République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mlle. Bouguettouche Amira

Intitulé

Inégalités intégrales pour certains types de convexité

Dirigé par : Fahim Lakhal

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.**	**R.Mellal**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Pr.**	**F.Lakhal**	**PROF**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.**	**M. Merad**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Remerciements

Tout d’abord, je tiens à remercie DIEU le tout puissant de me avoir donné le courage et la volonté de terminer ce travail.

Un grand merci à madame **R. Mellal**, vous j’ai fait l’honneur d’accepter d'être la présidente du jury.

Un grand merci également à madame **M. Merad**. d’avoir accepté d’être examinatrice de mon mémoire. Je suis vraiment heureuse que vous soyez présentes le jour de ma soutenance.

Je tiens à remercier monsieur **F. Lakhal**. qui me a encadré dans la réalisation de mon travail. Votre soutien et votre aide, en tant qu’encadrant de mon mémoire, j’ai été indispensable.

Ma reconnaissance s’adresse aussi à ma familles et mes amis pour leur encouragementet support inconditionné

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de ma vie ***ma mère*** *qui m'a apporté son appui durant toutes mes années d'études, pour son sacrifice et soutien qui m'ont donné confiance, courage et sécurité.* ***À mon père*** *pour ses encouragements incessants et son soutien moral aux moments difficiles qui furent pour moi les meilleurs gages de réussite.*

Que Dieu les protège et que ce travail soit la preuve modeste d'une reconnaissance infinie et d'un profond amour pour eux.

À mes sœurs : ***Dounia, Wissal, Meriem et Anfel.***

À ma grande mère ***Akila***

A mon oncle ***khaled***

A mes cousines ***Rawnak, Hadil et Imane***

À ma grande famille, mes collègues et tous ceux et toutes celles que j'ai involontairement omis de citer et qui n'en demeurent pas moins chers.

Amir

Résumé Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique, MT-convexité ainsi que quelques identités intégrales importantes que nous utiliserons dans les chapitres qui suivent. Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature sur les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes en utilisant un opérateur fractionnaire de type exponentielle. Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions beta-convexes et on termine notre mémoire par quelques applications..

Mots clés : Inégalité d'Hermite-Hadamard, inégalité de Hölder, fonctions convexes, fonctions MT-convexes, fonctions beta-convexes, intégrale de Riemann-Liouville

ملخص في هذه المذكرة، سنركز على دراسة المتراجحات التكاملية من نوع هرميت-هدامار. في الفصل الأول، نذكر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، والتحدب المعمم، بالإضافة الى بعض المساواة التكاملية التي نستعملها لاحقا. في الفصل الثاني، سنذكر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول المتراجحات التكاملية من نوع هرميت-هدامار للدوال المحدبة. في حين ان الفصل الأخير سيخصص لدراسة الدوال بيتا-محدبة ونكمل المذكرة ببعض التطبيقات

Table des matières

1 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions MT- convexes **2**

1.1 Introduction 2

1.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales classiques 3

1.3 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires 14

2 Inégalité d'Hermite-Hadamard via un opérateur fractionnaire de type exponentielle **26**

2.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard 26

2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard-Fejér 28

2.3 Inégalités de type Dragomir-Agarwal 30

3 Fonctions $beta$-convexes **33**

3.1 Inégalités pour les fonctions $beta$-convexes 33

4 Applications **41**

4.1 Applications aux moyennes spéciales 41

4.2 Quelques estimations d'erreur pour la fomule trapézoidale 42

Chapitre 1

Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions MT- convexes

1.1 Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches mathématiques modernes telle que la théorie des probalilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, et l'analyse numérique. Une inégalité très intéressante qui est largement étudiée dans la littérature est due à Hermite et Hadamard qui l'ont découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893), voir [[4] , [7] , [9]] . Maintenant elle est connue comme l'inégalité d'Hermite-Hadamard, on peut dire qu'elle est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications. Elle nous génère une estimation de la valeur moyenne de la fonction convexe sur un intervalle borné. Ce célèbre résultat est donné comme suit :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (*)$$

Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont accordé beaucoup d'attention à la théorie de la convexité en raison de sa grande utilité dans divers domaines des sciences pures et appliquées.

La théorie des fonctions convexes et les inégalités sont étroitement liées. Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans les mathématiques modernes, comme on peut le voir dans de grand nombre d'articles de recherche et des livres consacrés au domaine de nos jours. Beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser et raffiner cette inégalité et l'étendre à différentes classes de fonctions : fonctions s-convexes, fonctions p-convexes, etc. et l'appliquer à des moyennes spéciales (la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique , etc.).

L'objectif de ce travail est d'étudier et généraliser quelques inégalités intégrales pour certains type de convexités en utilisant l'approche fractionnaire au sense de Riemann-Liouville en passant par une introduction et quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions MT- convexes pour les intégrales classiques ainssi que les intégrales fractionnaires de type Riemann-Liouville Dans le deuxième chapitre nous présentons certains Théorèmes concernant les inégalités de type Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér et Dragomir-Agarwal en utilisant un opérateur fractionnaire de type exponentielle.pour les fonctions convexes. Dans le troisième chapitre on donne certains Théorèmes concernant les fonctions $beta$-convexes, et on termine notre mémoire par quelques applications.

1.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales classiques

La convexité joue un rôle très important dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité. L'objectif de ce chapitre est de donner quelques résultats concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions MT-convexes.

Définition 1.1 *La fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.1}$$

pour tout x, $y \in I$ et $t \in [0,1]$. On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.

Exemple 1.1 1) *$f(x) = x^2$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$.*

2) *$f(x) = e^x$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$.*

3) *$f(x) = |x|$ est convexe dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 *On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction MT -convexe si elle est positive et pour tout $x,\, y \in I$, $t \in]0,1[$ on a :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}} f(x) + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}} f(y). \tag{1.2}$$

Lemme 1.1 [8] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans I° l'intérieure de l'intervalle I telles que $a,\, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$ alors pour tout $h \in]0,1[$ on a :*

$$f(w) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du = (b-a)[(1-h)^2 \int_0^1 tf'(tw + (1-t)a)dt + h^2 \int_0^1 (t-1)f'(tb + (1-t)w)dt]$$

où

$$w = ha + (1-h)b.$$

Preuve. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 tf'(tw + (1-t)a)dt &= \left[\frac{tf(tw + (1-t)a)}{w-a}\right]_0^1 - \frac{1}{w-a}\int_0^1 f(tw + (1-t)a)dt \\ &= \frac{f(w)}{w-a} - \frac{1}{(w-a)^2}\int_a^w f(u)du\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t-1)\, f'(tb + (1-t)w)dt &= \left[\frac{(t-1)\, f(tb + (1-t)w)}{b-w}\right]_0^1 - \frac{1}{b-w}\int_0^1 f(tb + (1-t)w)dt \\ &= \frac{f(w)}{b-w} - \frac{1}{(b-w)^2}\int_w^b f(u)du.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&(b-a)\left[(1-h)^2 \int_0^1 tf'(tw + (1-t)a)dt + h^2 \int_0^1 (t-1)f'(tb + (1-t)w)dt\right] \\ &= (b-a)(1-h)^2\left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{1}{(w-a)^2}\int_a^w f(u)du\right) + (b-a)h^2\left(\frac{f(w)}{b-w} - \frac{1}{(b-w)^2}\int_w^b f(u)du\right) \\ &= (b-a)(1-h)^2\left(\frac{f(w)}{(b-a)(1-h)} - \frac{1}{(b-a)^2(1-h)^2}\int_a^w f(u)du\right)\end{aligned}$$

$$+(b-a)h^2\left(\frac{f(w)}{h(b-a)}-\frac{1}{h^2(b-a)^2}\int_w^b f(u)du\right)$$
$$=f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du.$$

■

Lemme 1.2 [5] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans I° l'intérieure de l'intervalle I telle que $a,\ b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$, alors on a :*

$$\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(t-1)f'(tx+(1-t)a)dt$$
$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)f'(tx+(1-t)b)dt$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. En intégrant par parties :

$$\int_0^1(t-1)f'(tx+(1-t)a)dt=\frac{f(a)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du$$

et

$$\int_0^1(1-t)f'(tx+(1-t)b)dt=\frac{f(b)}{b-x}-\frac{1}{(b-x)^2}\int_x^b f(u)du$$

Alors

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(t-1)f'(tx+(1-t)a)dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)f'(tx+(1-t)b)dt$$
$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{f(a)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right)+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{f(b)}{b-x}-\frac{1}{(b-x)^2}\int_x^b f(u)du\right)$$
$$=\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

■

Théorème 1.1 [8, 5] *Soit $f : I \subset [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'intérieure de l'intervalle I telle que $f' \in L_1[a,b]$ où $a,\ b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est une fonction MT-convexe dans $[a,b]$ et $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors on a :*

i)

$$\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{\pi}{4}M(b-a), \qquad \textit{pour tout } h\in]0,1[. \tag{1.3}$$

ii)

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M\pi[(x-a)^2+(b-x)^2]}{4(b-a)}, \qquad \textit{pour tout } x\in[a,b]. \tag{1.4}$$

Preuve. *i)* En utilisant le Lemme 1.1 et la MT-convexité de $|f'|$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq (b-a)\left[(1-h)^2\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|dt\right. \\
&\left. +h^2\int_0^1 (1-t)|f'(tb+(1-t)w))|dt\right] \\
&\leq (b-a)\left[(1-h)^2\int_0^1 t\left(\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|\right)dt\right. \\
&\left. +h^2\int_0^1 (1-t)\left(\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(w)|+\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(b)|\right)dt\right] \\
&\leq \frac{1}{2}M(b-a)\left[(1-h)^2\int_0^1\left\{t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}dt\right. \\
&\left. +h^2\int_0^1\left\{t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}dt\right] \\
&=\left\{\frac{(1-h)^2+h^2}{4}\right\}M\pi(b-a)\leq\frac{\pi}{4}M(b-a).
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé la fonction *Beta* d'Euler telle que :

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x,y>0$$

où Γ est la fonction *Gamma* d'Euler

Alors

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3\pi}{8}.$$
$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\pi}{8}.$$

et $(1-h)^2+h^2\leq 1$.

ii) En utilisant le Lemme 1.2 et le fait que $|f'|$ est une fonction MT-convexe, alors on aura :

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)a|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)b|dt\\
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|\right]dt\\
&\quad+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|\right]dt\\
&\leq \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{2(b-a)}\int_0^1\left(t^{1/2}(1-t)^{1/2}+t^{-1/2}(1-t)^{3/2}\right)dt.
\end{aligned}$$

Avec β est la fonction *beta* d'Euler

La preuve est terminée. ∎

Remarque 1.1 1) *Dans le Théorème* 1.1, *si on choisit* $h=\frac{1}{2}$ *dans* (1.3), *alors on trouve que :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\frac{M\pi(b-a)}{16}.$$

2) *Dans le Théorème* 1.1, *si on choisit* $x=\frac{a+b}{2}$ *dans* (1.4), *alors on trouve que :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\frac{M\pi(b-a)}{8}.$$

Théorème 1.2 [8, 5] *Soit* $f: I\subset[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieure de l'intervalle* I *telle que* $f'\in L_1[a,b]$ *et* $a,b\in I$ *avec* $a<b$. *Si* $|f'|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans* $[a,b]$, $q>1$ *avec* $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ *et* $|f'(x)|\leq M$ *pour tout* $x\in[a,b]$, *alors on a :*

i)

$$\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}M(b-a),\quad \text{pour tout } h\in]0,1[. \tag{1.5}$$

ii)

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\frac{M}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{(b-a)}, \tag{1.6}$$

pour tout $x\in[a,b]$.

Preuve. $i)$ On suppose que $p > 1$. D'après le Lemme 1.1 et l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq (b-a)\left[(1-h)^2\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|dt\right. \\
&\left.+h^2\int_0^1(1-t)|f'(tb+(1-t)w)|dt\right] \\
&\leq (b-a)\left[(1-h)^2\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(\int_0^1|f'(tw+(1-t)a)|^q dt)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+h^2\left(\int_0^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tb+(1-t)w)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&=\left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}}(b-a)\left[(1-h)^2\left(\int_0^1|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+h^2\left(\int_0^1|f'(tb+(1-t)w)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.\right]
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT-convexe et $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1|f'(tw+(1-t)a)|^q dt \\
&\leq \int_0^1\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt \\
&=\frac{\pi}{4}\left[|f'(w)|^q+|f'(a)|^q\right] \leq \frac{\pi}{2}M^q
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1|f'(tb+(1-t)w)|^q dt &\leq \int_0^1\left\{\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(w)|^q+\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(b)|^q\right\}dt \\
&=\frac{\pi}{4}\left[|f'(w)|^q+|f'(b)|^q\right] \leq \frac{\pi}{2}M^q,
\end{aligned}$$

où

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}dt=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}dt=\frac{\pi}{2}$$

Alors

$$\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \left[(1-h)^2 + h^2\right] M(b-a)$$

$$\leq \left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}} M(b-a).$$

$ii)$ On suppose que $p > 1$. En utilisant le Lemme 1.2 et l'inégalité de Hölder on a :

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT-convexe et $|f'(x)| \leq M$, alors on aura :

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right] dt = \frac{\pi}{4}[|f'(x)|^q + |f'(a)|^q]$$

$$\leq \frac{\pi}{2}M^q,$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|^q\right] dt = \frac{\pi}{4}[|f'(x)|^q + |f'(b)|^q]$$

$$\leq \frac{\pi}{2}M^q,$$

Alors on obtient

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\frac{1}{(1+p)^{1/p}}\left(\frac{\pi}{2}M^q\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^2}{b-a}\frac{1}{(1+p)^{1/p}}\left(\frac{\pi}{2}M^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{M}{(1+p)^{1/p}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{(b-a)}, \quad \text{où} \quad p^{-1}+q^{-1}=1.$$

■

Remarque 1.2 1) *Dans le Théorème* 1.2, *si on choisit* $h = \dfrac{1}{2}$ *dans* (1.5), *alors on trouve que :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} M(b-a)$$

2) *Dans le Théorème* 1.2, *si on choisit* $x = \dfrac{a+b}{2}$ *dans* (1.6) *alors, on trouve que :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M\pi^{\frac{1}{q}}}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}(b-a). \tag{1.7}$$

Théorème 1.3 [8, 5] *Soit* $f : I \subset [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieure de l'intervalle* I *telle que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a, b \in I$ *avec* $a < b$. *Si* $|f'|^q$ *est une fonction* MT*-convexe dans* $[a,b]$, $q \geq 1$ *et* $|f^{'}(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors pour tout* $h \in]0,1[$ *on a :*

i)

$$\left|f(w) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}\pi^{\frac{1}{q}}M(b-a), \quad \text{pour tout } h \in]0,1[. \tag{1.8}$$

ii)

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}\pi^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{(b-a)}, \tag{1.9}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

iii)

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(q+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \tag{1.10}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. *i)* A partir du Lemme 1.1 et en utilisant l'inégalité des puissances moyennes, on a :

$$\left|f(w) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left[(1-h)^2\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|dt\right.$$

$$\left.+h^2\int_0^1 (1-t)|f'(tb+(1-t)w)|dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[(1-h)^2\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|^q dt)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+h^2\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tb+(1-t)w)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}(b-a)\left[(1-h)^2\left(\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+h^2\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tb+(1-t)w)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

En utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT-convexe et $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors on obtient :

$$\int_0^1 t|f'(tw+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 t\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|^q + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{3|f'(w)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right] \leq \frac{\pi}{4}M^q.$$

de même

$$\int_0^1 (1-t)|f'(tb+(1-t)w)|^q dt \leq \int_0^1 (1-t)\left[\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(w)|^q + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(b)|^q\right]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{3|f'(w)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right] \leq \frac{\pi}{4}M^q.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left|f(w)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}\pi^{\frac{1}{q}}(b-a)$$

$$\times\left[(1-h)^2\left\{\frac{3|f'(w)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right\}^{\frac{1}{q}}+h^2\left\{\frac{3|f'(w)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}\pi^{\frac{1}{q}}M(b-a).$$

ce qui achève la preuve.

ii) En utilisant le Lemme 1.2 et l'inégalité des puissances moyennes on a :

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT-convexe et $|f'(x)| \leq M$, alors on aura :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt &\leq \int_0^1 \left[\frac{(1-t)\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{(1-t)\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right] dt \\
&= \frac{1}{2}|f'(x)|^q\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}dt + \frac{1}{2}|f'(a)|^q\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{3/2}dt \\
&\leq \frac{1}{2}M^q\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}M^q\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}M^q
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{(1-t)\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{(1-t)\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|^q\right] dt \leq \frac{\pi}{4}M^q.$$

Alors, on obtient :

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{(b-a)}.$$

$iii)$ A partir du lemme 1.2 et en utilisant l'inégalité des moyennes puissances, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 1.(1-t)|f'(tx+(1-t)a|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 1.(1-t)|f'(tx+(1-t)b|dt \\
&\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 1dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^q|f'(tx+(1-t)a|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 1dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^q|f'(tx+(1-t)a|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT-convexe et $|f'(x)| \leq M$, alors on aura :

$$\int_0^1 (1-t)^q|f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{(1-t)^q\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{(1-t)^q\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right] dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|f'(x)|^q \int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{q-1/2}dt + \frac{1}{2}|f'(a)|^q \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{q+\frac{1}{2}}dt \\
&\leq \frac{1}{2}M^q\beta\left(\frac{3}{2}, q+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}M^q\beta\left(\frac{1}{2}, q+\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(q+1)}M^q
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)^q|f'(tx+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1 \left[\frac{(1-t)^q\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{(1-t)^q\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|^q\right] dt \\
&\leq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(q+1)}M^q.
\end{aligned}
$$

donc, on a :

$$
\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(q+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{(b-a)},
$$

■

Remarque 1.3 1) *Dans le Théorème* 1.3, *si on choisit* $h = \dfrac{1}{2}$ *dans* (1.8), *alors on trouve que :*

$$
\left|f(w) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} \pi^{\frac{1}{q}} M(b-a).
$$

2) *Dans le Théorème* 1.3, *si on choisit* $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ *dans* (1.9), *alors on obtient que :*

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} \pi^{\frac{1}{q}}(b-a). \tag{1.11}
$$

3) *Dans le Théorème* 1.3, *si on choisit* $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ *dans* (1.10), *alors on a :*

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(q+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}(b-a). \tag{1.12}
$$

1.3 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires

Définition 1.3 *Soit $f \in L_1[a,b]$ alors les intégrales de Riemann-Liouville $J_{a^+}^{\alpha}f$ et $J_{b^-}^{\alpha}f$ d'ordre $\alpha > 0$ avec $a > 0$ sont définies par :*

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x > a,$$

et

$$J_{b^-}^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x < b,$$

telle que $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$, où $J_{a^+}^{0}f(x) = J_{b^-}^{0}f(x) = f(x)$. Dans le cas $\alpha = 1$ l'intégrale devienne une intégrale classique.

Le premier résultat conçernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour le cas fractionnaire est donné par le Théorème suivant

Théorème 1.4 [9] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive avec $0 \le a < b$ et $f \in L_1[a,b]$. Si f est une fonction convexe dans $[a,b]$ alors les inégalités suivantes pour les intégrales fractionnaires sont vérifiées :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{a^+}^{\alpha}f(b) + I_{b^-}^{\alpha}f(a)] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}, \qquad \alpha > 0. \tag{1.13}$$

Preuve. Puisque f est une fonction convexe sur $[a,b]$, on a pour x, $y \in [a,b]$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1.14}$$

C'est à dire, avec $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, on a

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb). \tag{1.15}$$

En multipliant les deux côtés de (1.15) par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)dt$$

$$= \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$

C'est à dire,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)]$$

et la première inégalilé est démontrée.

Pour la preuve de la deuxième inégalité de (1.13), on note d'abord que si f est une fonction convexe, alors, pour $\lambda \in [0,1]$,elle donne :

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

et

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

En additionnant ces inégalités membre à membre on obtient

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b). \tag{1.16}$$

Puis en multipliant les deux côtés de (1.16) par $t^{\alpha-1}$ et en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb)dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

C'est à dire,

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}.$$

La preuve est terminée. ■

Lemme 1.3 [8] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'interieur de l'intervalle I,telle que $a,\ b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$ alors pour tout $h \in]0,1[$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\frac{[(1-h)^\alpha + h^\alpha]}{(b-a)^{1-\alpha}} f(w) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{w^-}^\alpha f(a) + J_{w^+}^\alpha f(b)]$$
$$= (b-a)^\alpha \left\{(1-h)^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha f'(tw + (1-t)a)dt \right.$$
$$\left. -h^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha f'(tw + (1-t)b)dt\right\},$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du$ est la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^\alpha f'(tw+(1-t)a)dt &= \left[t^\alpha \frac{f(tw+(1-t)a)}{w-a}\right]_0^1 - \frac{\alpha}{w-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f(tw+(1-t)a)dt \\ &= \frac{f(w)}{w-a} - \frac{\alpha}{w-a}\int_a^w \left(\frac{u-a}{w-a}\right)^{\alpha-1}\frac{f(u)}{w-a}du \\ &= \frac{f(w)}{w-a} - \frac{\alpha}{(w-a)^{\alpha+1}}\int_a^w (u-a)^{\alpha-1} f(u)du \\ &= \frac{f(w)}{w-a} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(w-a)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^-} f(a)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^\alpha f'(tw+(1-t)b)dt &= \left[t^\alpha \frac{f(tw+(1-t)b)}{w-b}\right]_0^1 - \frac{\alpha}{w-b}\int_0^1 t^{\alpha-1} f(tw+(1-t)b)dt \\ &= -\frac{f(w)}{b-w} + \frac{\alpha}{b-w}\int_w^b \left(\frac{b-u}{b-w}\right)^{\alpha-1}\frac{f(u)}{b-w}du \\ &= -\frac{f(w)}{b-w} + \frac{\alpha}{(b-w)^{\alpha+1}}\int_w^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)du \\ &= -\frac{f(w)}{b-w} + \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-w)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^+} f(b).\end{aligned}$$

Alors

$$(b-a)^\alpha \left[(1-h)^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha f'(tw+(1-t)a)dt - h^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha f'(tw+(1-t)b)dt\right]$$

$$\begin{aligned}&= (b-a)^\alpha \left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(w-a)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^-} f(a)\right) - h^{\alpha+1}\left(-\frac{f(w)}{b-w} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-w)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^+} f(b)\right)\right] \\ &= (b-a)^\alpha \left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\frac{f(w)}{(b-a)(1-h)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}(1-h)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^-} f(a)\right)\right. \\ &\qquad \left. -h^{\alpha+1}\left(-\frac{f(w)}{h(b-a)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}} J^\alpha_{w^+} f(b)\right)\right] \\ &= \left(\frac{(1-h)^\alpha f(w)}{(b-a)^{1-\alpha}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} J^\alpha_{w^-} f(a)\right) - \left(-\frac{h^\alpha f(w)}{(b-a)^{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} J^\alpha_{w^+} f(b)\right) \\ &= \frac{(1-h)^\alpha f(w)}{(b-a)^{1-\alpha}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} J^\alpha_{w^-} f(a) + \frac{h^\alpha f(w)}{(b-a)^{1-\alpha}} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} J^\alpha_{w^+} f(b) \\ &= \frac{\{(1-h)^\alpha + h^\alpha\}}{(b-a)^{1-\alpha}} f(w) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{w^-} f(a) + J^\alpha_{w^+} f(b)].\end{aligned}$$

■

Lemme 1.4 [6] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'intérieur de l'intervalle I, où a, $b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{x^-} f(a) + J^{\alpha}_{x^+} f(b)]$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (t^{\alpha}-1) f'(tx+(1-t)a)dt + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) f'(tx+(1-t)b)dt,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ est la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t^{\alpha}-1) f'(tx+(1-t)a)dt &= \left[(t^{\alpha}-1)\frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}\right]_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a} dt \\
&= \frac{f(a)}{x-a} - \frac{\alpha}{x-a} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tx+(1-t)a)dt \\
&= \frac{f(a)}{x-a} - \frac{\alpha}{(x-a)^2} \int_a^x \left(\frac{u-a}{x-a}\right)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= \frac{f(a)}{x-a} - \frac{\alpha}{(x-a)^{\alpha+1}} \int_a^x (u-a)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= \frac{f(a)}{x-a} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{x^-} f(a)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t^{\alpha}) f'(tx+(1-t)b)dt &= \left[(1-t^{\alpha})\frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}\right]_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \frac{f(tx+(1-t)b)}{b-x} dt \\
&= \frac{f(b)}{b-x} - \frac{\alpha}{b-x} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tx+(1-t)b)dt \\
&= \frac{f(b)}{b-x} - \frac{\alpha}{b-x} \int_b^x \left(\frac{u-b}{x-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{x-b} du \\
&= \frac{f(b)}{b-x} - \frac{\alpha}{(b-x)^2} \int_x^b \left(\frac{b-u}{b-x}\right)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= \frac{f(b)}{b-x} - \frac{\alpha}{(b-x)^{\alpha+1}} \int_x^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)du \\
&= \frac{f(b)}{b-x} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{x^+} f(b).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (t^\alpha-1)f'(tx+(1-t)a)dt+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (1-t^\alpha)f'(tx+(1-t)b)dt\\
&=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{f(a)}{x-a}-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x^-}f(a)\right)+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{f(b)}{b-x}-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x^+}f(b)\right)\\
&=\frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-}f(a)+J^\alpha_{x^+}f(b)].
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.5 [8, 5] *Soit $f : I \subset [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'intérieur de l'intervalle I telle que $f' \in L_1[a,b]$ et $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est une fonction MT -convexe dans $[a,b]$ et $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ avec $\alpha > 0$, alors on a :*

i)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{[(1-h)^\alpha+h^\alpha]}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{w^-}f(a)+J^\alpha_{w^+}f(b)]\right|\\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{2}M\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right), \quad \textit{pour tout } h\in]0,1[. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-}f(a)+J^\alpha_{x^+}f(b)]\right|\\
&\leq \frac{M[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]}{2(b-a)}\left[\pi-\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right], \quad \textit{pour tout } x\in[a,b]. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Preuve. *i)* D'après le Lemme 1.3, la propriété du module et en utilisant la MT-convexité de $|f'|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{[(1-h)^\alpha+h^\alpha]}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{w^-}f(a)+J^\alpha_{w^+}f(b)]\right|\\
&\leq (b-a)^\alpha\left\{(1-h)^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha\left|f'(tw+(1-t)a)\right|dt\right.\\
&\qquad\left.+h^{\alpha+1}\int_0^1 t^\alpha\left|f'(tw+(1-t)b)\right|dt\right\}\\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{2}\left\{(1-h)^{\alpha+1}\left[\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)|f'(w)|+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)|f'(a)|\right]\right.\\
&\qquad\left.+h^{\alpha+1}\left[\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)|f'(w)|+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)|f'(b)|\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{2} M \left\{(1-h)^{\alpha+1} + h^{\alpha+1}\right\} \left\{\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) + \beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{2} M \beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right),$$

Avec l'utilisation de l'estimation: $(1-h)^{\alpha+1} + h^{\alpha+1} \leq 1$ pour tout $h \in [0,1]$.

$ii)$ D'après le Lemme 1.4, la propriété du module et en utilisant la MT-convexité de $|\ f'|$, on obtient :

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{x^-} f(a) + J^{\alpha}_{x^+} f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |t^{\alpha}-1||f'(tx+(1-t)a|dt$$
$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |1-t^{\alpha}||f'(tx+(1-t)b|dt$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)| + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|\right] dt$$
$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)| + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|\right] dt$$
$$\leq \frac{M(x-a)^{\alpha+1}}{2(b-a)} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) \left[t^{1/2}(1-t)^{-1/2} + t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\right] dt$$
$$+\frac{M(b-x)^{\alpha+1}}{2(b-a)} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) \left[t^{1/2}(1-t)^{-1/2} + t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\right] dt$$
$$= \frac{M[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}]}{2(b-a)} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) \left[t^{1/2}(1-t)^{-1/2} + t^{-1/2}(1-t)^{1/2)}\right] dt$$
$$= \frac{M[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}]}{2(b-a)} \left[\pi - \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)}\right].$$

On a utilisé la fonction *beta* d'Euler, définie par

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{pour tout } x,\ y>0$$

■

Remarque 1.4 1) *Dans le Théorème* 1.5, *si on choisit* $h = \dfrac{1}{2}$ *dans* (1.17), *alors on trouve que :*

$$\left|\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha-1} f(w) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)M.$$

2) *Dans le Théorème* 1.5*, si on pose* $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ *dans* (1.18)*, alors on obtient que :*

$$\left|\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{M(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha+1}}\left[\pi - \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right].$$

3) *Dans le Théorème* 1.5*, si on prend* $\alpha = 1$ *dans* (1.18)*, alors on trouve l'inégalité* (1.4) *du Théorème* 1.1.

Théorème 1.6 [8, 5] *Soit* $f : I \subset [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieur de l'intervalle* I *tel que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a,\ b \in I$ *avec* $a < b$*. Si* $|f'|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans* $[a,b]$*,* $q > 1$ *avec* $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p} = 1$ *et* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *avec* $\alpha > 0$*, alors on a*

i)

$$\left|\frac{\{(1-h)^{\alpha}+h^{\alpha}\}}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{w^-}f(a) + J^{\alpha}_{w^+}f(b)]\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{1+\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}M(b-a)^{\alpha}, \qquad \textit{pour tout } h \in]0,1[. \tag{1.19}$$

ii)

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{x^-}f(a) + J^{\alpha}_{x^+}f(b)]\right|$$

$$\leq \frac{M[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]}{(b-a)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\Gamma\left(p+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1+p+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \textit{pour tout } x \in [a,b]. \tag{1.20}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3, propriété du module et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left|\frac{\{(1-h)^{\alpha}+h^{\alpha}\}}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{w^-}f(a) + J^{\alpha}_{w^+}f(b)]\right|$$

$$\leq (b-a)^{\alpha}\left[(1-h)^{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tw+(1-t)a)\right|dt\right.$$

$$\left.+\ h^{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tw+(1-t)b)\right|dt\right]$$

$$\leq (b-a)^{\alpha}(1-h)^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+h^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\alpha}\left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\int_0^1 |f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\,h^{\alpha+1}\left(\int_0^1 |f'(tw+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f^{'}|^q$ est une fonction MT -convexe et $|f'(x)|\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$, alors on a :

$$\int_0^1 |f'(tw+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt$$

$$\leq \frac{\pi}{4}\left[|f'(w)|^q+|f'(a)|^q\right]\leq\frac{\pi M^q}{2}$$

et

$$\int_0^1 |f'(tw+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{\pi}{4}\left[|f'(w)|^q+|f'(a)|^q\right]\leq\frac{\pi M^q}{2}$$

Donc, on a :

$$\left|\frac{[(1-h)^{\alpha}+h^{\alpha}]}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{w^-}^{\alpha}f(a)+J_{w^+}^{\alpha}f(b)]\right|$$

$$\leq\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\alpha}\left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\frac{\pi M^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+h^{\alpha+1}\left(\frac{\pi M^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[(1-h)^{\alpha+1}+h^{\alpha+1}\right]M(b-a)^{\alpha}$$

$$\leq\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}M(b-a)^{\alpha}.$$

$ii)$ D'après le Lemme 1.4 et l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)]\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |t^{\alpha}-1||f'(tx+(1-t)a|dt$$

$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |1-t^{\alpha}||f'(tx+(1-t)b|dt$$

$$\leq\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t^{\alpha})^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f^{'}|^q$ est une fonction MT -convexe et $|f^{'}(x)| \leq M$, alors on a :

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right] dt$$
$$= \frac{\pi}{4}[|f'(x)|^q + |f'(a)|^q] \leq \frac{\pi}{2}M^q,$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|^q\right] dt$$
$$= \frac{\pi}{4}[|f'(x)|^q + |f'(a)|^q] \leq \frac{\pi}{2}M^q,$$

on a aussi

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 (1-s)^p s^{\frac{1}{\alpha}-1} ds = \frac{\Gamma(1+p)\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1+p+\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Alors on obtient

$$\left|\frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-}f(a) + J^\alpha_{x^+}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\Gamma(1+p)\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1+p+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi M^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\Gamma(1+p)\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1+p+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi M^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Remarque 1.5 1) *Dans le Théorème* 1.6, *si on choisit* $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ *dans* (1.20), *alors on trouve que*

$$\left|\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{M(b-a)^\alpha}{2^\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(1+p+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2) *Dans le Théorème* 1.6, *si on prend* $\alpha = 1$ *dans* (1.20), *alors on trouve l'inégalité* (1.6) *du Théorème* 1.2.

Théorème 1.7 [8, 5] *Soit* $f : I \subset [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieur de l'intervalle* I *telle que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a, b \in I$ *avec* $a < b$. *Si* $|f^{'}|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans* $[a,b]$, $q \geq 1$ *et* $|f^{'}(x)| \leq M$, *avec* $\alpha > 0$, *alors on a :*

i)

$$\left|\frac{\{(1-h)^{\alpha}+h^{\alpha}\}}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{w^-}^{\alpha}f(a)+J_{w^+}^{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2}\right)^{\frac{1}{q}}M(b-a)^{\alpha},\qquad \textit{pour tout } h\in]0,1[. \tag{1.21}$$

ii)

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq\frac{M[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]}{(b-a)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right]^{\frac{1}{q}},\qquad \textit{pour tout } x\in[a,b]. \tag{1.22}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3, propriété du module et l'utilisation de l'inégalité des puissances moyennes, on a :

$$\left|\frac{[(1-h)^{\alpha}+h^{\alpha}]}{(b-a)^{1-\alpha}}f(w)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{w^-}^{\alpha}f(a)+J_{w^+}^{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq(b-a)^{\alpha}\left\{(1-h)^{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tw+(1-t)a)\right|dt\right.$$
$$\left.+h^{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tw+(1-t)b)\right|dt\right\}$$
$$\leq(b-a)^{\alpha}\left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+h^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}(b-a)^{\alpha}\left[(1-h)^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha}|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+h^{\alpha+1}\left(\int_0^1 t^{\alpha}|f'(tw+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{1.23}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction MT -convexe dans $[a,b]$ et $|f'(x)|\leq M$, alors on a :

$$\int_0^1 t^{\alpha}|f'(tw+(1-t)a)|^q dt\leq\int_0^1 t^{\alpha}\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)|f'(w)|^q+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)|f'(b)|^b\right\}$$
$$\leq \frac{M^q}{2}\left\{\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}=\frac{M^q}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right) \tag{1.24}$$

et

$$\int_0^1 t^\alpha|f'(tw+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1 t^\alpha\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(w)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)|f'(w)|^q+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)|f'(b)|^b\right]$$
$$\leq \frac{M^q}{2}\left[\beta\left(\alpha+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{M^q}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right) \tag{1.25}$$

Si on utilise (1.24) et (1.25) dans (1.23) on obtient le résultat recherché

$ii)$ D'après le Lemme 1.4 et l'inégalité des puissances moyennes on obtient :

$$\left|\frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-}f(a)+J^\alpha_{x^+}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|t^\alpha-1||f'(tx+(1-t)a|dt+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|1-t^\alpha||f'(tx+(1-t)b|dt$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1(1-t^\alpha)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t^\alpha)|f'(tx+(1-t)a|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1(1-t^\alpha)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t^\alpha)|f'(tx+(1-t)b|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.26}$$

Maintenant en utilisant le fait que $|f^{'}|^q$ est une fonction MT -convexe et $|f'(x)|\leq M$, alors on a :

$$\int_0^1(1-t^\alpha)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \int_0^1(1-t)^\alpha\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(a)|^q\right]dt$$
$$\leq \frac{M^q}{2}\int_0^1(1-t)^\alpha\left(t^{1/2}(1-t)^{-1/2}+t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\right)dt$$
$$= \frac{M^q}{2}\left(\pi-\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right) \tag{1.27}$$

et

$$\int_0^1(1-t^\alpha)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1(1-t)^\alpha\left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}|f'(x)|^q+\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}|f'(b)|^q\right]dt$$
$$= \frac{M^q}{2}\left(\pi-\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right). \tag{1.28}$$

Substituons (1.27) et (1.28) dans (1.26) on obtient (1.22). ■

Remarque 1.6 1) *Dans le Théorème* 1.7, *si on choisit* $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ *dans* (1.22) *alors on trouve que :*

$$\left| \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b) \right] \right|$$
$$\leq \frac{M(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\alpha+1\right)} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

2) *Dans le Théorème* 1.7, *si on choisit* $\alpha = 1$ *dans* (1.22) *alors on trouve l'inégalité* (1.9) *du Théorème* 1.3.

Chapitre 2

Inégalité d'Hermite-Hadamard via un opérateur fractionnaire de type exponentielle

2.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard

Définition 2.1 *Soit $f \in L_1[a,b]$. Les intégrales fractionnaires I_a^α et I_b^α d'ordre $\alpha \in]0,1[$ sont respectivement définies par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_a^x \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-s)\right) f(s)ds,\ x > a \tag{2.1}$$

et

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_x^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-x)\right) f(s)ds,\ x < b. \tag{2.2}$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\lim_{\alpha\to 1} I_a^\alpha f(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad \lim_{\alpha\to 1} I_b^\alpha f(x) = \int_x^b f(s)ds,$$

De plus, en vue de :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-s)\right) = \delta(x-s),$$

On en déduit que

$$\lim_{\alpha\to 0} I_a^\alpha f(x) = f(x),\ \lim_{\alpha\to 0} I_b^\alpha f(x) = f(x).$$

Nous fixons $\rho = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)$.

Théorème 2.1 [1] *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive avec* $0 \leq a < b$ *et* $f \in L_1[a,b]$. *Si* f *est une fonction convexe dans* $[a.b]$, *alors les inégalités suivantes pour les intégrales fractionnaires* (2.1) *et* (2.2) *sont vérifiées :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho))}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.3}$$

Preuve. Puisque f est une fonction convexe, pour $x,\, y \in [a,b]$, avec $\lambda = \dfrac{1}{2}$ on trouve que :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.4}$$

laquelle, pour $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, prend la forme :

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(ta + (1-t)b\right) + f((1-t)a + tb). \tag{2.5}$$

En multipliant les deux côtés de $(2,5)$ par $\exp(-\rho t)$ puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-\exp(-\rho))}{\rho} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 \exp(-\rho t)[f\left(ta+(1-t)b\right) + f((1-t)a+tb)]dt \\
&= \int_0^1 \exp(-\rho t) f\left(ta+(1-t)b\right) dt + \int_0^1 \exp(-\rho t) f((1-t)a+tb)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-s)\right) f(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-a)\right) f(s)ds \\
&= \frac{\alpha}{b-a}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)].
\end{aligned}$$

En conséquence nous obtenons :

$$\frac{2(1-\exp(-\rho))}{\rho} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{b-a}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)].$$

Donc la première inégalité de (2.3) est établie.

Pour la preuve de la deuxième inégalité de (2.3), on note d'abord que f est une fonction convexe. Alors, pour $t \in [0,1]$, on a

$$f\left(ta + (1-t)b\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

et

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b).$$

En additionnant les deux inégalités précédentes, on a :

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \leq f(a)+f(b). \tag{2.6}$$

En multipliant les deux côtés de $(2,6)$ par $\exp(-\rho t)$ puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{(1-\exp(-\rho))}{\rho}[f(a)+f(b)] \geq &\int_0^1 \exp(-\rho t) f(ta+(1-t)b)\,dt \\ &+\int_0^1 \exp(-\rho t) f((1-t)a+tb)\,dt,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\alpha}{b-a}[I_a^\alpha f(b)+I_b^\alpha f(a)] \leq \frac{(1-\exp(-\rho))}{\rho}[f(a)+f(b)].$$

D'où la deuxième inégalité de (2.3) est prouvée. Ceci achève la preuve du Théorème 2.1. ∎

Corollaire 2.1 *soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction positive avec $0\leq a<b$ et $f\in L_1[a,b]$. Si f est une fonction concave dans $[a,b]$, alors les inégalités suivantes pour les intégrales fractionnaires* (2.1) *et* (2.2) *sont vérifiées :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho))}[I_a^\alpha f(b)+I_b^\alpha f(a)] \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Remarque 2.1 *Pour $\alpha\to 1$, on trouve que :*

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho))} = \frac{1}{2(b-a)}.$$

Ainsi, l'inégalité d'Hermite-Hadamard $(*)$ déduite du Théorème 2.1 à la limite $\alpha\to 1$.

2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard-Fejér

Théorème 2.2 [1] *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction convexe et intégrable avec $a<b$. Si $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, (i.e. $w(a+b-x)=w(x)$), alors on obtient les inégalités suivantes :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_a^\alpha w(b)+I_b^\alpha w(a)] \leq [I_a^\alpha (fw)(b)+I_b^\alpha (fw)(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}[I_a^\alpha w(b)+I_b^\alpha w(a)]. \tag{2.7}$$

Preuve. Puisque f est une fonction convexe sur $[a,b]$, on utilise l'inégalité (2.5) pour tout $t \in [0,1]$. En multipliant les deux côtés de (2.5) par

$$\exp(-\rho t)w((1-t)a+tb), \tag{2.8}$$

puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \exp(-\rho t)w((1-t)a+tb)dt \\
&\leq \int_0^1 \exp(-\rho t)f(ta+(1-t)b)w((1-t)a+tb)dt \\
&+ \int_0^1 \exp(-\rho t)f((1-t)a+tb)w((1-t)a+tb)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-a)\right) f(a+b-s)w(s)ds \\
&+ \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-a)\right) f(s)w(s)ds \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-s)\right) f(s)w(a+b-s)ds + \frac{\alpha}{b-a} I_b^\alpha[f(a)w(a)] \\
&= \frac{\alpha}{b-a}\left\{I_a^\alpha\left[f(b)w(b)\right] + I_b^\alpha\left[f(a)w(a)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \exp(-\rho t)w((1-t)a+tb)dt \leq \frac{\alpha}{b-a}[I_a^\alpha\left(f(b)w(b)\right) + I_b^\alpha\left(f(a)w(a)\right)].$$

Puisque w est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, on a :

$$I_a^\alpha w(b) = I_b^\alpha w(a) = \frac{1}{2}\left[I_a^\alpha w(b) + I_b^\alpha w(a)\right].$$

Donc, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[I_a^\alpha w(b) + I_b^\alpha w(a)\right] \leq I_a^\alpha\left[f(b)w(b)\right] + I_b^\alpha\left[f(a)w(a)\right].$$

Ceci établit la première inégalité du Théorème 2.2.

Afin de prouver la deuxième inégalité de (2.7), on s'appuie sur l'inégalité (2.6) pour tout $t \in [0,1]$. Comme f est une fonction convexe, en multipliant les deux côtés de $(2,6)$ par (2.8) puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 \exp(-\rho t)f(ta+(1-t)b)w((1-t)a+tb)dt$$

$$+\int_0^1 \exp(-\rho t)u((1-t)a+tb)w((1-t)a+tb)dt$$
$$\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 \exp(-\rho t)w((1-t)a+tb)dt$$

En conséquence, on obtient :

$$I_a^\alpha[f(b)w(b)]+I_b^\alpha[f(a)w(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[I_a^\alpha w(b)+I_b^\alpha w(a)\right].$$

Donc la preuve du Théorème 2.2 est terminée. ■

Corollaire 2.2 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction concave et intégrable avec $a<b$. Si $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, (i.e. $w(a+b-x)=w(x)$), alors on obtient les inégalités suivantes :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[I_a^\alpha w(b)+I_b^\alpha w(a)\right] \geq \left[I_a^\alpha\left(fw\right)(b)+I_b^\alpha\left(fw\right)(a)\right]$$
$$\geq \frac{f(a)+f(b)}{2}[I_a^\alpha w(b)+I_b^\alpha w(a)].$$

Remarque 2.2 *Du Théorème 2.2 avec $\alpha\to 1$, on obtient l'inégalité d'Hermite-Hadamard-Féjer suivante :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(y)dy \leq \int_a^b f(y)w(y)dy \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(y)dy$$

où $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe et $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$.

2.3 Inégalités de type Dragomir-Agarwal

Théorème 2.3 [1] *Soit $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I . Si $|f'|$ est une fonction convexe dans $[a,b]$ où $a,\ b\in I$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho))}[I_a^\alpha f(b)+I_b^\alpha f(a)]\right| \leq \frac{b-a}{2\rho}\tanh\left(\frac{\rho}{4}\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). \quad (2.9)$$

Preuve. Pour $f'\in L_1[a,b]$, par une intégration par parties c'est facile à trouver :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho))}[I_a^\alpha f(b)+I_b^\alpha f(a)]$$

$$= \frac{b-a}{2(1-\exp(-\rho)}\left[\int_0^1 \exp(-\rho t)f'(ta+(1-t)b)dt - \int_0^1 \exp(-\rho(1-t))f'(ta+(1-t)b)dt\right] \tag{2.10}$$

Puis, en utilisant (2.10) et la convexité de $|f^{'}|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho)}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \frac{|\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t))|}{1-\exp(-\rho)}|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \frac{|\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t))|}{1-\exp(-\rho)}t|f'(a)|dt \\
&+\frac{b-a}{2}\int_0^1 \frac{|\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t))|}{1-\exp(-\rho)}(1-t)|f'(b)|dt \\
&= \frac{b-a}{2}|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t))}{1-\exp(-\rho)}tdt \\
&+\frac{b-a}{2}|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\exp(-\rho(1-t))-\exp(-\rho t)}{1-\exp(-\rho)}tdt \\
&+\frac{b-a}{2}|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t))}{1-\exp(-\rho)}(1-t)dt \\
&+\frac{b-a}{2}|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\exp(-\rho(1-t))-\exp(-\rho t)}{1-\exp(-\rho)}(1-t)dt \\
&= \frac{b-a}{2(1-\exp(-\rho))}[|f'(a)|(Q_1+Q_2)+|f'(b)|(Q_3+Q_4)]
\end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1-\alpha}{2(1-\exp(-\rho)}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2(1-\exp(-\rho))}[|f'(a)|(Q_1+Q_2)+|f'(b)|(Q_3+Q_4)],
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\exp(-\rho t)-\exp(-\rho(1-t)))tdt \\
&= -\frac{\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}(1-\exp(-\rho)),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$Q_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\exp(-\rho(1-t))-\exp(-\rho t))tdt$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \exp(-\rho)\right) - \frac{1}{\rho^2}(1 - \exp(-\rho)), \tag{2.13}$$

$$Q_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} (\exp(-\rho t) - \exp(-\rho(1-t)))(1-t)dt$$

$$= -\frac{\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)}{\rho} + \frac{1}{\rho}(1 + \exp(-\rho)) - \frac{1}{\rho^2}(1 - \exp(-\rho)), \tag{2.14}$$

et

$$Q_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\exp(-\rho t) - \exp(-\rho(1-t)))(1-t)dt$$

$$= -\frac{\exp\left(-\frac{\rho}{2}\right)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}(1 - \exp(-\rho)). \tag{2.15}$$

En insérant la valeur de $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ donnée par (2.12) – (2.15) dans (2.11), on obtient l'inégalité (2.9), cela complète la preuve. ■

Corollaire 2.3 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I. Si $|f'|$ est une fonction concave dans $[a, b]$ où a, $b \in I$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1-\alpha}{2(1 - \exp(-\rho))}[I_a^\alpha f(b) + I_b^\alpha f(a)] \right| \geq \frac{b-a}{2\rho} \tanh\left(\frac{\rho}{4}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Remarque 2.3 *Pour $\alpha \to 1$, On observe que :*

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{1-\alpha}{2(1 - \exp(-\rho))} = \frac{1}{2(b-a)} \quad et \quad \lim_{\alpha \to 1} \frac{b-a}{2\rho} \tanh\left(\frac{\rho}{4}\right) = \frac{b-a}{8}.$$

Alors, du Théorème 2.3 avec $\alpha \to 1$, on obtient l'inégalité de Dragomir-Agarwal suivante :

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y)dy \right| \leq \frac{b-a}{8}(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

telle que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I avec $a, b \in I$.

Chapitre 3

Fonctions $beta$-convexes

Dans ce chapitre on donne quelques résultats concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions $beta$-convexe

3.1 Inégalités pour les fonctions $beta$-convexes

Définition 3.1 *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartienne à la classe $P(I)$ si elle est positive et pour tout u, $v \in I$ avec $u < v$ et $t \in [0,1]$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$f(tu + (1-t)v) \leq f(u) + f(v). \tag{3.1}$$

Définition 3.2 *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de Godunova-Levin si :*

$$f(tu + (1-t)v) \leq \frac{f(u)}{t} + \frac{f(v)}{1-t} \tag{3.2}$$

pour tout u, $v \in I$ avec $u < v$ et $t \in]0,1[$.

Définition 3.3 *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de s-Godunova-Levin de première espèce si :*

$$f(tu + (1-t)v) \leq \frac{f(u)}{t^s} + \frac{f(v)}{1-t^s} \tag{3.3}$$

pour tout u, $v \in I$ avec $u < v$ et $t \in]0,1[$, $s \in]0,1]$.

Il est évident que pour $s = 1$ la définition des fonctions de s-Godunova-Levin de première espèce se réduit à la définition des fonctions de Godunova-Levin .

Définition 3.4 *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de s-Godunova-Levin de seconde espèce si :*

$$f(tu + (1-t)v) \leq \frac{f(u)}{t^s} + \frac{f(v)}{(1-t)^s} \tag{3.4}$$

pour tout u, $v \in I$ avec $u < v$ et $t \in \ ]0,1[$, $s \in]0,1[$.

Il est évident que pour $s = 0$, les fonctions de s-Godunova-Levin de seconde espèce se ramènent à des fonctions de $P(I)$.

Si $s = 1$, elles se réduits à des fonctions de Godunova-levin

Définition 3.5 *Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$, est dite s-convexe au premier sense si :*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v). \tag{3.5}$$

pour tout u, $v \in [0, \infty[$, α, $\beta \geq 0$ avec $\alpha^s + \beta^s = 1$. Pour certains $s \in]0,1]$ fixé. Cette classe des fonctions est notée K_s^1.

Définition 3.6 *Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ est dite s-convexe au deuxième sense si :*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v). \tag{3.6}$$

pour tout u, $v \in [0, \infty[$, α, $\beta \geq 0$ avec $\alpha + \beta = 1$. Pour certains $s \in]0,1]$ fixé. Cette classe des fonctions est notée K_s^2.

Cette définition de la s-convexité considérée par Breckner, où le problème a été considéré lorsque les fonctions rationnelles s-convexes sont s-convexes. Aussi, on note qu'on peut facilement voir que pour $s = 1$, la s-convexité (dans les deux senses) se réduit à la convexité ordinaire des fonctions définies sur $[0, +\infty[$.

Définition 3.7 *Soit $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, $h \neq 0$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe, ou que f appartienne à la classe $SX(h,\ I)$, si f est positive et pour tout u, $v \in I$ avec $\alpha \in]0,1[$, on a :*

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq h(\alpha) f(u) + h(1-\alpha) f(v). \tag{3.7}$$

Si l'inégalité (3.7) est inversée, alors f est dite h-concave, c'est à dire, $f \in SV(h,\ I)$.

Il est clair que si $h(\alpha) = \alpha$, *alors toutes les fonctions positives convexes appartiennent à* $SX(h,\ I)$ *et les fonctions positives concaves appartiennent à* $SV(h, I)$, *si* $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, *alors* $SX(h, I) = Q(I)$, *si* $h(\alpha) = 1$, *alors* $SX(h, I) \supseteq P(I)$, *si* $h(\alpha) = \alpha^s$, *où* $s \in]0, 1[$, *alors* $SX(h, I) \supseteq K_s^2$.

Remarque 3.1 *Soit* h *une fonction positive telle que :*

$$h(\alpha) \geq \alpha$$

pour tout $\alpha \in]0, 1[$.*par exemple, la fonction* $h_k(v) = v^k$ *où* $k \leq 1$ *et* $v > 0$ *a cette propriété. Si* f *est une fonction positive et convexe dans* I, *alors pour tout* $u,\ v \in I$, $\alpha \in]0, 1[$ *on a :*

$$f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v) \leq h(\alpha)f(u) + h(1 - \alpha)f(v).$$

Donc $f \in SX(h, I)$. *De même, si la fonction* h *a la propriété :* $h(\alpha) \leq \alpha$ *pour tout* $\alpha \in]0, 1[$, *alors n'importe quelle fonction* f *positive et concave elle appartienne à la classe* $SV(h, I)$.

Définition 3.8 *Une fonction* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite une fonction beta-convexe sur* I, *si l'inégalité suivante est vérifieé :*

$$f(tu + (1 - t)v) \leq t^p (1 - t)^q f(u) + t^q (1 - t)^p f(v). \tag{3.8}$$

pour tout $u,\ v \in I$ *et* $t \in [0, 1]$, *où* $p,\ q > -1$. *On dit que* f *est beta-concave si* $(-f)$ *est beta-convexe.*

Remarque 3.2 *Dans la définition ci-dessus si* $(p,\ q) = \{(0,\ 0), (1,\ 0), (-1,\ 0), (-s,\ 0), (s,\ 0)\}$, *alors on obtient respectivement :* $P(I)$, *convexité ordinaire, une fonction de Godunova-Levin, une fonction de* s*-Godunova-Levin de seconde espèce, une fonction* s*-convexe de deuxième sense.*

Théorème 3.1 [10] *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction beta-convexe,* $p,\ q > -1$ *et* $a,\ b \in I$ *avec* $a < b$. *Alors la double inégalité suivante est vérifiée :*

$$2^{p+q-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} [f(a) + f(b)]. \tag{3.9}$$

Si f *est une fonction positive beta-concave, alors l'inégalité* (3.9) *est inversée.*

Preuve. En utilisant la *beta*-convexité de f dans I, alors on a :

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^p (1-t)^q f(a) + t^q (1-t)^p f(b) \tag{3.10}$$

Intégrons les deux côtés de (3.10), nous avons :

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 \left[t^p (1-t)^q f(a) + t^q (1-t)^p f(b)\right] dt$$

$$= f(a)\int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt + f(b)\int_0^1 t^q (1-t)^p \, dt$$

$$= f(a)\beta(p+1, q+1) + f(b)\beta(p+1, q+1)$$

$$= \beta(p+1, q+1)\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\left[f(a)+f(b)\right]$$

En utilisant (3.10) et en substituant $x = ta+(1-t)b$, $y = (1-t)a+tb$, on obtient :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{p+q}}\left[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\right] dt.$$

Intégrons les deux côtés, nous avons :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2^{p+q}}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2^{p+q}}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right] = \frac{1}{2^{p+q-1}(b-a)}\int_a^b f(x)dx,$$

ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.3 1) *Si on choisit* $p=0$, $q=0$ *dans* (3.9) *alors on obtient l'inégalité suivante pour les fonctions de classe* $P(I)$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)+f(b)].$$

2) *Si on choisit* $p=0$, $q=1$ *ou* $p=1$, $q=0$ *dans* (3.9), *alors* (3.9) *est réduite à l'inégalité d'Hermite-Hadamard suivante :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3) *Si on choisit* $p = 1$, $q = 1$ *dans* (3.9) *alors on obtient l'inégalité suivante* :

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq \left[\frac{f(a)+f(b)}{6}\right]$$

4) *Si on choisit* $p = s$, $q = 0$ *et* $s \in]0,1]$ *dans* (3.9) *alors on obtient la double inégalité suivante* :

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq \left[\frac{f(a)+f(b)}{s+1}\right]$$

5) *Si on choisit* $p = 2$, $q = 2$ *et* $s \in]0,1]$ *dans* (3.9) *alors on obtient la majoration suivante* :

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq \left[\frac{f(a)+f(b)}{30}\right]$$

6) *Si on choisit* $p = 10$, $q = 10$ *dans* (3.9) *alors on obtient la majoration suivante* :

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \leq \left[\frac{f(a)+f(b)}{3879876}\right]$$

Théorème 3.2 [10] *Soit* f *et* g *deux fonctions à valeurs réelles, positives et beta-convexes sur* $[a,b]$ *et* p, $q > -1$. *Alors, on a :*

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(2q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}M(a,b) + \frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}N(a,b), \quad (3.11)$$

où

$$M(a,b) = f(a)g(a)dx + f(b)g(b) \quad \textit{et} \quad N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Preuve. On utilisons la *beta*-convexité de f et g sur $[a,b]$,on a :

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^p(1-t)^q f(a) + t^q(1-t)^q f(b) \quad (3.12)$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq t^p(1-t)^q g(a) + t^q(1-t)^q g(b) \quad (3.13)$$

de (3.12) et (3.13) on trouve :

$$f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)$$

$$\leq [t^p(1-t)^q f(a) + t^q(1-t)^q f(b)] \times [t^p(1-t)^q g(a) + t^q(1-t)^q g(b)] \quad (3.14)$$

En intégrant les deux cotés de (3.14), on trouve :

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[t^p(1-t)^q f(a) + t^q(1-t)^q f(b)\right]\left[t^p(1-t)^q g(a) + t^q(1-t)^q g(b)\right] dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{2p}(1-t)^{2q} f(a)g(a)dt + \int_0^1 t^{2q}(1-t)^{2p} f(b)g(b)dt$$

$$+ \int_0^1 t^{p+q}(1-t)^{p+q} f(b)g(a)dt + \int_0^1 t^{p+q}(1-t)^{p+q} f(a)g(b)dt.$$

Alors on obtient que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \beta(2p+1, 2q+1)[f(a)g(a) + f(b)g(b)]$$

$$+\beta(p+q+1, p+q+1)[f(b)g(a) + f(a)g(b)].$$

En utilisant la relation suivante : $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, pour tout x, $y > 0$ et les notations de $M(a,b)$ et $N(a,b)$, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Remarque 3.4 1) *Si nous choisissons* $p = 0$, $q = 0$ *dans* (3.11), *alors on obtient l'inégalité suivante pour les fonctions de classe* $P(I)$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq [M(a,b) + N(a,b)].$$

2) *Si nous choisissons* $p = 0$, $q = 1$ *ou* $p = 1$, $q = 0$ *dans* (3.11), *alors* (3.11) *se réduite à* [7, *Théorème* 1].

3) *Si nous choisissons* $p = s$, $q = 0$ *dans* (3.11), *alors on obtient l'inégalité suivante pour les fonctions* s*-convexe au deuxième sense :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2s+1}M(a,b) + \frac{(s!)^2}{(2s+1)!}N(a,b).$$

4)*Si nous choisissons* $p = 1$, $q = 1$ *dans* (3.11), *alors* (3.11) *se réduite à* [11, *Théorème* 3].

5) *Si nous choisissons* $p = 2$, $q = 2$ *dans* (3.11), *alors on obtient la majoration suivante :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[\frac{M(a,b) + N(a,b)}{630}\right].$$

6) *Si nous choisissons* $p = 10$, $q = 10$ *dans* (3.11), *alors on obtient l'inégalité suivante :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[\frac{M(a,b) + N(a,b)}{5651707681620}\right].$$

Théorème 3.3 [10] *Soit f et g deux fonctions à valeurs reélles, positives et beta-convexes sur $[a,b]$ et p, $q > -1$. Alors, on a :*

$$2^{2(p+q)-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$+\frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}M(a,b) + \frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(2q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}N(a,b). \tag{3.15}$$

Preuve. En substituant $a = ta + (1-t)b$, $b = (1-t)a + tb$, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$
$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right).$$

Puisque f et g sont *bêta*-convexes sur $[a,b]$, alors on obtient :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \times g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2^{p+q}}[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)] \times \frac{1}{2^{p+q}}[g(ta+(1-t)b) + g((1-t)a+tb)]$$
$$= \frac{1}{2^{2p+2q}}[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)]$$
$$+\frac{1}{2^{2p+2q}}\{[t^p(1-t)^q f(a) + t^q(1-t)^p f(b)][(1-t)^p t^q g(a) + (1-t)^q t^p g(b)]$$
$$+[(1-t)^p t^q f(a) + (1-t)^q t^p f(b)][t^p(1-t)^q g(a) + t^q(1-t)^p g(b)]\}$$
$$= \frac{1}{2^{2p+2q}}[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)]$$
$$+\frac{1}{2^{2p+2q-1}}[(1-t)^{p+q}t^{p+q}(f(a)g(a) + f(b)g(b))$$
$$+t^{2p}(1-t)^{2q}(f(a)g(b) + f(b)g(a))]. \tag{3.16}$$

Comme expliqué dans la preuve de l'inégalité (3.11) donnée ci-dessus on intègre les deux membres de (3.16) sur $[0,1]$ et obtient :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2^{2p+2q}}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)dt\right]$$

$$+\frac{1}{2^{2p+2q-1}}\left[[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1(1-t)^{p+q}t^{p+q}dt\right.$$
$$\left.+[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1 t^{2p}(1-t)^{2q}dt\right]$$
$$\leq\frac{1}{2^{2p+2q-1}}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt$$
$$+\frac{1}{2^{2p+2q-1}}[\beta(p+q+1,p+q+1)M(a,b)+\beta(2p+1,2q+1)N(a,b)$$
$$\leq,\frac{1}{2^{2p+2q-1}}\left[\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dt+\frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}M(a,b)\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(2q+1)}{\Gamma(2p+2q+2)}N(a,b)\right].$$

Maintenant, multiplions les deux cotés par $2^{2p+2q-1}$ on trouve (3.15). ■

Remarque 3.5 1) *Si nous choisissons* $p=0$, $q=1$ *ou* $p=1$, $q=0$ *dans* (3.15), *alors* (3.15) *se réduité à* [7, *Théorème* 1].

2) *Si nous choisissons* $p=1$, $q=1$ *dans* (3.15), *alors* (3.15) *se réduite à* [11, *Théorème* 4].

Chapitre 4

Applications

4.1 Applications aux moyennes spéciales

Rappelons les moyennes suivantes:

(1) la moyenne arithmétique :

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2};\ a,b \in \mathbb{R}_+;$$

(2) la moyenne logarithmique :

$$L(a,b) = \frac{b-a}{\ln|b| - \ln|a|};\ \ |a| \neq |b|\,,\ a,b \neq 0,\ a,b \in \mathbb{R}_+;$$

(3) la moyenne logarithmique généralisée :

$$L_n(a,b) = \left[\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right]^{\dfrac{1}{n}};\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0\},\ a,b \in \mathbb{R}_+,\ a \neq b$$

Maintenant on utilise les résultats du chapitre 1 pour donner quelques applications aux moyennes spéciales des nombres réels.

Proposition 4.1 *Soit* a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$. *Alors, pour tout* $q \geq 1$, *on a*

$$|A(a^n,b^n) - L_n^n(a,b)| \leq \frac{M\pi^{\frac{1}{q}}}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}}(b-a), \tag{4.1}$$

$$\left|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)\right| \leq M\pi^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} (b-a) \tag{4.2}$$

et

$$\left|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)\right| \leq M \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(q+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} (b-a). \tag{4.3}$$

Preuve. L'assertion découle de l'estimation (1.7), (1.11) et (1.12) pour $f(x) = x^n$, $x > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$. ■

Proposition 4.2 *Soit* a, $b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$. *Alors, pour tout* $q \geq 1$, *on a :*

$$\left|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a,b)\right| \leq \frac{M\pi^{\frac{1}{q}}}{(1+p)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} (b-a), \tag{4.4}$$

$$\left|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a,b)\right| \leq M\pi^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} (b-a), \tag{4.5}$$

et

$$\left|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a,b)\right| \leq M \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(q+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} (b-a). \tag{4.6}$$

Preuve. L'assertion découle de l'estimation (1.7), (1.11) et (1.12) pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ ■

4.2 Quelques estimations d'erreur pour la fomule trapézoidale

Notation 4.1 *Soit* $d = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ *une subdivision de l'intervalle* $[a,b]$ *et considérons la formule de quadrature suivante:*

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,d) + E(f,d), \tag{4.7}$$

où

$$T(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

pour la résolution trapézoïdale et $E(f,d)$ *désigne l'erreur approchée associée.*

Proposition 4.3 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieure de l'intervalle* I *telle que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a,\ b \in I$ *avec* $a < b$ *et* $|f^{'}|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans* $[a,b]$, *où* $p > 1$ *avec* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Alors dans* (4.7) *pour toute subdivision* d *de* $[a,b]$ *et* $|f^{'}(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *l'estimation de l'erreur trapézoïdale satisfait :*

$$|E(f,d)| \leq M \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i). \tag{4.8}$$

Preuve. En appliquant l'estimation (1.7) sur le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ de la subdivision, on a :

$$\left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{1}{x_{i+1} + x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right| \leq M \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{q}} (x_{i+1} - x_i).$$

Donc dans (4.7), on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - T(f,d) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right\} \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right| \\
&\leq M \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i),
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.4 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable sur* I° *l'intérieure de l'intervalle* I *telle que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a,\ b \in I$ *avec* $a < b$ *et* $|f^{'}|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans* $[a,b]$, *où* $q \geq 1$ *avec* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Alors dans* (4.7) *pour toute subdivision* d *de* $[a,b]$ *et* $|f^{'}(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *l'estimation de l'erreur trapézoïdale satisfait :*

$$|E(f,d)| \leq M \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i). \tag{4.9}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.3 en utilisant l'estimation (1.11) ■

Proposition 4.5 *Soit* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *l'intérieure de l'intervalle* I *telle que* $f' \in L_1[a,b]$ *et* $a,\ b \in I$ *avec* $a < b$ *et* $|f^{'}|^q$ *est une fonction* MT *-convexe dans*

$[a, b]$; *où* $q \geq 1$ *avec* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Alors dans* (4.7). *pour toute subdivision* d *de* $[a, b]$ *et* $|f^{'}(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in [a, b]$, *l'estimation de l'erreur trapézoïdale satisfait :*

$$|E(f, d)| \leq M \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(q+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i). \tag{4.9}$$

Preuve. la preuve est similaire à celle de la proposition 4.3 en utilisant l'estimation (1.12) ■

Bibliographie

[1] B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane et al, Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals. Journal of Computational and Applied Mathematics 353 (2019) 120-129.

[2] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, Modelling 57 (2013) 2403-2407

[3] L. Fejér, Uberdie Fourierreihen, II, Math. Naturwise. Anz Ungar. Akad. Wiss. 24 (1906) 369-390, (in Hungarian)

[4] H. Kavurmaci, M. Avci, M. E. Özdemir, New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications, J. Inequal. Appl., 2011 (2011), 11 pages. 1, 2-1

[5] W. J. Liu, W. S. Wen, J. K. Park, Hermite-Hadamard type inequalities for MT-convex functions via classiacal integrals and fractional integrals, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 766-777

[6] M. E. Özdemir, M. Avci, Havva Kavurmaci, Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex and s-concave functions via fractional integrals, arXiv, 2012 (2012), 9 pages. 3

[7] B. G. Pachpatte, On some inequalities for some convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6(E) 2003

[8] J. K. Park, Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for MT-Convex Functions via Classical and Riemann -Liouville Fractional Integrals, Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 101,5011-5026

[9] MZ. Sarikaya et al. /Mathematical and Computer Modelling 57 (2013) 2403-2407

[10] M. Tunc, Ü. Sanal and E. Göv : Some Hermite-Hadamard inequalities for $beta$-convex and its fractional applications, NTMSCI 3, No. 4, 18-33 (2015)

[11] M. Tunc, E. Göv, Ü. Sanal, On tgs-convex function and their inequalities, Facta Univ. Ser. Math. Inform. Accepted.