوزيف.

يتم حساب التشوه الناتج عن الضغط الميكروديناميكي لواجهة المصفوفة المسامية الغشائية باستخدام نموذج تحليلي مبسط يسمى "نموذج بطانة مرنة رقيقة".

يضع السلوك الميكروديناميكي لفيلم التشحيم لمعادلة رينولدز المعدلة التي تم الحصول عليها من معادلات الحركة والاستمرارية باستخدام عملية اشتقاق رينولدز الكلاسيكية. تم إدخال مسامية المحمل في معادلة رينولدز من طريق تقريب مورغان-كاميرون. تم حل مشكلة الاقتران غير الخطي القوية لمعادلة رينولدز والمعادلة الهندسية للفيلم من خلال طريقة النقطة الثابتة التكرارية شبه المسترخية من أجل ضمان تقارب الإجراءات التكرارية.

يُظهر تحليل الحالة المستقرة أنه بالنسبة إلى الانحراف التشغيلي المفروض، تزداد سعة الحمولة مع الحجم المميز وتركيز NPs بينما تنخفض زاوية الموقف ومعدل تدفق التسرب ومعامل الاحتكاك. من ناحية أخرى، تقلل النفاذية الضغط الميكروديناميكي، وسعة التحميل، ومعدل تدفق التسرب، وتزيد من زاوية الاتجاه ومعامل الاحتكاك.

أتاح التحليل الديناميكي تسليط الضوء على الآثار الإيجابية لحجم وتركيز NPs على المدارات الثابتة للعمود المرفقي والحد الأدنى لسكن الفيلم. كما هو متوقع، تلعب النفاذية دورًا سلبيًا في الحد الأدنى لسكن الفيلم.

**الكلمات المفتاحية:** Poro-elastohydrodynamic، مجال مسامية، مادة تشحيم نانوية، جسيمات نانوية، سائل غير نيوتوني، نماذج المحاكاة، تقريب مورغان - كاميرون.

# Table de matières

Nomenclature .....	1
Liste des figures .....	3
Liste des tableaux.....	6
Introduction générale.....	7
I.1. Introduction .....	11
I.2. Fonctionnement des paliers à coussinet poreux .....	12
I.2.1. Principe.....	12
I.2.1. Fabrication.....	14
I.3. Caractérisation d'un milieu poreux et modèles d'écoulements.....	15
I.3.1. Milieu poreux.....	15
I.3.2. Porosité.....	17
I.3.3. Perméabilité.....	17
I.3.4. La compacité.....	18
I.3.5. La connectivité et la tortuosité .....	18
I.4. Modèles d'écoulement en milieux poreux.....	20
I.4.1. Modèle de Darcy classique .....	20
I.4.2. Modèle de Darcy – Brinkman .....	21
I.4.3. Modèle de Darcy-Forchheimer .....	22
I.4.4. Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer .....	22
I.5. Les nanolubrifiants : Généralités et modèles rhéologiques.....	23
I.6. Etudes antérieures sur la lubrification des paliers à coussinet poreux : Etat de l'art	27
I.6.1. Cas des paliers à coussinets poreux rigides.....	28
I.6.2. Cas des paliers à coussinets poro-élastiques .....	31
I.7. Conclusion.....	33
I.8. Références bibliographiques du chapitre I .....	34
II.1. Introduction.....	38
II.2. Géométrie du palier étudié .....	40
II.3. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée non Newtonienne.....	41

II.3.1 Rappels des équations de base de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes .....	41
II.3. Conditions limites associées à l'équation de Reynolds modifiée .....	49
II.4. Caractéristiques hydrodynamiques du palier poreux.....	50
II.4.1. Capacité de charge et angle de calage .....	50
II.4.2. Force de frottement visqueux .....	50
II.4.3. Coefficient de frottement .....	51
II.4.4. Débit de fuite .....	51
II.5. Conclusion .....	53
II.6. Références bibliographiques du chapitre II .....	54
III.1. Introduction .....	55
III.2. Equations de base normalisées .....	56
III.2.1 Equation de Reynolds modifiée en variables adimensionnelles .....	56
III.2.2 Equation géométrique du film .....	57
III.2.3 Caractéristiques hydrodynamiques normalisée.....	58
III.3. Résolution numérique de l'équation de Reynolds modifiée normalisée.....	59
III.3.1. Discrétisation spatiale par différences finies.....	60
III.3.2. Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée .....	61
III.4. Recherche de la position d'équilibre statique dans le cas du problème PEHD inverse : Application de l'algorithme de Newton-Raphson relaxé.....	63
.....	68
I.5. Couplage équation géométrique du film-équation de Reynolds modifiée .....	68
III.6. Validation .....	69
III.7. Etude paramétrique .....	72
III.7.1. Effets de la taille caractéristique des NPs ou des agglomérats de NPs .....	73
III.7.2. Effets de la perméabilité de la couche poreuse .....	77
III.7.3. Effets de la fraction volumique $\phi$ des NPs, du facteur d'élasticité $\mathcal{L}$ , du coefficient de glissement $\alpha\mathbf{b}$ , et du coefficient de pénétration $\beta$ sur la pression .....	79
III.8. Conclusions.....	82
III.9. Références bibliographiques du chapitre III .....	84



IV.1. Introduction .....	85
IV.2. Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes .....	87
IV.3. Paliers principaux de vilebrequin de moteurs thermiques .....	90
IV.3.1. Equation de Reynolds modifiée en régime dynamique.....	94
IV.4 Normalisation des équations gouvernantes .....	95
IV.4.1 Equations du palier de vilebrequin de machine alternative .....	95
IV.5 Procédure de résolution du problème de lubrification PEHD inverse en régime dynamique .....	97
IV.6. Validation du code de calcul.....	98
IV.7. Etude paramétrique .....	102
IV.7.1. Etude de l'influence de la taille caractéristique des NPs sur le comportement dynamique d'un palier poreux de vilebrequin .....	103
IV.7.2. Etude des effets de la concentration des agglomérats de NPs sur le comportement dynamique d'un palier poreux de vilebrequin.....	105
IV.7.3. Etude de l'impact de la perméabilité sur le comportement dynamique d'un palier à coussinet poreux.....	107
IV.8. Conclusion.....	109
IV.9. Références bibliographiques du chapitre IV .....	111
Conclusion générale .....	112
Annexe A .....	114
Annexe B .....	120
Annexe C .....	121

## Nomenclature

### Symboles latins

$C$	:	Jeu radial [ $m$ ]
$f \left( \frac{R}{C} \right)$	:	Coefficient de frottement
$D_{ij}$	:	Tenseur des taux de déformation symétrique, [ $s^{-1}$ ]
$e$	:	Excentricité de fonctionnement, [ $m$ ]
$e_x, e_y$	:	Composantes d'excentricité, [ $m$ ]
$O, X, Y, Z$		Repère fixe lié à la charge statique
$\vec{F}$	:	Vecteur réaction du film hydrodynamique, [ $N$ ]
$F_f$	:	Force de frottement, [ $N$ ]
$f$	:	Nombre de frottement
$H$	:	Épaisseur de la couche poreuse, [ $m$ ]
$h$	:	Épaisseur du film fluide, [ $m$ ]
$\bar{h}$	:	Épaisseur sans dimension du film fluide, $= \frac{h}{C}$ , [-]
$k$	:	Perméabilité du milieu poreux, [ $m^2$ ]
$K$	:	Perméabilité du milieu poreux sans dimension
$l$	:	Taille caractéristique des NPs ou des agglomérats de NPs, [ $m$ ]
$\bar{l}$	:	Taille caractéristique des NPs sans dimension
$L$	:	Longueur du palier, [ $m$ ]
$\vec{m}$	:	Vecteur des couples de contraintes, [ $N \cdot m/m^2$ ] ou [ $Pa \cdot m$ ]
$\vec{\bar{M}} = M_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	:	Tenseur des couples de contraintes d'ordre 2, [ $N \cdot m/m^2$ ] ou [ $Pa \cdot m$ ]
$p$	:	Pression hydrodynamique dans le film fluide, [ $Pa$ ]
$p^*$	:	Pression du film fluide dans le milieu poreux, [ $Pa$ ]
$\bar{p}$	:	Pression dans le fluide sans dimension
$Q$	:	Débit de fuite, [ $m^3/s$ ]
$\bar{Q}$	:	Débit de fuite sans dimension
$r, \theta$ et $z$	:	Coordonnées cylindriques
$R_a$	:	Rayon de l'arbre, [ $m$ ]
$R_c$	:	Rayon du coussinet, [ $m$ ]
$\vec{t}$	:	Vecteur des contraintes, [ $N/m^2$ ]
$\vec{\bar{T}} = T_{ji}$	:	Tenseur des contraintes total, [ $N/m^2$ ]
$t$	:	Temps, [ $s$ ]
$u, v$ et $w$	:	Composantes de la vitesse de l'écoulement, [ $m/s$ ]
$\langle w \rangle$	:	Vitesse axiale moyenne de l'écoulement, [ $m/s$ ]
$U_b, W_b$	:	Vitesses de glissement à l'interface ( $y = 0$ ), [ $m/s$ ]
$u^*, v^*$ , et $w^*$	:	Composantes de vitesse dans la matrice poreuse, [ $m/s$ ]
$\vec{v}$	:	Vecteur vitesse du fluide, [ $m/s$ ]
$\vec{v}^*$	:	Vecteur vitesse dans la matrice poreuse, [ $m/s$ ]

## Nomenclature

---

$V_p$	:	Volume des pores, [ $m^3$ ]
$V_t$	:	Volume total, [ $m^3$ ]
$V_s$	:	Volume du solide, [ $m^3$ ]
$x, y$ et $z$	:	Variables d'espace locales, [ $m$ ]
$W_0$	:	Charge statique appliquée, [ $N$ ]
$W(t)$	:	Charge dynamique appliquée, [ $N$ ]

### Lettres grecques

$\tau_{xy}, \tau_{zy}$	:	Contraintes de cisaillement, [ $Pa$ ]
$\tau$	:	Tortuosité d'un milieu poreux, $[-]$
$\bar{\tau}^{(s)}$	:	Tenseur des contraintes d'ordre 2 symétrique, [ $N/m^2$ ]
$\omega_j$	:	Vitesse angulaire, [ $rad/s$ ]
$\delta$	:	Perturbation
$\rho$	:	Masse volumique du fluide, [ $kg/m^3$ ]
$\lambda$	:	Coefficient de viscosité de dilatation du fluide, [ $Pa \cdot s$ ]
$\mu$	:	Viscosité dynamique, [ $Pa \cdot s$ ]
$\mu^*$	:	Viscosité effective ou seconde viscosité, [ $Pa \cdot s$ ]
$\nu$	:	Viscosité cinématique, [ $m^2/s$ ]
$\mathcal{L}$	:	Opérateur de compliance, [ $m/Pa$ ]
$\sigma$	:	coefficient de Poisson
$\eta$	:	Constante physique du fluide polaire, [ $N \cdot s$ ] ou [ $kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]
$\phi$	:	Fraction volumique des particules dans le fluide de base, $[-]$
$\Phi$	:	Angle de calage, [ $rad.$ ]
$\Omega_{jt}$	:	Tenseur tourbillon ou tenseur des taux de rotation, [ $s^{-1}$ ]
$\varepsilon_{ijk}$	:	Tenseur permutation d'ordre trois antisymétrique, $[-]$
$\varepsilon$	:	Porosité du milieu poreux, $[-]$ , ou Excentricité relative $\varepsilon = \frac{e}{c}$
$\alpha_b$	:	Coefficient de glissement de Beavers-Joseph adimensionnel
$\beta$	:	Coefficient de pénétration adimensionnel

### Acronymes & Abréviations

NPs	Nanoparticules
PHD	Lubrification Poro-Hydrodynamique
PEHD	Lubrification Poro-élastohydrodynamique
SAE	Society of Automotive Engineers

## Liste des figures

Fig. I. 1: Représentation schématique d'un palier à coussinet poreux et visualisation des lignes de courant de l'écoulement du lubrifiant.....	13
Fig. I. 2: Quelques illustrations de paliers poreux.....	14
Fig. I. 3(a): Exemples de matériaux poreux naturels : a) grès, b) calcaire, c) sable des plages, d) pain, e) bois, f) cartilage articulaire.....	15
Fig. I. 4: Représentation d'un milieu poreux et d'un volume élémentaire représentatif..	17
Fig. I. 5 Représentation de la tortuosité d'un milieu poreux .....	19
Fig. I. 6 Structure d'une mousse en polyuréthane .....	19
Fig. I. 7 Comparaison entre les valeurs expérimentales des perméabilités mesurées à l'eau et à l'huile ISO VG 46 pour différentes porosités.....	20
Fig. I. 8 Différentes techniques de synthèse des nanoparticules .....	24
Fig. I. 9 Différentes structures et natures des nano-objets synthétisés Différentes structures et natures des nano-objets synthétisés.....	25
Fig. I. 10 Schema 3-D d'une particule IF-MoS2 .....	27
Fig. II. 1 Profils de vitesse d'un écoulement unidirectionnel dans le film fluide et le milieu poreux saturé.....	38
Fig. II. 2 Représentation des efforts agissant sur un élément de fluide d'après la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes .....	39
Fig. II. 3: Configurations géométriques d'un palier lisse .....	40
Fig. III. 1 Comparaison du modèle de viscosité de Krieger-Dougherty avec le modèle conventionnel d'Einstein pour diverses valeurs de la fraction volumique des particules dispersées dans un fluide de base.....	57
Fig. III. 2 Discrétisation par différences finies à pas réguliers du milieu fluide à l'aide d'une molécule de calcul à 9 noeuds.....	60
Fig. III. 3 Détermination par expérimentation numérique de la valeur optimale de $\omega_{GS}$ pour une erreur tolérée $\epsilon_{GS} = 10^{-6}$ et un maillage composé de 1200 mailles .....	62
Fig. III. 4 Organigramme général de résolution du problème PEHD inverse .....	65

## Liste des figures et tableaux

---

Fig. III. 5 Comparaison de la capacité de charge sans dimension $F$ avec les données expérimentales [1] .....	70
Fig. III. 6 Profils de pression calculés dans la section médiane $z = 0$ pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs, $\varepsilon = 0.8$ , $K = 2.54 \times 10^{-3}$ , $\phi = 0.$ , et $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ .....	74
Fig. III. 7 Evolution de la capacité de charge sans dimension $F$ en fonction de l'excentration pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs, $\varepsilon = 0.8$ , $K = 2.54 \times 10^{-3}$ , $\phi = 0.$ , et $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ .....	74
Fig. III. 8 Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentration pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs, $\varepsilon = 0.8$ , $K = 2.54 \times 10^{-3}$ , $\phi = 0.$ , et $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ .....	75
Fig. III. 9 Evolution du coefficient de frottement $f(R/C)$ pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs, $\varepsilon = 0.8$ , $K = 2.54 \times 10^{-3}$ , $\phi = 0.$ , et $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ .....	76
Fig. III. 10 Variation du débit de fuite pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs, $\varepsilon = 0.8$ , $K = 2.54 \times 10^{-3}$ , $\phi = 0.$ , $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , et $\alpha b = 0.$ .....	77
Fig. III. 11 Profil de pression calculé à $z = 0$ pour différents paramètres de perméabilité $K$ , $\varepsilon = 0.6$ , $l = 0.1$ , $\phi = 0.$ , et $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ .....	78
Fig. III. 12 Effets de la perméabilité $K$ de la couche poreuse sur les performances hydrodynamiques du palier pour $\beta = 0.0$ , $l = 0.1$ , $\phi = 10\%$ , $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , et $\alpha b = 0.$ .....	79
Fig. III. 13 Profils de pression calculés à $\bar{z}=0$ pour différentes fractions volumiques $\phi$ , $\varepsilon = 0.6$ , $l = 0.1$ , $\mathcal{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , $\alpha b = 0.$ , $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et $\beta = 0.$ .....	80
Fig. III. 14 Profils de pression et épaisseur du film calculés à $z = 0$ pour différentes valeurs du facteur d'élasticité $\mathcal{L}$ , $\phi = 30\%$ , $\varepsilon = 0.95$ , $l = 0.4$ , $\alpha b = 0.$ , $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et $\beta = 0.$ .....	81
Fig. III. 15 Profils de pression calculés à $\bar{z}=0$ pour différentes valeurs du coefficient de glissement de Beavers-Joseph $\alpha b$ , $\mathcal{L} = 6 \times 10^{-6}$ , $\phi = 30\%$ , $\varepsilon = 0.6$ , $l=0.1$ , $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et $\beta = 0.$ .....	81
Fig. III. 16 Profils de pression calculés à $\bar{z}=0$ pour différentes valeurs du coefficient de pénétration (ou percolation) $\beta$ , $\alpha b = 0.0$ , $\mathcal{L} = 6 \times 10^{-6}$ , $\phi = 30\%$ , $\varepsilon = 0.6$ , $l=0.1$ , et $K = 4.35 \times 10^{-2}$ .....	82

## Liste des figures et tableaux

---

Fig. IV. 1 Schématisation d'un turbo-compresseur .....	85
Fig. IV. 2 Exemples de paliers hydrodynamiques de machines tournantes et alternatives .....	86
Fig. IV. 3 Représentation schématique d'un palier de tête de bielle de moteur thermique dynamiquement chargé soumis à un torseur de force quelconque.....	87
Fig. IV. 4 Section droite d'un palier poreux équilibré de machines tournantes et système d'axes.....	88
Fig. IV. 5 Section droite d'un palier à arbre déséquilibré.....	89
Fig. IV. 6 : Exemples de diagrammes de charge de moteurs Diesel et essence.....	91
Fig. IV. 7 Représentation cartésiennes du chargement dynamique sur le palier principal du vilebrequin de Paranjpe [2] .....	100
Fig. IV. 8 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour $k = 10 - 15 m^2$ , $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la taille caractéristiques des agglomérats de NPs $l$ .....	104
Fig. IV. 9 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin $\theta c$ calculée pour $k = 10 - 15 m^2$ , $\phi = 20\%$ , , et pour différentes valeurs de la taille caractéristique des agglomérats de NPs $l$ .....	104
Fig. IV. 10 Evolution du pic de pression en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin $\theta c$ calculé pour $k = 10 - 15 m^2$ , $\phi = 20\%$ , et pour différentes valeurs de la taille caractéristique des agglomérats de NPs $l$ .....	105
Fig. IV. 11 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour $k = 10 - 15 m^2$ , $l = 0.2$ et différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs $\phi$ .....	106
Fig. IV. 12 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin $\theta c$ calculée pour $k = 10 - 15 m^2$ , $l = 0.2$ , et pour différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs $\phi$ .....	106
Fig. IV. 13 Evolution du pic de pression hydrodynamique en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin $\theta c$ calculée pour $k = 10 - 15 m^2$ , $l = 0.2$ , et pour différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs $\phi$ .....	107
Fig. IV. 14 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour $l = 0.2$ , $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet $k$ .....	108

## Liste des figures et tableaux

---

Fig. IV. 15 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin calculée pour $l = 0.2, \phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet $k$ .....	108
Fig. IV. 16 Evolution du pic de pression en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin calculé pour $l = 0.2, \phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet $k$ . .....	109

## Liste des tableaux

Tableau I. 1. Quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane .....	20
Tableau III. 1. Comparaison des résultats théoriques obtenus par le code de calcul développé avec ceux publiés dans [2] pour : $R/L=0.5, H/R=0.2, C/R=0.001$ .....	71
Tableau III. 2. Données géométriques et conditions de fonctionnement du palier .....	72
Tableau III. 3. Caractéristiques du maillage et données relatives aux différents calculs.	73
Tableau IV. 1. Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier de ligne principal de Paranjpe.....	100
Tableau IV. 2. Valeurs numériques du chargement dynamique exercé sur un palier principal de vilebrequin tournant à 5000 rpm pour un cycle moteur. ....	101
Tableau IV. 3. Comparaison des résultats calculés par le code développé et les résultats obtenus par Paranjpe.....	102

### Introduction générale

La lubrification fluide représente une branche très vaste de la tribologie qui est la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire entre deux corps solides en contact, immobiles ou animés de mouvements relatifs. Elle consiste à intercaler et maintenir un film lubrifiant très mince suffisamment visqueux appelé troisième corps permettant de séparer les surfaces en contact, de faciliter le glissement ou la rotation des deux corps en réduisant les frottements, et de minimiser ainsi l'usure.

La lubrification a plusieurs domaines d'applications, en particulier dans l'industrie (automobile, aéronautique, . . .) à travers l'utilisation par exemple des paliers lisses. Ces derniers sont utilisés souvent en construction mécanique comme organes de supportage et de guidage, en rotation, des arbres de transmission. Ils sont constitués d'un arbre cylindrique tournant à l'intérieur d'un coussinet en présence d'un lubrifiant. Ces paliers sont généralement alimentés en lubrifiant issu d'un réservoir externe par l'intermédiaire de rainures ou d'orifices.

Les paliers poreux sont des paliers spéciaux dits autolubrifiants dont le coussinet est muni d'un revêtement poreux jouant le rôle de réservoir d'huile. Leurs faibles coûts de revient, l'absence d'alimentation extérieure en huile et leurs espaces réduits, les rendent compétitifs comparativement aux paliers lisses.

L'utilisation des paliers à coussinet poreux dans l'industrie remonte au début du XXème siècle et depuis, l'éventail de leur emploi n'a cessé de s'élargir.

Sur le plan recherche et développement, plusieurs études tant théoriques qu'expérimentales portant sur la rhéologie des fluides lubrifiants et les caractéristiques des matériaux utilisés comme revêtements de surfaces ont été réalisées récemment en vue d'améliorer les performances des nouvelles générations d'huiles lubrifiantes formulées tels que les nanolubrifiants et par conséquent les caractéristiques tribologiques de ce type de paliers.



## Introduction générale

---

L'ajout des nano-additifs à action tribologique tels que les fullerènes IF-MoS<sub>2</sub> et IF-WS<sub>2</sub> aux huiles lubrifiantes de base modifie les réponses aux sollicitations de celles-ci et change leurs propriétés intrinsèques telles que les propriétés anti-usure. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique à cause de la non symétrie du tenseur des contraintes. Il y a lieu d'adopter d'autres modèles rhéologiques de fluides. Parmi ces modèles, le modèle du micro-continuum de Vijay Kumar Stokes est le plus simple et le plus utilisé pour décrire le comportement rhéologique non Newtonien de tels lubrifiants. Ce modèle permet de tenir compte de la taille des particules ou des agglomérats de nanoparticules (NPs) en mouvement.

L'objectif de cette étude est de mettre en place des modèles numériques d'aide à la conception des paliers à coussinet poreux permettant de prendre en compte à la fois le comportement rhéologique non Newtonien du lubrifiant, la complexité de l'écoulement dans le coussinet poreux et l'interaction de ce dernier avec le film lubrifiant au niveau de l'interface déformable. Ces modèles sont établis pour un régime de lubrification poro-élastohydrodynamique (PEHD) isotherme gouverné par plusieurs équations différentielles couplées, à savoir : l'équation de Reynolds modifiée, l'équation de Darcy modifiée, l'équation de l'élasticité, et les équations d'équilibre ou de la dynamique appliquées à l'arbre.

Le manuscrit présentant ce travail comprend quatre chapitres, une introduction générale, une conclusion générale, et trois annexes.

Le premier chapitre s'attache à présenter, dans un premier temps, une brève description des paliers à coussinet poreux ainsi que la caractérisation physique d'un milieu poreux (porosité, perméabilité, tortuosité, compacité, etc.). Ensuite, quelques modèles mathématiques décrivant l'écoulement de fluide en présence d'un milieu poreux sont proposés en l'occurrence le modèle de Darcy et le modèle de Darcy-Brinkman plus complet qui prend en considération les effets de la viscosité ou de la couche limite du fluide infiltré. Quelques généralités sur la synthèse des nanoparticules lubrifiantes (les fullerènes MoS<sub>2</sub> et WS<sub>2</sub>) sont également présentées de façon concise.

## Introduction générale

---

Enfin, une revue bibliographique concernant des études antérieures sur la lubrification Newtonienne ou non Newtonienne des paliers à coussinet poreux rigides ou déformables a permis de mieux situer notre contribution scientifique vis-à-vis de l'état de l'art.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation de la théorie complète des paliers poreux. Une équation de Reynolds modifiée est dérivée selon le processus classique d'Osborne Reynolds dans le cadre de la théorie du micro-continuum de Vijay Kumar Stokes qui prend en considération la taille caractéristique des nanoparticules ou des agglomérats de nanoparticules rajoutées au lubrifiant de base. La vitesse de glissement à l'interface et la porosité du revêtement du coussinet sont intégrées dans l'équation de Reynolds à l'aide des conditions de Beavers-Joseph et l'approximation de Morgan-Cameron. La nouvelle équation de Reynolds dérivée implique cinq nouveaux paramètres, à savoir : la taille des NPs  $l$ , la perméabilité du milieu poreux  $k$ , le coefficient de glissement adimensionnel de Beavers-Joseph  $\alpha_b$ , le coefficient de pénétration adimensionnel  $\beta$ , et le facteur d'élasticité  $\mathcal{L}$ . Ce chapitre se termine par une présentation des différentes équations permettant d'exprimer les performances hydrodynamiques du palier poreux telles que la capacité de charge, l'angle de calage, les forces de frottement, le débit de fuite.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement statique d'un palier poro-élastique lubrifié par des nanofluides. La déformation élastique de l'interface film fluide – coussinet poreux est prise en compte par un modèle analytique simplifié dit « Modèle Couche Élastique Mince ». Après normalisation, les équations gouvernantes du problème de lubrification direct (excentricité de fonctionnement imposée) et inverse (charge appliquée imposée) sont discrétisées par la méthode des différences finies. Le couplage de l'équation de Reynolds et de l'équation géométrique du film est assuré à l'aide de la méthode itérative du point fixe. Le système d'équations algébriques résultant de la discrétisation spatiale est résolu par la méthode itérative de Gauss – Seidel avec facteur de sur-relaxation. Le traitement numérique du problème inverse nécessite l'emploi de la méthode de Newton-Raphson améliorée.

L'algorithme de résolution traduit en langage MS-Fortran 90 est validé en comparant les valeurs calculées de la capacité de charge à celles obtenues expérimentalement dans le cas d'un palier à coussinet poreux indéformable de dimension finie lubrifié par un fluide

## Introduction générale

---

Newtonien. Enfin, les résultats numériques concernant les performances statiques du palier à coussinet poreux, tels que la distribution de la pression, la capacité de charge, l'angle de calage, le débit de fuite et le coefficient de frottement sont présentés et discutés pour différentes valeurs du paramètre de couple de contraintes qui reflète la taille des NPs, du facteur d'élasticité ou de compliance, du paramètre de perméabilité, et du coefficient de glissement de Beavers-Joseph.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous présentons les équations de base de l'analyse complète du comportement dynamique d'un palier poreux de vilebrequin soumis à un chargement dynamique qui varie en module et en direction. Ce chargement est généralement obtenu à partir d'une analyse cinématique et dynamique de l'attelage mobile d'un moteur thermique General Motors Corporation. La résolution du problème de lubrification en régime dynamique consiste à prédire la trajectoire décrite par le centre du tourillon à l'intérieur du coussinet pour un diagramme de charge donné. Cette trajectoire est calculée par la méthode de Newton-Raphson appliquée aux équations de la dynamique du vilebrequin avec prise en considération des forces d'inertie. Les coordonnées instantanées de la position du centre du tourillon est déterminée à l'aide d'un schéma d'Euler modifié ou la méthode de Runge-Kutta d'ordre deux à partir des vitesses calculées par l'algorithme de Newton-Raphson améliorée.

Après validation, le deuxième code de calcul développé est utilisé pour simuler le comportement dynamique d'un palier principal de vilebrequin. L'étude paramétrique envisagée porte sur l'influence de la taille et de la concentration des NPs ainsi que l'effet de la perméabilité sur les trajectoires du centre du tourillon, l'épaisseur minimale du film, et la pression hydrodynamique maximale.

# **Chapitre I**

**Modélisation des écoulements des  
nanolubrifiants dans les paliers à  
coussinet poreux**

# Chapitre I

## Modélisation des écoulements des nanolubrifiants dans les paliers à coussinet poreux

### I.1. Introduction

La lubrification est une partie importante de la tribologie (science du frottement et de ses effets) qui concerne les contacts pour lesquels un fluide visqueux est intercalé entre les surfaces en mouvement relatif.

De l'antiquité à nos jours, cette discipline a considérablement subi un développement important surtout sur le plan théorique. La lubrification fluide est un domaine pluridisciplinaire qui implique plusieurs sciences telles que la thermodynamique, la thermo-fluide, la mécanique des milieux continus, la rhéologie, etc.

L'axe de recherche le plus largement traité est la lubrification des paliers lisses en raison de leur importance industrielle. Ces derniers sont des organes de machines utilisés souvent en construction mécanique pour supporter et guider, en rotation, des arbres de transmission de puissance et des rotors de machines tournantes et alternatives. Ils sont constitués d'un arbre cylindrique généralement en acier traité tournant à l'intérieur d'un coussinet en acier régulé (revêtu) ou en bronze en présence d'un film lubrifiant. Ces paliers sont généralement alimentés en lubrifiant issu d'un réservoir externe, au moyen de rainures ou d'orifices.

Les paliers poreux sont des paliers spéciaux dits autolubrifiants dont le coussinet est muni d'un revêtement poreux jouant le rôle de réservoir d'huile. Leurs faibles coûts de revient, l'absence d'alimentation extérieure en huile et leurs espaces réduits, les rendent compétitifs comparativement aux paliers lisses.

L'utilisation des paliers à coussinet poreux dans l'industrie remonte au début du XXème siècle et depuis, l'éventail de leur emploi n'a cessé de s'élargir.

La caractérisation d'un palier sert à la détermination des performances statiques ou dynamiques de celui-ci. Ces dernières sont affectées par plusieurs paramètres, liés soit à la géométrie, aux conditions de fonctionnement ou au lubrifiant utilisé.

Dans ce chapitre, après une brève description des paliers à coussinet poreux et leurs conditions de fonctionnement, quelques propriétés caractéristiques d'écoulement en milieux poreux seront abordées. Les modèles d'écoulement en ces milieux poreux seront présentés. Une revue bibliographique sur les principaux travaux de recherche antérieurs (état de l'art) ainsi que les lubrifiants modernes de nouvelle génération communément appelés nanolubrifiants, en relation avec la lubrification des paliers à coussinet poreux rigides ou déformables, est aussi envisagée.

## I.2. Fonctionnement des paliers à coussinet poreux

### I.2.1. Principe

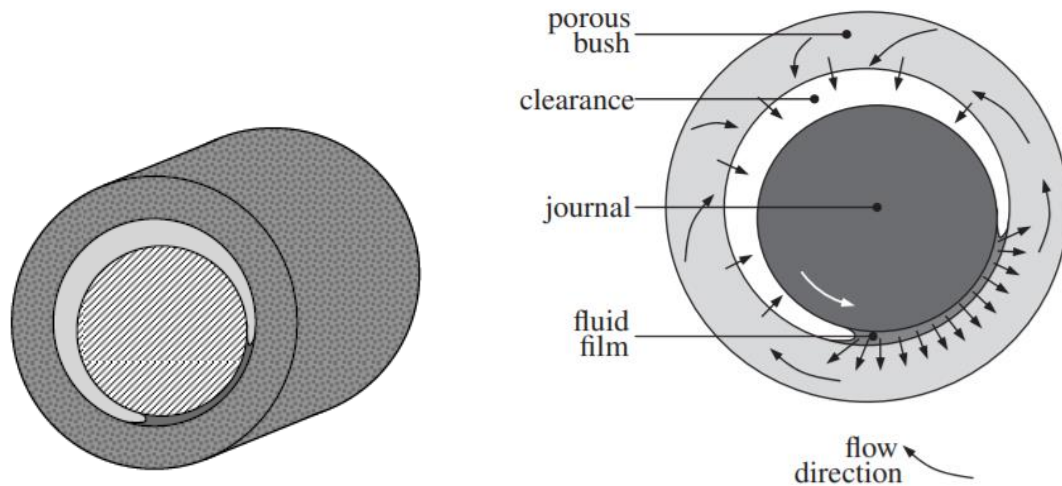
Les paliers à coussinet poreux sont dits autolubrifiants car c'est le coussinet lui-même, qui, imbibé d'huile, joue le rôle de réservoir de lubrifiant. Ainsi, aucun système annexe n'est nécessaire pour alimenter le palier.

En régime hydrodynamique, un film d'huile sépare complètement l'arbre du coussinet. Comme dans tout palier fluide, l'arbre est excentré par rapport au coussinet sous l'effet de la charge appliquée, créant une géométrie convergente divergente ; la rotation de l'arbre entraîne une augmentation de la pression dans la partie convergente, et une diminution de celle-ci dans la partie divergente, jusqu'à une valeur limite dite pression de cavitation ou pression de vapeur saturante. On distingue dans le jeu entre l'arbre et le coussinet deux zones :

- la zone de film complet où la pression est supérieure à la pression de cavitation,
- la zone de cavitation où le film est rompu en un mélange d'huile et de gaz, et où la pression est uniformément égale à la pression de cavitation.

Comme illustré sur la figure I.1, l'huile circule ou s'écoule circonférentiellement et axialement aussi bien dans le jeu du palier que dans le coussinet poreux dans le sens des pressions décroissantes ; c'est-à-dire de la zone de haute pression vers la zone de basse pression. Autrement dit, l'huile s'infiltré du film vers le coussinet dans la zone pressurisée

(zone de pression élevée), et du coussinet vers le film dans la zone cavité (zone de basse pression).



**Fig. I. 1: Représentation schématique d'un palier à coussinet poreux et visualisation des lignes de courant de l'écoulement du lubrifiant**

Les avantages des paliers autolubrifiants, à savoir : absence de circuit de graissage, montage très simple, et faible coût de fabrication du coussinet sont contrebalancés par les faibles valeurs admissibles de charge et de vitesse par comparaison aux paliers alimentés ou les paliers de roulements. Le risque de grippage, dû à un défaut d'alimentation, constitue un autre inconvénient des paliers autolubrifiants. Ce risque survient généralement lorsque le coussinet perd plus d'un tiers de son contenu initial en huile.

Les paliers à coussinet poreux s'imposent en effet chaque fois que les paliers lisses hydrodynamiques ne peuvent être utilisés par manque de place et d'accessibilité pour la lubrification périodique. Ils sont largement répandus dans différents domaines d'utilisation : ordinateurs, équipements de bureau, équipements domestiques, moteurs électriques, automobiles (démarreurs de moteurs), domaine agricole, imprimantes, machines de conditionnement et dans les chaînes de distributions. Leur prix de revient plus bas les fait préférer aux paliers de roulements (Rolling bearings) lubrifiés à vie. Ils sont le plus souvent graissés à l'huile car la graisse, considérée comme un lubrifiant semi-solide, risque de subir, dans les pores, une séparation entre la partie savon et ingrédients solides, et la partie huile.

### I.2.1. Fabrication

Le coussinet d'un palier poreux est réalisé par frittage (technologie des poudres), en alliages ferreux ou en bronze qui a la particularité d'être poreux (Figure I.2). Le frittage (sintering) consiste à obtenir une pièce finie par compactage de poudres (métalliques ou autres) dans une sorte de moule, sous très haute pression et à haute température. Il est imprégné à saturation (porosité de 15 à 30% du volume du coussinet) avec une huile à haut pouvoir lubrifiant.

Les séquences de fabrication des coussinets poreux sont :

1. Les poudres des métaux sont mélangées dans la proportion désirée. Par exemple : 80 % de cuivre, 10% d'étain, 1% de graphite pour produire un bronze graphité. On incorpore quelque fois, toujours pour améliorer la lubrification, du bisulfure de molybdène ( $\text{MoS}_2$ ).
2. Le mélange pulvérulent est compacté au profil désiré, dans une presse entre 1500 et 5000 bars.
3. Le frittage est obtenu en atmosphère réductrice à 800 °C environ pour le bronze et plus de 1000 °C pour les alliages ferreux.
4. La pièce est recomprimée enfin pour éliminer les distorsions, obtenir les dimensions précises, et le fini de surface désiré.
5. Les pores de la pièce sont enfin remplis d'huile par immersion.

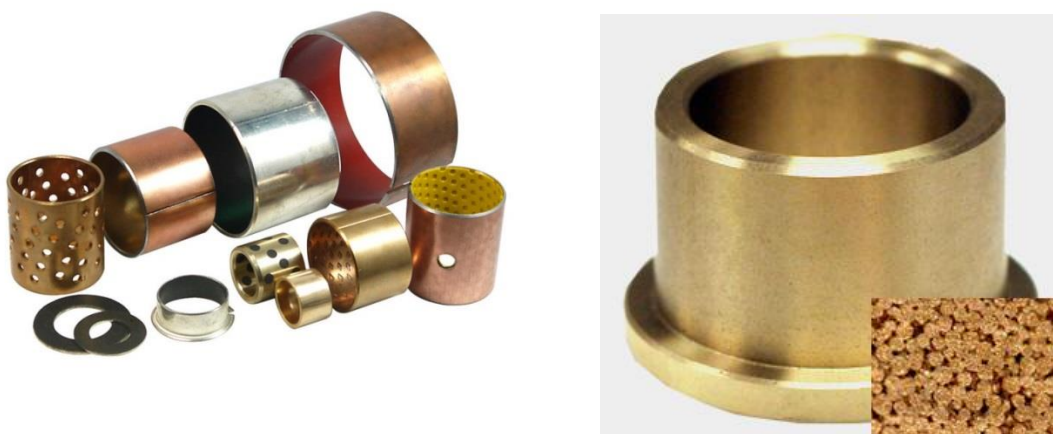


Fig. I. 2: Quelques illustrations de paliers poreux



## I.3. Caractérisation d'un milieu poreux et modèles d'écoulements

### I.3.1. Milieu poreux

Un milieu poreux est usuellement défini comme étant un milieu solide contenant des espaces vides, appelés aussi pores, répartis de façon ordonnée ou chaotique reliés entre eux par des canaux ou éventuellement isolés (Figures I.3(a) et I.3(b)).

La matrice solide peut soit être rigide, soit être soumise à de petites déformations. Le milieu poreux trouve plusieurs applications en biomécanique articulaire mais aussi en lubrification industrielle à travers l'utilisation des paliers à coussinet poreux.

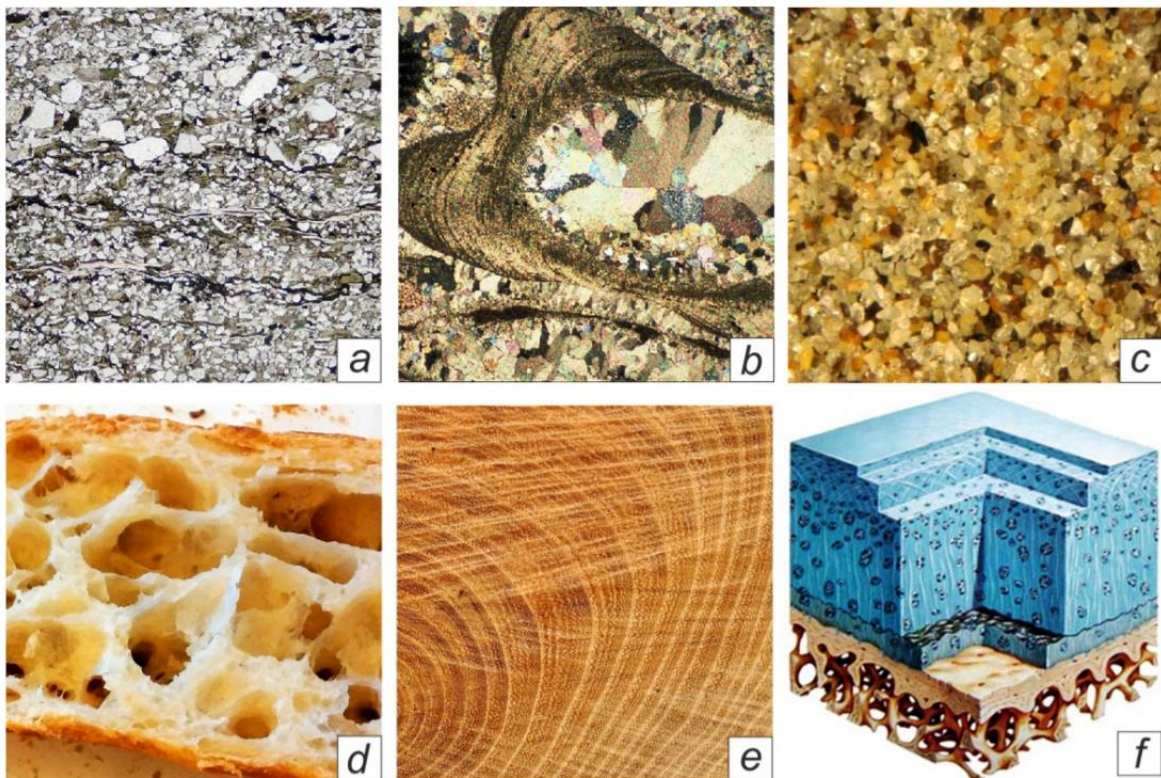
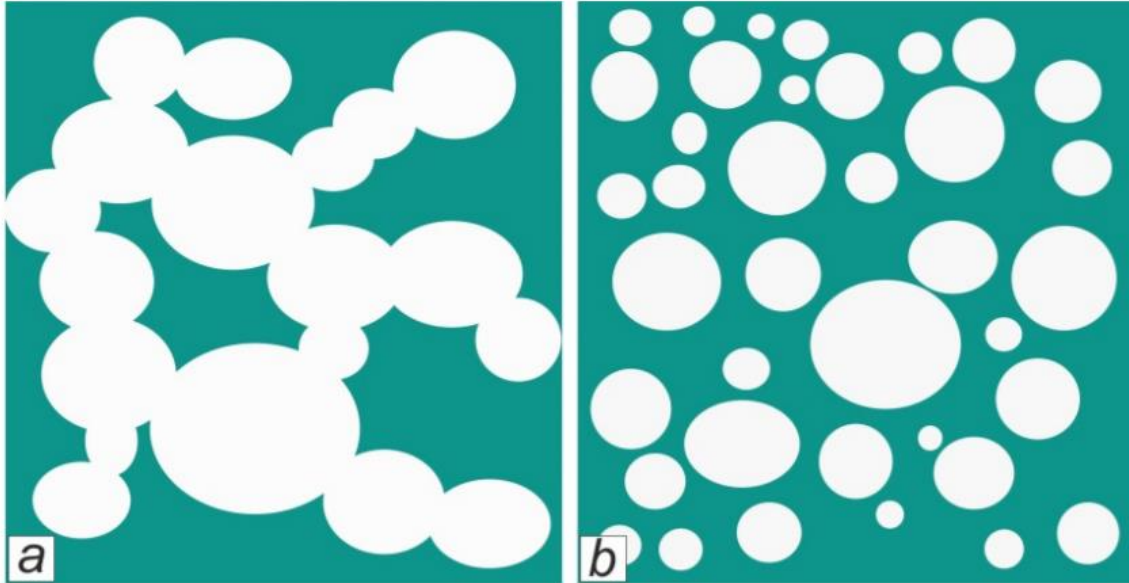


Fig. I. 3(a): Exemples de matériaux poreux naturels : a) grès, b) calcaire, c) sable des plages, d) pain, e) bois, f) cartilage articulaire.



**Fig. I. 3(b): Structure des vides dans un milieu poreux : (a) vides connectés, (b) vides non connectés.**

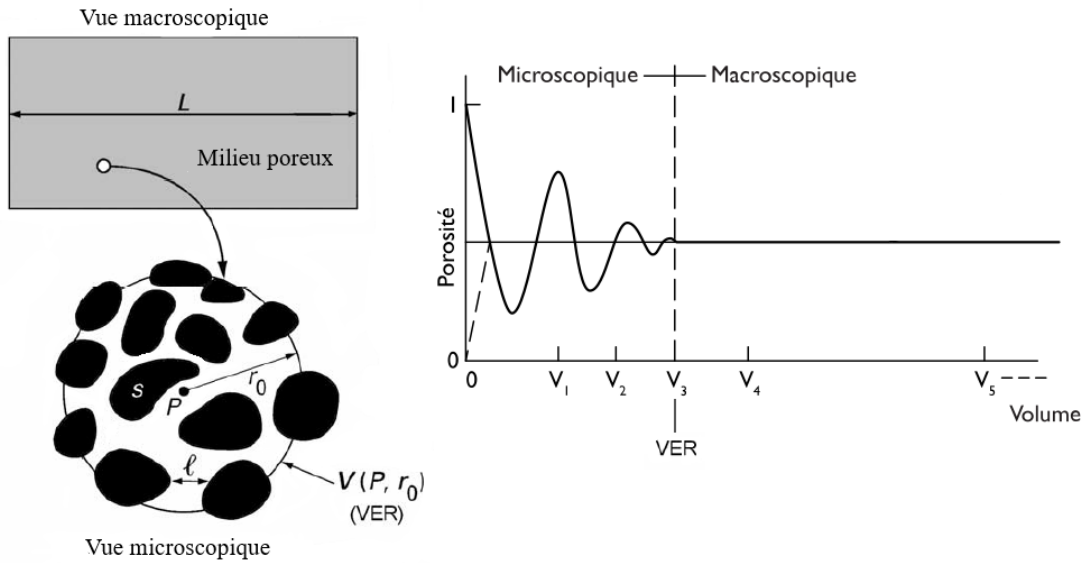
L'utilisation de tels milieux en lubrification, par filtration du film fluide dans la couche poreuse, a pour conséquence d'améliorer les performances hydrodynamiques des contacts.

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent de la géométrie de la matrice, celle-ci peut être caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques (porosité, perméabilité, etc.).

Lorsque ces propriétés moyennes de structure doivent être généralisées localement, la considération d'une échelle de mesure macroscopique devient indispensable, celle-ci associe les grandeurs physiques à l'échelle d'un ensemble de pores ou particules solides dans un volume fini local [1-2].

Le volume élémentaire représentatif, noté VER, définit un volume différentiel local dans un milieu poreux (Figure I.4). Il est suffisamment grand pour caractériser toutes les propriétés moyennes du milieu et suffisamment petit pour que la grandeur ainsi définie garde un caractère local.

Ainsi, les propriétés moyennes, définies au centre  $P$  du VER, peuvent être généralisées en chaque point du milieu poreux. L'échelle  $r_0$  du volume élémentaire représentatif doit être d'une part très petite devant la longueur caractéristique  $L$  du système poreux et d'autre part assez grande devant la taille des pores.



**Fig. I. 4: Représentation d'un milieu poreux et d'un volume élémentaire représentatif**

Un milieu poreux est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles qui sont la porosité  $\varepsilon$  et la perméabilité  $k$ .

### I.3.2. Porosité

La porosité représente le pourcentage de vides qui peuvent être occupés par des fluides. Elle constitue un indice du volume relatif des vides dans le milieu poreux et est définie comme le rapport du volume des vides  $V_p$  au volume total du milieu poreux  $V_t$  :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} \quad (I.1)$$

Cette grandeur ne donne aucune information sur la distribution des pores. En effet, deux matériaux de même porosité peuvent avoir des propriétés physiques différentes. Un pore peut être connecté à d'autres pores interconnectés, comme il peut être isolé. Des mesures expérimentales, faites par Kaviany, montrent que la porosité varie de l'ordre de 0.02 à 0.98 suivant le type de matériau.

### I.3.3. Perméabilité

La perméabilité intrinsèque, notée  $k$ , est la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Elle est dimensionnellement homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel. La perméabilité est un paramètre physique qui caractérise la capacité du milieu poreux à conduire à travers lui un liquide

sous un gradient de pression donné. L'équation dimensionnelle de la perméabilité est alors  $[k] = L^2$  ou encore le Darcy tel que ( $1 \text{ Darcy} = 0.987 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \approx 1 \mu\text{m}^2$ ).

Ainsi, le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux. Les perméabilités de quelques matériaux poreux, issues des travaux de Sheidegger [3], varient entre environ  $10^{-15}$  et  $10^{-8} \text{ m}^2$ .

Il est possible d'évaluer la perméabilité  $k$  grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de la porosité  $\varepsilon$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. La relation de Kozeny – Carmen [4] donne une estimation de la perméabilité  $k$  pour un milieu poreux, non consolidé, constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$k = \frac{d_g^2 \varepsilon^3}{36C_0(1-\varepsilon)^2} \quad (1.2)$$

où  $d_g$  désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et  $C_0$  la constante de Kozeny dépendant de la forme du volume des solides ( $3.6 < C_0 < 5$ ). Ergun [5] établit une équation semblable à celle de Kozeny – Carman en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse, de diamètre  $d_g$ , soumise à un gradient de pression et constituée de particules sphériques:

$$k = \frac{d_g^2 \varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \quad (1.3)$$

Cette dernière équation peut être retrouvée à partir de l'équation (1.2) lorsque  $C_0 = 5$ .

### I.3.4. La compacité

La troisième caractéristique des milieux poreux est la compacité qui est cette fois-ci le pourcentage de volume solide dans le milieu poreux. Ainsi, on peut dire que la compacité représente le taux d'occupation réel de l'espace à l'intérieur d'un milieu poreux et est

calculée par la relation :  $c = \frac{V_s}{V_t} = 1 - \varepsilon$  où  $V_s$  est le volume du solide.

### I.3.5. La connectivité et la tortuosité

La connectivité caractérise la topologie du volume des pores, le voisinage des pores et la présence de pores bouchés tandis que la tortuosité représente la non-rectilinéarité des trajectoires à l'intérieur du milieu poreux figure I.5. Si on considère un échantillon de longueur  $L$  d'une part, et un canal de longueur effective  $L_e > L$  qui traverse cet échantillon d'une extrémité à l'autre, on peut déterminer la tortuosité comme:  $\tau = \frac{L_e}{L}$ .

Autrement dit, la tortuosité caractérise la ligne de courant d'un fluide dans le milieu poreux, par rapport à une ligne droite entre les extrémités d'écoulement dans le milieu poreux.

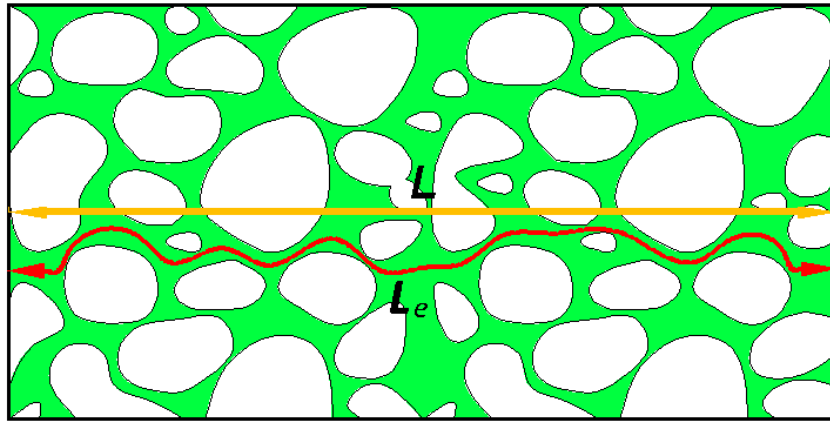
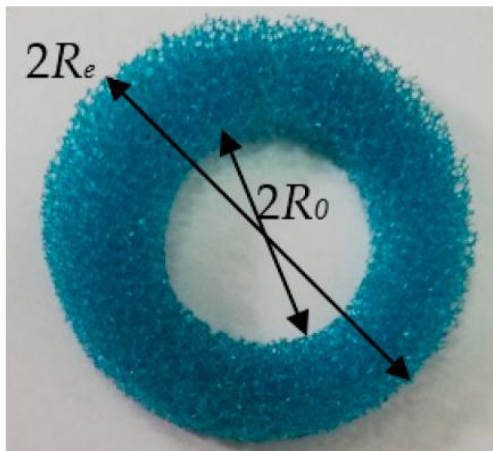
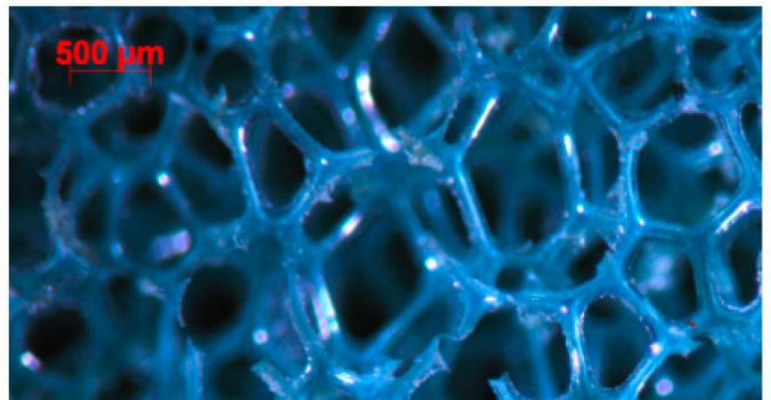


Fig. I. 5 Représentation de la tortuosité d'un milieu poreux

Dans le [tableau I.1](#), on reporte quelques propriétés de la roche de sable (grès ou sandstone) et de la mousse en polyuréthane ([figure I.6](#)) considérées comme des milieux poreux naturels et industriels.



(a)



(b)

Fig. I. 6 Structure d'une mousse en polyuréthane

La [figure I.7](#) représente les variations typiques de la perméabilité avec la porosité de la mousse en polyuréthane imbibée à l'eau et à l'huile.

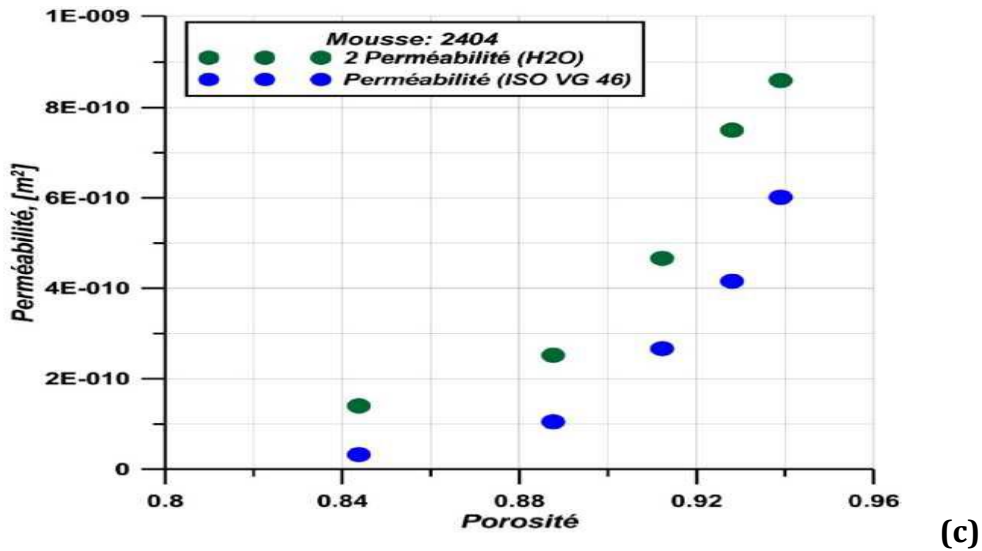


Fig. I. 7 Comparaison entre les valeurs expérimentales des perméabilités mesurées à l'eau et à l'huile ISO VG 46 pour différentes porosités

Tableau I. 1. Quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane

Porosité $\epsilon$ (-)	Perméabilité $k$ (m2)	Tortuosité $\tau$ (-)	Module d'Young, E (GPa)	Coefficient de Poisson $\nu$ (-)	Masse volumique, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
0.3	$10^{-10}$ - $10^{-4}$	1.02	7.3	0.3	2300
0.97	$1.53 \times 10^{-10}$	1.60	$168 \times 10^{-6}$	0.3	998

## I.4. Modèles d'écoulement en milieux poreux

Pour étudier les processus d'écoulement dans un milieu poreux, il existe différents modèles mathématiques qui utilisent des lois basiques de transfert de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Dans ce qui suit, on ne présentera que les modèles les plus utilisés :

### I.4.1. Modèle de Darcy classique

La loi fondamentale de l'écoulement dans un milieu poreux a été établie expérimentalement par Darcy [6]. Elle s'écrit dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible et pour un milieu homogène et isotrope sous la forme [6]:

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* \quad \text{ou encore} \quad \vec{v}^* = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla}p \quad (I.4)$$

où  $\vec{v}^*$  est la vitesse de filtration,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $k$  est la perméabilité du milieu poreux et  $p$  est la pression.

Le signe moins apparaissant dans la loi de Darcy (I.4) signifie que l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens des pressions décroissantes. Il convient de noter que lorsque le milieu poreux est anisotrope, la loi de Darcy prend la forme suivante :  $\vec{v}^* = -\frac{\bar{k}}{\mu} \vec{\nabla} p$  où  $\bar{k} = k_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ .

La loi de Darcy relie donc linéairement la vitesse de filtration et le gradient de pression interstitielle, elle découle de la linéarité des équations de Stokes. Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si on fait une moyennisation de la vitesse et des gradients de pression sur un volume plus grand que la taille des pores.

Bien que la loi de Darcy soit largement utilisée, elle s'est avérée insuffisante. En effet, quand la vitesse de filtration augmente, on note une déviation des résultats expérimentaux par rapport ceux obtenus par la loi de Darcy. Cette déviation est due aux effets combinés de l'inertie et de la viscosité. Ces deux effets opposent une résistance à l'écoulement du fluide. Pour tenir compte de tous ces effets, d'autres modèles ont été proposés et utilisés [7-8].

### I.4.2. Modèle de Darcy – Brinkman

La loi précédente de Darcy montre que le champ de vitesse ne dépend que de la pression. Les conditions aux limites appliquées au milieu poreux portent sur la pression ou sur sa dérivée normale. Si le milieu poreux est limité par un milieu fluide en mouvement, ce dernier entraîne un écoulement dans le milieu poreux, c'est le résultat de la contrainte de cisaillement à l'interface des deux milieux. De même, lorsque le milieu poreux est partiellement limité par un milieu solide étanche, la condition adéquate est la condition d'adhérence du fluide à la paroi solide. Or, avec la loi de Darcy, il n'est pas possible d'appliquer des conditions sur la vitesse tangentielle ou sur sa dérivée.

En 1949, Brinkman [8] a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \mu^* \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* \quad (I.5)$$

Cette équation vectorielle est connue sous le nom de la loi de Darcy – Brinkman. Le premier terme du membre droit de l'équation (1.5) est le terme de Darcy, et le second qui

présente une analogie avec le terme de Laplace dans l'équation de Navier- Stokes est appelé terme de Brinkman. Bien que l'utilisation de la correction de Brinkman permette d'imposer la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles à l'interface fluide - milieu poreux, elle fait cependant intervenir la viscosité effective  $\mu^*$  du milieu poreux dont la détermination reste controversée [9-10]. La viscosité effective peut différer fortement de la viscosité  $\mu$  du fluide. Valdes-Parada et al. [11] se sont intéressés à son évolution en fonction de la porosité  $\varepsilon$ . La correction de Brinkman est valide pour des valeurs élevées de la porosité [12]. Dans l'équation (I.5), la viscosité effective s'exprime comme le rapport de la viscosité dynamique du fluide à la porosité :  $\mu^* = \frac{\mu}{\varepsilon}$ .

### I.4.3. Modèle de Darcy-Forchheimer

En dépit de sa large utilisation dans l'étude des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy est mis en défaut lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est très élevé. Dans ces conditions, les forces d'inertie deviennent prépondérantes et ne doivent pas être ignorées. Ce modèle a donc subi des modifications par certains auteurs dont le but est d'introduire un terme représentant l'inertie du fluide en écoulement. Parmi ces auteurs, Forchheimer a proposé le modèle suivant [7]:

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* - \frac{\rho c_f |\vec{v}^*|}{\sqrt{k}} \vec{v}^* \quad (I.6)$$

où  $c_f$  est le coefficient de traînée appelé parfois le coefficient de Forchheimer, qui n'est pas une constante universelle mais varie selon la nature du matériau poreux et la vitesse d'écoulement.

Le passage du modèle de Darcy au modèle de Darcy-Forchheimer se produit lorsqu'on arrive à un nombre de Reynolds modifié égal à 10, cette transition est caractérisée par l'apparition des premiers tourbillons dans l'écoulement.

### I.4.4. Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Afin d'obtenir une formulation universelle pour caractériser avec une précision suffisante les écoulements dans les milieux poreux, une autre correction a été faite en vue d'améliorer la loi décrivant les écoulements visqueux dans les milieux poreux. Cette correction, basée sur la fusion des trois modèles évoqués précédemment, a permis de dériver un modèle global et complet communément appelé loi de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Ce modèle s'exprime par l'équation vectorielle non linéaire suivante :



$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* - \frac{\rho c_f |\vec{v}^*|}{\sqrt{k}} \vec{v}^* \quad (I.7)$$

Sous forme plus générale, l'équation (I.7) s'écrit lorsque les forces d'inertie sont prises en considération comme suit :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}}{\varepsilon} \right) \right) = -\vec{\nabla} p^* - \frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \frac{\mu}{\varepsilon} \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* - \frac{\rho c_f |\vec{v}^*|}{\sqrt{k}} \vec{v}^* \quad (I.8)$$

A notre connaissance et autant qu'on sache, cette équation vectorielle ne fut pas validée expérimentalement, d'autant plus d'après la littérature la justification de cette loi n'est pas suffisamment claire. Toutefois, elle représente une certaine analogie avec l'équation vectorielle de Navier-Stokes et elle est très utilisée dans les simulations numériques des écoulements de fluides Newtoniens dans les milieux poreux (approches CFD).

## I.5. Les nanolubrifiants : Généralités et modèles rhéologiques

Les nanotechnologies représentent aujourd'hui un domaine de recherche scientifique et technique en plein essor. A l'échelle mondiale, les nanotechnologies suscitent de plus en plus d'intérêt et sont en voie de constituer le noyau de la prochaine révolution industrielle. Ainsi, l'utilisation des nanotechnologies dans le cadre des applications tribologiques (en l'occurrence le domaine de lubrification) connaît actuellement un intérêt croissant. Cet intérêt s'est traduit par un développement substantiel des techniques de synthèse des nanomatériaux (figure I-8) permettant la mise au point de nano-objets de différentes structures (fullerènes, oignons, nanotubes, ...) et de différentes natures (métalliques, oxydes, carbonées, ...) figure I-9.

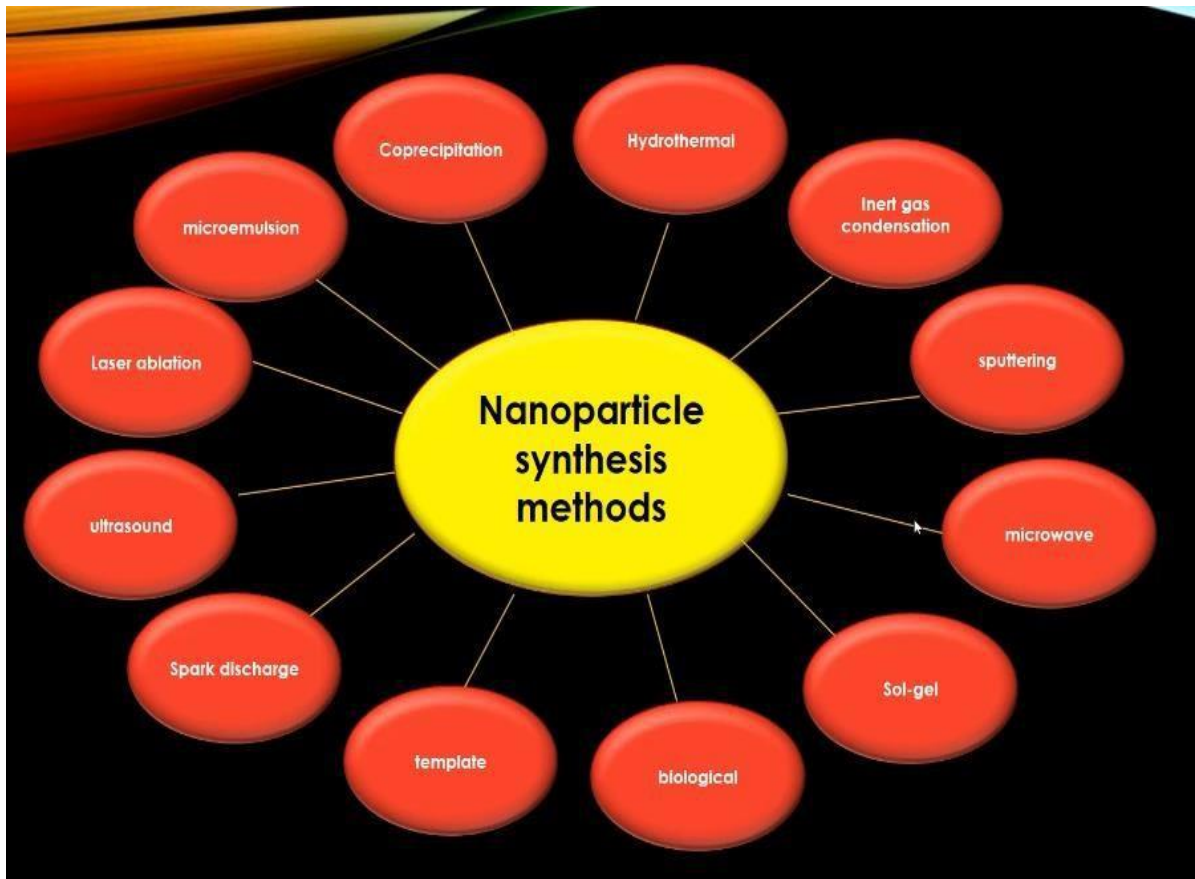


Fig. I. 8 Différentes techniques de synthèse des nanoparticules

- Carbon-Based Nanoparticles
- Ceramic Nanoparticles
- Metal Nanoparticles
- Semiconductor Nanoparticles
- Polymeric Nanoparticles
- Lipid-Based Nanoparticles

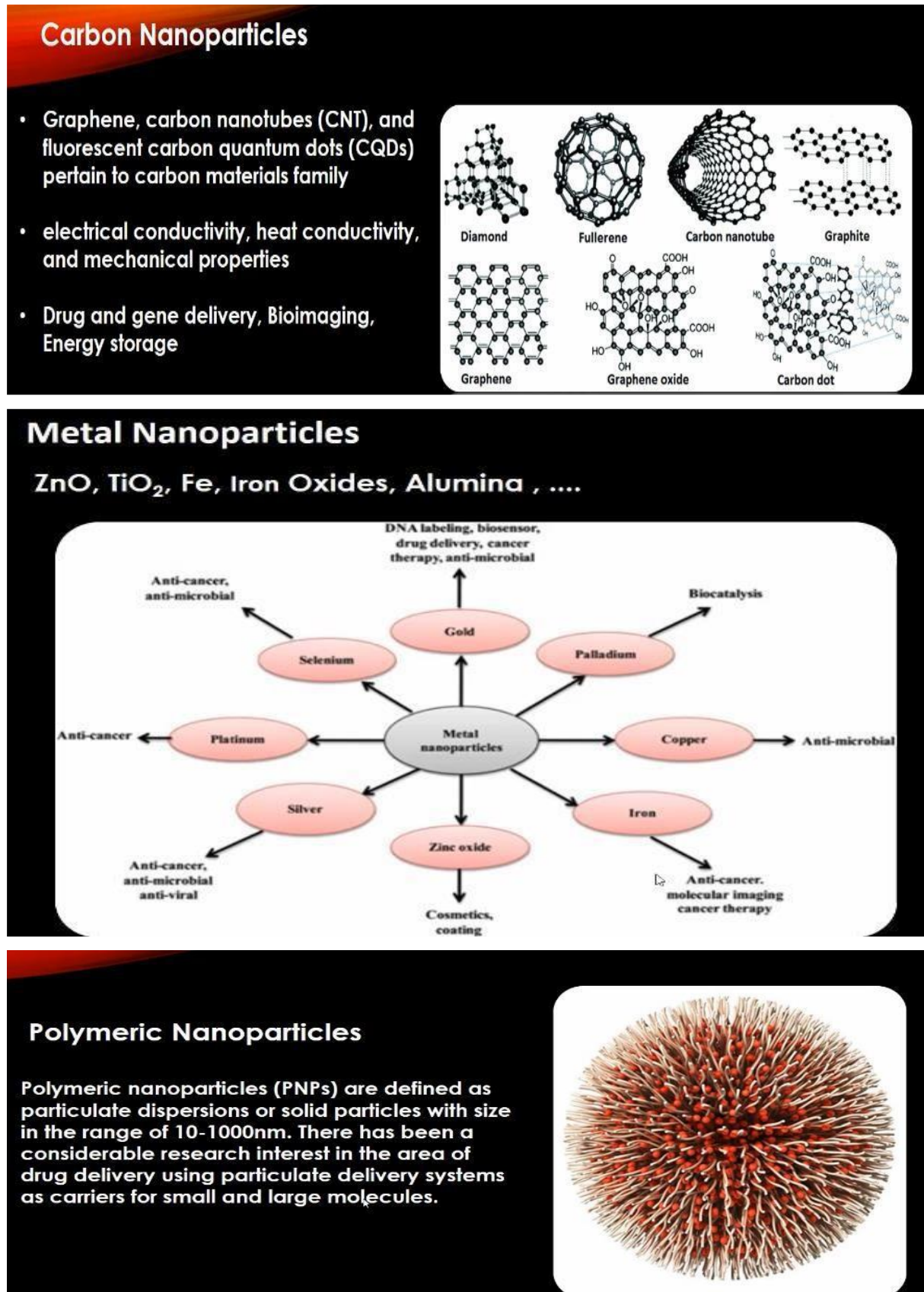


Fig. I. 9 Différentes structures et natures des nano-objets synthétisés Différentes structures et natures des nano-objets synthétisés

Les nombreuses études portant sur les propriétés tribologiques (frottement et usure) de ces nano-objets en dispersion dans une base lubrifiante (le solvant) ont mis en évidence des réductions essentiellement d'usure lorsque des nanoparticules de  $\text{NiMoO}_2\text{S}_2$  (13 nm de diamètre), de Cu (100 nm de diamètre), ZnS (3 nm de diamètre), de  $\text{TiO}_2$  (5 nm de diamètre) étaient ajoutées à des bases lubrifiantes.

Un intérêt croissant a également été observé pour les propriétés lubrifiantes des différentes variantes de nanomatériaux à base de carbone (nanofeuillets de graphite, fullerènes de carbone, oignons de carbone, feuillet de graphène, nanotubes de carbone mono ou multi-feuillets, ...) communément connus pour leurs propriétés électroniques, optiques, et mécaniques. Selon Chen et al. [13], les nanotubes de carbone multi-feuillets dispersés dans l'huile permettent de réduire le frottement de 10% et l'usure de 30% par rapport à la base lubrifiante.

Les différentes formes de bisulfures métalliques ont également suscité l'intérêt des chercheurs en particulier la structure lamellaire du bisulfure de molybdène ( $2\text{H-MoS}_2$ ) employé depuis longtemps comme lubrifiant solide pour ses bonnes propriétés réductrices de frottement. Ajoutés à une base lubrifiante, les  $2\text{H-MoS}_2$  réduisent le frottement mais présentent certains inconvénients en l'occurrence ils sont très sensibles à l'oxydation et ont une taille assez importante (diamètre > 500 nm). La structure lamellaire du bisulfure de tungstène ( $2\text{H-WS}_2$ ) possède des propriétés similaires aux  $2\text{H-MoS}_2$ . Pour remédier aux défauts inhérents aux structures lamellaires des bisulfures métalliques et par analogie au carbone qui peut former des structures fermées de type fullerènes et nanotubes, Tenne [14] en 1992 a pu synthétiser le même type de structure fermé avec les déchalco-génures métalliques qui sont des composés lamellaires. Ces composés sont soit des nanoparticules appelées les fullerènes inorganiques de bisulfures métalliques (en anglais, Inorganic Fullerene-like nanoparticles (IF)), soit des nanotubes appelés les nanotubes inorganiques de bisulfures métalliques (en anglais, Inorganic NanoTube (INT)).

Dispersés dans une base lubrifiante, ces systèmes possèdent des propriétés tribologiques supérieures à leur structure lamellaire correspondante ainsi qu'à tous les autres systèmes cités précédemment. En particulier, les fullerènes IF- $\text{MoS}_2$  et IF- $\text{WS}_2$  peuvent réduire jusqu'à 70% le frottement et l'usure par rapport à la base lubrifiante seule. C'est de loin le

système nanoparticulaire le plus intéressant pour les applications tribologiques et un candidat sérieux comme alternative aux additifs de lubrification moléculaires actuellement utilisés.

La **figure I-10** présente un schéma 3-D d'une particule IF-MoS<sub>2</sub> dont la taille varie de 10 à 150 nm ressemblant à des oignons.

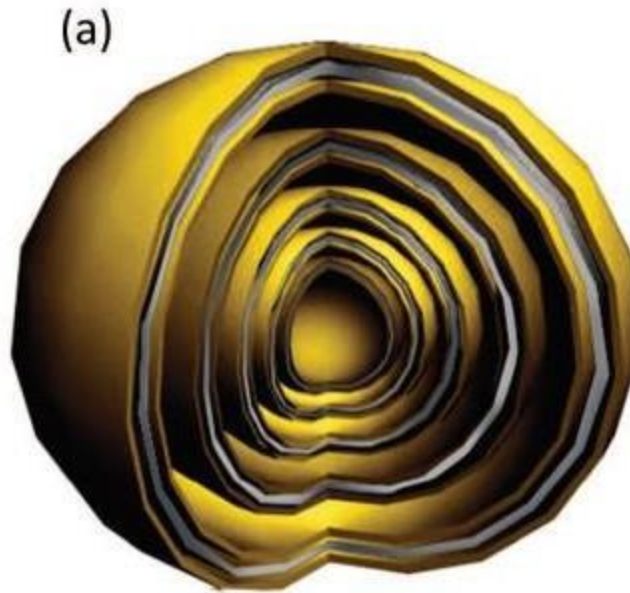


Fig. I. 10 Schema 3-D d'une particule IF-MoS<sub>2</sub>

## I.6. Etudes antérieures sur la lubrification des paliers à coussinet poreux : Etat de l'art

Au début, les études de simulation numérique des paliers à coussinet poreux supposaient généralement que le comportement des fluides lubrifiants est Newtonien et que le coussinet poreux est rigide. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide Newtonien ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des huiles contenant des nanoparticules. De même, la déformation élastique de l'interface poreuse provenant de la haute pression générée dans le film fluide engendre une modification de l'épaisseur du film fluide et donc donne naissance à une modification de pression. La prise en compte de ces effets non Newtoniens et de poroélasticité permet de prédire correctement les performances des paliers poreux. Une revue bibliographique sur les études relatives aux paliers poreux

voire poroélastiques lubrifiés par fluides Newtoniens ou non Newtoniens à couples de contraintes s'avère intéressante.

### I.6.1. Cas des paliers à coussinets poreux rigides

Les travaux concernant la lubrification hydrodynamique des paliers à coussinet poreux remontent à 1957 avec Morgan et Cameron [15]. Une solution analytique est présentée pour un palier à coussinet poreux court pour lequel le gradient de pression circonférentiel est négligeable ( $\frac{\partial p}{\partial \theta} \ll \frac{\partial p}{\partial z}$ ) lubrifié par fluide Newtonien. Les écoulements dans le coussinet poreux et dans le film fluide sont respectivement modélisés par la loi de Darcy et l'équation de Reynolds classiques.

En 1971, Murti [16] a mené une étude analytique sur un palier poreux infiniment long (le gradient de pression est négligeable dans la direction axiale) lubrifié par fluide Newtonien. La distribution de la pression dans le film fluide est déterminée par une solution issue de la résolution de l'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide couplée à l'équation de Laplace ou de Darcy dans le coussinet poreux moyennant la condition de continuité de la pression à l'interface poreuse ; c'est-à-dire  $p|_{y=0} = p^*|_{y=0}$ . La répartition de la pression dans le film fluide est plus uniforme lorsque le paramètre de perméabilité augmente.

Murti publie, en 1973, une étude [17] sur les performances d'un palier poreux court lubrifié par fluide Newtonien. La condition de glissement de Beavers – Joseph [18] à l'interface film fluide – coussinet poreux a permis de dériver une nouvelle forme de l'équation de pression appelée équation de Reynolds modifiée. L'écoulement dans le coussinet poreux est modélisé par la loi de Darcy classique. Il a été trouvé que la prise en considération de la vitesse de glissement à l'interface affecte négativement la capacité de charge et diminue le coefficient de frottement. En revanche, l'angle de calage du palier n'est pas sensiblement affecté.

En 1974, Rouleau et Steiner [19] ont développé une méthode numérique pour le calcul des performances d'un palier à coussinet poreux de dimensions finies. Les équations de Reynolds et de Darcy sont discrétisées par la méthode des différences finies, et le système d'équations algébriques résultant de la discrétisation est résolu à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel. L'algorithme de Christopherson [20] est appliqué pour

prendre en considération les conditions de Swift-Stieber et ainsi la rupture du film lubrifiant dans la zone divergente du palier (phénomène de cavitation). Ils ont montré que la capacité de charge du palier calculée par les conditions de Swift-Stieber est plus faible que celle obtenue par les conditions limites de Sommerfeld qui négligent la rupture du film. Par contre, le coefficient de frottement prédit par les conditions de Swift-Stieber est plus élevé comparativement à celui déterminé par les conditions de Sommerfeld.

Prakash et Vij [21] ont mené une étude analytique sur les performances statiques d'un palier poreux infiniment court lubrifié par un fluide Newtonien. Les écoulements dans le jeu du palier et dans le coussinet poreux sont respectivement gouvernés par l'équation de Reynolds modifiée et la loi de Darcy. La condition de glissement de Beavers – Joseph est prise en compte à l'interface film fluide – coussinet poreux. Ils ont montré que la prise en considération de la vitesse de glissement à l'interface entraîne une réduction de la capacité de charge du palier ainsi que le coefficient de frottement pour des valeurs élevées du paramètre de perméabilité.

En 1985, Yong-Xin et Pei-Ming [22] présentent une analyse théorique et expérimentale d'un palier poreux de perméabilité variable dans la direction circonférentielle. Les écoulements dans le film fluide et dans le coussinet poreux sont respectivement régis par l'équation de Reynolds modifiée et la loi de Darcy. La condition de glissement de Beavers – Joseph est considérée à l'interface film fluide – coussinet poreux. L'analyse a montré que le palier poreux possède une capacité de charge supérieure et un meilleur comportement tribologique par comparaison aux paliers poreux ordinaires. En 1990, Kaneko et Obara [23] ont analysé expérimentalement l'écoulement d'huile dans un palier poreux. Ils ont observé l'existence de circulation d'huile dans la matrice poreuse, cet écoulement contribue à la lubrification du palier.

Bujurke et Naduvinamani [24] ont étudié analytiquement les caractéristiques statiques d'un palier poreux court lubrifié par un fluide non Newtonien. Le film fluide est modélisé comme un fluide à couple de contraintes de V. K. Stokes [25]. Les particules en suspension dans le film sont supposées assez grosses et ne peuvent donc pénétrer dans les cavités du coussinet poreux. Ils ont montré que les couples de contraintes permettent d'améliorer la capacité de charge et de réduire le coefficient de frottement comparativement au cas non polaire (Newtonien).

En 1993, Lin et Hwang [26] ont analysé la lubrification hydrodynamique d'un palier poreux court lubrifié par fluide newtonien. L'objectif de l'analyse est la mise en évidence des effets des forces visqueuses pris en compte par le modèle de Darcy – Brinkman. Les effets des forces visqueuses permettent une augmentation de la capacité de charge du palier et une réduction du coefficient de frottement comparativement au cas du modèle de Darcy classique qui néglige ces effets.

Lin et Hwang [27] analysent ensuite les effets visqueux dans un palier poreux de dimensions finies. Les conditions limites liées à l'écoulement de Gumbel ou de demi-Sommerfeld sont utilisées dans la résolution numérique de l'équation de Reynolds par la méthode itérative du gradient conjugué. Ils ont montré que les effets visqueux améliorent la capacité de charge et diminuent le coefficient de frottement.

En 1994, Kaneko et al. [28] ont mené une étude expérimentale pour expliquer le mécanisme de lubrification dans un palier poreux. Pour visualiser l'écoulement du fluide, le palier poreux en bronze est imprégné d'une huile colorée par fluorescence et le film d'huile est rendu visible par une paire de lampes à ultraviolets. Ces auteurs affirment que la formation du film d'huile se fait dans la zone chargée du palier comme il est clairement illustré dans la [figure I.1](#).

En 1994, Lin et Hwang [29] ont étudié théoriquement les effets visqueux sur les caractéristiques statiques et dynamiques des paliers poreux longs. L'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide est dérivée à partir du modèle de Darcy – Brinkman. Les résultats obtenus montrent que la capacité de charge et l'angle de calage augmentent de façon significative, tandis que le coefficient de frottement diminue.

En 1995, les mêmes auteurs [30] ont utilisé le même modèle pour analyser la stabilité dynamique linéaire des paliers poreux courts.

En 1999, Meurisse et Giudicelli [31] ont analysé le comportement des paliers poreux de dimension finie lubrifiés en régime hydrodynamique en utilisant l'algorithme d'Elrod [32] en vue de tenir compte du phénomène de cavitation (rupture du film). Dans cette analyse, le modèle de Darcy et la condition de non glissement à l'interface film fluide – coussinet poreux ont été considérés.



Naduvnamani et al. [33] ont réalisé une étude analytique sur les performances d'un palier poreux court lubrifié par fluide non Newtonien à couples de contraintes.

La condition de glissement de Beavers – Joseph à l'interface film fluide – coussinet poreux est prise en compte dans le processus de dérivation de l'équation de Reynolds modifiée. L'écoulement au sein du coussinet poreux est modélisé par la loi de Darcy modifiée en tenant compte de l'infiltration des additifs du film fluide à travers l'interface poreuse. Ils ont constaté que la présence des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant engendre une augmentation significative de la capacité de charge, de l'épaisseur minimale du film, et une diminution du coefficient de frottement comparativement au cas d'un fluide Newtonien.

### I.6.2. Cas des paliers à coussinets poro-élastiques

En 1977, Mak et Conway [34, 35] analysent analytiquement l'influence de la déformation élastique du coussinet poreux sur les caractéristiques statiques des paliers poreux courts et longs. Les écoulements dans le film fluide Newtonien et dans le coussinet poreux déformable sont respectivement gouvernés par l'équation de Reynolds modifiée écrite en coordonnées cartésiennes et la loi de Darcy en coordonnées cylindriques. Ces auteurs montrent que l'effet de la déformation élastique du coussinet poreux diminue la pression dans le film fluide par rapport à celle calculée dans le cas du palier à coussinet poreux rigide.

Les mêmes auteurs [36] ont présenté une étude analytique sur le comportement statique d'un palier poreux court lubrifié par fluide Newtonien. L'écoulement du film fluide est modélisé par l'équation de Reynolds modifiée en prenant en considération de la condition de glissement de Beavers – Joseph à l'interface film fluide – coussinet poreux déformable. L'écoulement est régi par la loi de Darcy au sein du coussinet poreux. Lorsque le glissement est pris en considération, ces auteurs ont observé une diminution de la pression et de la capacité de charge par rapport au cas où le glissement à l'interface est ignoré. D'autre part, la déformation élastique du coussinet a pour effet d'augmenter le coefficient de frottement pour une perméabilité donnée comparativement au cas rigide.

En 1996, Lin et al. [37] étudient l'effet de déformation élastique du coussinet poreux sur les caractéristiques statiques d'un palier poreux long lubrifié par un fluide Newtonien. Compte tenu des effets visqueux, l'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide est

obtenue en utilisant le modèle de Darcy – Brinkman. La déformation radiale de la couche poreuse rigidement encastrée est calculée par le modèle analytique simplifié de couche élastique mince [38]. La déformation du coussinet poreux fait diminuer la pression dans le film fluide. En revanche, les effets visqueux du modèle de Darcy – Brinkman augmentent la pression dans le film fluide comparativement au cas du modèle de Darcy.

En 2001, Elsharkawy et Guedouar [39] présentent une étude numérique sur la lubrification élastohydrodynamique d'un palier à coussinet poreux de dimension finie. Compte tenu des effets visqueux, l'équation de Reynolds modifiée dans le film fluide Newtonien est obtenue à partir du modèle de Darcy – Brinkman au lieu du modèle de Darcy. La déformation élastique du coussinet poreux est calculée par le modèle de couche élastique mince. Un algorithme de résolution du problème inverse est utilisé pour estimer le paramètre de perméabilité et/ou l'excentricité relative de fonctionnement du palier poreux à partir de données de pression obtenues expérimentalement. Ces auteurs affirment que la poro-élasticité du revêtement de surface affecte la pression dans le film fluide et par conséquent la capacité de charge du palier.

En 2001, Elsharkawy et Guedouar [40] ont mené une étude numérique sur les performances statiques d'un palier à coussinet poreux déformable de dimension finie utilisant un fluide Newtonien comme lubrifiant. L'écoulement dans le film fluide est régi par l'équation de Reynolds modifiée dérivée à partir de la loi de Darcy – Brinkman. La condition aux limites de type saut de contraintes à l'interface poreuse, suggérée par Ochoa-Tapia [41] est utilisée. La déformation élastique est calculée par le modèle de couche élastique mince. L'algorithme de conservation d'Elrod est utilisé pour définir avec précision les frontières de rupture et de reformation du film lubrifiant. Leurs résultats numériques sont en bon accord avec les mesures expérimentales publiées dans la littérature technique [42], [43], et [44]. Ils ont montré que la portance hydrodynamique diminue avec le paramètre de perméabilité tandis que le coefficient de frottement et l'angle de calage augmentent avec ce même paramètre.

## **I.7. Conclusion**

Nous avons présenté dans ce chapitre une revue bibliographique portant sur les paliers poreux et leur principe de fonctionnement, la caractérisation des milieux poreux, les différents modèles d'écoulements en présence d'un milieu poreux saturé, et une brève description des nanolubrifiants ou lubrifiants de nouvelle génération. D'autre part, un état de l'art concernant l'étude des paliers poreux rigides et déformables a été également présenté. Cette étude a montré que les paliers poreux ont fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales. Ceci reflète les avantages que présentent ce type de paliers du point de vue économique et environnementale.

## I.8. Références bibliographiques du chapitre I

- [1] J. Bear, Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier. (1972)
- [2] D. A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, Springer. (2017)
- [3] A. Scheidegger, The physics of flow through porous media. University Of Toronto Press: London. (1958)
- [4] P. C. Carman, Fluid Flow through Granular Beds, Transactions-Institution of Chemical Engineers, Vol. 15, pp. 150-166. (1937)
- [5] S. Ergun, Fluid flow through packed columns, Chem. Eng. Prog., Vol. 48, pp. 89-94. (1952)
- [6] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Victor Dalmont. (1856)
- [7] P. Forchheimer, Wasserbewegung durch boden, Z. Ver. Deutsch, Ing. , Vol. 45, pp. 1782-1788. (1901)
- [8] H. C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 1, No. 1, pp. 27. (1949)
- [9] S. Liu and J. H. Masliyah, Dispersion in porous media, Handbook of porous media, CRC Press, pp. 81-140. (2005)
- [10] H. Liu, P. R. Patil, and U. Narusawa, On Darcy-Brinkman equation: viscous flow between two parallel plates packed with regular square arrays of cylinders, Entropy, Vol. 9, No. 3, pp. 118-131. (2007)
- [11] F. J. Valdes-Parada, J. A. Ochoa-Tapia and J. Alvarez-Ramirez, On the effective viscosity for the Darcy-Brinkman equation, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 385, No. 1, pp. 69-79. (2007)
- [12] T. S. Lundgren, Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 51, No. 2, pp. 273-299. (1972)
- [13] C. S. Chen et al., Effect of multiwalled carbon nanotubes on tribological peoperties of lubricant, Trans. Nonferrous Met. Soc. China, 15. (2005)
- [14] R. Tenne et al., Polyhedral and cylindrical structures of tungsten disulphide, Nature, 360, 444. (1992)
- [15] V. T. Morgan and A. Cameron, Mechanism of lubrication in porous metal bearings, in Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 151-157. (1957)

- [16] P. R. K. Murti, Hydrodynamic lubrication of long porous bearings, *Wear*, Vol. 18, No. 6, pp. 449–460. (1971)
- [17] P. R. K. Murti, Effect of Slip-Flow in Narrow Porous Bearings, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 95, No. 4, pp. 518–523. (1973)
- [18] G. S. Beavers and D. D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall, *Journal of fluid mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 197–207. (1967)
- [19] W. T. Rouleau and L. I. Steiner, Hydrodynamic Porous Journal Bearings. Part I—Finite Full Bearings, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 96, No. 3, pp. 346–353. (1974)
- [20] D. G. Christopherson, A new mathematical method for the solution of film lubrication problems, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 146, No. 1, pp. 126–135. (1941)
- [21] J. Prakash and S. K. Vij, Analysis of narrow porous journal bearing using Beavers-Joseph criterion of velocity slip, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 2, pp. 348–354. (1974)
- [22] Q. Yong-Xin and W. Pei-Ming, Theoretical analysis and experimental investigation of a porous metal bearing, *Tribology International*, Vol. 18, No. 2, pp. 67–73. (1985)
- [23] S. Kaneko and S. Obara, Experimental Investigation of Mechanism of Lubrication in Porous Journal Bearings: Part 1—Observation of Oil Flow in Porous Matrix, *Journal of Tribology*, Vol. 112, No. 4, pp. 618–623. (1990)
- [24] N. M. Bujurke and N. B. Naduvinamani, on the performance of narrow porous journal bearing lubricated with couple stress fluid, *Acta mechanica*, Vol. 86, No. 1, pp. 179–191. (1991)
- [25] V. K. Stokes, Couple stresses in fluids, *the physics of fluids*, Vol. 9, No. 9, pp. 1709–1715. (1966)
- [26] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Lubrication of short porous journal bearings—use of the Brinkman-extended Darcy model, *Wear*, Vol. 161, No. 1–2, pp. 93–104. (1993)
- [27] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Hydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings—use of the Brinkman-extended Darcy model, *International journal of mechanical sciences*, Vol. 36, No. 7, pp. 631–644. (1994)
- [28] S. Kaneko, H. Inoue and K. Ushio, Experimental Study on Mechanism of Lubrication in Porous Journal Bearings: Oil Film Formed in Bearing Clearance, *JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing*, Vol. 37, No. 1, pp. 185–192. (1994)

- [29] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Static and dynamic characteristics of long porous journal bearings: use of the Brinkman-extended Darcy model, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 27, No. 3, pp. 634. (1994)
- [30] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Linear Stability Analysis of Short Porous Journal Bearings—Use of the Brinkman Model, *Journal of Tribology*, Vol. 117, No. 1, pp. 199–202. (1995)
- [31] M.-H. Meurisse and B. Giudicelli, A 3D Conservative model for self-lubricated porous journal bearings in a hydrodynamic steady state, *Journal of tribology*, Vol. 121, No. 3, pp. 529–537. (1999)
- [32] H. G. Elrod, A Cavitation Algorithm, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 103, No. 3, pp. 350–354. (1981)
- [33] N. B. Naduvinamani, P. S. Hiremath and S. T. Fathima, Lubrication of a narrow porous journal bearing with a couple stress fluid, *Lubrication Science*, Vol. 14, No. 4, pp. 393–413. (2002)
- [34] W. C. Mak and H. D. Conway, The Lubrication of a Long, Porous, Flexible Journal Bearing, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 99, No. 4, pp. 449–454. (1977)
- [35] W. C. Mak and H. D. Conway, Analysis of a short, porous, flexible journal bearing, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 19, No. 5, pp. 295–300. (1977)
- [36] W. C. Mak and H. D. Conway, Effects of velocity slip on the elastohydrodynamic lubrication of short, porous journal bearings, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 20, No. 11, pp. 767-775. (1978)
- [37] J.-R. Lin, C.-C. Hwang and R.-F. Yang, Hydrodynamic lubrication of long, flexible, porous journal bearings using the Brinkman model, *Wear*, Vol. 198, No. 1, pp. 156–164. (1996)
- [38] Lahmar M., Elastohydrodynamic analysis of double-layered journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 219, 2, 145-165, (2005)
- [39] A. A. Elsharkawy and L. H. Guedouar, Direct and inverse solutions for elastohydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings, *Journal of tribology*, Vol. 123, No. 2, pp. 276–282. (2001)
- [40] A. A. Elsharkawy and L. H. Guedouar, Hydrodynamic lubrication of porous journal bearings using a modified Brinkman-extended Darcy model, *Tribology International*, Vol. 34, No. 11, pp. 767–777. (2001)

- [41]** J. A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker, Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 14, pp. 2635–2646. (1995)
- [42]** L. Costa, M. Fillon, A. S. Miranda and J. C. P. Claro, An experimental investigation of the effect of groove location and supply pressure on the THD performance of a steadily loaded journal bearing, *Journal of tribology*, Vol. 122, No. 1, pp. 227–232. (2000)
- [43]** A. Cameron, V. T. Morgan and A. E. Stainsby, Critical Conditions for Hydrodynamic Lubrication of Porous Metal Bearings, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 176, No. 1, pp. 761–770. (1962)
- [44]** M. O. A. Mokhtar, M. Rafaat and G. S. A. Shawki, Experimental investigations into the performance of porous journal bearings, Technical report, SAE Technical Paper. (1984)

# **Chapitre II**

## **Théorie des paliers poroélastiques**

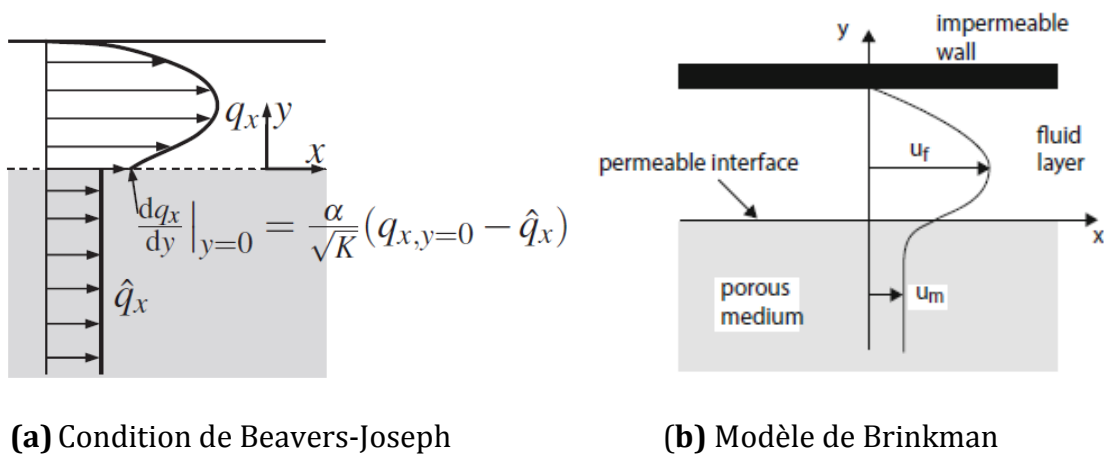


## Chapitre II

### Théorie des paliers poroélastiques

#### II.1. Introduction

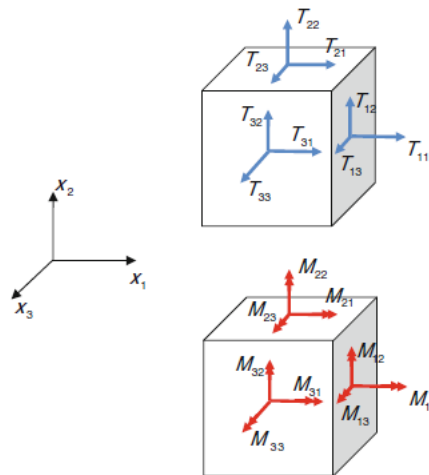
Les paliers poreux ou autolubrifiants ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche tant théoriques qu'expérimentales vu le nombre important de leurs applications dans les machines modernes. De nombreuses études ont utilisé le modèle classique de Darcy [1,2] pour décrire l'écoulement de fluide visqueux linéaire dit aussi Newtonien dans le palier poreux. Le modèle de fluide utilisé ne prend pas en considération les effets des forces visqueuses du lubrifiant s'infiltrant à travers l'interface poreuse, qui sont à l'origine de la génération de couches limites. Beavers et Joseph [3] ont montré expérimentalement qu'un glissement de fluide peut survenir à l'interface film fluide-couche poreuse **figure II.1**. Ils ont ainsi suggéré de remplacer l'effet de couche limite par des conditions de glissement appropriées. D'après la littérature technique, plusieurs auteurs ont appliqué de telles conditions pour étudier les paliers poreux indéformables lubrifiés par des fluides dont le comportement rhéologique est Newtonien [4-6].



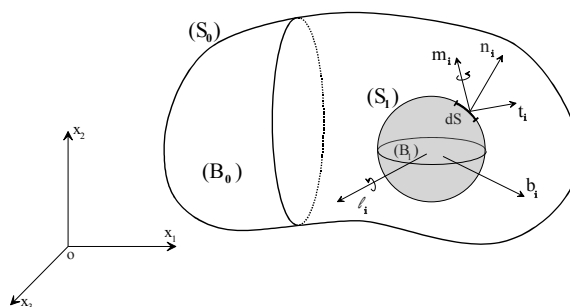
**Fig. II. 1 Profils de vitesse d'un écoulement unidirectionnel dans le film fluide et le milieu poreux saturé**

Aujourd'hui, avec le progrès de l'industrie moderne, l'utilisation d'un lubrifiant non Newtonien devient d'autant plus intéressante. Les études expérimentales [7, 8] ont montré qu'une huile de base mélangée à des additifs moléculaires ou des nanoparticules

améliore sensiblement les propriétés de lubrification et diminue ainsi le frottement et l'usure surtout pendant les phases de démarrage et d'arrêt des machines. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie classique des milieux continus basée sur l'emploi des équations de Navier-Stokes qui néglige la taille des particules présentes dans les huiles dopées. Plusieurs modèles théoriques permettant de décrire l'écoulement de tels fluides parmi lesquels le modèle de Vijay Kumar Stokes [9, 10, 11] basé sur la théorie du micro-continuum. Ce modèle, inspiré des travaux théoriques des frères Cosserat [12] pour des milieux élastiques polaires, tient compte des effets polaires sous forme de couples de contraintes et de couples de volume. L'action d'une particule solide sur son voisinage est alors représentée par un vecteur force de surface (ou vecteur des contraintes  $\vec{t} = t_i \vec{e}_i = T_{ji} \vec{e}_j \vec{e}_i$ ) et une distribution de couples (ou vecteur des couples de contraintes  $\vec{m} = m_i \vec{e}_i = M_{ji} \vec{e}_j \vec{e}_i$ ) **figure II.2**.



(a) Représentation des composantes des tenseurs des contraintes  $\bar{\bar{T}} = T_{ji} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  et des couples de contraintes  $\bar{\bar{M}} = M_{ji} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$



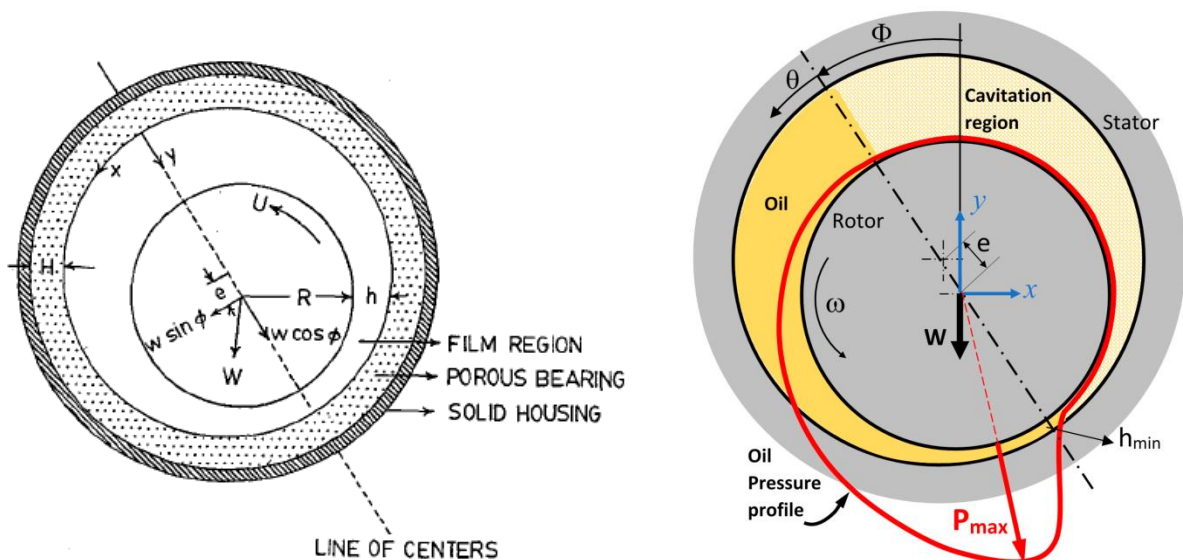
(b) Représentation des vecteurs contraintes  $t_i = T_{ji} n_j$ , couples de contraintes  $m_i = M_{ji} n_j$ , forces de volume  $b_i$ , et couples de volume  $l_i$  agissant sur l'élément de volume  $(B_1)$  de surface  $(S_1)$

**Fig. II. 2 Représentation des efforts agissant sur un élément de fluide d'après la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes**

Le fluide à couples de contraintes est un cas particulier de la théorie des milieux polaires, et prend en compte les effets de la taille micrométriques ou nanométriques *des* additifs en suspension dans le fluide. En plus du comportement rhéologique non Newtonien du film fluide, la prise en compte de la déformation du matériau poreux, due aux fortes pressions générées dans le film fluide s'avère nécessaire. Des études ont déjà été menées sur des paliers poreux rigides lubrifiés par fluide non Newtonien à couples de contraintes dont le coussinet poreux contient un fluide Newtonien [13, 14], et sur des paliers poreux déformables lubrifiés par fluide Newtonien [15-17].

### II.2. Géométrie du palier étudié

La figure (II.3) représente les sections droites d'un palier lisse à coussinet poreux et d'un palier lisse rigide ainsi que les détails géométriques. Le palier lisse est constitué de deux éléments communément appelés arbre et coussinet. L'arbre soumis à la charge  $W$  et le coussinet muni du revêtement poreux sont de forme cylindrique à sections circulaires et leurs surfaces sont supposées par hypothèse lisses. L'arbre de rayon  $R$  tourne autour de son axe avec une vitesse périphérique ou tangentielle  $U = \omega R$  constante par rapport au coussinet poreux d'épaisseur  $H$ , de perméabilité  $k$  de module d'Young  $E$ , et de coefficient de Poisson  $\nu$ . L'arbre et le coussinet poreux sont supposés être alignés, et séparés par un film fluide non Newtonien d'épaisseur  $h$ .



**Fig. II. 3: Configurations géométriques d'un palier lisse**  
**(a)Palier à coussinet poreux ; (b) Palier à coussinet rigide**

## II.3. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée non Newtonienne

### II.3.1 Rappels des équations de base de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes

-Equation de continuité ou loi de conservation de la masse pour un fluide compressible :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

ou encore  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 ; i = 1, 3$

Dans le cas d'un fluide incompressible ou isovolume ( $\rho = cte$ ), l'équation de continuité se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou encore :}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

-Equation locale de la dynamique ou deuxième loi de Newton :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \vec{v} \right) = \overline{\text{div}} (\overline{\mathbf{T}}) + \rho \vec{g}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{où} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.3})$$

-Expression du tenseur de contraintes :

$$T_{ji} = \underbrace{-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}}_{\text{Partie symétrique}} + \underbrace{2\eta \nabla^2 \Omega_{ji}}_{\text{Partie anti-symétrique}} \quad \text{est le tenseur des contraintes anti-}$$

symétrique,  $\Omega_{ji} = -\Omega_{ij} = -v_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$  est le tenseur tourbillon anti-symétrique,

et  $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$  est le tenseur des taux de déformation symétrique. On note que pour un

fluide incompressible, la trace du tenseur des taux de déformation appelée aussi taux de

dilatation cubique est nulle ; c'est-à-dire  $D_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . Dans l'expression du

tenseur de contraintes  $T_{ji}$ , les paramètres  $\lambda, \mu$ , et  $\eta$  sont respectivement la viscosité de

dilatation, la viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique, et la propriété physique

responsable des couples de contraintes dont l'unité SI est [N.s].

- Expression du tenseur des couples de contraintes :

$$M_{ji} = -8\eta K_{ji} = 8\eta K_{ij} = 4\eta(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$$

puisque  $K_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$  qui est le tenseur de courbure antisymétrique ( $K_{ji} =$

$-K_{ij}$  et  $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0$ ).

Dans les équations ci-dessus, la virgule indique la différenciation partielle par rapport aux coordonnées spatiales ou eulériennes.

Le vecteur tourbillon (spin or vortex vector)  $\omega_i$  dual du tenseur tourbillon non-symétrique (spin or vortex tensor)  $\Omega_{ij}$  est défini par :  $\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj}$  ou encore en utilisant la notation vectorielle :  $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$

La matrice représentative du tenseur des couples de contraintes est :

$$[M_{ji}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $M_{12} = 2\eta \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right)$ ; etc.

En lubrification par films minces, on peut montrer à travers une analyse dimensionnelle (**Annexe A**) que  $M_{12} \approx -2\eta \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$ .

Le nanolubrifiant est modélisé comme un fluide à couples de contraintes non Newtonien. En l'absence de couples de volume et de forces massiques ou volumiques, l'équation de la dynamique (II.3) s'écrit dans le cadre de la théorie du continuum de V.K. Stokes comme suit :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} \quad (\text{II.4})$$

ou encore :

$$\frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla}^2 \vec{v} - l^2 \vec{\nabla}^4 \vec{v}$$

où  $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$  est la taille caractéristique des nanoparticules.

Dans l'**annexe A**, on montre que l'analyse dimensionnelle de l'équation (II.4) dans le cas d'un écoulement de films minces permet de simplifier sensiblement cette équation qui devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = p(x, z) \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (\text{II.7})$$

ou encore :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - l^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - l^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (\text{II.9})$$

L'intégration par rapport à  $y$  des 2 équations (II.8) et (II.9) permet d'obtenir les composantes du champ de vitesse de l'écoulement sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B + C \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + D \sinh\left(\frac{y}{l}\right) \quad (\text{II.10})$$

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + Ey + F + G \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + H \sinh\left(\frac{y}{l}\right) \quad (\text{II.11})$$

où  $A, B, C, D, E, F, G$  et  $H$  sont des constantes d'intégration.

Les dérivées premières et secondes de  $u$  et  $w$  sont :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + A + \frac{C}{l} \sinh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{D}{l} \cosh\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C}{l^2} \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{D}{l^2} \sinh\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y + E + \frac{G}{l} \sinh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{H}{l} \cosh\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{G}{l^2} \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + \frac{H}{l^2} \sinh\left(\frac{y}{l}\right)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions limites suivantes :

- Sur la surface de l'arbre d'équation  $y=h$

$$u(x, h, z) = U(x, z) = \omega R \quad (\text{II.12-a})$$

$$v(x, h, z) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + W \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{II.12-b})$$

$$w(x, h, z) = W = 0 \quad (\text{II.12-c})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{x,y=h,z} = 0 \quad (\text{II.12-d})$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x,y=h,z} = 0 \quad (\text{II.12-e})$$

Les conditions (II.12-d) et (II.12-e) traduisent la nullité des couples de contraintes à la surface de l'arbre ; c'est-à-dire :  $-2\eta \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{x,y=h,z} = -2\eta \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x,y=h,z} = 0$ .

Les conditions (II.12-a) et (II.12-c) sont appelées conditions de non glissement (no slip conditions). Elles indiquent l'égalité, à la surface de l'arbre, entre la vitesse des particules de fluide et la vitesse linéaire de l'arbre.

- A l'interface film fluide-coussinet poreux d'équation  $y=0$

$$u(x, 0, z) = U_b(x, z) \quad (\text{II.13-a})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x,y=0,z} = \frac{\alpha_b}{\sqrt{k}} (U_b - u^*) \quad (\text{II.13-b})$$

$$v(x, 0, z) = v^*(x, z) \quad (\text{II.13-c})$$

$$w(x, 0, z) = W_b(x, z) \quad (\text{II.13-d})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x,y=0,z} = \frac{\alpha_b}{\sqrt{k}} (W_b - w^*) \quad (\text{II.13-e})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{x,y=0,z} = 0 \quad (\text{II.13-f})$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x,y=0,z} = 0 \quad (\text{II.13-g})$$

où  $U_b$  et  $W_b$  sont respectivement les vitesses de glissement de Beavers-Joseph à l'interface film fluide-coussinet poreux suivant les directions  $x$  et  $z$ .

$\alpha_b$  est le coefficient de glissement de Beavers adimensionnel et  $k$  est la perméabilité du matériau constituant la couche poreuse en ( $m^2$ ) supposé isotrope.

Les conditions (II.13-f) et (II.13-g) traduisent la nullité des couples de contraintes à l'interface due à l'absence de rotation des particules au niveau de la paroi solide ; c'est-à-

dire :  $-2\eta \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{x,y=0,z} = -2\eta \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x,y=0,z} = 0$ . Les équations (II.13-a), (II.13-b), (II.13-d), et

(II.13-e) représentent les conditions de glissement de Beavers-Joseph et l'équation (II.13-

c) traduit la condition de continuité de la vitesse suivant la normale à l'interface film

fluide-couche poreuse.  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  sont respectivement les composantes du vecteur vitesse

des particules fluides suivant les directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$  au niveau de l'interface. Ces vitesses

sont calculées par la loi de Darcy modifiée suivante :

$$u^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad (\text{II.14-a})$$

$$v^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial y} \quad (\text{II.14-b})$$

$$w^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (\text{II.14-c})$$

ou encore sous forme plus condensée :  $\vec{v}^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \vec{\nabla} p^*$

où  $\beta = \frac{l^2}{k}$  est le paramètre de percolation (ou de pénétration) des particules dans la

matrice poreuse et  $p^*$  est la pression dans le milieu poreux calculée à partir de la résolution de l'équation de Laplace (II.15) :

$$\vec{\nabla}^2 p(x, y, z) = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.15})$$

tels que :  $0 \leq x \leq 2\pi R$  ;  $-H \leq y \leq 0$  ;  $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$  .

L'équation (II.15) traduit la loi de conservation de la masse dans le milieu poreux (II.16) ; c'est-à-dire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (\text{II.16})$$

où  $\vec{v}^* = v_r^* \vec{e}_r + v_\theta^* \vec{e}_\theta + v_z^* \vec{e}_z$  est le champ de vitesse de l'écoulement dans la matrice poreuse. Il convient de noter que le signe (-) apparaissant dans les équations (II.14) provient du fait que l'écoulement du fluide dans le milieu poreux s'effectue dans le sens des pressions décroissantes. Il est à noter également que l'usage des coordonnées cartésiennes peut être justifié par la condition  $H/R \ll 1$  où  $H/R$  est l'épaisseur relative de la couche poro-élastique. Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, l'écriture de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques est alors nécessaire. Dans ce cas, les équations (II.14) et (II.15) prennent la forme suivante :

$$v_r^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial r} \quad (\text{II.17-a})$$

$$v_\theta^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{r \partial \theta} \quad (\text{II.17-b})$$

$$v_z^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (\text{II.17-c})$$

L'injection des composantes  $v_r^*$ ,  $v_\theta^*$ , et  $v_z^*$  dans l'équation de conservation de la masse (II.16) écrite en coordonnées cylindriques conduit à l'équation de Laplace (II.18) :

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Les conditions limites liées à l'équation de Laplace (II.15) sont :

- Dans la section médiane du palier supposé aligné ( $z=0$ ), la pression est maximale (symétrie axiale du profil de pression) :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial z} \right|_{x,y,z=0} = 0 \quad (\text{II.19-a})$$

- Sur les bords (extrémités) du palier poreux ( $z = \pm L/2$ ), la pression du fluide dans la matrice poreuse est prise égale à la pression atmosphérique :

$$p^* \Big|_{x,y,z=L/2} = 0 \quad (\text{II.19-b})$$

- Dans le cas particulier où les bords du coussinet sont étanches, la condition (II.19-b) sera remplacée par la condition suivante :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial z} \right|_{x,y,z=\pm L/2} = 0 \quad (\text{II.19-c})$$



- Condition de périodicité de la pression :

$$p^*(\theta = 0, y, z) = p^*(\theta = 2\pi, y, z) \quad (\text{II.19-d})$$

tel que  $\theta = \frac{x}{R}$  est la coordonnée circonférentielle du palier ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

- Sur la surface extérieure du revêtement poreux,  $y=-H$ , la condition d'imperméabilité s'écrit :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial y} \right|_{x,y=-H,z} = 0 \quad (\text{II.19-e})$$

- A l'interface film fluide-couche poreuse,  $y=0$ , la condition de continuité de la pression est appliquée :

$$p^*|_{x,y=0,z} = p|_{x,z} \quad (\text{II.19-f})$$

Compte tenu des conditions limites appropriées (II.12-a), (II.12-d), (II.13-a) et (II.13-f), on peut écrire :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + Ah + B + C \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + D \sinh\left(\frac{h}{l}\right)$$

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C}{l^2} \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + \frac{D}{l^2} \sinh\left(\frac{h}{l}\right)$$

$$U_b = B + C$$

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C}{l^2}$$

L'inversion de ce système permet de déterminer les quatre constantes d'intégration A, B, C, et D. Soit par conséquent :

$$u(x, y, z) = \frac{U}{h} y + U_b(x, z) \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ y(y-h) + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{h-2y}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \quad (\text{II.20})$$

Les termes apparaissant dans le second membre de l'équation (II.20) correspondent respectivement aux effets de cisaillement de Couette, de glissement de la particule fluide à l'interface, et de Hagen-Poiseuille (effet de pression).

La prise en considération des conditions limites (12-c), (12-e), (13-d), et (13-g) permet de trouver les constantes d'intégration E, F, G, et H, et par conséquent l'expression de la composante de la vitesse suivant z :

$$w(x, y, z) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) W_b(x, z) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ y(y-h) + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{h-2y}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \quad (\text{II.21})$$

Dans le cas Newtonien ( $l = 0$ ), les équations (II.20) et (II.21) se réduisent à :

$$u(x, y, z) = \frac{U}{h} y + U_b(x, z) \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h)$$

$$w(x, y, z) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) W_b(x, z) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y - h)$$

Les vitesses de glissement de Beavers-Joseph  $U_b$  et  $W_b$  sont obtenues en insérant les expressions analytiques de  $u$  et  $w$  (Eq. II.20) et (Eq. II.21) respectivement dans les équations (II.13-b) et (II.13-e).

La dérivation des équations (II.20) et (II.21) par rapport à  $y$  donne :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U - U_b}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ 2y - h + 2l \frac{\sinh\left(\frac{h-2y}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right\} \quad (\text{II.22-a})$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ 2y - h + 2l \frac{\sinh\left(\frac{h-2y}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right\} \quad (\text{II.22-b})$$

Soit:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x,y=0,z} = \frac{U - U_b}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ -h + 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right\}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x,y=0,z} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ -h + 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right\}$$

Compte tenu des équations (II.13-b) et (II.13-e), on trouve :

$$U_b(x, z) = \frac{1}{\alpha_b \sigma + 1} \left\{ U + \alpha_b \sigma u^*(x, 0, z) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ -h^2 + 2hl \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right] \right\} \quad (\text{II.23-a})$$

$$W_b(x, z) = \frac{1}{\alpha_b \sigma + 1} \left\{ \alpha_b \sigma w^*(x, 0, z) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[ -h^2 + 2hl \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right] \right\} \quad (\text{II.23-b})$$

où  $\sigma = \frac{h}{\sqrt{k}}$ ,  $u^*(x, 0, z) = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $w^*(x, 0, z) = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p}{\partial z}$ , et

$$\xi_0 = \frac{1}{\alpha_b \sigma + 1} = \frac{\sqrt{k}/\alpha_b}{h + \sqrt{k}/\alpha_b} \quad (\text{II.24})$$

On peut montrer que les vitesses  $u$  et  $w$  de l'écoulement peuvent également s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, \mathbf{y}, z) = \frac{U}{h} [\mathbf{y}(1 - \xi_0) + h\xi_0] + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ (\mathbf{y} - h) \left[ \mathbf{y} + \frac{h}{3} \xi_1 - 2l\xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right] + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \quad (\text{II.25})$$

et

$$\mathbf{w}(x, \mathbf{y}, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ (\mathbf{y} - h) \left[ \mathbf{y} + \frac{h}{3} \xi_1 - 2l\xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right] + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \quad (\text{II.26})$$

où

$$\xi_1 = \frac{3\left(\frac{2k}{1-\beta} + h\frac{\sqrt{k}}{a_b}\right)}{h\left(\frac{\sqrt{k}}{a_b} + h\right)} \quad (\text{II.27})$$

Substituons les expressions analytiques de  $u(x, y, z)$  et  $w(x, y, z)$  (Eqs (II.25) et (II.26)) dans l'équation de continuité (II.2) puis intégrons cette dernière au travers l'épaisseur du film en utilisant la formule d'intégration de Leibnitz pour prendre en considération la variation de la borne supérieure de l'intégrale rappelée ci-dessous :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0 \quad (\text{II.28-a})$$

ou encore

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy + v(x, h, z) - v(x, 0, z) = 0 \quad (\text{II.28-b})$$

$$\text{avec } v(x, h, z) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + W \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{et} \quad v(x, 0, z) = v^*(x, z)$$

Le calcul de la 1<sup>ère</sup> et de la 2<sup>ème</sup> intégrales s'effectue à l'aide de la formule de Leibnitz suivante :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{h_1}^{h_2} F dy \right) - F(x, h_2, z, t) \frac{\partial h_2}{\partial x} + F(x, h_1, z, t) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

et

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial F}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{h_1}^{h_2} F dy \right) - F(x, h_2, z, t) \frac{\partial h_2}{\partial z} + F(x, h_1, z, t) \frac{\partial h_1}{\partial z}$$

Soit :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h u dy \right) - u(x, h, z) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \int_0^h u dy = Q_x(x, z) \quad \text{et} \quad u(x, h, z) = U(x, z)$$

$$\text{et} \quad \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^h w dy \right) - w(x, h, z) \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{avec} \quad \int_0^h w dy = Q_z(x, z) \quad \text{et} \quad w(x, h, z) = W = 0$$

Tous calculs faits, on trouve les expressions des débits volumiques par unité de longueur suivantes :

$$Q_x(x, z) = \frac{Uh}{2} (1 + \xi_0) - \frac{f(h,l,k)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.29-a})$$

$$Q_z(x, z) = -\frac{f(h,l,k)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{II.29-b})$$

$$\text{où } f(h, l, k) = h^3 (1 + \xi_1) - 6h^2 l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) - 12l^2 \left[ h - 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right]$$

Par conséquent, l'équation (II.28-a) ou (II.28-b) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{f(h,l,k)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{f(h,l,k)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Uh}{2} (1 + \xi_0) \right] - v^* + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.30-a})$$

$$\text{avec } v^* = -\frac{k}{\mu(1-\beta)} \frac{\partial p^*}{\partial y} \Big|_{x,y=0,z} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{l^2}{k} < 1$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(h, l, k) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ f(h, l, k) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu U \frac{\partial}{\partial x} [h(1 + \xi_0)] + 12 \frac{k}{1-\beta} \frac{\partial p^*}{\partial y} \Big|_{x,y=0,z} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.30-b})$$

L'utilisation de l'approximation de Morgan-Cameron [18] pour une couche poreuse très mince ( $\frac{H}{R} \ll 1$ ) permet d'exprimer  $\frac{\partial p^*}{\partial y}$  à l'interface film fluide-couche poreuse ( $y=0$ ) comme suit :

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} \Big|_{x,y=0,z} = -H \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.31})$$

Compte tenu de l'équation (II.31), l'équation de Reynolds modifiée prend la forme finale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ h^3 (1 + \xi_1) - 6h^2 l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) - 12l^2 \left( h - 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right) + \frac{12kH}{(1-\beta)} \right] \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ h^3 (1 + \xi_1) - 6h^2 l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) - 12l^2 \left( h - 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right) + \frac{12kH}{(1-\beta)} \right] \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 6\mu U \frac{\partial}{\partial x} [h(1 + \xi_0)] + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.32})$$

L'équation de Reynolds modifiée (II.32) est une équation aux dérivées partielles non linéaire de type elliptique dont l'inconnue principale est la pression hydrodynamique  $p$ . Le caractère non linéaire de l'équation de Reynolds est dû à l'élasticité de la couche poreuse. Dans ces conditions, l'équation géométrique du film s'exprime [voir annexe B pour les détails] :

$$h(x, z, t) = C(1 + \varepsilon \cos(\theta)) + \mathcal{L} p \quad (\text{II.33})$$

où  $\theta = \frac{x}{R}$ ,  $C = R_c - R_a$  est le jeu radial du palier,  $\varepsilon = \frac{e}{c} = \frac{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}{c}$  est l'excentricité relative de fonctionnement, et  $\mathcal{L} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)H}{1-\nu} \frac{1}{E}$  est l'opérateur de compliance. Les paramètres apparaissant dans l'expression de  $\mathcal{L}$  sont le module d'élasticité d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , et l'épaisseur de la couche poro-élastique  $H$ .

### II.3. Conditions limites associées à l'équation de Reynolds modifiée

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds modifiée (II.32) et les conditions limites suivantes :

- Dans la section médiane du palier aligné ( $z=0$ ), la pression étant maximale, c.-à-d. :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{x,z=0,t} = 0 \quad (\text{II.34})$$

- Sur les deux bords libres du palier ( $z = \pm L/2$ ), la pression dans le film fluide est supposée égale à la pression atmosphérique :  $p(x, z = \pm L/2, t) = 0$  (II.35)

- Le champ de pression est supposé périodique dans la direction circonférentielle, soit :  $p(2\pi R, z, t) = p(0, z, t)$  (II.36)

- Les conditions liées à l'écoulement du fluide dans le palier sont celles de Swift-

$$\text{Stieber : } p(x_c, z, t) = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_c, z, t} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_c, z, t} = 0$$

où  $x_c$  est l'abscisse de rupture du film (cavitation) qui est une inconnue supplémentaire du problème.

## II.4. Caractéristiques hydrodynamiques du palier poreux

La connaissance du champ de pression dans le film fluide permet de déterminer les performances du palier à coussinet poreux.

### II.4.1. Capacité de charge et angle de calage

Une fois la pression dans le film fluide est obtenue, la portance hydrodynamique  $F$  est déterminée par :

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_\varepsilon^2 + F_\Phi^2} \quad (\text{II.37})$$

où  $F_\varepsilon^2$  et  $F_\Phi^2$  sont les composantes de la charge suivant la ligne des centres du palier et la normale à cette dernière :

$$F_\varepsilon = 2 \int_{z=0}^{z=L/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} p \cos(\theta) R d\theta dz \quad (\text{II.38})$$

$$F_\Phi = 2 \int_{z=0}^{z=L/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} p \sin(\theta) R d\theta dz \quad (\text{II.39})$$

$\theta_c = \frac{x_c}{R}$  étant l'abscisse de rupture du film.

A partir des composantes de  $\vec{F}$ , on déduit l'angle de calage du palier :

$$\Phi = \tan^{-1} \left( -\frac{W_\Phi}{W_\varepsilon} \right) \quad (\text{II.40})$$

### II.4.2. Force de frottement visqueux

Les composantes de la force de frottement sont obtenues par intégration des contraintes de cisaillement exercées par le fluide lubrifiant sur la surface de l'arbre dont la résultante est :

$$F_f = |\vec{F}_f| = \sqrt{F_{f1}^2 + F_{f2}^2} \quad (\text{II.41})$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont les composantes de la force de frottement  $\vec{F}_f$  suivant les directions  $\theta$  et  $z$ :

$$F_{f1} = 2 \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy} \Big|_{x,y=h,z} R d\theta dz \quad (\text{II.42})$$

$$F_{f2} = 2 \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{zy} \Big|_{x,y=h,z} R d\theta dz \quad (\text{II.43})$$

où :

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - l^2 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.44})$$

$$\tau_{zy}(x, y, z) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} - l^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.45})$$

$\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$  sont les contraintes de cisaillement selon les directions  $x$  et  $z$  (voir Annexe C). Les couples de contraintes étant nuls à la surface de l'arbre d'équation  $y=h$ , on peut alors écrire compte tenu des équations (II.25 et II.26) :

$$\tau_{xy}|_{y=h} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = \mu \frac{U}{h} (1 - \xi_0) + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \left( 1 + \frac{\xi_1}{3} \right) \quad (\text{II.46})$$

$$\tau_{zy}|_{y=h} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=h} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \left( 1 + \frac{\xi_1}{3} \right) \quad (\text{II.47})$$

### II.4.3. Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement adimensionnel peut être calculé par la relation (II.48) :

$$C_f = \frac{F_f}{W} \quad (\text{II.48})$$

### II.4.4. Débit de fuite

Le débit de fuite est obtenu par l'intégration de la composante de la vitesse axiale  $w$  (II.26) à travers la section des deux bords libres du palier poreux. Soit :

$$Q = 2 \int_0^{2\pi R} \int_0^h w(x, y, z = \frac{L}{2}) dy dx \quad \text{avec } x = R\theta \text{ et } dx = R d\theta \quad (\text{II.49})$$

ou encore en utilisant la vitesse axiale moyenne :  $\langle w(x, z = \frac{L}{2}) \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h w(x, y, z = \frac{L}{2}) dy$  :

$$Q = 2 \int_0^{2\pi R} h(x, z = \frac{L}{2}) \langle w(x, z = \frac{L}{2}) \rangle dx \quad (\text{II.50-a})$$

ou encore

$$Q = 2 \int_0^{2\pi} h(\theta, z = \frac{L}{2}) \langle w(\theta, z = \frac{L}{2}) \rangle R d\theta \quad (\text{II.50-b})$$

avec

$$\langle w(x, z) \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[ (y-h) \left[ y + \frac{h}{3} \xi_1 - 2l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \right] + 2l^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right] \right\} dy = -\frac{f(h, l, k)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial z}$$

tels que  $0 \leq x \leq 2\pi R$  ;  $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$

Ce qui donne :

$$Q = -2 \int_0^{2\pi R} \frac{1}{12\mu} \left[ f(h, l, k) \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{x, z = \frac{l}{2}} dx \quad (\text{II.51-a})$$

ou encore en utilisant la coordonnée circonférentielle  $\theta = x/R$

$$Q = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{12\mu} \left[ f(h, l, k) \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{\theta, z = \frac{l}{2}} R d\theta \quad (\text{II.51-b})$$

### II.5. Conclusion

Le but de ce chapitre était de présenter les entités de base de la théorie du micro-continuum de Vijay Kumar Stokes dans le cadre de la mécanique des films minces visqueux. Par comparaison à la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules, cette théorie tient compte de la taille des nanoparticules (NPs) ou des agglomérats de NPs en écoulement. Cependant, la prise en considération des couples de contraintes entraîne une asymétrie du tenseur des contraintes. Il ressort que cette théorie, inspirée de la théorie des milieux élastiques polaires des frères Cosserat, est basée sur une véritable description du continuum du point de vue cinématique avec l'introduction des tenseurs des taux de vorticité et de courbure définie directement à partir du champ de vitesse de l'écoulement. Une équation de Reynolds modifiée a été dérivée à partir des équations de mouvement d'un fluide non Newtonien à couples de contraintes, les conditions de glissement à l'interface de Beavers-Joseph, et l'approximation de Morgan-Cameron ce qui nous évité la résolution de l'équation de Laplace ou de Darcy (3-D) dans le coussinet. A la fin du chapitre, nous avons établi les expressions des différentes caractéristiques hydrodynamiques du palier poreux.



## **II.6. Références bibliographiques du chapitre II**

- [1] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Victor Dalmont. (1856)
- [2] M. O. A. Mokhtar, M. Rafaat and G. S. A. Shawki, Experimental investigations into the performance of porous journal bearings, Technical report, SAE Technical Paper. (1984)
- [3] G. S. Beavers and D. D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall, Journal of fluid mechanics, Vol. 30, No. 1, pp. 197–207. (1967)
- [4] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Lubrication of short porous journal bearings (Use of the Brinkman-extended Darcy model), Wear, Vol. 161, No. 1–2, pp. 93–104. (1993)
- [5] J.-R. Lin and C.-C. Hwang, Hydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings—use of the Brinkman-extended Darcy model, International journal of mechanical sciences, Vol. 36, No. 7, pp. 631–644. (1994)
- [6] M. Trachsel, R. Pittini and J. Dual, A combined approach to study and model the effect of viscous heating in small porous, self-lubricating journal bearings, Tribology International, Vol. 116, No. Supplement C, pp. 199–207. (2017)
- [7] D. R. Oliver, Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearing, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 30, No. 2–3, pp. 185–196. (1988)
- [8] W. Scott and P. Suntiawattana, Effect of oil additives on the performance of a wet friction clutch material, Wear, Vol. 181, pp. 850–855. (1995)
- [9] V. K. Stokes, Couple stresses in fluids, the physics of fluids, Vol. 9, No. 9, pp. 1709–1715. (1966)
- [10] Vijay Kumar Stokes, Theories of fluids with microstructures: An introduction, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo. (1984)
- [11] T. Ariman, M. A. Turk, and N. D. Sylvester, Applications of microcontinuum fluid mechanics, International Journal of Engineering Science, Vol. 12, No. 4, pp. 273–293. (1974)
- [12] Eugène Cosserat, François Cosserat, Théorie des corps déformables, Librairie Hermann. (1909)
- [13] N. M. Bujurke and N. B. Naduvinamani, on the performance of narrow porous journal bearing lubricated with couple stress fluid, Acta mechanica, Vol. 86, No. 1, pp. 179–191. (1991)

- [14]** N. B. Naduvinamani, P. S. Hiremath and G. Gurubasavaraj, Static and dynamic behaviour of squeeze-film lubrication of narrow porous journal bearings with coupled stress fluid, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, Vol. 215, No. 1, pp. 45–62. (2001)
- [15]** W. C. Mak and H. D. Conway, The Lubrication of a Long, Porous, Flexible Journal Bearing, Journal of Lubrication Technology, Vol. 99, No. 4, pp. 449–454. (1977)
- [16]** J.-R. Lin, C.-C. Hwang, and R.-F. Yang, Hydrodynamic lubrication of long, flexible, porous journal bearings using the Brinkman model, Wear, Vol. 198, No. 1, pp. 156–164. (1996)
- [17]** A. A. Elsharkawy and L. H. Guedouar, Direct and inverse solutions for elastohydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings, Journal of tribology, Vol. 123, No. 2, pp. 276–282. (2001)
- [18]** A. Cameron, V. T. Morgan and A. E. Stainsby, Critical Conditions for Hydrodynamic Lubrication of Porous Metal Bearings, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 176, No. 1, pp. 761–770. (1962)

# **Chapitre III**

**Comportement statique d'un palier  
à coussinet poreux lubrifié par des  
nanofluides**

## Chapitre III

# Comportement statique d'un palier à coussinet poreux lubrifié par des nanofluides

### III.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement statique d'un palier à coussinet poreux déformable, de dimension finie utilisant un nanofluide non Newtonien comme lubrifiant. Dans le cas d'une charge imposée (problème inverse), les effets non Newtoniens sur les performances hydrodynamiques du palier sont étudiés en développant un modèle basé sur la résolution numérique de l'équation de Reynolds modifiée (Eq. II.32) couplée à l'équation géométrique du film (Eq. II.33) et aux équations d'équilibre de l'arbre à l'aide de la méthode itérative du point fixe. Dans ces conditions, les coordonnées  $e_x$  et  $e_y$  de la position d'équilibre du centre de l'arbre est déterminée par la méthode de Newton-Raphson avec facteur de relaxation. En revanche, lorsque le palier fonctionne à excentricité imposée (problème direct), le problème de lubrification EHD en régime isotherme est seulement gouverné par l'équation de Reynolds modifiée et l'équation géométrique du film.

Pour les deux conditions de fonctionnement du palier (charge ou excentricité imposée), l'équation de Reynolds modifiée écrite en régime stationnaire est discrétisée par la méthode des différences finies et le système d'équations algébriques résultant est résolu par la méthode itérative de Gauss – Seidel avec facteur de sur-relaxation.

Pour la validation du modèle numérique développé, les valeurs de la capacité de charge calculées dans le cas du problème direct sont comparées à celles mesurées par Mokhtar et al. [1] dans le cas d'un palier à coussinet poreux, de dimension finie et lubrifié par un fluide Newtonien et celles calculées théoriquement par Rouleau et al. [2]. Des comparaisons des autres caractéristiques statiques tels que le coefficient de frottement et l'angle de calage avec les résultats théoriques publiés par Rouleau et al [2] sont aussi envisagées.

Le code de calcul en MS-Fortran 90 élaboré dans le cadre de cette étude permet de calculer les performances statiques du palier poreux, à savoir : la distribution de la pression dans le film, la capacité de charge ou la portance hydrodynamique du système, l'angle de calage, le débit de fuite, et le coefficient de frottement et ce pour différentes valeurs du paramètre de couple de contraintes  $l$  représentant physiquement la taille caractéristique des nanoparticules, du facteur de compliance  $\mathcal{L}$ , et de la perméabilité  $k$ .

## III.2. Equations de base normalisées

Pour le traitement numérique, il est recommandé de réécrire l'équation de Reynolds modifiée stationnaire dérivée dans le chapitre précédent en variables sans dimension. Pour cela, on propose le changement de variable suivant :

- Coordonnées spatiales :

$$\theta = \frac{x}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L} \quad (III.1a)$$

- Composantes circonférentielle, radiale, et axiale de la vitesse d'écoulement :

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{L}{UC} v, \quad \bar{w} = \frac{w}{U} \quad (III.1b)$$

- Pression dans le film fluide :

$$\bar{p} = \frac{c^2}{\mu_0 UR} p \quad (III.1c)$$

- Épaisseur du film lubrifiant :

$$\bar{h} = \frac{h}{c} \quad (III.1d)$$

- Viscosité dynamique du lubrifiant :

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (III.1e)$$

où  $\mu_0$  représente la viscosité dynamique du lubrifiant de base (solvant)

- Taille caractéristique des nanoparticules

$$\bar{l} = \frac{l}{c} \quad (III.1f)$$

### III.2.1 Equation de Reynolds modifiée en variables adimensionnelles

Compte tenu du changement de variable (III.1), l'équation de Reynolds modifiée (II. 32) écrite sans le terme transitoire devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}] = 6\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{h}(1 + \xi_0)] \quad (III.2)$$

où :

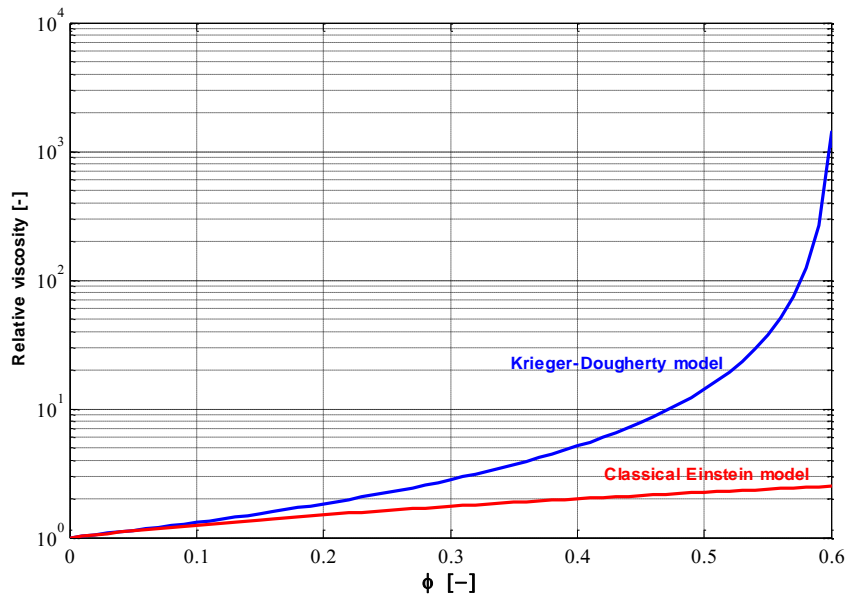
$\bar{\mu} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-[\bar{\eta}]\phi_m}$  est la viscosité relative du nanolubrifiant considéré comme une suspension selon le modèle de Krieger-Dougherty [3],

$$\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) = \bar{h}^3(1 + \xi_1) - 12\bar{l}^2 \left[ \bar{h} - 2\bar{l} \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) \right] - 6\bar{h}^2\bar{l} \xi_0 \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) + \frac{12 K\bar{H}}{(1-\beta)}$$

$K = \frac{kR}{c^3}$  est la perméabilité adimensionnelle et  $\bar{H} = \frac{H}{R}$  est l'épaisseur relative de la couche

poreuse,  $\xi_1 = \frac{3\left(\frac{2k}{1-\beta} + h\frac{\sqrt{k}}{\alpha_b}\right)}{h\left(\frac{\sqrt{k}}{\alpha_b} + h\right)}$  et  $\xi_0 = \frac{\sqrt{k}/\alpha_b}{h + \sqrt{k}/\alpha_b}$  avec  $h = C\bar{h}$ .

La figure III.1 représente une comparaison de l'évolution de la viscosité relative  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$  en fonction de la fraction volumique  $\phi$  calculée par le modèle de viscosité de Krieger-Dougherty et le modèle conventionnel d'Einstein.



**Fig. III. 1** Comparaison du modèle de viscosité de Krieger-Dougherty avec le modèle conventionnel d'Einstein pour diverses valeurs de la fraction volumique des particules dispersées dans un fluide de base

### III.2.2 Equation géométrique du film

- Cas d'une excentricité imposée (problème direct)

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \bar{L} \bar{p}(\theta, \bar{z}) \quad (III.3a)$$

où l'origine de la coordonnée angulaire  $\theta$  est située sur la ligne des centres.

- Cas d'une charge statique imposée (problème inverse)

$$\bar{h}(\theta, \bar{z}) = \frac{h}{c} = 1 + \bar{X}_J \cos\theta + \bar{Y}_J \sin\theta + \bar{\mathcal{L}} \bar{p}(\theta, \bar{z}) \quad (\text{III.3b})$$

ou encore  $\bar{h}(\theta, \bar{z}) = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \Phi) + \bar{\mathcal{L}} \bar{p}(\theta, \bar{z})$

avec  $\varepsilon = \sqrt{\bar{X}_J^2 + \bar{Y}_J^2}$  ;  $\bar{X}_J = \frac{X_J}{c} = \varepsilon \cos\theta$  ;  $\bar{Y}_J = \frac{Y_J}{c} = \varepsilon \sin\theta$

L'origine de la coordonnée angulaire  $\theta$  est dans ce cas située sur la direction de la charge statique appliquée au palier.

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma) \mu_0 \omega_J (R/c)^3}{(1-\sigma) E} \bar{H} \quad (\text{III.4})$$

$\bar{\mathcal{L}}$  étant le coefficient de compliance ou facteur d'élasticité adimensionnel.

### III.2.3 Caractéristiques hydrodynamiques normalisée

#### - Capacité de charge et angle de calage

La capacité de charge sans dimension  $\bar{F}$  est :

1-Cas du problème direct

$$\bar{F} = \frac{F}{\frac{\mu_0 U R^2 L}{c^2}} = \sqrt{\bar{F}_\varepsilon^2 + \bar{F}_\Phi^2} \quad (\text{III.5})$$

où  $\bar{F}_\varepsilon$  ,  $\bar{F}_\Phi$  sont les composantes de la charge suivant la ligne des centres et la normale à cette dernière.

$$\bar{F}_\varepsilon = 2 \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=1/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{III.6})$$

$$\bar{F}_\Phi = 2 \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=1/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} \bar{p} \sin \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{III.7})$$

L'angle de calage (attitude angle) est alors déduit :

$$\Phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\bar{F}_\Phi}{\bar{F}_\varepsilon}\right) \quad (\text{III.8})$$

2-Cas du problème inverse

$$\bar{F} = \frac{W}{\frac{\mu_0 U R^2 L}{c^2}} = \sqrt{\bar{F}_X^2 + \bar{F}_Y^2} \quad (\text{III.9})$$

où  $\bar{F}_X$  ,  $\bar{F}_Y$  sont les composantes de la charge suivant la direction de la charge appliquée (axe  $OX$ ) et la normale à cette dernière (axe  $OY$ ).

$$\bar{F}_X = 2 \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=1/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{III.10})$$

$$\bar{F}_Y = 2 \int_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=1/2} \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_c} \bar{p} \sin \theta d\theta d\bar{z} \quad (\text{III.11})$$

L'angle de calage (attitude angle) est alors déduit :

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{Y}_J}{\bar{X}_J}\right) \quad (\text{III.12})$$

- **Force de frottement**

$$\bar{F}_f = \frac{F_f}{\frac{\mu_0 U R L}{c}} = \sqrt{\bar{F}_{f_1}^2 + \bar{F}_{f_2}^2} \quad (\text{III.13})$$

- **Coefficient et nombre de frottement**

Le coefficient de frottement  $f$  est obtenu par :

$$C_f = \frac{c \bar{F}_f}{R \bar{W}} \quad (\text{III.14a})$$

Le nombre de frottement se calcule par la relation suivante :

$$f = \frac{R}{c} C_f = \frac{\bar{F}_f}{\bar{W}} \quad (\text{III.14b})$$

où  $\bar{F}$  est la force de frottement sans dimension à la surface de l'arbre  $\bar{F}_f = \sqrt{\bar{F}_{f_1}^2 + \bar{F}_{f_2}^2}$ .

- **Vitesse axiale moyenne de l'écoulement**

$$\langle \bar{w}(\theta, \bar{z}) \rangle = \frac{\langle w(\theta, \bar{z}) \rangle}{\frac{UR}{L}} = -\frac{\bar{f}(\bar{h}, \bar{l}, K)}{12\bar{\mu} \bar{h}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \quad (\text{III.15})$$

- **Débit de fuite**

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\frac{UR^2 c}{L}} = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{12\bar{\mu}} \left[ \bar{f}(\bar{h}, \bar{l}, K) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right]_{\theta, \bar{z}=\frac{1}{2}} d\theta \quad (\text{III.16})$$

$$\text{avec } \bar{f}(\bar{h}, \bar{l}, K) = \frac{f(h, l, k)}{c^3} = \bar{h}^3 (1 + \xi_1) - 6\bar{h}^2 \bar{l} \xi_0 \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) - 12\bar{l}^2 \left[ \bar{h} - 2\bar{l} \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) \right]$$

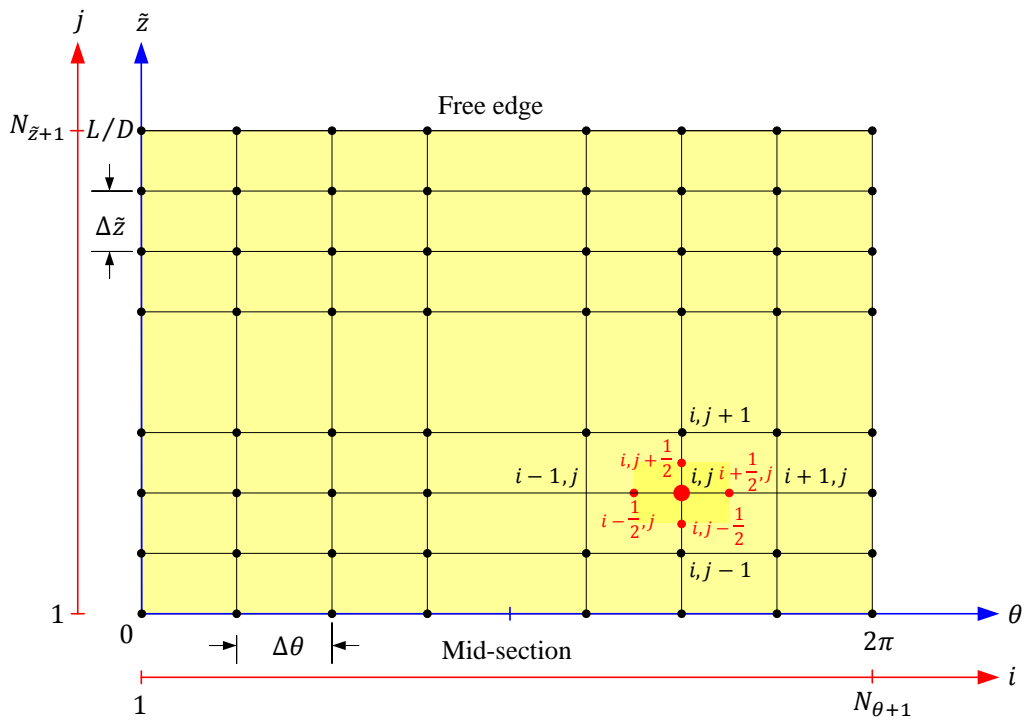
### III.3. Résolution numérique de l'équation de Reynolds modifiée normalisée

Dans le cas d'un palier de longueur finie fonctionnant en régime isotherme pour lequel l'écoulement du lubrifiant est bidimensionnel (2-D), l'équation de Reynolds modifiée (Eq. III.2) est une équation différentielle partielle (EDP) du second ordre qui n'admet pas de solution analytique. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes d'approximation numériques telles que les différences finies, les volumes finis, et les éléments finis pour trouver une solution approchée à cette équation. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode des différences finies en raison de la simplicité de sa mise en œuvre surtout lorsqu'il s'agit de domaines de discrétisation de forme rectangulaire tel que le palier développé.



### III.3.1. Discrétisation spatiale par différences finies

A l'instar des méthodes des éléments finis et des volumes finis, la méthode des différences finies est une méthode d'approximation nodale sur tout le domaine. Elle consiste à discrétiser le domaine d'étude en l'occurrence le milieu fluide en une multitude de points appelés nœuds définis par les indices  $(i, j)$  (Figure III.2), et puis à approcher ou discrétiser les dérivées partielles de la fonction inconnue  $\bar{p}$  en ces points à l'aide de développements en séries de Taylor.



**Fig. III. 2 Discrétisation par différences finies à pas réguliers du milieu fluide à l'aide d'une molécule de calcul à 9 nœuds**

Suivant les directions  $\theta$  et  $z$ , le domaine de calcul est discrétisé respectivement en  $N = N_\theta + 1$  et  $M = N_z + 1$  points.  $N_\theta$  et  $N_z$  étant le nombre de mailles ou de cellules suivant les directions  $\theta$  et  $z$  du palier. Le nombre total de nœuds est alors égal à  $NM$ .

Chaque point ou nœud du domaine discrétisé  $(i, j)$  est repéré par les coordonnées  $(\theta_i, \bar{z}_j)$

avec  $\theta_i = (i - 1)\Delta\theta$ ,  $\bar{z}_j = (j - 1)\Delta\bar{z}$  où  $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1} = \frac{2\pi}{N-1} = \frac{2\pi}{N_\theta}$  et  $\Delta\bar{z} = \bar{z}_j - \bar{z}_{j-1} =$

$\frac{1}{M-1} = \frac{1}{N_z}$  sont respectivement les pas du maillage suivant les directions circonférentielle

et axiale du palier développé.

### III.3.2. Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée

Les dérivées partielles intervenant dans le membre gauche de l'équation de Reynolds modifiée sans dimension (III.2) sont discrétisés aux nœuds intérieurs ( $i \in \{1, N_\theta\}, j \in \{1, N_z\}$ ) en utilisant une molécule de calcul à 9 points :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{\bar{G}_{i+\frac{1}{2},j} \left( \frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta \theta} \right) - \bar{G}_{i-\frac{1}{2},j} \left( \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta \theta} \right)}{\Delta \theta} \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{\Delta z} \right) - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i,j-1}}{\Delta z} \right)}{\Delta z} \quad (\text{III.18})$$

La dérivée partielle du premier ordre apparaissant dans le second ordre de l'équation est discrétisée selon un schéma aux différences finies centré d'ordre deux :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{h}(1 + \xi_0)] \Big|_{i,j} \approx \frac{\bar{h}(1 + \xi_0)|_{i+1,j} - \bar{h}(1 + \xi_0)|_{i-1,j}}{2\Delta \theta} \quad (\text{III.19})$$

avec

$$\bar{G}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\bar{G}_{i+1,j} + \bar{G}_{i,j}}{2} \quad (\text{III.20})$$

$$\bar{G}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\bar{G}_{i-1,j} + \bar{G}_{i,j}}{2} \quad (\text{III.21})$$

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{G}_{i,j+1} + \bar{G}_{i,j}}{2} \quad (\text{III.22})$$

$$\bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{G}_{i,j} + \bar{G}_{i,j-1}}{2} \quad (\text{III.23})$$

En injectant les expressions (III.17) à (III.19) dans l'équation (III.2), on obtient :

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{a_W}{a_P} \bar{p}_{i-1,j} + \frac{a_E}{a_P} \bar{p}_{i+1,j} + \frac{a_S}{a_P} \bar{p}_{i,j-1} + \frac{a_N}{a_P} \bar{p}_{i,j+1} - \frac{a_{RHS}}{a_P} \quad (\text{III.24})$$

avec

$$a_P = \frac{\bar{G}_{i+\frac{1}{2},j} + \bar{G}_{i-\frac{1}{2},j}}{(\Delta \theta)^2} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}} + \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} \right); \quad a_W = \frac{\bar{G}_{i-\frac{1}{2},j}}{(\Delta \theta)^2}; \quad a_E = \frac{\bar{G}_{i+\frac{1}{2},j}}{(\Delta \theta)^2}; \quad a_S = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2};$$

$$a_N = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2}; \quad a_{RHS} = 6\bar{\mu} \left( \frac{\bar{h}(1 + \xi_0)|_{i+1,j} - \bar{h}(1 + \xi_0)|_{i-1,j}}{2\Delta \theta} \right).$$

Le système d'équations algébriques résultant de la discrétisation par différences finies de l'équation de Reynolds modifiée (III.24) est résolu par la méthode itérative de Gauss - Seidel avec facteur de sur-relaxation  $\omega_{GS}$  [4]:

$$\bar{p}_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega_{GS}) \bar{p}_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega_{GS}}{a_P} \left( a_W \bar{p}_{i-1,j}^{(n+1)} + a_E \bar{p}_{i+1,j}^{(n)} + a_S \bar{p}_{i,j-1}^{(n+1)} + a_N \bar{p}_{i,j+1}^{(n)} - a_{RHS} \right) \quad (\text{III.25})$$

où  $n$  est le compteur d'itérations de la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Les conditions de Swift-Stieber concernant la rupture du film (la cavitation) dans la zone divergente du palier sont prises en considération à l'aide de l'algorithme de Christopherson [5] en annulant au cours des calculs les pressions négatives.

La procédure itérative de Gauss-Seidel est arrêtée lorsqu'à chaque noeud intérieur  $(i,j)$  de la grille, l'erreur relative maximale entre deux itérations successives devient inférieure à l'erreur tolérée  $\varepsilon_{GS}$  :

$$\max \left| \frac{\bar{p}_{ij}^{(n+1)} - \bar{p}_{ij}^{(n)}}{\bar{p}_{ij}^{(n+1)}} \right| \leq \varepsilon_{GS} \quad (III.26a)$$

On peut utiliser aussi le test d'arrêt des itérations suivant :

$$\frac{\sum_{i,j} |\bar{p}_{ij}^{(n+1)} - \bar{p}_{ij}^{(n)}|}{\sum_{i,j} \bar{p}_{ij}^{(n+1)}} \leq \varepsilon_{GS} \quad (III.26b)$$

$\bar{p}_{ij}^{(n+1)}$  est la pression calculée à l'itération actuelle  $(n + 1)$  et  $\bar{p}_{ij}^{(n)}$  est la pression correspondant à l'itération précédente  $(n)$ .

Il convient de noter que dans les méthodes de relaxation, le temps de calcul et même la stabilité numérique sont sensiblement affectés par la valeur du coefficient de relaxation. La valeur optimale de  $\omega_{GS}$  est celle qui permet de converger vers la solution pour une erreur tolérée donnée en un nombre minimal d'itérations ou en un faible temps de calculs. Dans la pratique, la valeur optimale de  $\omega_{GS}$  est généralement déterminée par expérimentation numérique comme il est illustré sur la figure III.3. On observe que pour  $\omega_{GS} = 2$ , la méthode de Gauss-Seidel diverge.

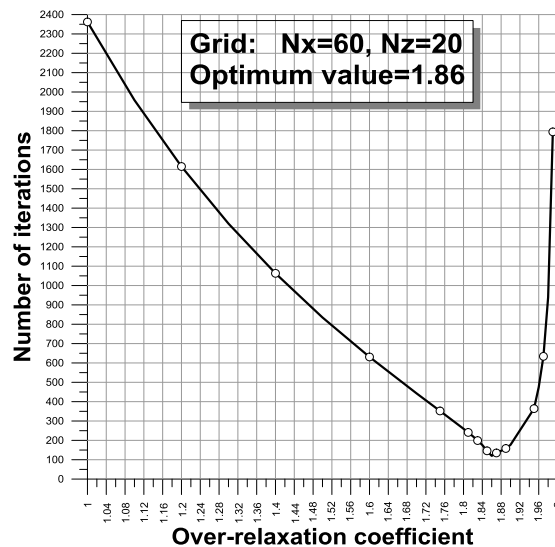


Fig. III. 3 Détermination par expérimentation numérique de la valeur optimale de  $\omega_{GS}$  pour une erreur tolérée  $\varepsilon_{GS} = 10^{-6}$  et un maillage composé de 1200 mailles

### III.4. Recherche de la position d'équilibre statique dans le cas du problème PEHD inverse : Application de l'algorithme de Newton-Raphson relaxé

Lorsque le palier est soumis à une charge statique  $\vec{W}_0 = \begin{Bmatrix} W_{X0} \\ W_{Y0} \end{Bmatrix}$ , le centre du rotor (arbre ou tourillon) occupe une position d'équilibre dans le coussinet définie par les coordonnées cartésiennes  $(X_{J0}, Y_{J0})$ . La détermination de cette position nécessite la résolution des équations d'équilibre non linéaires par la méthode itérative de Newton-Raphson. Une solution inverse de l'équation de Reynolds en régime permanent (III.2) est alors nécessaire. Si le palier poreux est parfaitement aligné, les équations d'équilibre peuvent être écrites dans le repère  $(O, X, Y)$  lié à la charge appliquée comme suit :

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p \cos\theta R d\theta dz + W_{X0} = 0 \\ - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p \sin\theta R d\theta dz + W_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.26a})$$

ou encore sous forme adimensionnelle

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos\theta d\theta d\bar{z} + \bar{W}_{X0} = 0 \\ - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin\theta d\theta d\bar{z} + \bar{W}_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.26b})$$

La position statique du centre de l'arbre (rotor) définie par le vecteur d'excentricité

$$\vec{e}_0 = \begin{Bmatrix} X_{J0} \\ Y_{J0} \end{Bmatrix} \text{ est déterminée lorsque la portance hydrodynamique } \vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{X0} \\ F_{Y0} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} F_X(X_{J0}, Y_{J0}) \\ F_Y(X_{J0}, Y_{J0}) \end{Bmatrix} = - \iint_A p \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dA \text{ équilibre la charge appliquée } \vec{W}_0 = \begin{Bmatrix} W_{X0} \\ W_{Y0} \end{Bmatrix}.$$

L'équation (III.26b) peut être réécrite sous forme de résidu comme suit :

$$\begin{cases} r_X(\bar{X}_J, \bar{Y}_J) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos\theta d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_X} - \bar{W}_{X0} = 0 \\ r_Y(\bar{X}_J, \bar{Y}_J) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin\theta d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_Y} - \bar{W}_{Y0} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

où  $r_X$  et  $r_Y$  sont les composantes du vecteur résidu  $\mathbf{r}$  qui est une fonction non linéaire des

$$\text{coordonnées } (\bar{X}_J, \bar{Y}_J) \text{ puisque } \begin{Bmatrix} \bar{F}_X \\ \bar{F}_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_X(\bar{X}_J, \bar{Y}_J) \\ \bar{F}_Y(\bar{X}_J, \bar{Y}_J) \end{Bmatrix}.$$

Comme il est illustré sur la **figure III.4**, la pression  $\bar{p}$  figurant dans l'équation d'équilibre (III.27) est prédéterminée, dans le cas du problème PEHD, à l'aide de la méthode itérative du point fixe en résolvant successivement l'équation géométrique du film et l'équation de Reynolds modifiée (**Cf. paragraphe III.5**). La méthode de Newton-Raphson relaxée est ensuite utilisée pour résoudre l'ensemble des deux équations non linéaires (III.27).

L'algorithme de Newton-Raphson est formulé en linéarisant les équations d'équilibre (III.27) à l'aide d'un développement en séries de Taylor à deux variables au voisinage de

la  $k^{\text{ème}}$  solution  $\begin{Bmatrix} \bar{X}_J^{(k)} \\ \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix}$  ; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r_X^{(k+1)} \approx r_X^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J}\right)_k \delta \bar{X}_J^{(k)} + \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J}\right)_k \delta \bar{Y}_J^{(k)} = 0 \\ r_Y^{(k+1)} \approx r_Y^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J}\right)_k \delta \bar{X}_J^{(k)} + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J}\right)_k \delta \bar{Y}_J^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

$k$  étant le compteur des itérations.

Dans la méthode de Newton-Raphson relaxée, la  $(k+1)^{\text{ème}}$  solution est obtenue par la relation (III.29) :

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_J^{(k+1)} \\ \bar{Y}_J^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_J^{(k)} \\ \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix} + \omega_{NR} \begin{Bmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29a})$$

où  $\omega_{NR}$  est le facteur d'amortissement ou de relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1 ( $0 < \omega_{NR} \leq 1$ ).

Notons que la valeur de  $\omega_{NR}$  peut être ajustée automatiquement au cours des itérations en fonction du taux de convergence de la solution. Ainsi, l'équation (III.29) devient :

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_J^{(k+1)} \\ \bar{Y}_J^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_J^{(k)} \\ \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix} + \omega_{NR}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29b})$$

Les corrections  $\begin{Bmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix}$  sont obtenues en résolvant le système algébrique linéaire déduit

de l'équation (III.28) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \end{bmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)}) \\ r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)}) \end{Bmatrix} ; k=0, 1, 2, \dots, k_{max} \quad (\text{III.30})$$

dont la solution analytique est :

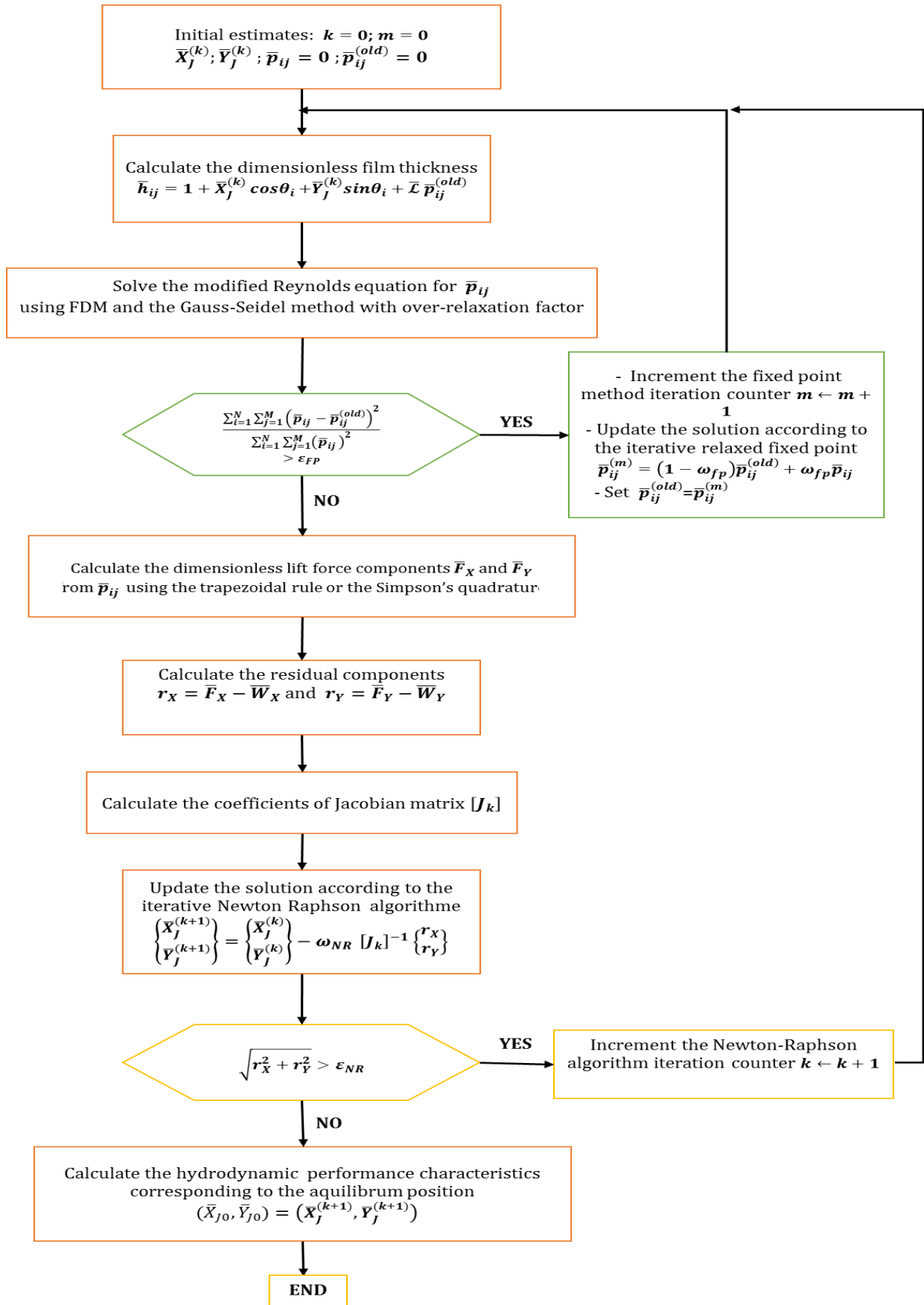


Fig. III. 4 Organigramme général de résolution du problème PEHD inverse

$$\begin{pmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{pmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} & \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \end{bmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})} \begin{pmatrix} r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)}) \\ r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)}) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \end{pmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}} \quad (III.31)$$

La matrice jacobienne  $[J_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} & \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \end{bmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}$  du système (III.30) à la  $k^{\text{ème}}$  itération est

généralement une matrice non symétrique. En pré-multipliant les deux membres du système (III.30) par  $[J_k]^T$ , on obtient un système équivalent à matrice symétrique définie positive qui a la même solution  $\begin{pmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{pmatrix}$  que celle du système original (III.30).

Ainsi, le système (III.30) peut être ré-exprimé après quelques manipulations algébriques comme suit :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J}\right)^2 & \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} + \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \\ \text{Sym.} & \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J}\right)^2 \end{bmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})} \begin{pmatrix} \delta \bar{X}_J^{(k)} \\ \delta \bar{Y}_J^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_X \frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}_J} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}_J} \\ r_X \frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}_J} + r_Y \frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}_J} \end{pmatrix}_{(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})} \quad (III.32)$$

Le critère d'arrêt des itérations pour la méthode de Newton-Raphson améliorée, avec lequel le processus itératif peut être terminé sans perte de précision de la solution, est le suivant :

$$\left| r_X^{(k)} \right| + \left| r_Y^{(k)} \right| \leq \varepsilon_{NR} \quad (III.33a)$$

qui représente la norme de Laplace  $L_1$  du résidu.

ou encore

$$\sqrt{\left( r_X^{(k)} \right)^2 + \left( r_Y^{(k)} \right)^2} \leq \varepsilon_{NR} \quad \text{qui est la norme euclidienne } L_2 \quad (III.33b)$$

où  $\varepsilon_{NR}$  est la tolérance de convergence prédéfinie de la méthode de Newton-Raphson.

Une fois le critère de convergence (III.33) est satisfait, on obtient alors la solution  $\begin{pmatrix} \bar{X}_J^{(k+1)} \\ \bar{Y}_J^{(k+1)} \end{pmatrix}$

correspondant aux coordonnées de la position d'équilibre du centre de l'arbre  $\begin{pmatrix} \bar{X}_{J0} \\ \bar{Y}_{J0} \end{pmatrix}$

recherchée.

Les coefficients de la matrice Jacobienne sont évalués numériquement par différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}}\right)_k &\approx \frac{r_X(\bar{X}_J^{(k)} + \delta, \bar{Y}_J^{(k)}) - r_X(\bar{X}_J^{(k)} - \delta, \bar{Y}_J^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}}\right)_k &\approx \frac{r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} + \delta) - r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} - \delta)}{2\delta}; \\ \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}}\right)_k &\approx \frac{r_Y(\bar{X}_J^{(k)} + \delta, \bar{Y}_J^{(k)}) - r_Y(\bar{X}_J^{(k)} - \delta, \bar{Y}_J^{(k)})}{2\delta}; & \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}}\right)_k &\approx \frac{r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} + \delta) - r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} - \delta)}{2\delta} \end{aligned} \quad (\text{III.34-a})$$

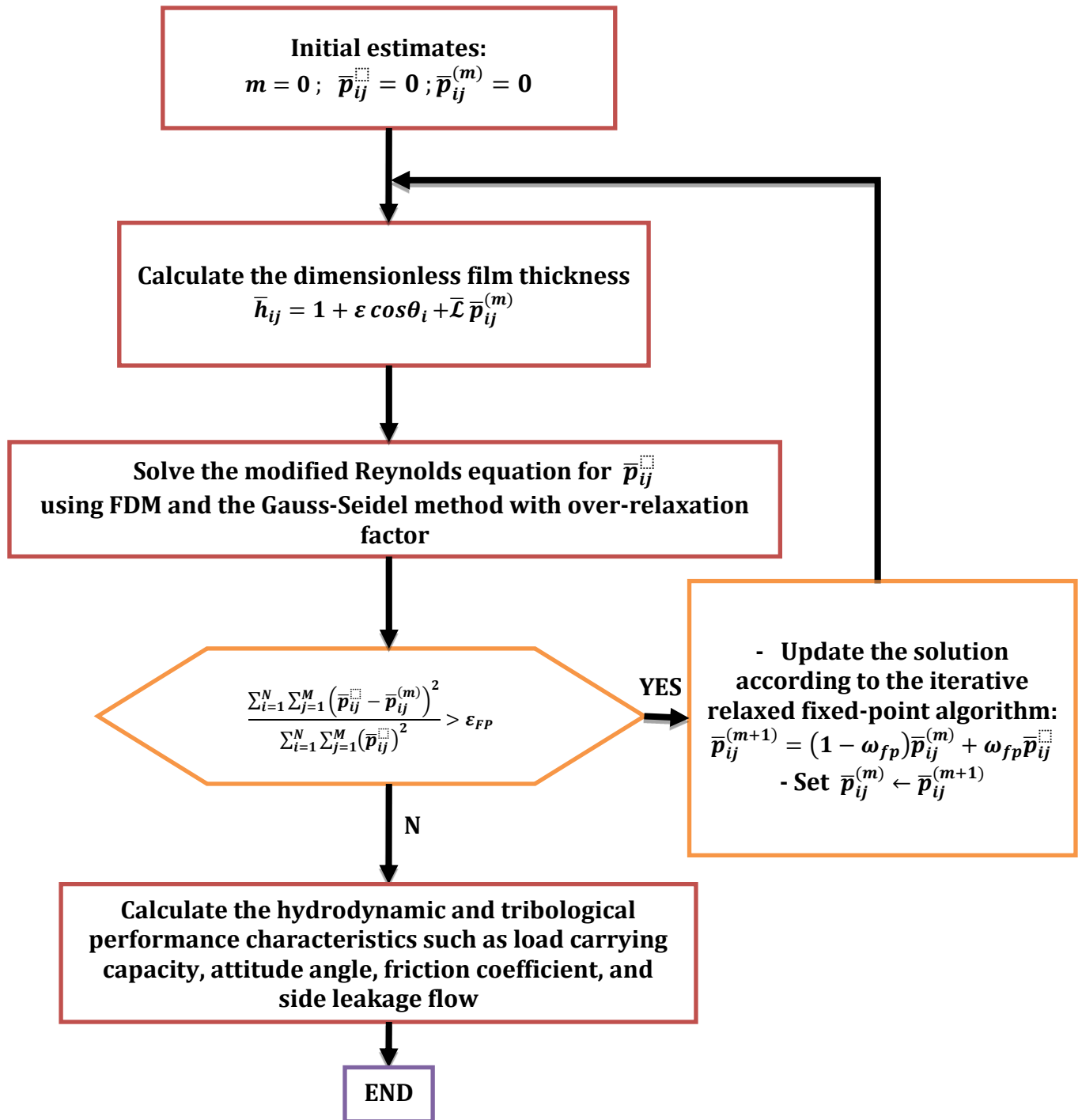
ou par différences finies décentrées :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{X}}\right)_k &\approx \frac{r_X(\bar{X}_J^{(k)} + \delta, \bar{Y}_J^{(k)}) - r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}{\delta}; & \left(\frac{\partial r_X}{\partial \bar{Y}}\right)_k &\approx \frac{r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} + \delta) - r_X(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}{\delta}; \\ \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{X}}\right)_k &\approx \frac{r_Y(\bar{X}_J^{(k)} + \delta, \bar{Y}_J^{(k)}) - r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}{\delta}; & \left(\frac{\partial r_Y}{\partial \bar{Y}}\right)_k &\approx \frac{r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)} + \delta) - r_Y(\bar{X}_J^{(k)}, \bar{Y}_J^{(k)})}{\delta} \end{aligned} \quad (\text{III.34-b})$$

où la perturbation  $\delta = 10^{-8}$  pour les calculs effectués en double précision (quinze décimales après la virgule).

Dans le cas du problème PEHD direct (excentricité imposée) gouverné seulement par l'équation géométrique du film  $\bar{h}_{ij} = 1 + \varepsilon \cos\theta_i + \bar{\mathcal{L}} \bar{p}_{ij}$  couplée à l'équation de Reynolds discrétisée III.25, la procédure générale de résolution du problème est représentée sur la **figure III.5**.





**Fig. III.5** Organigramme général de résolution du problème PEHD direct

## I.5. Couplage équation géométrique du film-équation de Reynolds modifiée

Le couplage du système non linéaire formé par l'équation de Reynolds discrétisée (III.25) et l'équation géométrique du film écrite en un nœud du maillage :

$\bar{h}_{ij} = 1 + \varepsilon_x \cos\theta_i + \varepsilon_y \sin\theta_i + \bar{\mathcal{L}} \bar{p}_{ij}$  est assuré à l'aide de la méthode itérative améliorée du point fixe avec coefficient de sous-relaxation  $\omega_{pf}$  dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1. Cette méthode est similaire à la méthode de Wegstein utilisée pour la résolution des équations non linéaires scalaires de la forme  $f(x) = 0$  [3].

Dans le cas du palier rigide (problème PHD) où le module d'élasticité d'Young du revêtement poreux  $E \rightarrow \infty$ , le facteur de compliance  $\bar{\mathcal{L}}$  est alors nul, la valeur de  $\omega_{pf}$  vaut ainsi un car l'équation de Reynolds et l'équation géométrique du film sont découplées. Dans ce cas, l'équation de Reynolds devient linéaire car l'équation géométrique ne dépend plus de la pression puisque  $\bar{\mathcal{L}} = 0$ .

Cette méthode consiste à générer une série de solutions  $\bar{p}_{ij}^{(0)}, \bar{p}_{ij}^{(1)}, \dots, \bar{p}_{ij}^{(m-1)}, \bar{p}_{ij}^{(m)}$  où  $\bar{p}_{ij}^{(0)}$  représente la solution ou l'estimé initial. Les pressions nodales  $\bar{p}_{ij}^{(m)}$  pour  $m > 0$  sont calculées à partir de la résolution numérique du système (III.25) par l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation  $\omega_{GS}$  afin d'assurer et d'accélérer la convergence de la procédure surtout dans le cas non linéaire (problème PEHD).

Au cours des itérations, la mise à jour de la pression calculée précédemment à l'itération  $(m - 1)$  et la pression actuelle obtenue à l'itération  $m$  est assurée par la relation suivante :

$$\bar{p}_{ij}^{(m)} = (1 - \omega_{pf})\bar{p}_{ij}^{(m-1)} + \omega_{pf}\bar{p}_{ij}^{(m)} \quad (III.35)$$

où  $m$  est le compteur des itérations dans la méthode du point fixe.

Le critère d'arrêt des itérations dans la méthode du point fixe est :

$$\|n\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\bar{p}_{ij}^{(m)} - \bar{p}_{ij}^{(m-1)})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\bar{p}_{ij}^{(m)})^2}} \leq \varepsilon_{pf} \quad (III.36)$$

$\|n\|$  étant la norme relative des moindres carrés.

### III.6. Validation

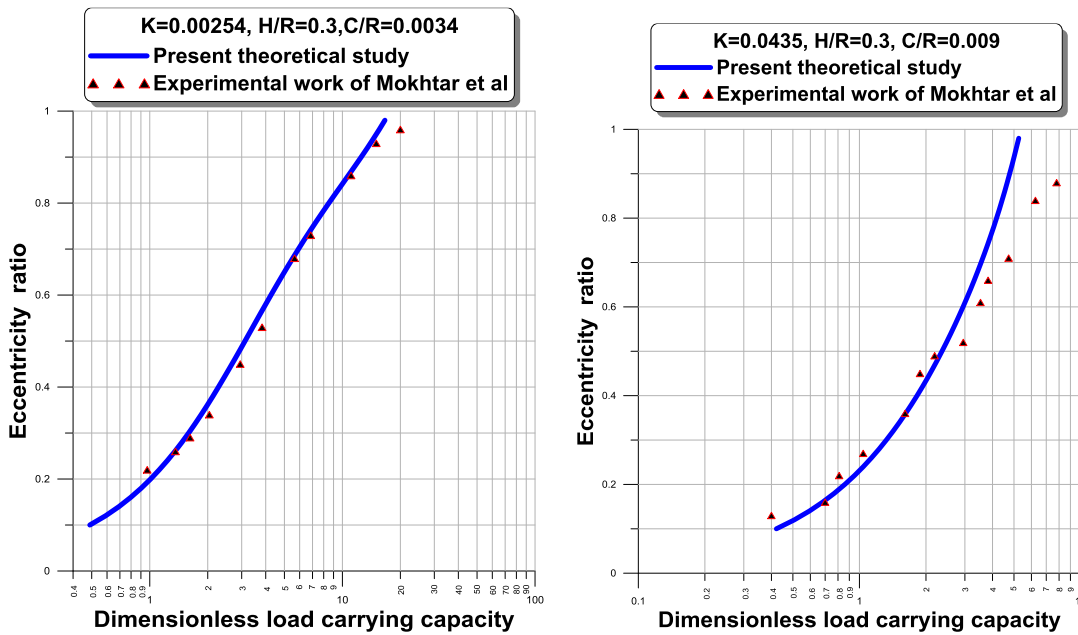
Afin de valider le code de calcul MS-Fortran élaboré dans le cadre de cette étude, des comparaisons dans le cas de fluide Newtonien ( $\bar{\mathcal{L}} = 0$ ) avec les résultats expérimentaux et théoriques obtenus par Mokhtar et al. [1] et Rouleau et al. [2] sont menées.

Le lubrifiant utilisé dans le travail expérimental de Mokhtar et al. est une huile SAE 30. Les données géométriques et physiques utilisées pour cette étude de validation sont celles de Mokhtar et al. [1] :

$$R = 9.5 \times 10^{-3} \text{ m}, L = 0.033 \text{ m}, C = 32 \text{ et } 85.5 \text{ microns}, H = 3.0225 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$k = 8.76 \times 10^{-15} \text{ et } 2.86 \times 10^{-12} \text{ m}^2.$$

La figure III.6 compare la capacité de charge sans dimension  $\bar{F}$ , issue de la simulation numérique, avec celle mesurée par Mokhtar et al. [1] pour différentes valeurs de l'excentricité relative  $\varepsilon$ . Cette figure montre que les prédictions numériques sont en parfait accord avec les données expérimentales. Cependant, un écart peut être observé pour les grandes excentricités relatives surtout dans le cas de perméabilité élevée. Cet écart peut être attribué aux effets thermiques qui sont négligés dans la présente étude.



**Fig. III. 5 Comparaison de la capacité de charge sans dimension  $\bar{F}$  avec les données expérimentales [1]**

Dans le [tableau III.1](#), nous comparons les résultats obtenus par le code de calcul développé avec ceux publiés par Rouleau et al. [2] pour différentes valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement et de la perméabilité de la couche poreuse. Les calculs sont effectués dans le cas d'un palier de longueur finie comportant une rainure d'alimentation longitudinale infiniment mince en utilisant l'approximation de Morgan-Cameron ainsi que les conditions limites de Reynolds qui prennent en considération le phénomène de rupture du film lorsque la géométrie de celui-ci devient divergente. D'autre part, le phénomène de glissement à l'interface n'est pas pris en considération dans ces calculs. D'après les résultats présentés dans ce tableau, nous pouvons conclure que l'approximation de Morgan-Cameron utilisée dans le modèle numérique proposé donne de bons résultats surtout pour une couche poreuse de faible épaisseur et ce pour les différents cas simulés. Notons, par ailleurs, que les faibles écarts observés entre les résultats sont pratiquement dus au phénomène de glissement à l'interface film-couche poreuse qui n'est pas pris en considération dans nos calculs.

**Tableau III. 1. Comparaison des résultats théoriques obtenus par le code de calcul développé avec ceux publiés dans [2] pour : R/L=0.5, H/R=0.2, C/R=0.001**

$\varepsilon$	$K$	$\bar{F}$	$f\left(\frac{R}{C}\right)$	$\Phi$ (degrés)	
0.80	0.001	6.9215	1.7465	35.7342	1 Ref. [2]
		6.7472	1.7337	37.1612	2 Present study
		0.0251	0.0073	0.0399	Ecart (%)
0.80	1.000	0.5296	20.1582	73.4712	1
		0.5536	19.3003	73.1705	2
		0.0453	0.0426	0.0041	Ecart (%)
0.80	10.000	0.0658	---	84.4858	1
		0.0794	132.3135	82.8903	2
		0.2066	---	0.0188	Ecart (%)
0.60	0.001	2.6126	3.2355	49.8640	1
		2.6041	3.2482	50.7268	2
		0.0032	0.0039	0.0173	Ecart (%)
0.60	1.000	0.4080	19.5417	75.8843	1
		0.4271	18.6807	75.5757	2
		0.0468	0.0441	0.0041	Ecart (%)
0.60	10.000	0.0499	---	84.9922	1
		0.0602	130.7896	83.4594	2
		0.2064	---	0.0180	Ecart (%)
0.20	0.001	0.4984	12.9634	73.5610	1
		0.5025	12.8589	73.8830	2
		0.0082	0.0080	0.0043	Ecart (%)
0.20	1.000	0.1395	46.0617	81.8352	1
		0.1464	43.9127	81.5428	2
		0.0501	0.0467	0.0035	Ecart (%)
0.20	10.000	0.0168	---	85.8865	1
		0.0203	315.8283	84.4840	2
		0.2083	---	0.0118	Ecart (%)

### III.7. Etude paramétrique

Dans ce qui suit, les résultats de calcul sont obtenus en utilisant les données géométriques et les conditions de fonctionnement reportées dans le [tableau III.2](#) ci-dessous.

Nous étudions les effets de la taille des NPs ou d'agglomérats de NPs caractérisée par le paramètre adimensionnel  $\bar{l} = \frac{l}{C}$ , de la poro-élasticité de la matrice poreuse caractérisée par les paramètres de perméabilité et de compliance  $K = k \frac{C^3}{R}$  et  $\bar{L}$ , de la concentration des NPs dans le fluide de base  $\phi$ , et le coefficient de glissement de Joseph-Beavers  $\alpha_b$  sur les performances statiques d'un palier à coussinet poreux de dimension finie, à savoir : le profil de pression hydrodynamique dans la section médiane du palier  $\bar{p}$ , la capacité de charge  $\bar{F}$ , le débit de fuite  $\bar{Q}$ , le coefficient de frottement  $f\left(\frac{R}{C}\right)$ , et l'angle de calage  $\Phi$ .

**Tableau III. 2. Données géométriques et conditions de fonctionnement du palier**

<b>Longueur du coussinet poreux , (m)</b>	$L$	$33 \times 10^{-3}$
<b>Rayon de l'arbre, (m)</b>	$R$	$9.5 \times 10^{-3}$
<b>Jeu radial, (m)</b>	$C$	$85.5 \times 10^{-6}$
<b>Vitesse de rotation de l'arbre, (rpm)</b>	$n_j$	870.
<b>Epaisseur de la couche poreuse, (m)</b>	$H$	$3 \times 10^{-3}$
<b>Perméabilités du coussinet poreux, (m<sup>2</sup>)</b>	$k$	0., $2.86 \times 10^{-12}$
<b>Constante de glissement, sans dimension</b>	$\alpha_b$	0.1
<b>Coefficient de pénétration</b>	$\beta$	0.0
<b>Module d'élasticité d'Young, (GPa)</b> <i>(Bronze, porous [6])</i>	$E$	60.
<b>Coefficient de Poisson, sans dimension</b> <i>(Bronze, porous [6])</i>	$\sigma$	0.22
<b>Viscosité cinématique du lubrifiant de base</b> <i>(SAE 30) à 40 °C, (cSt ou mm<sup>2</sup>/s)</i>	$\nu_0$	106.6
<b>Masse volumique du lubrifiant de base (SAE 30) à</b> <b>20 °C, (kg/m<sup>3</sup>)</b>	$\rho_0$	888.
<b>Diamètre caractéristique relatif des NPs (adim.)</b>	$l/C$	0., 0.1, 0.4
<b>Fraction volumique des NPs, sans dimension</b>	$\phi$	0., 25 %

Les détails relatifs au maillage et au calcul sont indiqués dans le [tableau III.3](#).

**Tableau III. 3. Caractéristiques du maillage et données relatives aux différents calculs**

<b>Nombre total des nœuds suivant la direction circonférentielle du palier</b>	$N$	361
<b>Nombre total des nœuds suivant la direction axiale du palier</b>	$M$	51
<b>Facteur de sous-relaxation de la méthode itérative du point fixe</b>	$\omega_{pf}$	$0 < \omega_{pf} \leq 1.$
<b>Norme de convergence Euclidienne <math>L_2</math> tolérée dans la méthode du point fixe</b>		$10^{-6}$
<b>Erreur de convergence tolérée dans la méthode de Gauss-Seidel</b>	$\varepsilon_{GS}$	$10^{-10}$

**III.7.1. Effets de la taille caractéristique des NPs ou des agglomérats de NPs**

La figure III.7 représente la variation circonférentielle de la pression sans dimension  $\bar{p}$  calculée dans la section médiane du palier,  $\bar{z} = 0$ , pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs (fullerènes IF WS2 ou IF MoS2) dispersées dans le lubrifiant de base  $\bar{l}, \varepsilon = 0.8, K = 2.54 \times 10^{-3}, \phi = 0.,$  et  $\bar{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ . Il est observé que l'utilisation d'un nano-lubrifiant (fluide de base + nano-additifs) dont le comportement est non Newtonien entraîne une augmentation plus importante du pic de pression par rapport au cas du lubrifiant non additivé. Les nano-additifs ou les agglomérats de NPs, mélangés au lubrifiant, s'opposent au mouvement du fluide et améliorent ainsi davantage la pression dans le film fluide.

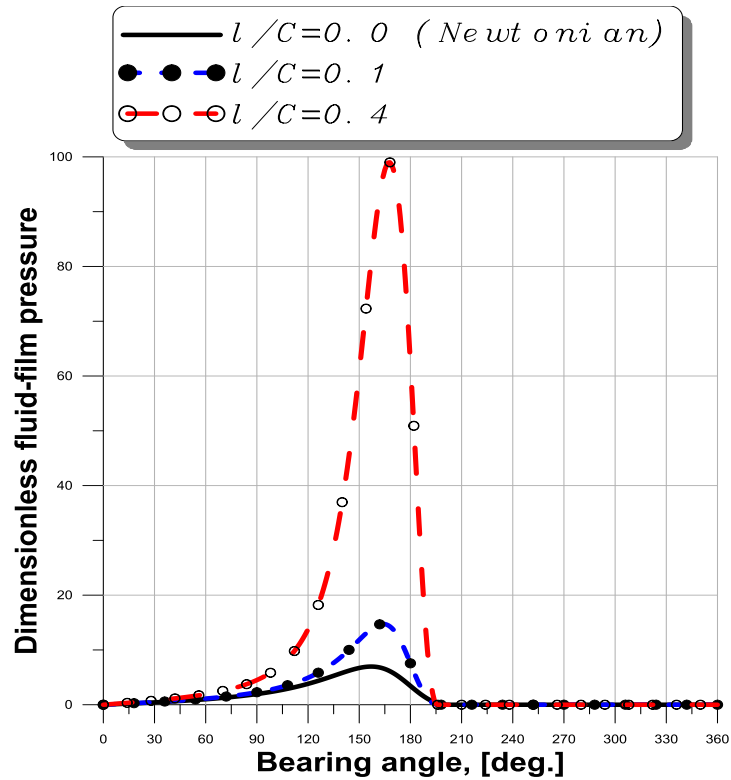


Fig. III. 6 Profils de pression calculés dans la section médiane ( $\bar{z} = 0$ ) pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0.$

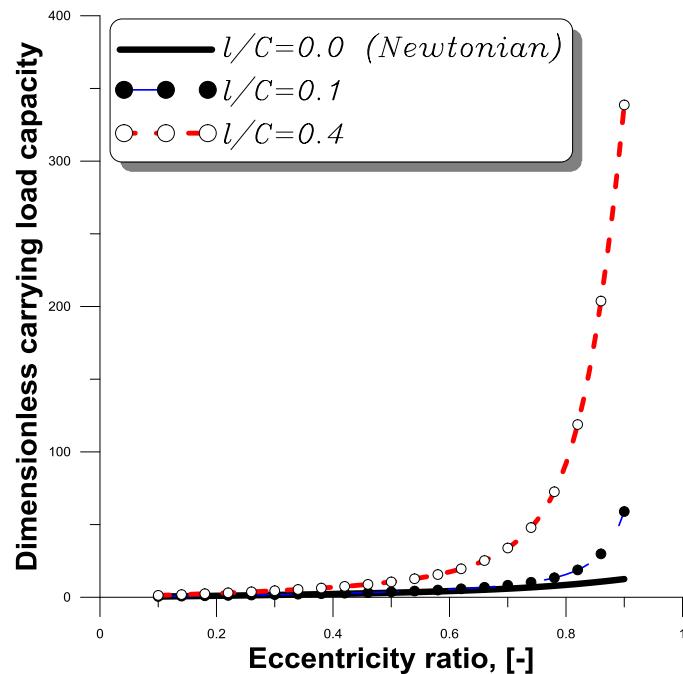
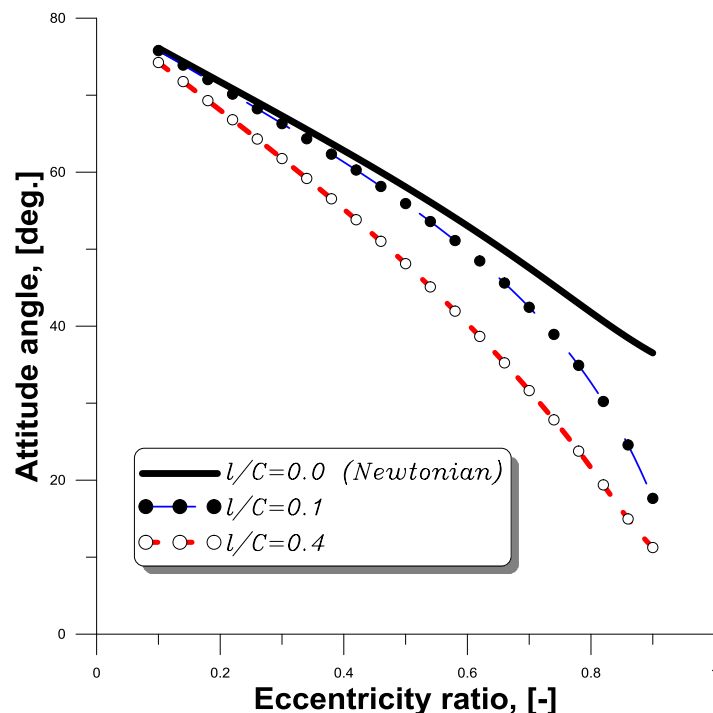


Fig. III. 7 Evolution de la capacité de charge sans dimension  $\bar{F}$  en fonction de l'excentration pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0.$

La **figure III.8** présente l'évolution de la capacité de charge sans dimension  $\bar{F}$  en fonction de l'excentricité pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs  $\bar{l}$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ . Comme dans le cas de la pression hydrodynamique, la taille des NPs fait augmenter la portance hydrodynamique,  $\bar{F}$ , du palier. Ceci est dû à la résistance à l'écoulement générée par les additifs mélangés au lubrifiant. De plus, une grande augmentation de  $\bar{F}$  est observée pour des valeurs élevées de l'excentricité relative de fonctionnement  $\varepsilon$ .

La **figure III.9** montre la variation de l'angle de calage du palier,  $\Phi$ , pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs  $\bar{l}$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ . L'augmentation de  $\bar{l}$  conduit à une diminution significative de l'angle de calage surtout lorsque le nano-lubrifiant contient des NPs ou des agglomérats de NPs de grande taille. On peut conclure que la présence des NPs de grande taille joue un rôle positif vis-à-vis de la stabilité dynamique du palier. Ceci peut être confirmé à travers une étude dynamique linéaire plus complète basée sur le calcul des coefficients de raideur et d'amortissement du palier.



**Fig. III. 8** Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0$ .



La figure III.10 donne la variation du coefficient de frottement,  $\left(\frac{R}{C}\right) = \frac{\bar{F}}{\bar{W}}$ , en fonction de l'excentration pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs  $\bar{l}$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ . Il est montré que le coefficient de frottement diminue avec l'excentration. Pour une excentration donnée, la valeur du coefficient de frottement calculée dans le cas des NPs de grande taille est nettement plus faible que celle obtenue dans le cas de NPs de taille relative réduite. Il convient de noter que la force de frottement agissant sur la surface de l'arbre est calculée par excès en supposant que toute la surface est mouillée par le lubrifiant.

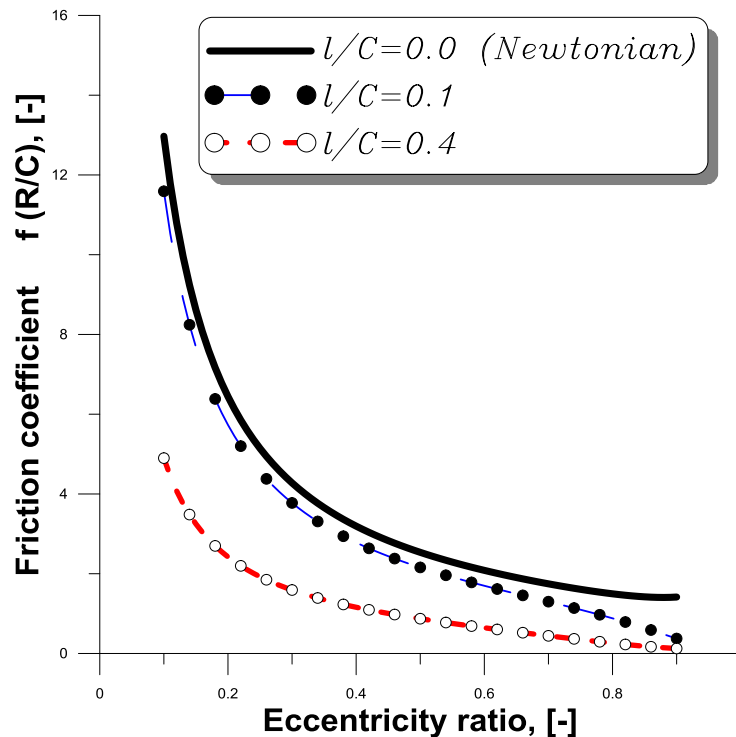


Fig. III. 9 Evolution du coefficient de frottement  $f(R/C)$  pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0$ .

La figure III.11 présente la variation du débit de fuite sans dimension calculé aux bords libres du palier,  $\bar{Q}$ , en fonction de l'excentration  $\varepsilon$  pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des NPs  $\bar{l}$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ . Le débit est calculé par intégration des vitesses moyennes  $\langle \bar{w} \rangle$  de l'écoulement aux deux extrémités du palier  $= \mp \frac{\bar{L}}{2}$ . Cette figure montre clairement que plus la taille des NPs,  $\bar{l}$ , augmente, plus le débit de fuite diminue surtout pour les excentricités de fonctionnement élevées ; c'est-à-dire lorsque le palier est modérément ou lourdement chargé.

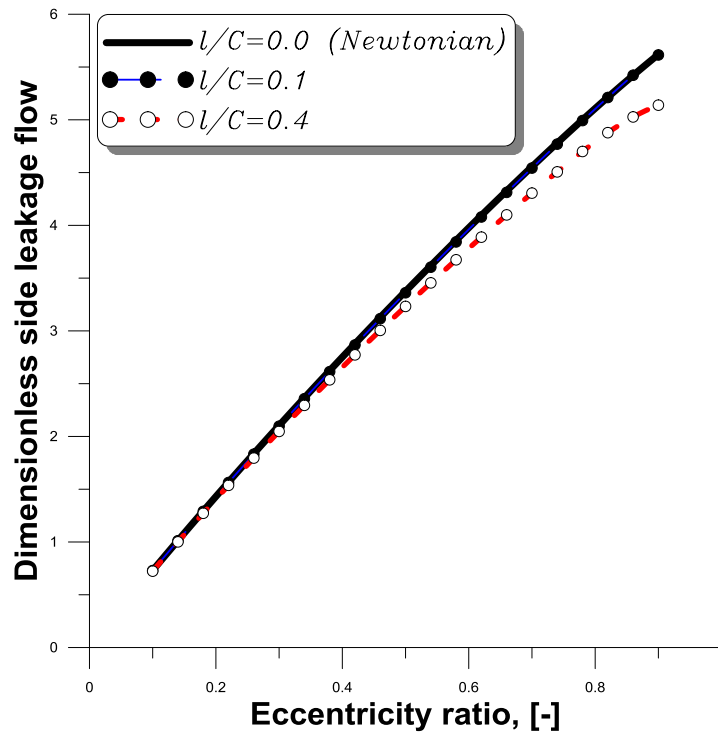


Fig. III. 10 Variation du débit de fuite pour différentes valeurs de la taille caractéristique des NPs,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $K = 2.54 \times 10^{-3}$ ,  $\phi = 0.$ ,  $\bar{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ , et  $\alpha_b = 0$ .

### III.7.2. Effets de la perméabilité de la couche poreuse

La distribution circumférentielle de la pression calculée pour différents paramètres de perméabilité adimensionnels  $K$  du coussinet poreux,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\bar{l} = 0.1$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{L} = 1.15 \times 10^{-4}$  est présentée sur la [figure III.12](#). La pression dans le film fluide diminue sensiblement avec le paramètre de perméabilité. Ceci s'explique par le fait que pour des grandes valeurs de  $K$  ; c'est-à-dire pour un plus grand nombre de pores, une partie du fluide lubrifiant s'infiltré plus facilement à l'intérieur de la matrice poreuse à travers l'interface film fluide-coussinet. Ainsi, la quantité de fluide dans l'espace séparant les surfaces de l'arbre et du coussinet diminue ce qui entraîne la chute de pression et par conséquent la capacité de charge du palier  $\bar{F}$ . Celle-ci correspond à l'aire qui se trouve en dessous de la courbe de pression.

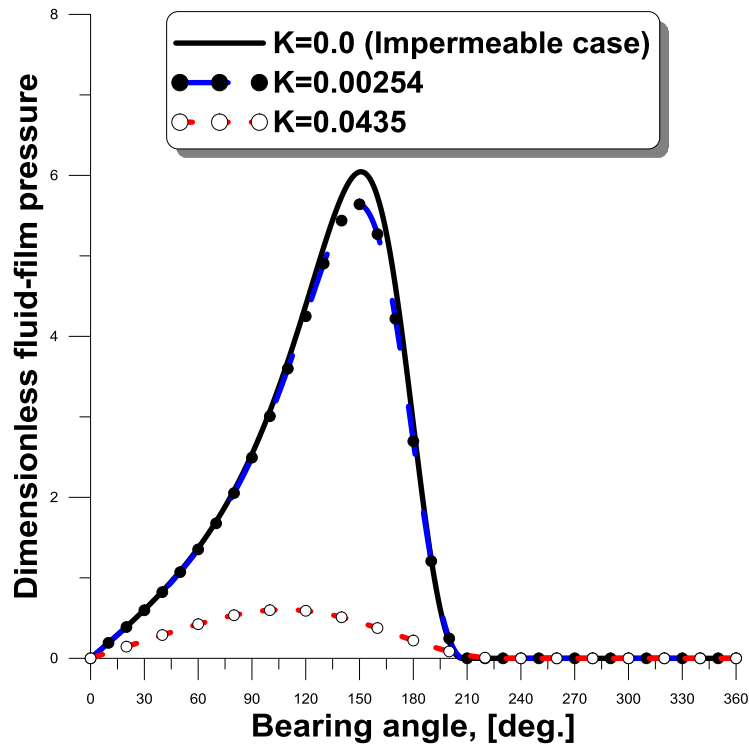


Fig. III. 11 Profil de pression calculé à  $\bar{z} = 0$  pour différents paramètres de perméabilité  $K$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\bar{I} = 0.1$ ,  $\phi = 0.$ , et  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0$ .

La figure III.13 donne les effets de la perméabilité  $K$  de la matrice poreuse sur les performances hydrodynamiques du palier poreux pour des excentricités relatives variant de 0.1 à 0.90. Pour une même excentration de fonctionnement  $\varepsilon$ , on observe :

- une augmentation de l'angle de calage  $\Phi$  et du coefficient de frottement  $f\left(\frac{R}{C}\right)$  avec  $K$  ;
- une diminution de la capacité de charge du palier avec  $K$ .

En revanche, le débit de fuite n'est pas sensiblement affecté par la perméabilité même pour des excentrations élevées.

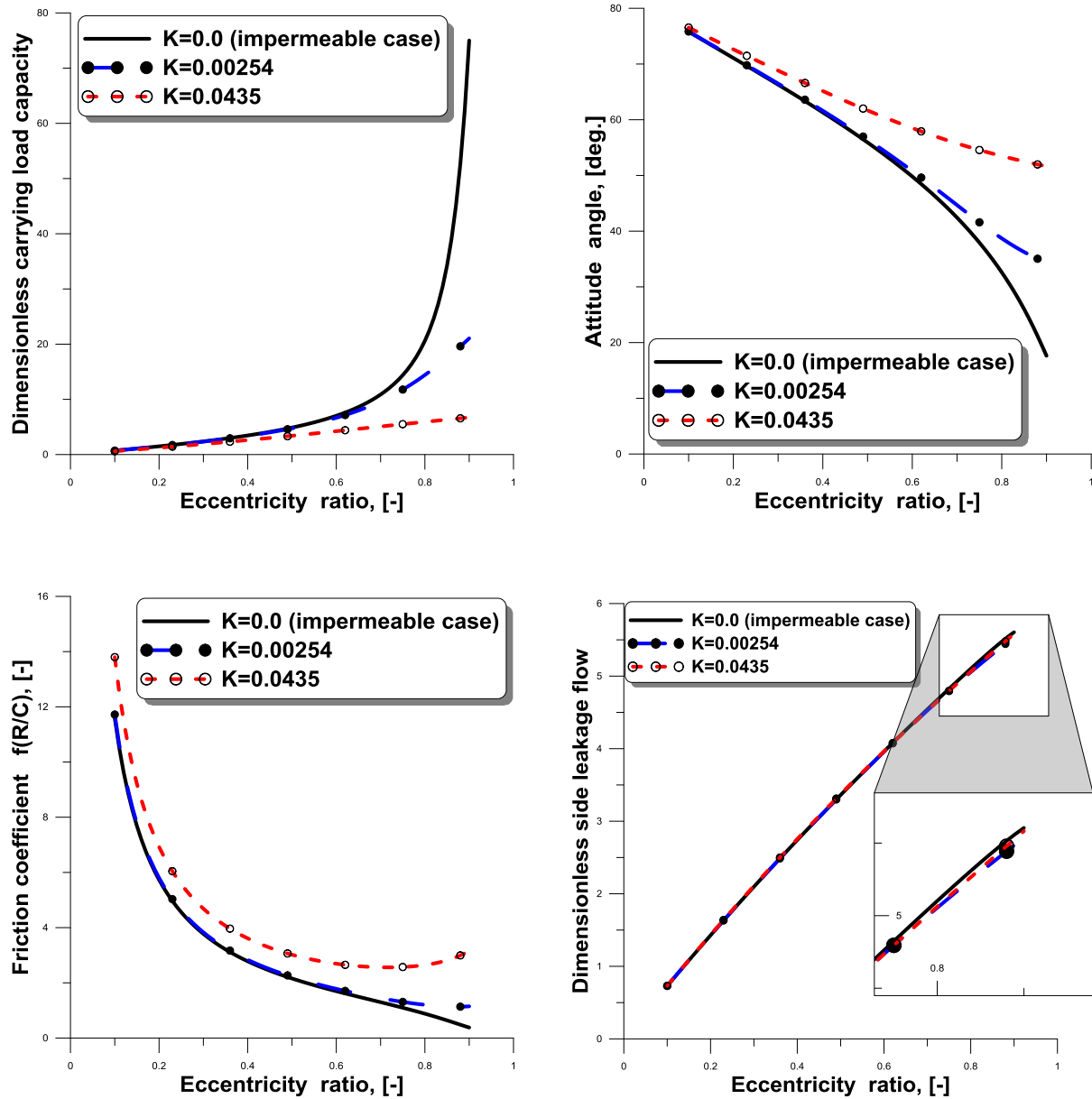


Fig. III. 12 Effets de la perméabilité  $K$  de la couche poreuse sur les performances hydrodynamiques du palier pour  $\beta = 0.0$ ,  $\bar{l} = 0.1$ ,  $\phi = 10\%$ ,  $\bar{\mathcal{L}} = 1.15 \times 10^{-4}$ , et  $\alpha_b = 0$ .

### III.7.3. Effets de la fraction volumique $\phi$ des NPs, du facteur d'élasticité $\bar{\mathcal{L}}$ , du coefficient de glissement $\alpha_b$ , et du coefficient de pénétration $\beta$ sur la pression

Les figures III.14 à III.17 représentent les profils de pression hydrodynamique déterminés pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$ , du facteur d'élasticité  $\bar{\mathcal{L}} =$

$\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma} \frac{\mu_0 \omega_f \left(\frac{R}{c}\right)^3}{E} \bar{H}$ , du coefficient de glissement de Beavers-Joseph  $\alpha_b$ , et du coefficient de pénétration  $\beta$ . L'influence de ces paramètres sur la pression peuvent se résumés comme suit :

- La pression dans le film augmente avec la fraction volumique des NPs puisque la viscosité du nanolubrifiant est une fonction croissante de la concentration d'après le modèle de viscosité de Krieger-Dougherty utilisé.
- La prise en considération de l'élasticité de l'interface film fluide-couche poreuse entraîne une chute substantielle de la pression due à une augmentation de l'épaisseur du film accompagnée d'une extension de la zone active du palier.
- L'effet de la vitesse de glissement à l'interface film fluide-couche poreuse sur la pression ne peut être négligé surtout pour les faibles valeurs du coefficient de glissement de Beavers-Joseph  $\alpha_b$ .
- La pression diminue de façon importante tant que le coefficient de pénétration  $\beta = \frac{l^2}{k}$  est inférieur à un. Dans ce cas, la résistance à l'écoulement du lubrifiant s'affaiblit en raison de la migration de la quasi-totalité des NPs dans le milieu poreux.

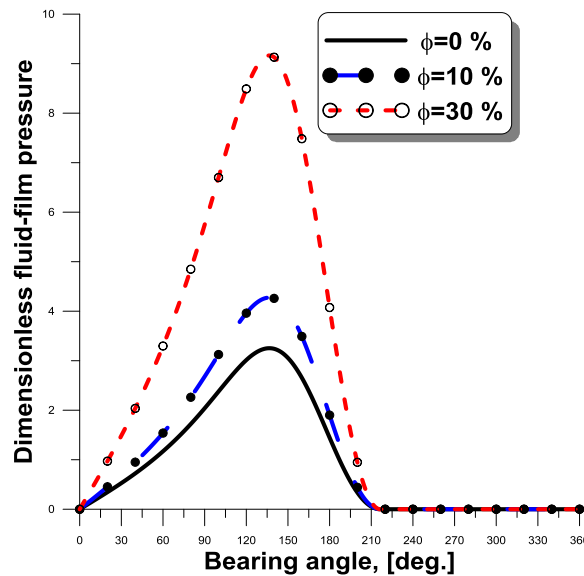


Fig. III. 13 Profils de pression calculés à  $z=0$  pour différentes fractions volumiques

$\phi$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\bar{I} = 0.1$ ,  $\bar{L} = 1.15 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_b = 0.$ ,  $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et  $\beta = 0.$

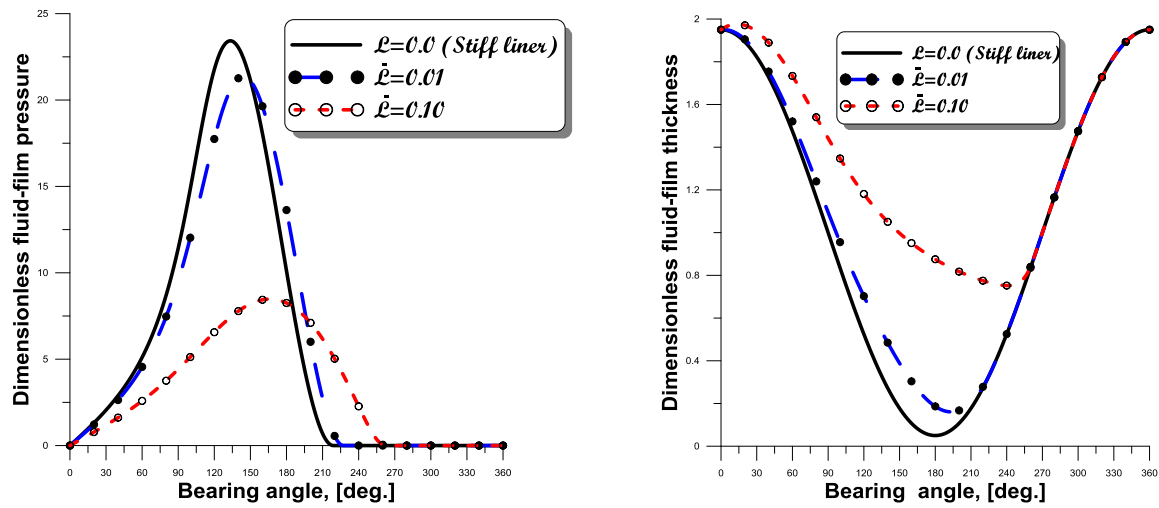


Fig. III. 14 Profils de pression et épaisseur du film calculés à  $(\bar{z} = 0)$  pour différentes valeurs du facteur d'élasticité  $\bar{\mathcal{L}}$ ,  $\phi = 30\%$ ,  $\varepsilon = 0.95$ ,  $\bar{I} = 0.4$ ,  $\alpha_b = 0$ ,  $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et  $\beta = 0$ .

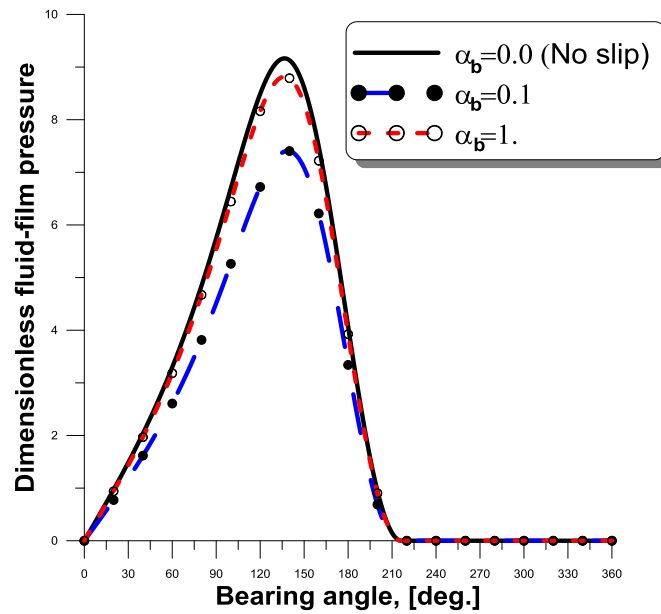
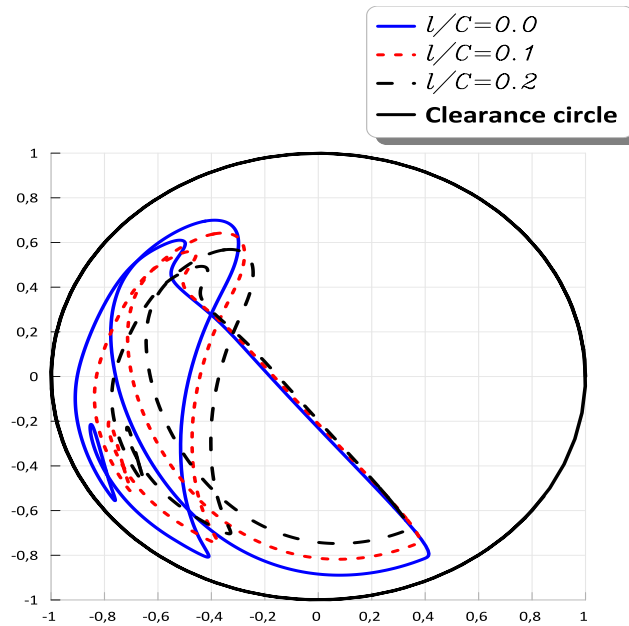


Fig. III. 15 Profils de pression calculés à  $\bar{z}=0$  pour différentes valeurs du coefficient de glissement de Beavers-Joseph  $\alpha_b$ ,  $\bar{\mathcal{L}} = 6 \times 10^{-6}$ ,  $\phi = 30\%$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\bar{I}=0.1$ ,  $K = 4.35 \times 10^{-2}$ , et  $\beta = 0$ .



**Fig. III. 16 Profils de pression calculés à  $\bar{z}=0$  pour différentes valeurs du coefficient de pénétration (ou percolation)  $\beta$ ,  $\alpha_b = 0.0$ ,  $\bar{\mathcal{L}} = 6 \times 10^{-6}$ ,  $\phi = 30\%$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\bar{I}=0.1$ , et  $K = 4.35 \times 10^{-2}$ .**

### III.8. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence de certains paramètres clés, à savoir : la taille caractéristique et la concentration des NPs sur les performances statiques d'un palier à coussinet poreux déformable de dimension finie en résolvant le problème de lubrification PEHD direct ; c'est-à-dire le cas du palier fonctionnant à excentricité  $\varepsilon$  imposée. Le comportement non Newtonien du nanolubrifiant est pris en compte en adoptant la théorie de V. K. Stokes. L'équation de Reynolds modifiée, considérant la déformation élastique du coussinet poreux et les conditions de glissement de Beavers – Joseph à l'interface film fluide–coussinet poro-élastique est dérivée dans le cadre de la théorie de la lubrification fluide par film mince  $\left(\frac{\text{épaisseur du film } h}{\text{longueur caractéristique du contact}} \ll 1\right)$ .

La perméabilité du milieu poreux a été introduite dans l'équation de Reynolds modifiée en utilisant l'approximation de Morgan-Cameron dans le cas d'une couche poreuse très mince  $\left(\frac{H}{R} \ll 1\right)$ . Ceci nous a simplifié davantage la résolution du problème PEHD direct et d'éviter ainsi de faire le couplage entre l'équation de Reynolds modifiée et l'équation de Darcy modifiée gouvernant l'écoulement du nanolubrifiant dans le milieu poreux à l'aide d'une procédure itérative.

La déformation élastique de la couche poreuse encastrée dans le coussinet a été calculée par le modèle analytique simplifié appelé « Modèle Couche Élastique Mince ». L'équation de Reynolds modifiée a été normalisée (écrite en variables adimensionnelle) puis discrétisée par la méthode des différences finies centrées, et le système d'équations algébriques résultant de la discrétisation a été résolu par la méthode itérative de Gauss – Seidel avec facteur de sur-relaxation.

Le modèle développé dans le cadre de cette recherche a été validé avec succès en confrontant les résultats théoriques avec les mesures expérimentales réalisées par Mokhtar et al. [1] dans le cas d'un lubrifiant Newtonien et d'un coussinet poreux (89 % de cuivre, Etain 10 %, Graphite 1%) obtenu par frittage (technologie des poudres). Une deuxième validation a été faite en comparant les résultats obtenus par le code de calcul élaboré avec les résultats théoriques publiés par Rouleau et al. [2].

L'étude paramétrique menée dans le cadre de cette recherche a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de certains paramètres clés liés à la formulation des nanolubrifiants modernes, à savoir la taille caractéristique et la concentration des NPs (fullerènes) ou des agglomérats de NPs.

Les résultats issus des différentes simulations numériques effectuées sont résumés comme suit :

- Pour une excentricité de fonctionnement imposée, la taille et la concentration des NPs font augmenter la pression et donc la capacité de charge du palier, tandis que l'angle de calage, le débit de fuite, et le coefficient de frottement diminuent. Les effets combinés de la taille et de la concentration des NPs sont d'autant plus significatifs que l'excentricité de fonctionnement est grande.
- La pression dans le film fluide, la capacité de charge, et le débit de fuite diminuent avec la perméabilité de la couche poreuse. Cependant, l'angle de calage et le coefficient de frottement augmentent.
- La déformation de la couche poreuse due à la pression affecte de façon significative la distribution de pression et la géométrie du film surtout pour les grandes excentricités de fonctionnement et les faibles valeurs du module d'élasticité d'Young.

Les résultats obtenus fournissent des informations intéressantes pour les concepteurs de paliers poreux ainsi que les fabricants de lubrifiants.



### III.9. Références bibliographiques du chapitre III

- [1] M.O.A. Mokhtar, M. Rafaat, G.S.A. Shawki, Experimental investigations into the performance of porous journal bearings, Society of Automotive Engineers (SAE). (1984)
- [2] W.T. Rouleau, L. I. Steiner, Hydrodynamic porous journal bearings. Part I-Finite full bearings, Transactions of the ASME. (1974)
- [3] I. M. Krieger and T. J. Dougherty, "A Mechanism for NonNewtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres," Journal of Rheology. (1959)
- [4] Alain Gourdin, Mohamed Boumahrat, Applied Numerical Methods, éditions Prentice Hall. (1998)
- [5] D. G. Christopherson, A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems, Proc. Inst. Mech. Engrs. (IMechE), Vol. 146, pp. 126-135. (1941)
- [6] B. J. Hamrock, S. R. Schmid, and Bo O. Jacobson, Fundamentals of fluid film lubrication, 2<sup>nd</sup> edition, Marcel Dekker, Inc. (2004)

# **Chapitre IV**

**Comportement dynamique non  
linéaire des paliers poreux de  
machines alternatives**

## Chapitre IV

### Comportement dynamique non linéaire des paliers poreux de machines alternatives

#### IV.1. Introduction

Les rotors sont des organes de machines très importants dont le rôle est de transmettre de la puissance **figure IV.1**. Ils sont souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages, des roues de turbines, des poulies, ou des volants d'inertie, par exemple. Dans un grand nombre d'applications, ils sont guidés par des organes de supportage appelés paliers à film d'huile qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur leur comportement dynamique. Dans la pratique, on distingue deux types de machines : les machines tournantes (rotating machinery) telles que les turbomachines et les machines alternatives ou à pistons alternatifs tels que les moteurs à combustion interne et les compresseurs.

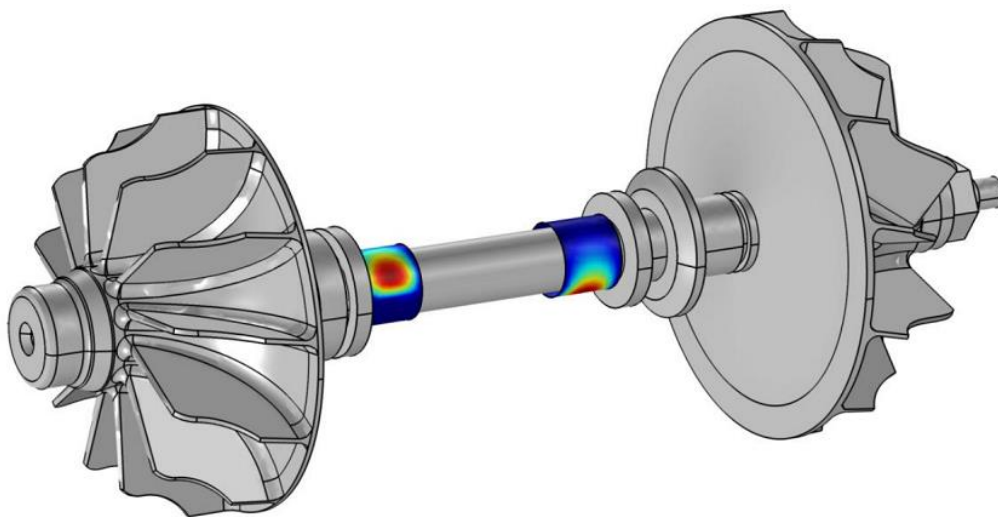
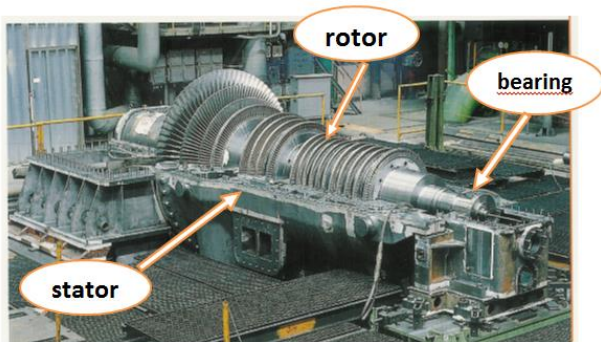


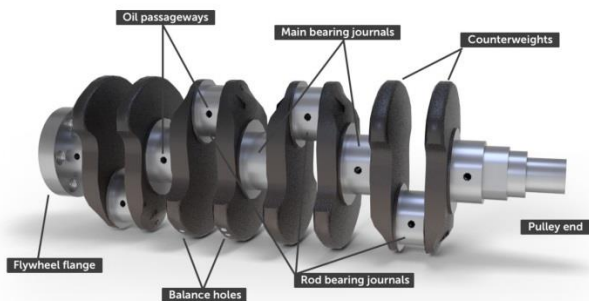
Fig. IV. 1 Schématisation d'un turbo-compresseur

Un palier est en fonctionnement dynamique ou instationnaire si :

- la charge appliquée  $W$  est stationnaire mais l'arbre ou le rotor est écarté de sa position d'équilibre statique  $O_{j0}$  par une perturbation, le problème est de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable. C'est le cas des paliers de lignes d'arbre équilibrées de machines tournantes telles que les turbines et les pompes centrifuges.
- la charge appliquée  $W$  est une fonction du temps, dans ce cas on cherche la trajectoire ou l'orbite, qui en résulte, du centre de l'arbre (rotor)  $O_j$  dans le coussinet afin de déterminer la hauteur minimale du film lubrifiant et pouvoir éviter les avaries éventuelles telles que les contacts destructeurs métal-métal. Ce cas correspond aux conditions de fonctionnement des paliers de moteurs à combustion interne (paliers principaux de vilebrequin et paliers de bielle) et des paliers de lignes d'arbre de machines tournantes déséquilibrées (présence de balourds) **figure IV.2.**



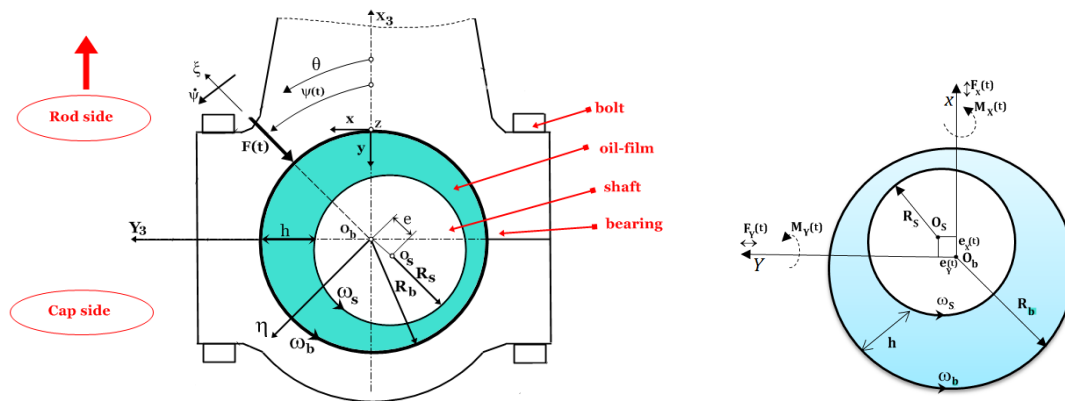
(a) Machine tournante (palier à 4 patins oscillants)



(b) Machine alternative (palier lisse rainuré)

**Fig. IV. 2 Exemples de paliers hydrodynamiques de machines tournantes et alternatives**

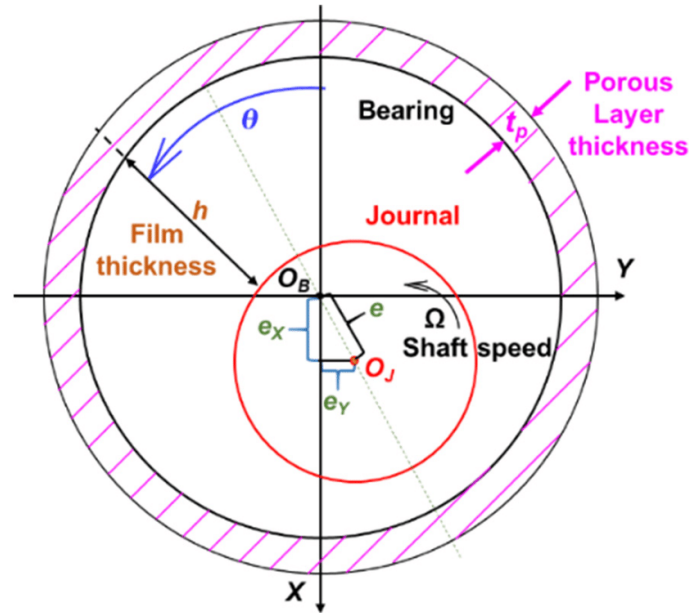
Dans le cas des paliers de moteurs thermiques, la charge externe agissant sur ces paliers varie en module et en direction [figure IV.3](#), le centre de l'arbre décrit une orbite stationnaire à l'intérieur du coussinet. Cette charge provient de l'explosion des gaz dans la chambre de combustion du moteur et des forces d'inertie des solides en mouvement durant tout le cycle thermodynamique du moteur. La détermination de cette orbite correspondant à un diagramme de charge donné nécessite de résoudre numériquement les équations de mouvement non linéaires à chaque pas de temps ou angle de vilebrequin. Ce dernier varie de  $0^\circ$  à  $720^\circ$  dans le cas d'un moteur à quatre temps. Une solution inverse de l'équation de Reynolds est alors requise.



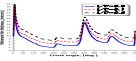

**Fig. IV. 3 Représentation schématique d'un palier de tête de bielle de moteur thermique dynamiquement chargé soumis à un torseur de force quelconque.**

## IV.2. Paliers de ligne d'arbre de machines tournantes

Dans ce type de mécanisme, la force extérieure est le poids de la ligne d'arbre à laquelle viennent se superposer des forces dynamiques d'amplitudes plus ou moins importantes (balourds, par exemple). On schématise la ligne d'arbre par un rotor rigide de masse  $2m$  supporté de façon symétrique par 2 paliers identiques [figure IV.4](#).



**Fig. IV. 4 Section droite d'un palier poreux équilibré de machines tournantes et système d'axes**

A chaque palier est attribué une masse  $m$  du rotor, une charge statique  et une charge dynamique  ; une excitation synchrone ( $\omega = \Omega$ ) ou  $\gamma = \frac{\omega}{\Omega} = 1$  due à un balourd caractérisé par son excentricité  $a$  dont le module est  $ma\Omega^2$  par exemple [figure IV.5](#). Lorsque l'équilibrage est parfait, le centre d'inertie  $G$  de l'arbre est confondu avec son centre géométrique. L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à l'écriture dans le repère  $(O_B, X, Y, Z)$  les équations de mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{e}_X = W_0 + W_X(t) - F_X(e_X, e_Y, \dot{e}_X, \dot{e}_Y) \\ m\ddot{e}_Y = W_Y(t) - F_Y(e_X, e_Y, \dot{e}_X, \dot{e}_Y) \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

où  $W_0 = mg$  est le poids du rotor affecté au palier,  $W_X(t) = ma\Omega^2 \cos \Omega t$ ,  $W_Y(t) = ma\Omega^2 \sin \Omega t$ ,  $e_X(t)$  et  $e_Y(t)$  représentent respectivement les coordonnées instantanées du centre de l'arbre, i.e.

$$\overline{OO_a} = \begin{Bmatrix} e_X \\ e_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \cos \phi \\ e \sin \phi \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{Bmatrix} R d\theta dz$$

sont les composantes de l'action hydrodynamique calculées à partir du champ de pression obtenu par intégration de l'équation de Reynolds non Newtonienne (Eq. II.32) écrite en régime dynamique.

Il est à noter que les équations de mouvement (IV-1) sont des équations différentielles ordinaires du second ordre non linéaires. Le caractère non linéaire de ces équations provient du fait que les composantes de la portance hydrodynamique sont des fonctions non linéaires des déplacements et des vitesses de déplacement du centre de l'arbre. La

solution de ces équations nécessite l'emploi d'un schéma d'intégration numérique tel que le schéma d'Euler ou la méthode de Runge-Kutta.

L'utilisation de l'hypothèse de mouvement de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre statique  $O_{j0}$  définie par les coordonnées cartésiennes  $(e_{X0}, e_{Y0})$  permet de linéariser les équations de la dynamique des rotors (IV-1) en développant les composantes de la portance hydrodynamique  $(F_X, F_Y)$  en séries de Taylor limités à l'ordre un au voisinage de la position d'équilibre. Dans ces conditions, les équations du mouvement vibratoire forcé (IV-1) prennent la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{e}_X \\ \ddot{e}_Y \end{Bmatrix} + [b_{ij}] \begin{Bmatrix} \dot{e}_X \\ \dot{e}_Y \end{Bmatrix} + [a_{ij}] \begin{Bmatrix} e_X \\ e_Y \end{Bmatrix} = ma\Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{Bmatrix}$$

où  $[a_{ij}] = \frac{\partial F_i}{\partial e_j}$  est la matrice raideur du palier,  $[b_{ij}] = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{e}_j}$  est la matrice d'amortissement

du palier tel que  $(i, j) = (X, Y)$ , et  $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$  est la matrice masse.

La solution du nouveau système différentiel est une orbite elliptique dont le centre est  $O_{j0}$ . Cette solution traduit la réponse dynamique du système à une excitation dynamique synchrone appelée balourd de fréquence égale à celle du rotor ( $\gamma = \frac{\omega}{\Omega} = 1$ ).

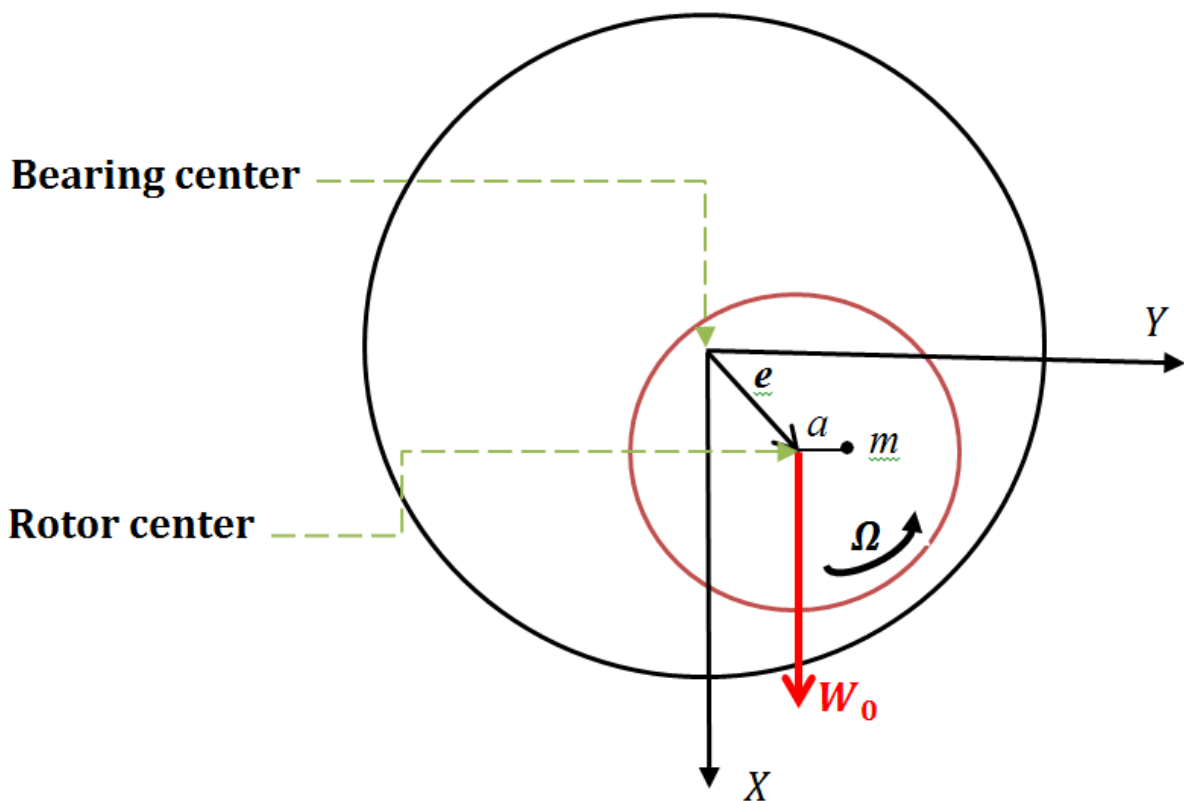


Fig. IV. 5 Section droite d'un palier à arbre déséquilibré

### IV.3. Paliers principaux de vilebrequin de moteurs thermiques

Pour un palier de ligne de vilebrequin aligné, les équations de mouvement du tourillon peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) \cos\theta R d\theta dz + W_X(t) = m\ddot{e}_X \\ - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) \sin\theta R d\theta dz + W_Y(t) = m\ddot{e}_Y \end{cases} \quad (IV.2)$$

où  $W_X, W_Y$  sont les composantes de la charge appliquée obtenue à partir d'une analyse cinématique et dynamique du système piston-bielle-manivelle pour un cycle thermodynamique complet du moteur [figure IV.6](#).

A chaque instant, la position du centre du tourillon définie par le vecteur excentricité

$$\mathbf{e}(t) = \begin{Bmatrix} e_X(t) \\ e_Y(t) \end{Bmatrix} \text{ est déterminée lorsque le vecteur de force de portance } \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_X(t) \\ F_Y(t) \end{Bmatrix} =$$

$$- \iint_A p \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dA \text{ équilibre la charge dynamique appliquée } \mathbf{W}(t) = \begin{Bmatrix} W_X(t) \\ W_Y(t) \end{Bmatrix} \text{ et le vecteur}$$

force d'inertie  $m \begin{Bmatrix} \ddot{e}_X \\ \ddot{e}_Y \end{Bmatrix}$  exprimée dans le système de coordonnées fixes lié au cylindre du moteur.

L'équation (IV.2) peut être réécrite sous forme de résidu comme suit :

$$\begin{cases} r_X(e_X(t), e_Y(t), \dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) (-\cos\theta) R d\theta dz + W_X(t) + m\ddot{e}_X \\ r_Y(e_X(t), e_Y(t), \dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) (-\sin\theta) R d\theta dz + W_Y(t) + m\ddot{e}_Y \end{cases} \quad (IV.3)$$

où  $r_X$  et  $r_Y$  sont les composantes du vecteur résiduel  $\mathbf{r}(t)$  qui est une fonction non linéaire de  $e_X(t), e_Y(t), \dot{e}_X(t)$ , et  $\dot{e}_Y(t)$ .

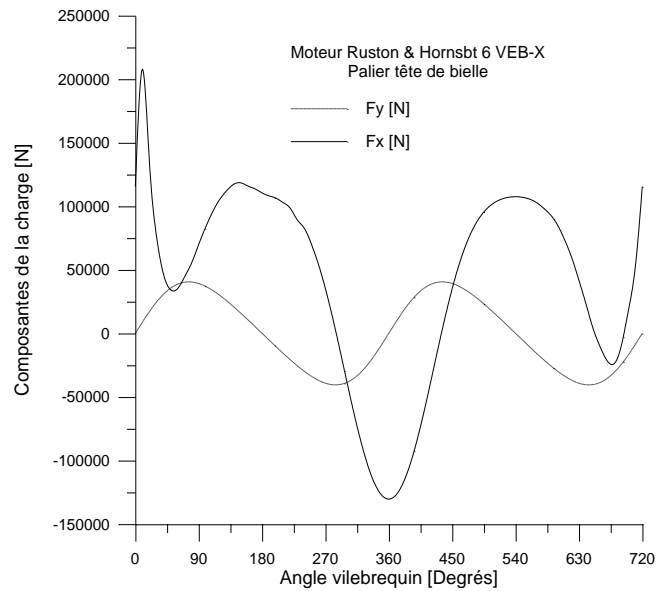
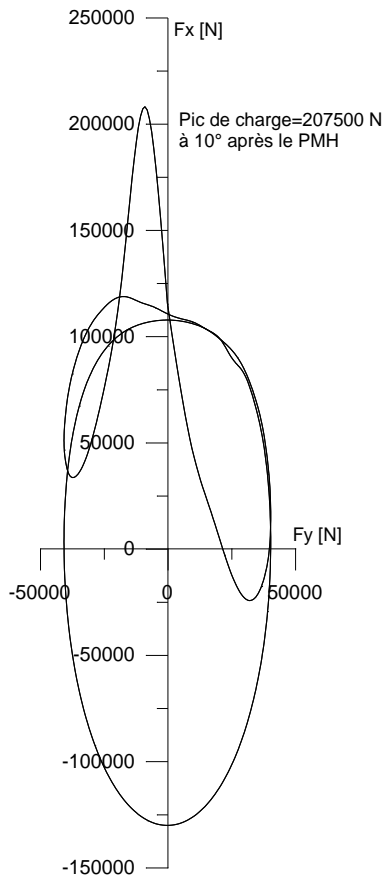
Les déplacements  $(e_X(t), e_Y(t))$  et les accélérations  $(\ddot{e}_X(t), \ddot{e}_Y(t))$  sont reliés aux vitesses  $(\dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t))$  par les relations suivantes :

$$e_X(t) = e_X(t - \Delta t) + \Delta t \dot{e}_X(t) ; e_Y(t) = e_Y(t - \Delta t) + \Delta t \dot{e}_Y(t)$$

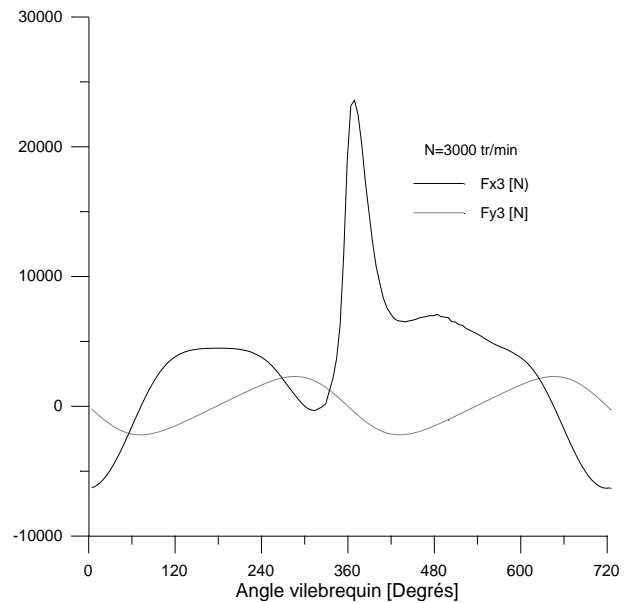
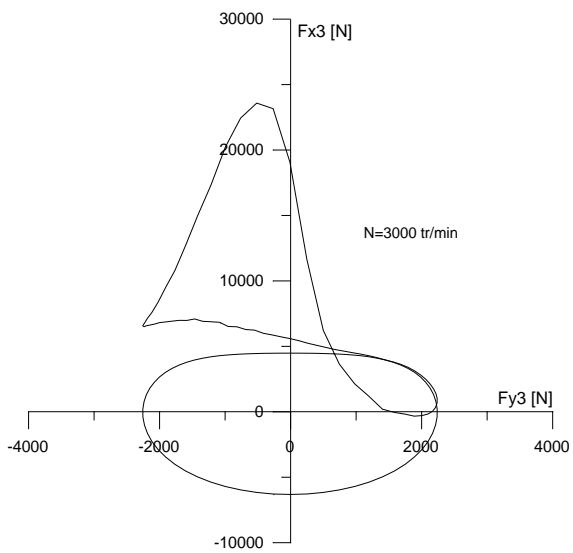
$$\ddot{e}_X(t) = \frac{\dot{e}_X(t) - \dot{e}_X(t - \Delta t)}{\Delta t} ; \ddot{e}_Y(t) = \frac{\dot{e}_Y(t) - \dot{e}_Y(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (IV.4)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps.





(a) Moteur Diesel



(b) Moteur à essence

Représentation polaire

Représentation cartésienne

Fig. IV. 6 : Exemples de diagrammes de charge de moteurs Diesel et essence

Compte tenu des relations (IV.4), l'équation (IV.3) devient

$$\begin{cases} r_X(\dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) (-\cos\theta) R d\theta dz + W_X(t) + m \left( \frac{\dot{e}_X(t) - \dot{e}_X(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \\ r_Y(\dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t)) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta, z, t) (-\sin\theta) R d\theta dz + W_Y(t) + m \left( \frac{\dot{e}_Y(t) - \dot{e}_Y(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \end{cases} \quad (IV.5)$$

On peut remarquer que les résidus à l'instant,  $t$ , ne dépendent que des deux vitesses du centre de l'arbre (tourillon) :  $(\dot{e}_X(t), \dot{e}_Y(t))$ .

La méthode de Newton-Raphson amortie est utilisée pour résoudre l'ensemble des deux équations non linéaires (IV.5) à chaque instant  $t$  du cycle de charge . Cette méthode est formulée en linéarisant les équations de mouvement à l'aide de développements en séries

de Taylor à deux variables des équations (IV.5) au voisinage de la  $k^{ième}$  solution  $\left\{ \begin{matrix} \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{matrix} \right\}$ ;

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r_X^{(k+1)} \approx r_X^{(k)} + \left( \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_X} \right)_k \delta \dot{e}_X^{(k)} + \left( \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_Y} \right)_k \delta \dot{e}_Y^{(k)} = 0 \\ r_Y^{(k+1)} \approx r_Y^{(k)} + \left( \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_X} \right)_k \delta \dot{e}_X^{(k)} + \left( \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_Y} \right)_k \delta \dot{e}_Y^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (IV.6)$$

Dans la méthode Newton-Raphson relaxée, la  $(k+1)^{ème}$  solution est obtenue par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_X^{(k+1)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k+1)}(t) \end{cases} = \begin{cases} \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases} + \omega_{NR} \begin{cases} \delta \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases} \quad (IV.7-a)$$

où  $\omega_{NR}$  est le facteur d'amortissement (ou de sous-relaxation) dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Si  $\omega_{NR} = 1$ , on obtient la méthode de Newton- Raphson classique. Notons que la valeur de  $\omega_{NR}$  peut être ajustée automatiquement au cours des itérations en fonction du taux de convergence de la solution. Ainsi, l'équation (IV.7-a) devient

$$\begin{cases} \dot{e}_X^{(k+1)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k+1)}(t) \end{cases} = \begin{cases} \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases} + \omega_{NR}^{(k)} \begin{cases} \delta \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases} \quad (IV.7-b)$$

Les corrections  $\begin{cases} \delta \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases}$  à  $\begin{cases} \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{cases}$  sont déterminées en résolvant le système

algébrique linéaire suivant déduit de l'équation (IV.6)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_X} & \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_Y} \end{bmatrix}_{(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X(\dot{e}_X^{(k)}(t), \dot{e}_Y^{(k)}(t)) \\ r_Y(\dot{e}_X^{(k)}(t), \dot{e}_Y^{(k)}(t)) \end{Bmatrix} ; k=0, 1, 2, \dots, k_{max} \quad (IV.8)$$

où la solution analytique peut être obtenue sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \delta \dot{e}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{e}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_Y} & -\frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_Y} \\ -\frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_X} & \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_X} \end{bmatrix}_{(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} r_X(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)}) \\ r_Y(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)}) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial r_X \partial r_Y}{\partial \dot{e}_X \partial \dot{e}_Y} & \frac{\partial r_X \partial r_Y}{\partial \dot{e}_Y \partial \dot{e}_X} \end{pmatrix}_{(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)})}} \quad (IV.9)$$

La matrice jacobine  $[J_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_X} & \frac{\partial r_X}{\partial \dot{e}_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{e}_Y} \end{bmatrix}_{(\dot{e}_X^{(k)}, \dot{e}_Y^{(k)})}$  du système (IV.8) à la  $k^{ème}$  itération est

généralement une matrice non symétrique qui peut éventuellement être singulière.

Le critère d'arrêt de la méthode de Newton-Raphson amortie, qui permet de mettre fin au processus itératif sans perte de précision de la solution, est le suivant

$$\left| r_X^{(k)}(t) \right| + \left| r_Y^{(k)}(t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad k < k_{max} \quad (IV.10-a)$$

Ce qui représente la norme de Laplace  $L_1$  du résidu.

La norme euclidienne  $L_2$  du résidu peut également être utilisée, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\begin{Bmatrix} r_X^{(k)}(t) \\ r_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} r_X^{(k)}(t) \\ r_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon \quad (IV.10-b)$$

où  $\varepsilon$  et  $k_{max}$  sont respectivement l'erreur de convergence tolérée prédéfinie et le nombre maximum d'itérations.

Les coefficients de la matrice jacobienne sont évalués numériquement soit par différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial r_X}{\partial e_X} \right)_k &\approx \frac{r_X(e_X^{(k)} + \delta, e_Y^{(k)}) - r_X(e_X^{(k)} - \delta, e_Y^{(k)})}{2\delta}; & \left( \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \right)_k &\approx \frac{r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} + \delta) - r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} - \delta)}{2\delta}; \\ \left( \frac{\partial r_Y}{\partial e_X} \right)_k &\approx \frac{r_Y(e_X^{(k)} + \delta, e_Y^{(k)}) - r_Y(e_X^{(k)} - \delta, e_Y^{(k)})}{2\delta}; & \left( \frac{\partial r_Y}{\partial e_Y} \right)_k &\approx \frac{r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} + \delta) - r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} - \delta)}{2\delta} \end{aligned} \quad (IV.11-a)$$

ou par différences finies décentrées :

$$\left( \frac{\partial r_X}{\partial e_X} \right)_k \approx \frac{r_X(e_X^{(k)} + \delta, e_Y^{(k)}) - r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}{\delta}; \quad \left( \frac{\partial r_X}{\partial e_Y} \right)_k \approx \frac{r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} + \delta) - r_X(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}{\delta};$$

$$\left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_X}\right)_k \approx \frac{r_Y(e_X^{(k)} + \delta, e_Y^{(k)}) - r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}{\delta}; \quad \left(\frac{\partial r_Y}{\partial e_Y}\right)_k \approx \frac{r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)} + \delta) - r_Y(e_X^{(k)}, e_Y^{(k)})}{\delta} \quad (\text{IV.11-b})$$

où  $\delta = 10^{-10}$  est la perturbation pour les calculs effectués en double précision.

Notons que la méthode de Newton-Raphson peut aussi être améliorée du point de vue temps et effort de calcul en utilisant la méthode de Von Mises étendue à un système de deux équations non linéaires [1]. Cette méthode consiste à calculer une seule fois les coefficients de la matrice Jacobienne par différences finies centrées ou décentrées; c'est – à-dire pour  $k=1$ .

### IV.3.1. Equation de Reynolds modifiée en régime dynamique

La pression  $p$  figurant dans les équations de mouvement (IV.2) est calculée à partir de l'équation de Reynolds transitoire (IV.12) :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[ h^3(1 + \xi_1) - 6h^2l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) - 12l^2(h - 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)) + \frac{12kH}{(1-\beta)} \right] \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ h^3(1 + \xi_1) - 6h^2l \xi_0 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) - 12l^2(h - 2l \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)) + \frac{12kH}{(1-\beta)} \right] \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 6\mu U \frac{\partial}{\partial \theta} [h(1 + \xi_0)] + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.12})$$

où :

$$h = C - e_X \cos\theta - e_Y \sin\theta + \mathcal{L} p \quad (\text{IV.13})$$

pour le palier de ligne ou palier principal de vilebrequin de moteur thermique.

$$\xi_0 = \frac{1}{\alpha_b \sigma + 1} = \frac{\sqrt{k}/\alpha_b}{h + \sqrt{k}/\alpha_b}; \quad \xi_1 = \frac{3\left(\frac{2k}{1-\beta} + h\frac{\sqrt{k}}{\alpha_b}\right)}{h\left(\frac{\sqrt{k}}{\alpha_b} + h\right)} \quad (\text{IV.14})$$

La vitesse d'écrasement du film s'exprime alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{e}_X \cos\theta - \dot{e}_Y \sin\theta + \mathcal{L} \frac{\partial p}{\partial t} \text{ pour le palier de vilebrequin de moteur thermique.}$$

$$\text{où } \dot{e}_X = \frac{de_X}{dt}; \quad \dot{e}_Y = \frac{de_Y}{dt}$$

ou encore  $\dot{e}_X = \frac{de_X}{d\theta_c} \frac{d\theta_c}{dt} = \omega_c e'_X$ ;  $\dot{e}_Y = \frac{de_Y}{d\theta_c} \frac{d\theta_c}{dt} = \omega_c e'_Y$  où  $\omega_c$  est la vitesse angulaire du vilebrequin, et  $\theta_c$  est l'angle de rotation du vilebrequin variant de 0 à  $4\pi$ .

La dérivée partielle  $\frac{\partial p}{\partial t}$  à l'instant,  $t$ , est calculée par différences finies décentrées comme suit :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta, z, t} \approx \frac{p(\theta, z, t) - p(\theta, z, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\text{ou encore } \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta, z, t} = \omega_c \left. \frac{\partial p}{\partial \theta_c} \right|_{\theta, z, \theta_c} \approx \omega_c \left( \frac{p(\theta, z, \theta_c) - p(\theta, z, \theta_c - \Delta \theta_c)}{\Delta \theta_c} \right)$$

## IV.4 Normalisation des équations gouvernantes

Pour le traitement numérique, il est commode de réécrire les équations de la dynamique des rotors (IV.2), l'équation de Reynolds modifiée transitoire (IV.12), et l'équation géométrique du film (IV.13) en utilisant les variables adimensionnelles du chapitre précédent (III.1).

### IV.4.1 Equations du palier de vilebrequin de machine alternative

- Equation de la dynamique des rotors normalisée

$$\begin{cases} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) \cos \theta d\theta d\bar{z} + \bar{W}_X(t) = \frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \frac{\ddot{\varepsilon}_X}{\omega_c^2} = \bar{m} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \varepsilon_X'' \\ - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) \sin \theta d\theta d\bar{z} + \bar{W}_Y(t) = \frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \frac{\ddot{\varepsilon}_Y}{\omega_c^2} = \bar{m} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \varepsilon_Y'' \end{cases} \quad (\text{IV.15-a})$$

avec  $(\bar{W}_X, \bar{W}_Y) = \frac{(W_X, W_Y)}{\mu_0 \omega_c R L \left( \frac{R}{C} \right)^2}$ ;  $\frac{C}{R}$  est le jeu relatif du palier dont la valeur est de l'ordre de

$10^{-3}$ ; et  $(\ddot{\varepsilon}_X, \ddot{\varepsilon}_Y) = \frac{d^2}{dt^2}(\varepsilon_X, \varepsilon_Y)$  qui sont les accélérations du centre du tourillon de vilebrequin.

Rappelons que les composantes de la charge appliquée au palier principal  $(W_X, W_Y)$  sont déterminées à partir d'une analyse cinématique et dynamique du système piston-bielle-manivelle du moteur.

L'équation (IV.15-a) s'écrit sous forme de résidu comme suit :

$$\begin{cases} r_X(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) (-\cos \theta) d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_X(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y)} + \frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \left( \frac{\dot{\varepsilon}_X(t) - \dot{\varepsilon}_X(t - \Delta t)}{\omega_c^2 \Delta t} \right) \\ r_Y(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) (-\sin \theta) d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_Y(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y)} + \frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left( \frac{C}{R} \right)^3 \left( \frac{\dot{\varepsilon}_Y(t) - \dot{\varepsilon}_Y(t - \Delta t)}{\omega_c^2 \Delta t} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.15-b})$$

- Equation de Reynolds normalisée

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}] + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}] = 6 \bar{\mu}(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} [\bar{h}(1 + \xi_0)] + 12 \bar{\mu}(\phi) \frac{\partial \bar{h}}{\omega_c \partial t} \quad (\text{IV.16})$$

où :

$$\bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) = \bar{h}^3(1 + \xi_1) - 12\bar{l}^2 \left[ \bar{h} - 2\bar{l} \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) \right] - 6\bar{h}^2\bar{l} \xi_0 \tanh\left(\frac{\bar{h}}{2\bar{l}}\right) + \frac{12K\bar{H}}{(1-\beta)} \quad (\text{IV.17-a})$$

$$\bar{h} = \frac{h}{c} = 1 - \varepsilon_X \cos\theta - \varepsilon_Y \sin\theta + \bar{\mathcal{L}} \bar{p} \quad (\text{IV.17-b})$$

Compte tenu de l'équation (IV.17-b), l'équation de Reynolds modifiée prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} \right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{G}(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k}) \frac{\partial\bar{p}}{\partial z} \right] = 6\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial\theta} [\bar{h}(1 + \xi_0)] + 12\bar{\mu}(\phi) \left( -\varepsilon_X \cos\theta - \varepsilon_Y \sin\theta + \bar{\mathcal{L}} \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} \right) / \omega_c \quad (\text{IV.18})$$

où  $\omega_c$  est la vitesse angulaire du vilebrequin  $\omega_c = \frac{2\pi n_j}{60}$  ;  $n_j$  = vitesse de rotor du tourillon en (rpm).

Les équations de Reynolds normalisées ci-dessus écrites dans le cas des deux paliers de machines tournante et alternative dont les conditions de fonctionnement sont complètement différentes sont résolues par la méthode des différences finies (*Voir le chapitre précédent pour tous les détails relatifs à la discrétisation spatiale de l'équation de Reynolds*).

Dans le cas du palier de machine tournante, la charge dynamique tournante appliquée au palier (force due au balourd) est constante en module,  $|\vec{W}| = ma\Omega^2$ , tandis que la charge dynamique appliquée au palier de vilebrequin varie en module et en direction durant tout le cycle thermodynamique du moteur thermique ; c'est-à-dire  $0^\circ \leq \theta_c \leq 720^\circ$  correspondant à deux tours de vilebrequin comme il est illustré sur la **figure IV.6**.

L'équation de Reynolds transitoire discrétisée s'écrit en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec facteur de sur-relaxation :

$$\bar{p}_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega_{GS})\bar{p}_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega_{GS}}{a_P} \left( a_W \bar{p}_{i-1,j}^{(n+1)} + a_E \bar{p}_{i+1,j}^{(n)} + a_S \bar{p}_{i,j-1}^{(n+1)} + a_N \bar{p}_{i,j+1}^{(n)} - a_{RHS} \right) \quad (\text{IV.19})$$

où  $n$  est le compteur d'itérations de la méthode itérative de Gauss-Seidel,

$$a_{RHS} = 6\bar{\mu}(\phi) \left( \frac{\bar{h}(1+\xi_0)|_{i+1,j,t} - \bar{h}(1+\xi_0)|_{i-1,j,t}}{2\Delta\theta} \right) + 12\bar{\mu}(\phi) \left( -\dot{\varepsilon}_X(t) \cos\theta - \dot{\varepsilon}_Y(t) \sin\theta + \bar{\mathcal{L}} \left( \frac{\bar{p}_{i,j,t} - \bar{p}_{i,j,t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \right) / \omega_c$$

dans le cas du palier de vilebrequin

Notons que les expressions des coefficients  $a_P$ ,  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ , et  $a_N$  sont identiques à ceux établis dans le chapitre précédent.

## IV.5 Procédure de résolution du problème de lubrification

### PEHD inverse en régime dynamique

Les étapes séquentielles de la procédure d'obtention d'une solution numérique au problème PEHD inverse non linéaire et transitoire gouverné par les équations (IV.15-b), (IV.17-b), (IV.18) pour le palier de ligne de machine alternative sont présentées ci-dessous :

#### Etape 1: Prétraitement (Pre-processing step)

**1.1**-Lecture des données :

Géométrie du palier, conditions de fonctionnement, propriétés physiques du lubrifiant et de la couche poreuse, le chargement appliqué au palier, caractéristiques du maillage, paramètres de calculs.

**1.2**-Introduction des conditions initiales à  $t = t_0$  (ou  $\theta_c = \theta_{c0}$ ) :  
 $\dot{\varepsilon}_X(t_0); \dot{\varepsilon}_Y(t_0); \varepsilon_X(t_0); \varepsilon_Y(t_0); \bar{p}_{ij}(t_0) = \bar{p}(\theta_i, \bar{z}_j, t_0) = 0$

**1.3**-Initialisation de la pression pour la méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation :  $\bar{p}_{ij}^{(old)} = 0$ .

#### Etape 2: Traitement (Processing step)

Pour chaque pas de temps,  $t$ , variant de  $t_0$  à  $t_{max}$  ou pour un angle de rotation du vilebrequin,  $\theta_c$ , variant de 0 à 1440 degrés (deux cycles de charge), faire les séquences suivantes :

**2.1**-Initialisation du compteur d'itérations  $k$  et choix des estimés initiaux pour la méthode itérative de Newton-Raphson :  $k = 0$  ;  $\varepsilon_X^{(k)} = \varepsilon_X(t)$ ;  $\dot{\varepsilon}_Y^{(k)} = \dot{\varepsilon}_Y(t)$

**2.2**-Calcul de l'épaisseur du film  $\bar{h}_{ij}(t)$  et de la pression  $\bar{p}_{ij}(t)$  à partir de la résolution par la méthode itérative du point fixe de l'équation de Reynolds modifiée (IV.23) couplée à l'équation géométrique du film  $\bar{h}_{ij}(t) = 1 - \varepsilon_X(t) \cos\theta_i - \varepsilon_Y(t) \sin\theta_i + \bar{L} \bar{p}_{ij}(t)$

**2.3**-Calcul de la réaction du film  $\bar{F}_X(t)$  et  $\bar{F}_Y(t)$  et des résidus :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_X(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) (-\cos\theta) d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_X(t)} + \underbrace{\frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left(\frac{C}{R}\right)^3}_{\bar{m}} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_X(t) - \dot{\varepsilon}_X(t - \Delta t)}{\omega_c^2 \Delta t} \right) \\ r_Y(\dot{\varepsilon}_X, \dot{\varepsilon}_Y) = - \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{p}(\theta, \bar{z}, t) (-\sin\theta) d\theta d\bar{z}}_{\bar{F}_Y(t)} + \underbrace{\frac{m \omega_c}{\mu_0 L} \left(\frac{C}{R}\right)^3}_{\bar{m}} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_Y(t) - \dot{\varepsilon}_Y(t - \Delta t)}{\omega_c^2 \Delta t} \right) \end{array} \right.$$

**2.4**-Construction de la matrice Jacobienne  $[J_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \dot{\varepsilon}_X} & \frac{\partial r_X}{\partial \dot{\varepsilon}_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{\varepsilon}_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{\varepsilon}_Y} \end{bmatrix}_{(\dot{\varepsilon}_X^{(k)}, \dot{\varepsilon}_Y^{(k)})}$  par différences

finies décentrées (Forward difference) ou centrées (Central difference).

**2.5**-Résolution du système d'équations algébriques :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_X}{\partial \dot{\varepsilon}_X} & \frac{\partial r_X}{\partial \dot{\varepsilon}_Y} \\ \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{\varepsilon}_X} & \frac{\partial r_Y}{\partial \dot{\varepsilon}_Y} \end{bmatrix}_{(\dot{\varepsilon}_X^{(k)}, \dot{\varepsilon}_Y^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta \dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} r_X(\dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t), \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t)) \\ r_Y(\dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t), \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t)) \end{Bmatrix} \text{ pour } \begin{Bmatrix} \delta \dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$$

**2.6**-Mise à jour de la solution selon l'algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_X^{(k+1)}(t) \\ \dot{\varepsilon}_Y^{(k+1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t) \\ \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix} + \omega_{NR} \begin{Bmatrix} \delta \dot{\varepsilon}_X^{(k)}(t) \\ \delta \dot{\varepsilon}_Y^{(k)}(t) \end{Bmatrix}$$

**2.7**-Test de convergence de l'algorithme de Newton Raphson sur la norme euclidienne

$$L_2 : \sqrt{r_X^2 + r_Y^2} < \varepsilon_{tol} \text{ où } \varepsilon_{tol} \text{ est l'erreur tolérée.}$$

Si le test de convergence n'est pas satisfait, incrémenter le compteur d'itérations  $k$  ( $k \leftarrow k + 1$ ), et retourner à l'étape **2.2** pour faire une autre itération tant que  $k < k_{max}$ .

**2.8**-Prédiction des nouvelles valeurs des composantes de l'excentricité relative en utilisant le schéma d'Euler simple pour  $t = t_0$  :

$$\varepsilon_X(t + \Delta t) = \varepsilon_X(t) + \Delta t \dot{\varepsilon}_X(t) ; \varepsilon_Y(t + \Delta t) = \varepsilon_Y(t) + \Delta t \dot{\varepsilon}_Y(t)$$

et le schéma de Runge-Kutta du second ordre pour  $t > t_0$  :

$$\varepsilon_X(t + \Delta t) = \varepsilon_X(t) + \Delta t \left( \frac{\dot{\varepsilon}_X(t) + \dot{\varepsilon}_X(t - \Delta t)}{2} \right) ; \varepsilon_Y(t + \Delta t) = \varepsilon_Y(t) + \Delta t \left( \frac{\dot{\varepsilon}_Y(t) + \dot{\varepsilon}_Y(t - \Delta t)}{2} \right)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps en secondes.

**2.9**-Calculer les performances hydrodynamiques instantanées du palier et stocker les résultats pour l'étape post-traitement (post-processing step).

**2.10**- Tant que  $t < t_{max}$  ou  $\theta_c < 1440^\circ$ , poser  $t \leftarrow t + \Delta t$  ou  $\theta_c \leftarrow \theta_c + \Delta\theta_c$  et retourner à l'étiquette **2.1**.

**Etape 3: Post-traitement (Traitement graphique des résultats).**

## IV.6. Validation du code de calcul

Il n'existe pas de données expérimentales obtenues à partir de bancs d'essais de paliers disponibles pour les paliers de vilebrequin fonctionnant avec un nanolubrifiant à couple de contraintes non Newtonien. Par conséquent, le modèle PEHD développé est validé en

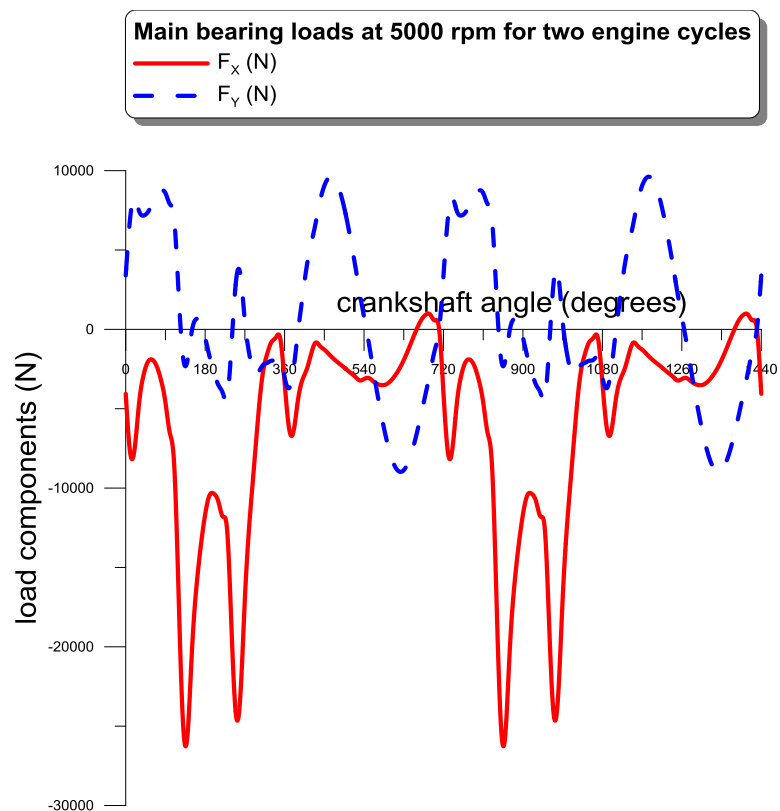


comparant les résultats obtenus par le modèle avec ceux publiés dans la littérature technique par Paranjpe et al [2], et Hirani et al [3] pour un palier principal de vilebrequin de moteur à essence ou à allumage commandé ou spark ignition engine (General Motors Corporation) utilisant un fluide Newtonien comme lubrifiant.

Les données relatives à la géométrie, les conditions de fonctionnement du palier ainsi que les propriétés physiques du lubrifiant sont reportées dans le [tableau IV.1](#). La [figure IV.7](#) représente le diagramme de charge agissant sur un palier principal du vilebrequin pour une vitesse de rotation du moteur  $n_j = 5000 \text{ rpm}$ . Ce diagramme est obtenu par interpolation à l'aide de splines cubiques pour un pas angulaire de vilebrequin  $\Delta\theta_c = 1 \text{ degré}$  à partir des données indiquées dans le [tableau IV.2](#). Les deux pics de la composante de la charge  $F_Y$  survenant à des angles de vilebrequin,  $\theta_c = 135$  et  $255 \text{ degrés}$  environ, sont causés par l'allumage des cylindres voisins. Les résultats publiés dans la référence [2] et reportés dans le [tableau IV.3](#) sont obtenus par deux approches numériques basées sur des formulations complètement différentes, à savoir : une approche basée sur la résolution de l'équation de Reynolds par la méthode des éléments finis moyennant les conditions limites de Swift-Stieber [4,5] ou conditions de Reynolds (FEJOB) et une deuxième approche conservative formulée à partir de l'algorithme de cavitation d'Elrod-Adams [6,7] dénommée (COMJOB). Le code de calcul développé a été exécuté en utilisant une grille des différences finies dont les caractéristiques sont :  $N = 121, M = 41$  où  $N$  et  $M$  sont respectivement les nombres de nœuds suivant  $\theta$  et  $z$ . On peut observer de très faibles écarts entre les résultats du code de calcul développé et ceux obtenus par la méthode des éléments finis (FEJOB). Cependant, la confrontation des résultats du code de calcul avec les résultats obtenus par l'approche (COMJOB) montre des écarts importants dus principalement à l'emploi du modèle de cavitation conservatif d'Elrod-Adams qui permet d'assurer la conservation de débit entre les zones actives et cavité du palier. Autrement dit, le modèle de Swift-Stieber couramment appelé modèle de Reynolds ne permet pas de déterminer la frontière de reformation du film lubrifiant.

**Tableau IV. 1. Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier de ligne principal de Paranjpe [2].**

Paramètre	Symbole	Unité SI	Valeur
Rayon de l'arbre	$R=D/2$	<i>m</i>	<b>0.036</b>
Longueur du coussinet	<i>L</i>	<i>m</i>	<b>0.021</b>
Jeu radial du palier	<i>C</i>	<i>m</i>	<b><math>36 \times 10^{-6}</math></b>
Vitesse de rotation du vilebrequin	$n_j$	<i>rpm</i>	<b>5000</b>
Viscosité dynamique du fluide lubrifiant	$\mu$	<i>Pa.s</i>	<b>0.00496</b>



**Fig. IV. 7 Représentation cartésiennes du chargement dynamique sur le palier principal du vilebrequin de Paranjpe [2]**

Il est à conclure qu'il convient d'utiliser le modèle de cavitation d'Elrod-Adams afin de mieux prédire les performances hydrodynamiques lors de la conception des paliers à film d'huile.

Tableau IV. 2. Valeurs numériques du chargement dynamique exercé sur un palier principal de vilebrequin tournant à 5000 rpm pour un cycle moteur [2, 3].

<b>Crank angle <math>\theta_c</math> (deg.)</b>	<b><math>W_X</math> (N)</b>	<b><math>W_Y</math> (N)</b>	<b>Crank angle <math>\theta_c</math> (deg.)</b>	<b><math>W_X</math> (N)</b>	<b><math>W_Y</math> (N)</b>	<b>Crank angle <math>\theta_c</math> (deg.)</b>	<b><math>W_X</math> (N)</b>	<b><math>W_Y</math> (N)</b>
0	3396	-4062	250	3074	-24329	500	7037	-2520
10	7003	-7750	260	3433	-22971	510	5599	-2755
20	8287	-7567	270	504	-16973	520	4011	-2979
30	7476	-4726	280	-1556	-12316	530	2329	-3217
40	7169	-2926	290	-2733	-8884	540	787	-3132
50	7379	-2060	300	-2745	-5530	550	-734	-3059
60	7890	-1909	310	-2280	-2877	560	-2412	-3254
70	8434	-2307	320	-2119	-1591	570	-4029	-3441
80	8739	-3198	330	-1975	-810	580	-5520	-3516
90	8586	-4604	340	-1914	-520	590	-6833	-3466
100	7894	-6531	350	-1827	-566	600	-7901	-3257
110	6899	-8611	360	-3031	-3331	610	-8634	-2923
120	2195	-16901	370	-3707	-6218	620	-8961	-2485
130	-1783	-24879	380	-2554	-6451	630	-8872	-1934
140	-1967	-25561	390	-228	-4506	640	-8385	-1298
150	-71	-20288	400	1926	-3206	650	-7561	-608
160	655	-16297	410	3940	-1559	660	-6489	57
170	478	-13672	420	5367	-2529	670	-5273	610
180	-509	-11663	430	6649	-840	680	-3993	929
190	-1711	-10449	440	8056	-1048	690	-2683	929
200	-2699	-10360	450	9046	-1271	700	-1336	562
210	-3508	-10859	460	9554	-1547	710	-13	44
220	-4019	-11806	470	9559	-1823	720	3396	-4062
230	-4258	-12725	480	9104	-2068			
240	-865	-19057	490	8240	-2285			

**Tableau IV. 3. Comparaison des résultats calculés par le code développé et les résultats obtenus par Paranjpe [3]**

	La plus grande valeur des Pics de pression (MPa)	La plus petite valeur de l'épaisseur du film (microns)
Paranjpe et al [2] Coussinet à rainure semi-circonférentielle ( $p_s = 2.758 \times 10^5 Pa$ ) COMJOB (Mass Conserving Algorithm) FEJOB (Swift-Stieber cavitation condition)	103.3 91.5	1.88 1.69
Hirani et al [3] Méthode de calcul rapide simplifiée	94.07	1.86
Code de calcul développé (Présente étude)	94.274	1.6898
Ecarts entre les résultats du code de calcul et [3]	0.21 %	9.14 %
<u>Ecarts entre les résultats du code de calcul et [2] (FEJOB)</u>	<u>3.03 %</u>	<u>0.59 %</u>
Ecarts entre les résultats du code de calcul et [2] (COMJOB)	8.73 %	10.63 %

## IV.7. Etude paramétrique

Après avoir validé le code de calcul développé avec succès, on se propose maintenant de mener une étude paramétrique à l'aide de ce code sur le même palier principal de vilebrequin de Paranjpe dont les données géométriques et les conditions de fonctionnement sont reportées dans le **tableau IV. 1**. Les calculs sont effectués dans le cas d'un palier à coussinet poreux rigide ( $H = 1 mm$ ,  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $E = \infty$ ) lubrifié par un nanofluide contenant des NPs sphériques de type Fullerènes ( $IF - MoS_2$  ou  $IF - WS_2$ ) sous forme d'agglomérats dont la fraction volumique est  $\phi = 20 \%$ . Il convient de noter

que le code de calcul peut aussi être utilisé pour l'étude du palier à coussinet poro-élastique. Les forces d'inertie sont prises en considération dans tous les cas simulés. Le coefficient de glissement de Joseph-Beavers, le coefficient de pénétration, et la masse du vilebrequin affectée au palier principal valent respectivement  $\alpha_b = 0.10$ ,  $\beta = \frac{l^2}{k} = 0.$ , et  $m = 5 \text{ kg}$ . Le choix d'une valeur nulle pour  $\beta$  permet aux agglomérats de NPs de pénétrer facilement dans les pores du coussinet. La grille des différences finies utilisée dans les calculs comprend  $(40 \times 40)$  mailles ou cellules.

### IV.7.1. Etude de l'influence de la taille caractéristique des NPs sur le comportement dynamique d'un palier poreux de vilebrequin

La [figure IV.8](#) montre l'influence de la taille caractéristique des agglomérats de NPs sur les trajectoires décrites par le centre du tourillon à l'intérieur du coussinet correspondant au régime établi. La trajectoire représentée en trait continu correspond au cas du fluide de base sans nano-additifs dont le comportement est Newtonien. On observe une contraction des orbites avec la taille des agglomérats de NPs. Ceci éloigne le risque du contact destructeur métal-métal par le déplacement des orbites vers le centre du coussinet et l'augmentation par conséquent de l'épaisseur minimale du film comme il est illustré sur la [figure IV.9](#). D'autre part, on observe sur la [figure IV. 10](#) que le pic de pression hydrodynamique n'est pas sensiblement affecté par la taille des agglomérats et ce pour tout le cycle de chargement.

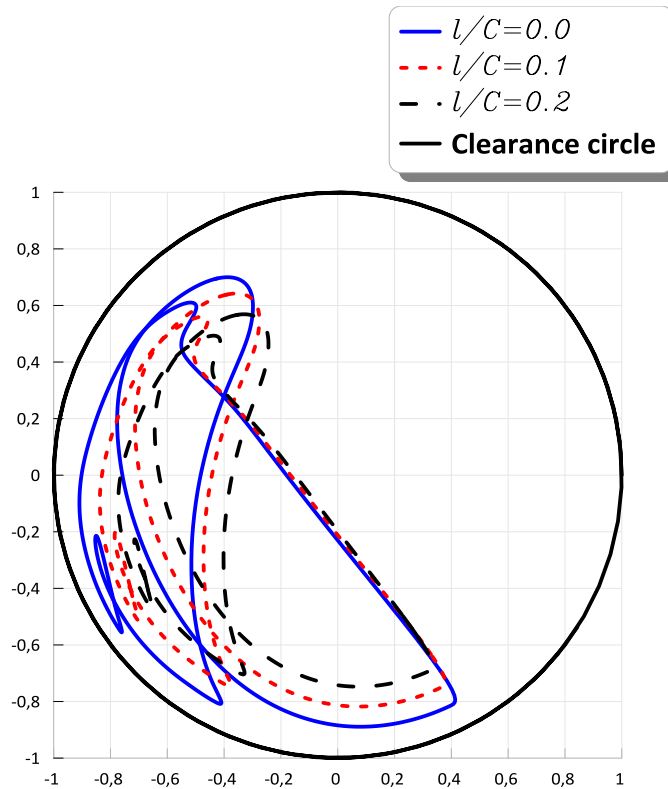


Fig. IV. 8 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la taille caractéristique des agglomérats de NPs  $l$ .

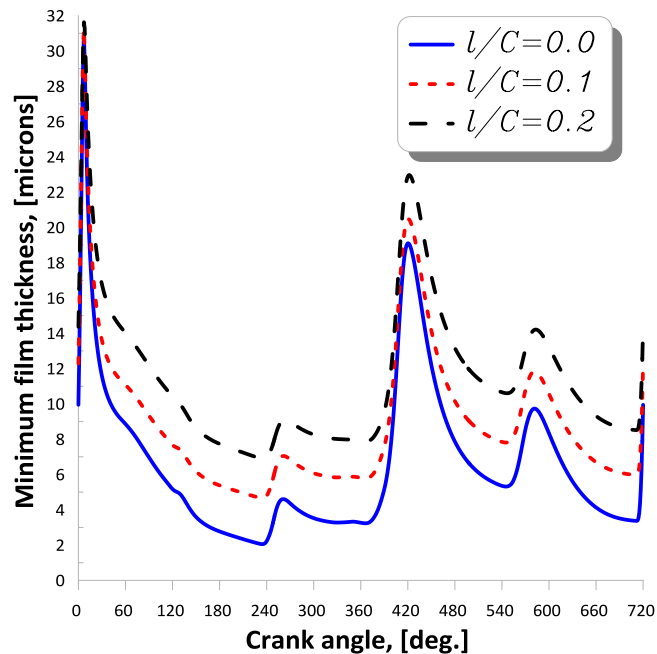
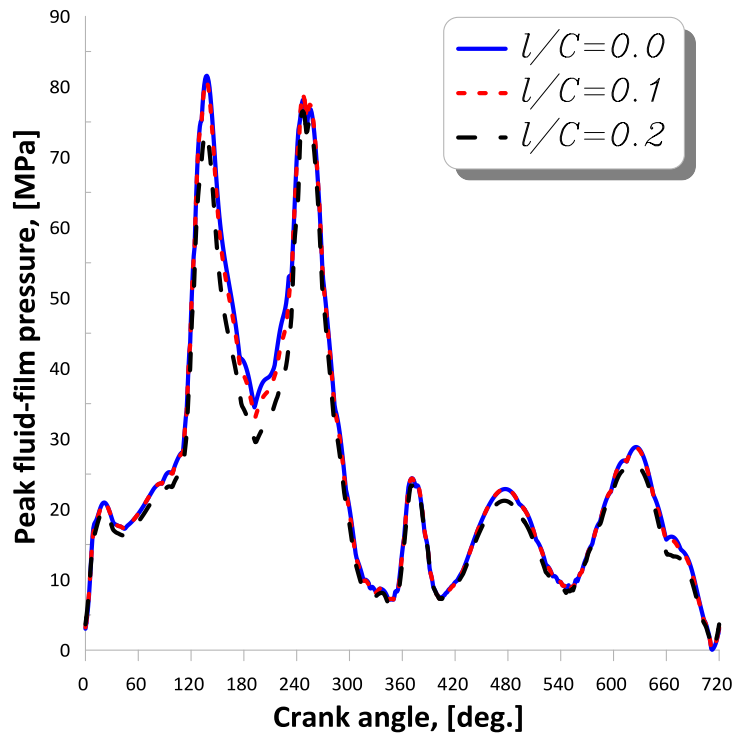


Fig. IV. 9 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_c$  calculée pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\phi = 20\%$ , et pour différentes valeurs de la taille caractéristique des agglomérats de NPs  $l$ .



**Fig. IV. 10 Evolution du pic de pression en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_c$  calculé pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\phi = 20\%$ , et pour différentes valeurs de la taille caractéristique des agglomérats de NPs  $l$ .**

#### **IV.7.2. Etude des effets de la concentration des agglomérats de NPs sur le comportement dynamique d'un palier poreux de vilebrequin**

Les figures IV.11 à IV.13 donnent les effets de la concentration ou de la fraction volumique des agglomérats de NPs sur les orbites du centre du tourillon, l'épaisseur minimale, et le pic de pression. Les résultats révèlent les mêmes tendances que celles observées précédemment lors de l'étude de l'influence de la taille des NPs.

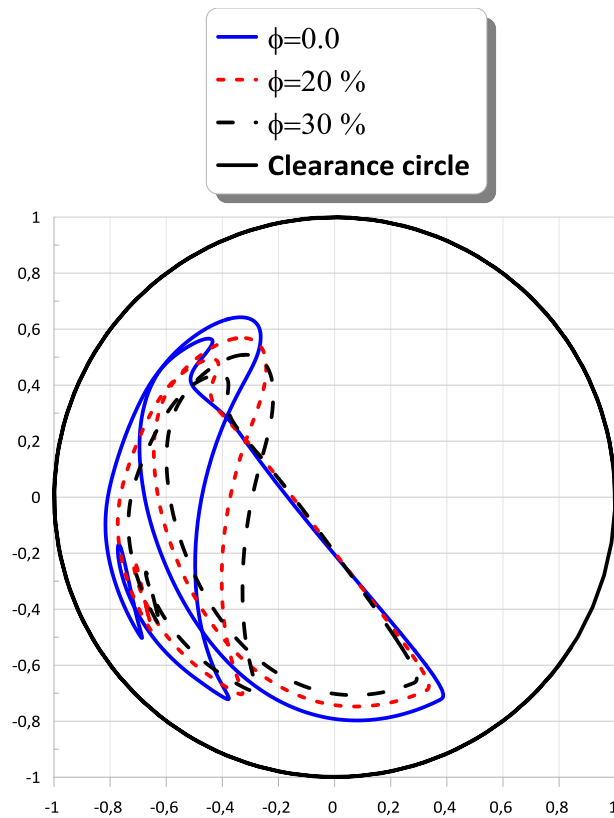


Fig. IV. 11 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\bar{l} = 0.2$  et différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs  $\phi$ .

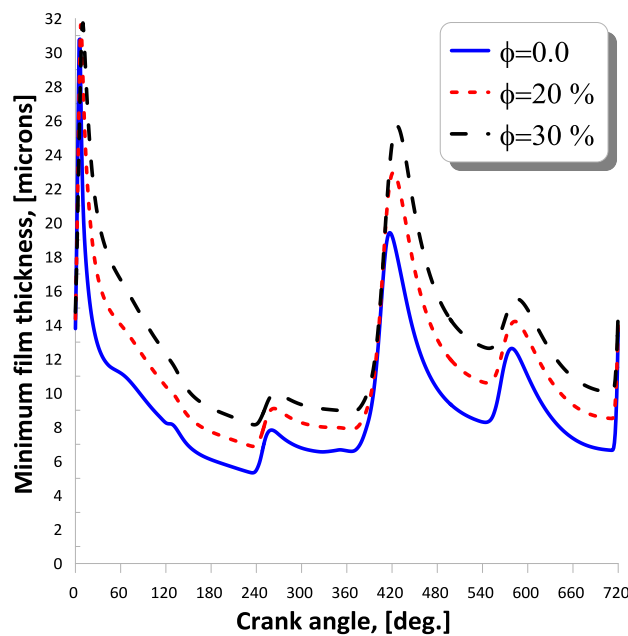
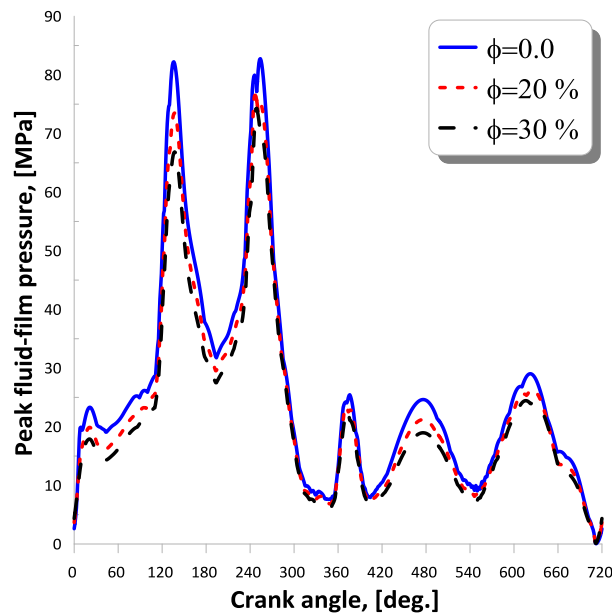


Fig. IV. 12 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_c$  calculée pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\bar{l} = 0.2$ , et pour différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs  $\phi$ .





**Fig. IV. 13 Evolution du pic de pression hydrodynamique en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_c$  calculée pour  $k = 10^{-15} m^2$ ,  $\bar{l} = 0.2$ , et pour différentes valeurs de la fraction volumique des agglomérats de NPs  $\phi$ .**

### IV.7.3. Etude de l'impact de la perméabilité sur le comportement dynamique d'un palier à coussinet poreux

La [figure IV.14](#) présente l'effet de la porosité du coussinet sur les trajectoires stationnaires du centre du tourillon à l'intérieur du coussinet. La trajectoire représentée en trait continu correspond au cas du coussinet imperméable. On remarque que l'excentricité de fonctionnement augmente avec la perméabilité ce qui pourrait causer un contact métal-métal. L'augmentation de l'excentration entraîne bien évidemment une diminution de l'épaisseur minimale du film pour un angle de vilebrequin  $\theta_c = 240$  degrés environ pour lequel correspond un des deux pics de charge [figure IV.15](#). Ceci s'explique par le fait que pour les valeurs élevées de la perméabilité  $k$ , le fluide s'infiltré plus facilement à l'intérieur des pores ce qui diminue la quantité de fluide dans le film. De plus, on peut observer également sur la [figure IV.16](#) que le pic de pression hydrodynamique n'est pas sensiblement affecté par la porosité du coussinet et ce pour tout le cycle thermodynamique du moteur.

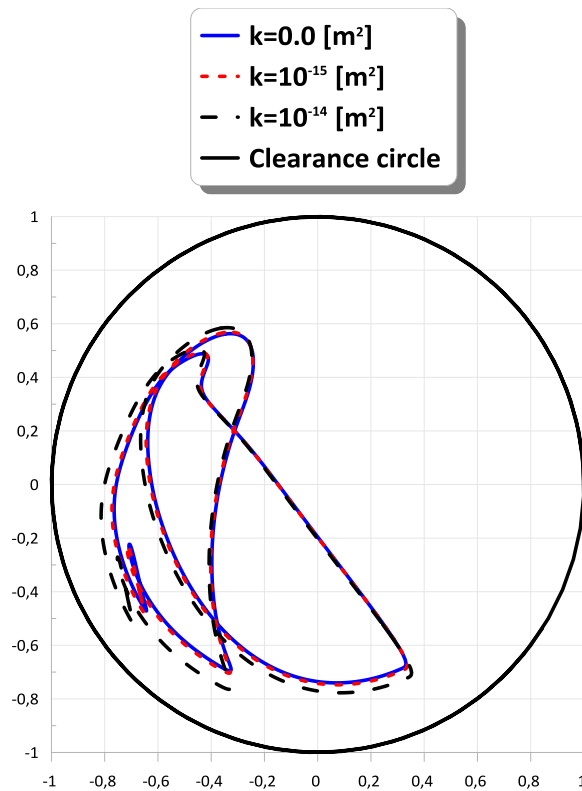


Fig. IV. 14 Trajectoires stationnaires du centre du tourillon calculées pour  $\bar{l} = 0.2$ ,  $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet  $k$ .

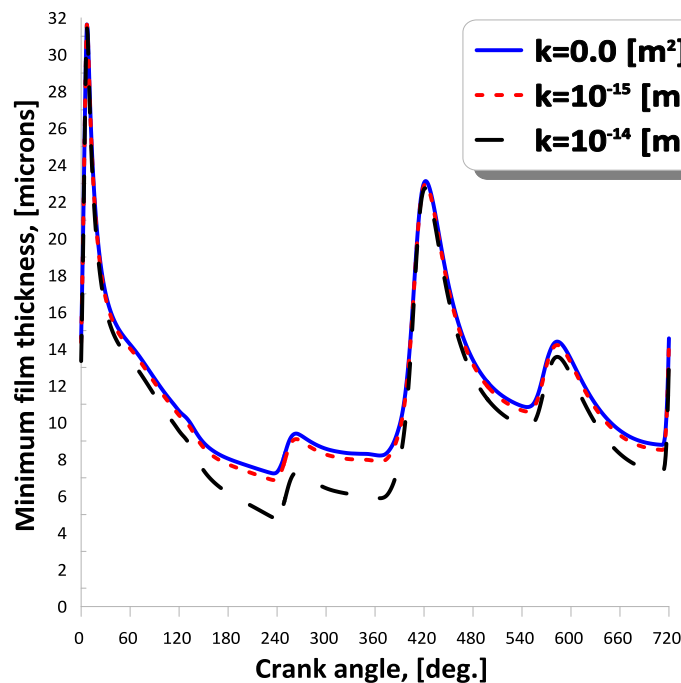


Fig. IV. 15 Evolution de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin calculée pour  $\bar{l} = 0.2$ ,  $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet  $k$ .

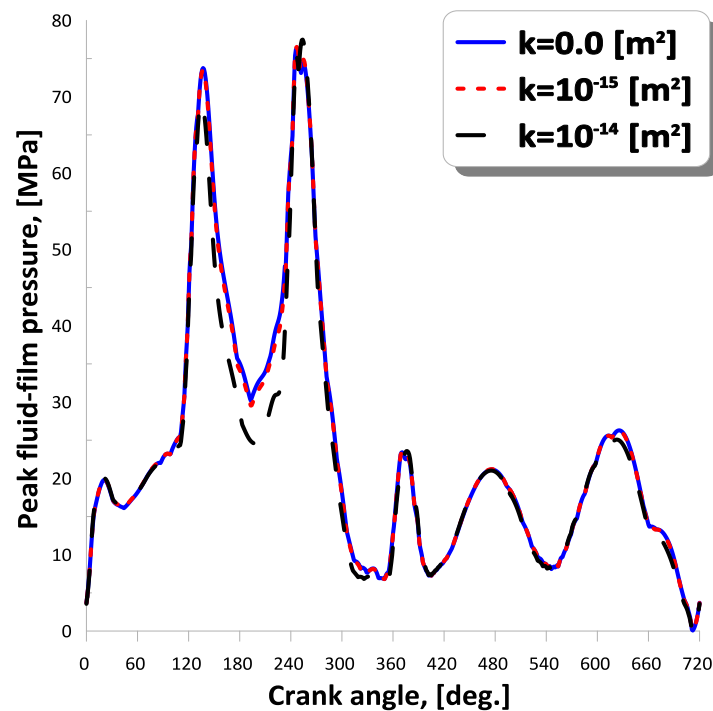


Fig. IV. 16 Evolution du pic de pression en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin calculé pour  $\bar{l} = 0.2$ ,  $\phi = 20\%$ , et différentes valeurs de la perméabilité du coussinet  $k$ .

## IV.8. Conclusion

Au cours de ce chapitre, on a présenté l'analyse dynamique non linéaire complète de paliers poroélastiques soumis soit à des charges tournantes (force due au balourd) ou des charges qui varient en module et en direction (forces dues à l'explosion du mélange air-carburant et à l'inertie des solides en mouvement). L'étude paramétrique a été focalisée sur un palier de vilebrequin d'un moteur à essence General Motors Corp. utilisant un nanofluide comme lubrifiant. La méthode de Newton-Raphson améliorée a été appliquée pour la résolution par itérations des équations de mouvement du vilebrequin. D'autre part, le problème de couplage de l'équation de Reynolds modifiée avec l'équation géométrique du film dans le cas du palier poro-élastique a été résolu numériquement par la méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation.

Le code de calcul MS-Fortran 90 a été validé avec succès en confrontant les résultats obtenus par le code avec ceux publiés dans littérature technique. L'étude paramétrique effectuée a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de la taille caractéristique, de la concentration des NPs dispersées dans le fluide de base, et de la

porosité des revêtements de surface sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier principal de vilebrequin. Les résultats pertinents de l'analyse ont montré que la taille et la concentration des NPs permettent d'augmenter l'épaisseur minimale du film lubrifiant. En revanche, la porosité du revêtement de surface joue un rôle négatif vis-à-vis de l'épaisseur minimale du film en raison de la migration d'une partie du fluide dans le milieu poreux.

## IV.9. Références bibliographiques du chapitre IV

- [1] A. GOURDIN, M. BOUMHRAT, **Méthodes numériques appliquées**, Office des Publications Universitaires.
- [2] PARANJPE, Rohit S. et GOENKA, Pawan K. **Analysis of crankshaft bearings using a mass conserving algorithm**. Tribology Transactions, 1990, vol. 33, no 3, p. 333-344.
- [3] HIRANI, H., ATHRE, K., et BISWAS, S. **Rapid and globally convergent method for dynamically loaded journal bearing design**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 1998, vol. 212, no 3, p. 207-214
- [4] SWIFT H. W. The stability of lubricating films in journal bearings. Proc. Inst. Civil Eng., 233. Pt 1, pp. 267-322, 1931.
- [5] STIEBER W. Das Schwimmlager. VDI, 1933, Berlin.
- [6] H.G. Elrod A cavitation algorithm ASME J. Lubr. Technol., 103 (1981), pp. 350-354
- [7] H.G. Elrod, M.L. Adams, A computer program for cavitation and related phenomena in lubrication, Proceedings - Mech. Eng. Publ. Ltd (1975), pp. 37-42.

# Conclusion générale

L'objectif principal du travail de recherche effectué dans le cadre de ce projet de fin d'études de master était d'analyser rigoureusement le comportement élastohydrodynamique des paliers à coussinet poreux de dimension finie fonctionnant en régime isotherme et impliquant des écoulements de nanolubrifiants rhéologiquement complexes modélisés comme des fluides polaires non Newtoniens à couples de contraintes. Il s'agissait de mettre en place des codes de simulation numérique efficaces d'aide à la conception de paliers poreux. Le choix de ce modèle de fluide permet de prendre en considération la taille caractéristique des nanoparticules (NPs) ajoutées au lubrifiant de base. Ce travail comprend deux parties essentielles : la première partie s'intéressait à l'étude du comportement statique du palier poreux fonctionnant à excentricité imposée (problème de lubrification direct), la seconde était dévolue à l'analyse du comportement dynamique d'un palier principal de vilebrequin dynamiquement chargé (problème inverse). La résolution du problème inverse en régime dynamique nécessitait l'emploi de la méthode itérative de Newton-Raphson améliorée pour déterminer les vitesses du centre du tourillon à partir desquels sont déduits les déplacements par la méthode de Runge-Kutta du second ordre. D'autre part, le problème de couplage fluide-structure décrit par l'équation de Reynolds modifiée, l'équation géométrique du film, et les équations de mouvement du vilebrequin est résolu de façon itérative à l'aide de la méthode du point fixe avec coefficient de sous-relaxation.

L'analyse statique et dynamique du palier poreux a conduit aux conclusions suivantes :

### *Partie statique : Excentricité imposée*

- la taille et la concentration des NPs améliorent la pression générée dans le film et donc la capacité de charge du palier,
- l'angle de calage, le débit de fuite, et le coefficient de frottement diminuent avec la taille et la concentration des NPs,
- la pression hydrodynamique, la capacité de charge, et le débit de fuite diminuent avec la perméabilité de la couche poreuse,
- la perméabilité fait augmenter l'angle de calage et le coefficient de frottement.

## **Conclusion générale**

---

-le profil de pression, la géométrie du film, et l'angle de cavitation sont sensiblement affectés par l'élasticité de l'interface surtout pour les excentricités élevées et/ou les faibles modules d'élasticité.

### *Partie dynamique : Charge dynamique imposée*

-la taille et la concentration des NPs font contracter les orbites stationnaires ce qui entraîne une augmentation de l'épaisseur minimale du film,  
-la perméabilité fait augmenter l'excentricité de fonctionnement ce qui entraîne une diminution de l'épaisseur du film.

On peut conclure aussi que la méthode itérative de Newton-Raphson dans le cas dynamique a été améliorée en calculant une seule fois la matrice Jacobienne par différences finies centrées. En effet, cette amélioration a permis de réduire le temps de calcul CPU d'environ 36%.

### **Les prolongements de cette étude pouvant être envisagés sont :**

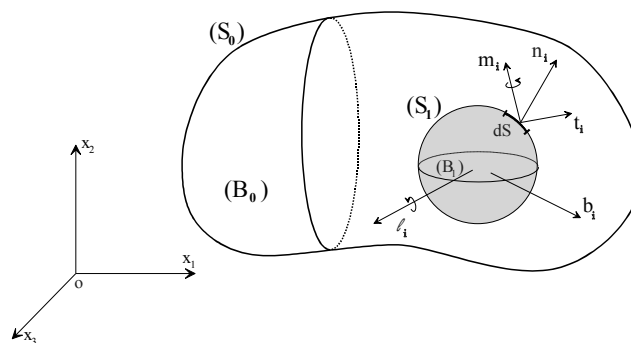
- Utilisation de la loi de Darcy-Brinkman pour prendre en considération les effets visqueux dans le milieu poreux,
- Prise en considération des effets thermiques et du phénomène de cavitation
- Etude du comportement dynamique des lignes d'arbres de turbomachines.

# ANNEXES

## Annexe A

### Equations générales de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes et analyse dimensionnelle

Lorsque les forces du volume  $b_i$  et les couples de volume  $\ell_i$  par unité de masse du continuum sont considérés [figure A1](#), le mouvement du fluide à couple de contraintes compressible isotrope et homogène est régi par les équations suivantes:



**Fig. A1** : Bilan des forces et des couples agissant sur un volume élémentaire selon la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.

- **Equation de continuité** : Considérons une partie arbitraire d'un continuum (milieu fluide compressible) occupant un volume fixe ( $V$ ) délimité par la surface ( $S$ ) à la configuration actuelle à l'instant  $t$ . L'équation de continuité globale est :



$$\int_S \rho v_i n_i dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (A1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du continuum et  $v_i$  le champ de vitesse du continuum en coordonnées cartésiennes. En appliquant le théorème de divergence de Gauss-Ostrogradsky, et en remarquant que le volume ( $V$ ) est arbitraire, on obtient la forme différentielle ou locale de l'équation de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (A2)$$

où  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  représente la dérivée matérielle ou particulaire ou encore totale et  $i,j=1,2,3$

- **Equations du mouvement :**

Les équations de bilan de mouvement linéaire et angulaire sont :

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV \quad \text{avec } t_i^{(n)} = T_{ji} n_j \quad (A3-a)$$

ou

$$\int_S \vec{t}(M, \vec{n}) dS + \int_m \vec{b} dm = \frac{D}{Dt} \int_m \vec{v} dm \quad (A3-b)$$

avec  $dm = \rho dV$ ;  $\vec{t}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, \vec{n}) \vec{n}(M)$

- Conservation du moment de la quantité de mouvement :

$$\int_S \left( \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)} \right) dS + \int_V \left( \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k + \rho c_i \right) dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \quad (A4-a)$$

$$\int_S \left( \overline{\mathbf{OM}} \times \vec{t}(M, \vec{n}) + \vec{m} \right) dS + \int_m \left( \overline{\mathbf{OM}} \times \vec{b} + \vec{\ell} \right) dm = \frac{D}{Dt} \int_m \overline{\mathbf{OM}} \times \vec{v} dm \quad (A4-b)$$

où  $t_i^{(n)} = T_{ji} n_j$  et  $m_i^{(n)} = M_{ji} n_j$  sont des vecteurs de force et de moment de traction, respectivement. Les forces de surface et les couples sont ensuite représentés par des tenseurs du second ordre non-symétriques  $T_{ji}$  et des couples de contraintes  $M_{ji}$ , respectivement.  $\varepsilon_{ijk}$  étant le tenseur de permutation de troisième ordre non symétrique ou le symbole de Levi-Cevita.

On peut montrer que :  $\int_S \left( \overline{\mathbf{OM}} \times \vec{t}(M, \vec{n}) \right) dS = \int_V \left( \overline{\mathbf{OM}} \times \overline{div}(\vec{T}) \right) dV + \int_V \vec{\eta} : \vec{T} dV$

où  $\bar{\bar{\eta}} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$  est le tenseur d'orientation d'ordre trois anti-symétrique. Remarquons que dans le cas Newtonien le terme  $\int_V \bar{\bar{\eta}} : \bar{\bar{T}} dV = 0$  puisque  $\bar{\bar{T}}$  est symétrique.

En appliquant le théorème de divergence de Gauss-Ostrogradsky pour les intégrales de surface et en remarquant que le volume  $V$  est arbitraire, nous obtenons la forme différentielle des équations des mouvements linéaires et angulaires:

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{div}(\bar{\bar{T}}) + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (A5)$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} + \rho c_i = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{div}(\bar{\bar{M}}) + \rho \vec{c} + \bar{\bar{\eta}} : \bar{\bar{T}} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (A6)$$

où  $M_{ji} = -8\eta K_{ji} = 8\eta K_{ij} = 4\eta(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$  puisque  $K_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$  qui est le tenseur de courbure antisymétrique, et  $\bar{\bar{T}} = T_{ji} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  et  $\vec{b} = b_i \vec{e}_i$  sont respectivement le tenseur des contraintes dans le film fluide et la densité massique de forces.

Dans les équations ci-dessus, la virgule indique la différentiation partielle par rapport aux coordonnées spatiales ou eulériennes ( $\omega_{i,j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$ , etc.).

Le vecteur tourbillon (ou vortex vector)  $\omega_i$  dual du tenseur tourbillon non symétrique  $\Omega_{ij}$  est défini par :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad (A7)$$

$$\text{ou } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$$

Le bilan d'énergie basé sur la première loi de la thermodynamique polaire du continuum est

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_S m_i^{(n)} \omega_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \rho c_i \omega_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho s dV \quad (A8)$$

où  $e$  est l'énergie interne par unité de masse,  $q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$  est le vecteur du flux de chaleur, et  $s$  est la source de chaleur par unité de masse.

Cette équation montre que le taux de variation de l'énergie totale du système en volume  $V$  est équivalent à la puissance des forces et des couples externes, de la chaleur générée et de la chaleur introduite.

La forme différentielle de l'équation d'énergie est

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ji} D_{ij} + M_{ji} K_{ij} - q_{i,i} + \rho s \quad (A9)$$

où  $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$  est le tenseur des taux de déformation symétrique, et  $q_i = -kT_{,i}$  est la loi de Fourier.  $k$  et  $T$  étant respectivement la conductivité et la température du fluide.

Les termes  $\Phi_1 = T_{ji} D_{ij} = T_{(ji)} D_{ij}$  et  $\Phi_2 = M_{ji} K_{ij}$  sont respectivement appelés puissance de force de contraintes et couple de contraintes par unité de volume.

Pour un milieu sans source, l'équation d'énergie (A9) peut être réécrite comme suit:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (A10)$$

$$\text{Où } \Phi = \lambda D_{kk} D_{pp} + 2\mu D_{ij} D_{ij} + 16\eta K_i K_i \quad (A11)$$

et  $K_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{k,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}K_{kj} = \frac{1}{2}\Omega_{ji,j} = \frac{1}{4}v_{k,ki} - \frac{1}{4}\nabla^2 v_i = \frac{1}{4}v_{k,ki} - \frac{1}{4}v_{i,jj}$  est le vecteur du taux de courbure moyen.

$C_p$  et  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  sont respectivement la chaleur spécifique et la dilatation thermique du fluide à pression constante.

- **Equation constitutive :**

Nous pouvons démontrer que le tenseur de contraintes total peut être écrit ainsi:

$$T_{ji} = \underbrace{-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}}_{\text{Partie symétrique}} + \underbrace{2\eta \nabla^2 \Omega_{ji}}_{\text{Partie anti-symétrique}} \quad (A12)$$

$$\text{où } \Omega_{ji} = -\Omega_{ij} = -v_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$$

L'équation (A12) peut également être écrite comme suit:

$$T_{ji} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\eta \nabla^2 \Omega_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \eta \nabla^2 (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (A13)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible le terme  $\lambda D_{kk}\delta_{ij}$  disparaît.

- **Équations de mouvement:**

Lorsque le tenseur des contraintes (A13) est appliqué aux équations du mouvement linéaire (A5), on obtient

$$-p_{,i} + (\lambda + \mu + \eta \nabla^2) v_{k,ki} + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 v_i + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (A14)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible ou isovolume ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ ), l'équation (A14) se réduit à:

$$-p_{,i} + (\mu - \eta \vec{\nabla}^2) \vec{\nabla}^2 v_i + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (A15-a)$$

ou en utilisant la notation vectorielle:

$$-\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (\text{A15-b})$$

Pour un écoulement de fluide incompressible ( $v_{r,r} = 0$ ) et en l'absence de couples de volumes, l'équation locale de la dynamique du fluide à couple de contraintes s'exprime :

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \right) = -p_{,i} + \mu v_{i,rr} - \eta v_{i,rrss} \quad (\text{A16-a})$$

ou encore :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} \quad (\text{A16-b})$$

En coordonnées cartésiennes, les composantes de l'équation locale de la dynamique (A.16) s'écrivent dans le cas d'un écoulement stationnaire et isotherme :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{A17})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{A18})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{A19})$$

La théorie des écoulements de films minces visqueux suppose que l'épaisseur du film fluide  $h$  est très faible devant les autres dimensions du contact  $L$ . L'analyse dimensionnelle repose sur le changement de variables suivant :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{z} = \frac{z}{L}, \bar{u} = \frac{u}{U}, \bar{v} = \frac{vL}{UL}, \bar{w} = \frac{w}{U}, \bar{p} = \frac{h^2}{\mu_0 UL} p, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (\text{A20})$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (A.17) à (A.19), on obtient les équations de mouvement normalisées suivantes :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\xi R_e \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\mu} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{z}^4} \right) + \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{y}^4} \right] - 2 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \xi^4 \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{z}^2} + \xi^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2 \partial \bar{z}^2} \right) \right] \quad (\text{A21})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \xi^2 \left\{ -\xi R_e \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\mu} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{z}^4} \right) + \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{y}^4} \right] - 2 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{z}^2} + \xi^2 \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{y}^2} \right] \right\} \quad (\text{A22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = & -\xi R_e \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\mu} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right] - \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \xi^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{z}^4} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \right] - 2 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \bar{\eta} \left[ \xi^4 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \xi^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{y}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

On remarque que l'analyse dimensionnelle des équations de mouvement fait apparaître des nombres adimensionnels tels que le nombre de Reynolds local de l'écoulement

$R_e = \rho_0 \frac{U h}{\mu_0}$ , la longueur caractéristique des nano-additifs  $l_0 = \sqrt{\frac{\eta_0}{\mu_0}}$ , et le paramètre

d'échelle  $\xi = \frac{h}{L}$  qui est de l'ordre de  $10^{-3}$  en lubrification hydrodynamique.

En négligeant les termes multipliés par  $\xi^2$  et  $\xi^4$ , on trouve :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\xi R_e \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{l_0}{h} \right) \bar{\eta} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{y}^4} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -\xi R_e \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{l_0}{h} \right) \bar{\eta} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \quad (\text{A.26})$$

Pour  $\xi R_e \ll 1$ , souvent rencontré en lubrification, les termes d'inertie disparaissent :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{l_0}{h} \right) \bar{\eta} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{y}^4} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{l_0}{h} \right) \bar{\eta} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \quad (\text{A.29})$$

Le retour aux variables dimensionnelles permet d'avoir les équations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (\text{A.32})$$

## Annexe B

### Equations géométriques du film fluide d'un palier cylindrique compliant

Considérons une section droite d'un palier cylindrique à section circulaire (figure B.1).

L'application de la loi des cosinus permet d'écrire :

$$(R + H)^2 = e^2 + (R + C + U)^2 - 2e(R + C + U)\cos(\gamma + (\pi - \theta)) \quad (\text{B.1})$$

qui peut s'écrire aussi

$$(R + H)^2 = e^2 + (R + C + U)^2 + 2e(R + C + U)(\cos\gamma \cos\theta + \sin\gamma \sin\theta) \quad (\text{B.2})$$

La division des deux membres de l'équation (B.2) par  $R^2$  donne après simplification des termes d'ordre supérieur  $\left(\left(\frac{H}{R}\right)^2, \left(\frac{e}{R}\right)^2, \left(\frac{U}{R}\right)^2, \left(\frac{C}{R}\right)^2, \frac{CU}{R^2}, \frac{eU}{R^2}, \text{ et } \frac{eC}{R^2}\right)$ :

$$\frac{2H}{R} = \frac{2C}{R} + \frac{2U}{R} + \frac{2e}{R}\cos(\theta - \gamma) \quad (\text{B.3})$$

ou

$$H = C + e\cos(\theta - \gamma) + U = C(1 + \varepsilon \cos(\theta - \gamma)) + U \quad (\text{B.4})$$

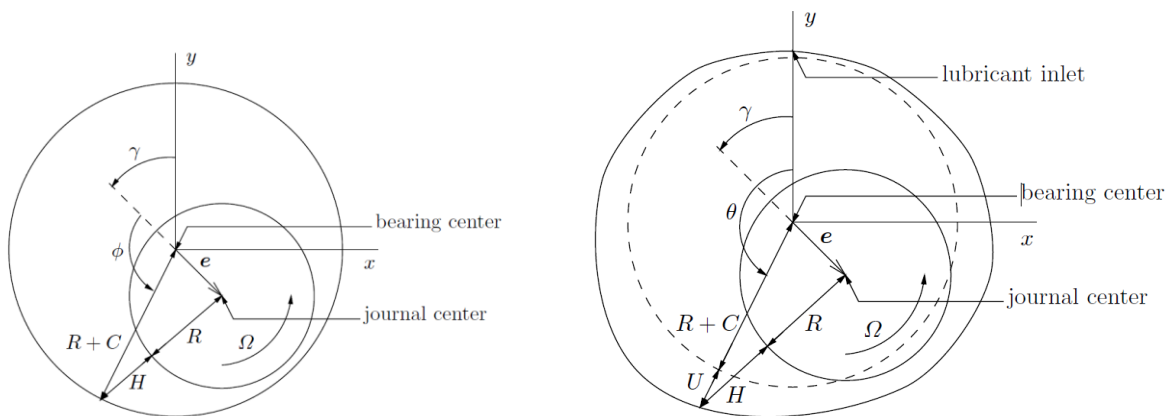
ou encore en développant  $\cos(\theta - \gamma)$  :

$$H = C(1 + \varepsilon (\cos\theta \cos\gamma + \sin\theta \sin\gamma)) + U = C(1 - \varepsilon_y \cos\theta + \varepsilon_x \sin\theta) + U \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas du repère lié au palier de ligne du vilebrequin, l'équation géométrique du film est obtenue en faisant une rotation du système d'axes d'un angle  $+\frac{\pi}{2}$  :

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}(1 + \varepsilon (\cos\theta \cos\gamma + \sin\theta \sin\gamma)) + \mathbf{U} = \mathbf{C}(1 - \varepsilon_x \cos\theta - \varepsilon_y \sin\theta) + \mathbf{U} \quad (\text{B.6})$$

Dans le cas du palier rigide, l'équation (B.6) devient :  $\mathbf{H} = \mathbf{C}(1 - \varepsilon_x \cos\theta - \varepsilon_y \sin\theta)$



(a) Palier rigide

(b) Palier compliant

Fig. B.1: Section droite d'un palier lisse

## Annexe C

### Détermination des contraintes tangentielles à l'interface film fluide - coussinet

L'action de contact  $\vec{t}$ , appelée vecteur contrainte, en un point  $M$  de l'interface film fluide - coussinet, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal  $\vec{n}(M)$ :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 t_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}^{(M)} n_j^{(M)} \vec{e}_i \quad (\text{C.1})$$

$n_j$  représente les composantes du vecteur normal en  $M$  orienté de l'interface vers le fluide (normale extérieure).

- Dans le film fluide :

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible non Newtonien à couples de contraintes (Eq. A.13), la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

où

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} \right)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} \right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z^2} \right)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y^2} \right)$$

$$\tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \eta \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial y^2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

En remplaçant les variables réduites (A.20) dans les composantes du tenseur des contraintes ci-dessus, on obtient :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\mu_0 VL}{h^2} \left( -\bar{p} + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{h} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \xi^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}^2} - \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x}^3} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}^2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{L} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}^2} + \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z}^3} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}^2} - \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - \xi \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}^2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{yx} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{h} \left( \xi^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x}^3} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}^2} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}^2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{\mu_0 VL}{h^2} \left( -\bar{p} + 2\bar{\mu} \xi^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{h} \left( \xi^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}^2} + \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z}^3} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}^2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{zx} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{L} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} + \xi \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}^2} - \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}^2} - \xi^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z}^3} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}^2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{zy} = \mu_0 \bar{\mu} \frac{V}{h} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \xi^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) - \eta_0 \bar{\eta} \frac{V}{h^3} \left( \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} + \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}^2} - \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}^2} - \xi^4 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z}^3} - \xi^2 \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{z} \partial \bar{y}^2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\mu_0 VL}{h^2} \left( -\bar{p} + 2\bar{\mu} \xi^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)$$

Après avoir négligé les termes multipliés par  $\xi^2, \xi^3, \xi^4$ , le retour aux variables avec dimension permet d'avoir la matrice représentative du tenseur des contraintes dans le cas des écoulements de films minces :

$$[T_{ji}] = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} & -p & \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\ 0 & \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} & -p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p & \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \mu \frac{\partial w}{\partial y} & -p \end{bmatrix}}_{\text{Partie symétrique } T_{(ij)}} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} & 0 \\ +\eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} & 0 & +\eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\ 0 & -\eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Partie anti-symétrique } T_{[ij]}}$$

(C.2)

Le vecteur normal  $\vec{n}$  à l'interface film - coussinet poreux est égal à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans le système

de coordonnées cartésiennes local  $(x, y, z)$ . Le vecteur contraint au point  $M$  s'exprime :



$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \vec{e}_x - p \vec{e}_y + \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \eta \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \vec{e}_z \quad (\text{C.3})$$

L'intégration de l'équation (C.3) sur la surface de l'arbre permet de calculer les actions du fluide lubrifiant sur l'arbre, à savoir la portance hydrodynamique et les forces de frottement :

$$\vec{R} = \int_S \vec{t}(M, \vec{n}) dS$$