

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**  
**Université 8 Mai 1945 Guelma**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**  
**et des Sciences de la Matière**  
**Département de Mathématiques**



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

**Boudraà Hanen**

## **Intitulé**

**Etude de cycles limites des champs de vecteurs  
polynômiaux par la méthode de moyennisation**

Dirigé par :

**Dr. Menaceur Amor**

**Devant le jury**

**PRESIDENT**  
**RAPPORTEUR**  
**EXAMINATEUR**

**Dr. Bousstila Nadjib**  
**Dr. Menaceur Amor**  
**Dr. Bendjazia Nassima**

**Prof**  
**MCA**  
**MCB**

**Univ-Guelma**  
**Univ-Guelma**  
**Univ-Guelma**

**Session juillet 2022**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notion préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1	Système dynamique et points critiques . . . . .	5
1.2	Portrait de phase . . . . .	6
1.3	Théorème de linéarisation et la stabilité de point d'équilibre . . . . .	6
1.3.1	Linéarisation et matrice jacobienne . . . . .	9
1.4	Cycle limite . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Théorie de moyennisation</b>	<b>16</b>
2.1	Méthode de moyennisation et solutions périodiques . . . . .	17
2.2	Méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	17
2.3	Méthode de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels polynômiaux par la méthode de moyennisation</b>	<b>27</b>
3.1	Le nombre maximum de cycles limites d'une famille de systèmes différentiels . . . . .	28
3.1.1	Présentation du problème . . . . .	28
3.1.2	Preuve du théorème 3.1.1 . . . . .	28
3.1.3	Application . . . . .	31
3.1.4	Preuve du théorème 3.1.2 . . . . .	32
3.1.5	Application . . . . .	38
3.2	Perturbation et cycles limites pour une classe généralisée de systèmes de Kukles . . . . .	40
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	40
3.2.2	Preuve du théorème 3.2.1 . . . . .	41

---

# Résumé

Ce mémoire s'intéresse à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, on étudie deux classes de systèmes différentiels en utilisant le théorème de moyennisation du premier et du second ordre.

La première classe concerne l'étude des systèmes différentiels polynomiaux de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{1\ell}(x) + f_{1\ell}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{2\ell}(x) + f_{2\ell}(x)y) \end{cases},$$

pour chaque  $\ell = 1, 2$ ,  $g_{1\ell}(x)$ ,  $f_{1\ell}(x)$ ,  $g_{2\ell}(x)$  et  $f_{2\ell}(x)$  sont de degré 4 et  $\varepsilon$  suffisamment petit.

La deuxième classe concerne l'étude des systèmes différentiels de Kukles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(q(x, y) - A), \end{cases}$$

où  $A > 0$  et le polynôme  $q(x, y)$  d'ordre  $n - 2 \geq 1$  et  $q(0, 0) = 0$ .

**Mots clés :** Cycle limite, système différentiel polynomial, système de Kukles, méthode de moyennisation.

---

# Abstract

This thesis is interested to the study of the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of a small parameter. More specifically, we study two classes of differential systems using the averaging theory of first and second order.

The first class studied the polynomial differentii systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{1\ell}(x) + f_{1\ell}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{2\ell}(x) + f_{2\ell}(x)y) \end{cases},$$

where  $f_{1\ell}(x)$ ,  $g_{1\ell}(x)$ ,  $f_{2\ell}(x)$  and  $g_{2\ell}(x)$  have degree 4 for each  $\ell = 1, 2$ , and  $\varepsilon$  a small paramater.

The second class studied the polynomial Kukles differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(q(x, y) - A), \end{cases}$$

where  $A > 0$ , the polynomial  $q(x, y)$  has degree  $n - 2 \geq 1$  and  $q(0, 0) = 0$ .

**Keywords** : Limit Cycle, polynomial differential system, Kukles system, Averaging theory.

## ملخص

تتناول هذه الأطروحة دراسة العدد الأكبر للحلول الدورية المعزولة لجمل معادلات تفاضلية متعلقة بمعامل صغير، و سنخصص دراستنا لقسمين من الجمل التفاضلية باستخدام طريقة الوسيط من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية.

القسم الأول نهتم فيه بدراسة الجمل التفاضلية لكثير حدود من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{1\ell}(x) + f_{1\ell}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{2\ell}(x) + f_{2\ell}(x)y) \end{cases} ,$$

من أجل  $\ell=1,2$  ،  $f_{1\ell}(x)$  ،  $g_{1\ell}(x)$  ،  $f_{2\ell}(x)$  و  $g_{2\ell}(x)$  كثيرات حدود من الدرجة 4 ،  $\varepsilon$  وسيط صغير.

القسم الثاني نهتم بدراسة الجمل التفاضلية لكوكل (Kukles) من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(q(x, y) - A), \end{cases}$$

حيث  $A > 0$  و  $P(x, y)$  كثير حدود من الدرجة  $n-2 \geq 1$  مع  $q(0,0)=0$ .

**الكلمات الرئيسية:** الحلول الدورية المعزولة، المعادلة التفاضلية لكثير حدود، المعادلة التفاضلية لكوكل، طريقة المتوسط.

---

# Introduction

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie... Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Dans le cadre choisi ici, celui de lois déterministes en temps continu, cette loi d'évolution prend la forme d'une équation différentielle.

## Systèmes différentiels dans le plan

Supposons qu'une soufflerie établisse sur une portion de plan un système de courants d'air constant dans le temps et que l'on puisse connaître en chaque point la direction et la force du vent (c'est-à-dire en fait son vecteur vitesse). Si une plume est lâchée en un point du plan, elle sera entraînée par le vent et suivra une trajectoire bien déterminée à chaque instant, cette trajectoire sera tangente au vecteur vitesse du vent au point considéré. Connaissant le système de courants d'air, que peut-on prévoir au sujet de ces trajectoires ?

En termes mathématiques abstraits, nous nous donnons un champ de vecteurs sur une portion du plan par deux fonctions d'une partie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  (ses composantes) :  $f$  et  $g$ . Une trajectoire (ou orbite) sera définie par deux fonctions dérivables  $x(t)$  et  $y(t)$  définies sur un interval  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et ces fonctions seront assujéties à satisfaire les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

Dans un autre exemple, le champ de vecteurs du modèle proie-prédateur de Lotka Volterra est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(-c + dx), \end{cases}$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des paramètres positifs.

Le champ de vecteurs du modèle proie-prédateur de Rosenzweig-McArthur est quant à lui donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{bxy}{x+s}, \\ \dot{y} = y(\frac{cx}{x+s} - d), \end{cases}$$

où  $r$ ,  $K$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $s$  sont des paramètres positifs.

---

Dans ces exemples, le champ de vecteurs donne les vitesses instantanées auxquelles changent les densités des deux populations  $x(t), y(t)$ . À chaque instant  $t$ , l'état du système formé par ces deux populations est complètement caractérisé par le point  $(x(t), y(t))$  dans le plan. Puisque les densités de populations sont des nombres positifs ou nuls, l'espace d'état qui nous intéresse est le quadrant positif  $\mathbb{R}_+^2$ .

Le type de problème qui nous intéresse nous conduit à l'étude de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

De tels systèmes sont dits «autonomes», parce que les fonctions  $f$  et  $g$  ne dépendent pas de la variable  $t$  explicitement (le champ de vecteurs ne dépend pas du temps).

Dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques, l'étude de l'existence, le nombre et la stabilité des solutions périodiques est l'un des plus importants problèmes. Un cycle limite d'une EDO est une solution périodique isolée, cette notion a été introduite par H Poincaré [12] en 1881. Plusieurs méthodes pour la recherche des solutions périodiques des EDO ont été créées et développées, on peut citer le théorème de Poincaré Bendixson, le critère de non existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov, méthodes de perturbations, . . .

La méthode de Moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des EDO et des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [6], Malkin (1956) [10], Bogoliubov et Mitropolskii [4] 1961, Roseau (1966) [13]. Elle a été ensuite développée par Sanders et Verhulst [15], Buica, Françoise et Llibre (2007) [1]. . .

Dans ce travail, on étudie les cycles limites des systèmes différentiels non autonomes en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. On s'intéresse à la recherche du nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , perturbé par une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Liénard et de Kukles. Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est un rappel des notions préliminaires de la théorie qualitative des EDO et des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, on introduit la théorie de Moyennisation du premier ordre et la théorie de Moyennisation du second ordre pour chercher

---

le nombre maximum de Cycles limites des système différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

Le troisième chapitre, nous étudions premièrement le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{1\ell}(x) + f_{1\ell}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{2\ell}(x) + f_{2\ell}(x)y), \end{cases}$$

où  $\ell = 1, 2$ ,  $g_{1\ell}(x)$ ,  $f_{1\ell}(x)$ ,  $g_{2\ell}(x)$  et  $f_{2\ell}(x)$  sont de degré 4 et  $\varepsilon$  suffisamment petit. La second partie de ce travail est l'étude du nombre maximum de cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Kukles, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Ce chapitre couvre les thèmes nécessaires pour la compréhension de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamique. Nous rappelons des notions générales. Nous commençons par la définition des systèmes dynamiques, les points critiques et le système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. En suite, nous introduisons la notion d'un cycle limite.

## 1.1 Système dynamique et points critiques

**Définition 1.1.1** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que

- $U(\cdot; x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(t; \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(0; x) = x$ .
- $U(t + s, x) = U(t; U(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+$ .

**Exemple 1.1.1** Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constante. La solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  associe :

$$U(x) = e^{tA}x_0,$$

vérifie les quatre propriétés précédentes

**Définition 1.1.2** Soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n). \quad (1.2)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point

$x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(x_0) = 0.$$

**Définition 1.1.3** Considérons le système (1.2), le système

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n,$$

est une matrice ( $n \times n$ ), est appelé Linéarisation de (1.2) en  $x_0$ .

## 1.2 Portrait de phase

**Définition 1.2.1** *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.3)$$

où  $P, Q$  sont des polynômes  $(x(t), y(t))$  du système (1.3) représentent dans la plan  $(x, y)$  des courbes appelés orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase .

## 1.3 Théorème de linéarisation et la stabilité de point d'équilibre

Pour tout point d'équilibre d'un système dynamique quelconque, il existe que trois types de stabilité : la stabilité asymptotique, la stabilité neutre, ou l'instabilité.

**Définition 1.3.1** *Un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  d'un système dynamique*

$$\dot{x} = f(x) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n,$$

*est dit **neutralement stable** si pour tout voisinage  $V$  de  $(x_0, y_0)$ , il existe un plus petit voisinage  $\tilde{V}$  reste dans  $V$  lorsque  $t$  augmente.*

Par exemple, les centres sont neutralement stables.

**Définition 1.3.2** *Un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  d'un système dynamique*

$$\dot{x} = f(x) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n,$$

*est dit **asymptotiquement stable** s'il existe un voisinage  $V$  de  $(x_0, y_0)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

Par exemple, les foyers et les noeuds stables sont asymptotiquement stables.

### 1.3. THÉORÈME DE LINÉARISATION ET LA STABILITÉ DE POINT D'ÉQUILIBRE

**Définition 1.3.3** Un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  d'un système dynamique

$$\dot{x} = f(x),$$

qui n'est pas stable est dit **instable**.

Soit donnée un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficient constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad (1.4)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le point  $x = 0, y = 0$ , en lequel s'annulent les second membres des équations du système (1.4) s'appelle point critique du système (1.4), pour étudier le point critique du système (1.4) il faut établir l'équation caractéristique.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

et chercher ses racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Les cas suivants peuvent se présenter :

**1-** Les racines  $\lambda_1, \lambda_2$  de l'équation caractéristique (1.5) sont réelles et distincts :

a)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Le point critique est asymptotiquement stable (**noeud stable**).

b)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . Le point critique est instable (**noeud instable**).

c)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Le point critique est instable.

**2-** Les racines  $\lambda_1, \lambda_2$  de l'équation caractéristique (1.5) sont complexes :

$$\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq,$$

a)  $p < 0, q \neq 0$ . Le point critique est asymptotiquement stable (**foyer stable**).

b)  $p > 0, q \neq 0$ . Le point critique est instable (**foyer instable**).

c)  $p = 0, q \neq 0$ . Le point critique est instable (**centre**).

**3-** Les racines  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  sont multiples :

a)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  le point critique est asymptotiquement stable (**noeud stable**).

b)  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  le point critique est instable (**noeud instable**).

**Exemple 1.3.1** On étudie la nature du point critique  $(0,0)$  du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases},$$

écrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Ses racines  $\lambda_1 = 1 - 2i$ ,  $\lambda_2 = 1 + 2i$  sont complexes ont des parties réelles positives par suite, le point critique  $(0,0)$  est un foyer instable. [Voir (FIG.1.1)].

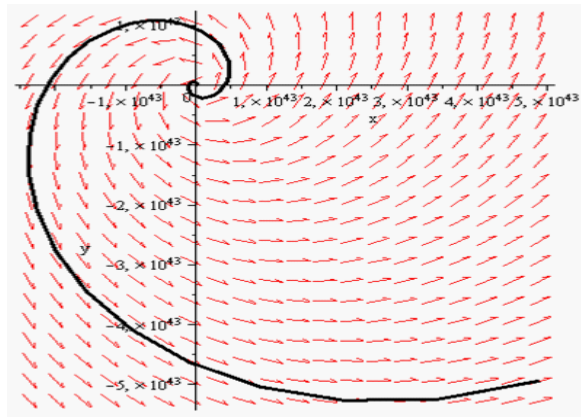


FIG.1.1

**Exemple 1.3.2** Soit donné le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z \\ \frac{dy}{dt} = -y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2z \end{cases},$$

l'équation caractéristique de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

### 1.3. THÉORÈME DE LINÉARISATION ET LA STABILITÉ DE POINT D'ÉQUILIBRE

---

où

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0.$$

Les racines de cette équation  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_3 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  sont réelles distinctes par suite, le point critique  $(0, 0, 0)$  est un instable. [Voir (FIG.1.2)].

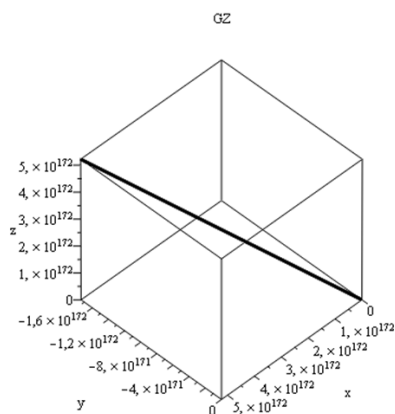


FIG.1.2

#### 1.3.1 Linéarisation et matrice jacobienne

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.3). Notions par

$$X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))),$$

et

$$X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)),$$

on dit que  $(x_0, y_0)$  est stable ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \sigma \Rightarrow \forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon,$$

$(x_0, y_0)$  est asymptotiquement stable ssi  $(x_0, y_0)$  est stable et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0.$$

Au voisinage d'un point d'équilibre, la linéarisation du système (1.3) est donné sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

**Définition 1.3.4** On appelle matrice jacobienne associée au système (1.3) au point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ ; la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

**Classification des points d'équilibre**

Notion la matrice jacobienne  $A$  par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'appelle souvent matrice de stabilité. Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont données en fonction du déterminant et de la trace par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4 \det(A)}),$$

et vérifient les relation  $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$  et  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$ . Pour la linéarisation (1.6), le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est alors :

- un point selle si  $\det(A) < 0$ ;
- un centre si  $\det(A) > 0$  et  $tr(A) = 0$ ;
- un foyer si  $\det(A) > 0$  et  $(tr(A))^2 - 4 \det(A) < 0$ , ce foyer est stable si  $tr(A) < 0$  et instable si  $tr(A) > 0$ ;
- un noeud si  $\det(A) > 0$  et  $(tr(A))^2 - 4 \det(A) > 0$ , ce noeud est stable si  $tr(A) < 0$  et instable si  $tr(A) > 0$ .

Le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0, y_0)$  n'a de partie réelle nulle.

**Remarque 1.3.1** La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoire lorsque  $t \rightarrow \infty$  soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers celui-ci.

**Exemple 1.3.3** *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

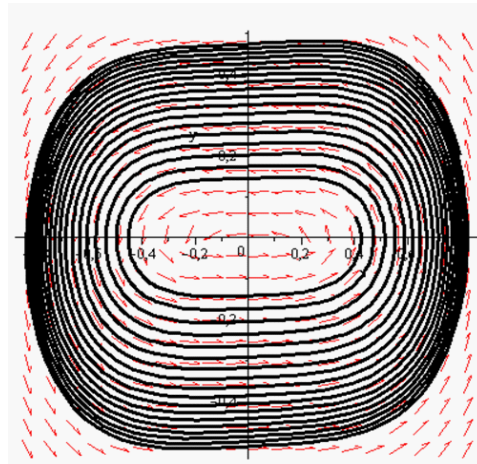
Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est stable mais pas asymptotiquement stable.

La linéarisation au voisinage de  $(0, 0)$  conduit à la matrice Jacobienne suivant :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det J_{(0,0)} = 0$ , l'origine est non hyperbolique et par conséquent le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

comme le montre la *FIG.1.3*, les trajectoires n'approchent jamais l'origine lorsque  $t$  tend vers l'infini, l'origine n'est donc pas asymptotiquement stable. [Voir (*FIG.1.3*)].



*FIG.1.3*

## 1.4 Cycle limite

### Quelques définitions

**Définition 1.4.1** *On dit que  $(x(t), y(t))$  est une solution du système (1.3) si le champ de vecteur  $X = (P, Q)$  est toujours tangent à la trajectoire*



représentant cette solution dans le plan de phase, autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x + Q(x(t), y(t))y = 0.$$

**Définition 1.4.2** On appelle solution périodique du système (1.3), toute solution  $(x(t), y(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que

$$\forall t \in [0, T[ : x(t + T) = x(t) \text{ et } y(t + T) = y(t).$$

Le plus petit nombre  $T$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

**Définition 1.4.3** Dans tout ce précède, nous avons étudié en détail les différents cas possibles où une solution tend vers un point d'équilibre : avec le théorème de linéarisation.

Un autre comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers un mouvement périodique : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un **cycle limite**.

Un cycle limite est une trajectoire fermée (donc une solution périodique) vers laquelle tendent (resp. de laquelle s'éloignent), lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les trajectoire voisines. Les cycle limites sont aussi des séparatrices : ils séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents.

**Remarque 1.4.1** Par définition, un cycle limite est isolé de toute autre trajectoire, ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.

**Exemple 1.4.1** Considérons le système suivant :

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

La formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

On a :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \text{ et } \dot{x} = y = r \sin \theta, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} - y\dot{y}}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (x^2 + y^2 - 1)y, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r \sin \theta, \\ \dot{y} = -r \cos \theta + r^3 \sin \theta, \end{cases} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} \dot{r} = (r^2 - 1)r \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + (r^2 - 1) \cos \theta \sin \theta, \end{cases}$$

Donc la solution est :

$$r = 1, \theta = -t.$$

$$\dot{r} > 0 \text{ alors } 0 < r < 1,$$

$$\dot{r} < 0 \text{ alors } r > 1.$$

Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et c'est un cycle limite unique. Les autres solutions s'obtiennent par intégration du système.

**Exemple 1.4.2** Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha(1 - x^2 - y^2)x, \\ \dot{y} = -x + \alpha(1 - x^2 - y^2)y. \end{cases}$$

La partie linéaire de ce système au point d'équilibre  $(0,0)$  est identique au système linéaire de

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On est dans le cas où  $A$  admet deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle et de partie imaginaire égale à  $-1$ . On a donc des centres.

La formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha(1 - x^2 - y^2)x, \\ \dot{y} = -x + \alpha(1 - x^2 - y^2)y. \end{cases}$$

On rappelle que  $r^2 = x^2 + y^2$  et que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$r\dot{r} = x [y + \alpha(1 - x^2 - y^2)x] + y [-x + \alpha(1 - x^2 - y^2)y]$$

$$r\dot{r} = \alpha(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$\dot{r} = \alpha(1 - r^2)r.$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x + y\dot{x}}{x^2},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{[-x + \alpha(1 - x^2 - y^2)y]x - y[y + \alpha(1 - x^2 - y^2)x]}{x^2},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{-x^2 - y^2}{x^2},$$

alors

$$\dot{\theta} = -1.$$

L'étude de ce système montre qu'un cycle limite candidat est le cercle de rayon  $r = 1$  qui correspond à  $\dot{r} = 0$ , et qui est bien décrit dans son entier puisque  $\dot{\theta} \neq 0$ . On voit que la stabilité va dépendre du signe de  $\alpha$ .

- En effet, si  $\alpha > 0$ ,  $\dot{r} > 0$  pour  $0 < r(0) < 1$ , le cercle de rayon  $r = 1$  est donc un cycle limite stable.
- Par contre, si  $\alpha < 0$ ,  $\dot{r} < 0$  pour  $0 < r(0) < 1$ , Le cercle de rayon  $r = 1$  est cette fois-ci un cycle limite instable.

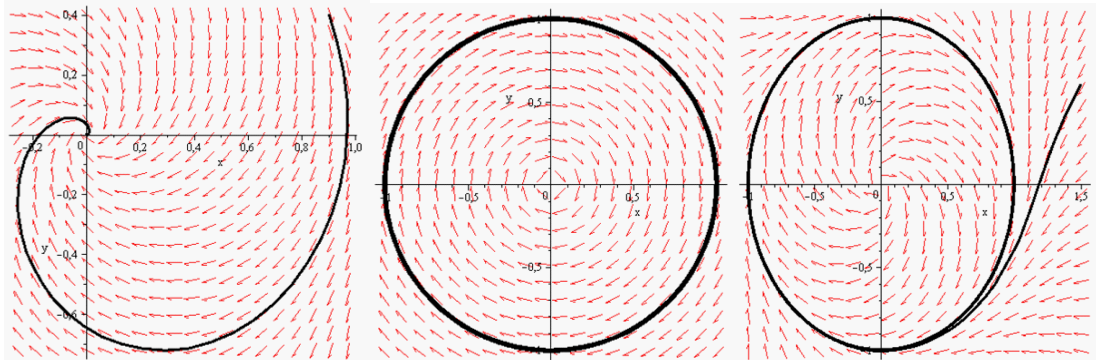


FIG.1.4  $\alpha = -1$

FIG.1.5  $\alpha = 0$

FIG.1.6  $\alpha = +1$

**Lemme 1.4.1** *Pour  $m, n \in \mathbb{N}$ , on définit*

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) d\theta,$$

*alors*

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n},$$

*et*

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2},$$

*ces intégrales sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à*

$$I_{0,0} = 2\pi \text{ où } I_{0,1} = I_{1,0} = I_{1,1} = 0.$$

*Notions que  $I_{m,n} \neq 0$  si et seulement si  $m$  et  $n$  sont paires.*

## Chapitre 2

# Théorie de moyennisation

Dans ce chapitre, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher le nombre maximum de cycles limites des système différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

## 2.1 Méthode de moyennisation et solutions périodiques

La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [6] et Bogoliubov et Mitropolskii [4]. Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante :

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où  $t \in D$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$  et  $f$  est une fonction  $T$ -périodique en  $t$ , en considérant le système moyenné

$$\dot{x} = \varepsilon F_{10}(x),$$

où

$$F_{10}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt.$$

La recherche des racines positives du  $F_{10}(x)$  réduit le problème de la détermination des solutions  $T$ -périodique de (2.1) qui est en général un problème difficile.

## 2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

**Théorème 2.2.1** *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.2)$$

où  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodique par rapport à  $t$ ,  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  on définit  $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Comme suite

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.3)$$

supposons que

(i)  $F_1$  et  $R$  sont localement Lipchitzienne par rapport à  $x$ .

(ii) Pour  $a \in D$  avec  $F_{10}(a) = 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $F_{10}(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  et  $d_B(F_{10}, V, 0) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il exist une solution  $\Phi(., \varepsilon)$  du système (2.2)  $T$ -périodique isolée telle que  $\Phi(., \varepsilon) \rightarrow a$  quant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Démonstration. (Voir [2]).

**Remarque 2.2.1** Les hypothèses de ce théorème sont plus faible que celles du théorème 2.1.1, où à place de (i), il suppose que (j)  $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$  et  $D_x R$  sont définies, continue et bornées par une constante  $M$  (indépendante de  $\varepsilon$ ). A la place de (ii), il suppose que (jj) pour  $a \in D$  avec  $F_{10}(a) = 0$ , on a  $J_{F_{10}(a)} \neq 0$ , où  $D_x F$  désigne la matrice jacobienne de  $F$  par rapport à  $x$ ,  $D_x^2 F$  la matrice hessienne de  $F$  et  $J_{F_{10}(a)}$  désigne le déterminant de la jacobienne de  $F_{10}$  en  $a$ .

**Exemple 2.2.1** Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon((x^2 - 1)y - x^3) \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

On pose en cordonnés polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos(\theta)(r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta)) \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

En dévisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon \sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta))}{1 - \varepsilon \cos(\theta)(r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta))}, \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Où

$$F_1(r, \theta) = -\sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)).$$

## 2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

On cherche maintenant la fonction moyenné  $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r \sin^2(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) d\theta \\ &= r \left[ \frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Le système moyenné

$$\dot{r} = \varepsilon F_{10}(r) = \varepsilon r \left[ \frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{2} \right].$$

La racine positive de  $F_{10}(r)$  est  $r_0 = 2$ .

Donc l'équation différentielle a pour  $\varepsilon$  suffisamment petit un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon  $r_0 = 2$  du système perturbé, de plus

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r_0 = 2) = 1 > 0,$$



a un cycle limite instable d'amplitude  $r = 2$ , ce cycle limite est instable ( $\frac{dF_{10}}{dr}(2) > 0$ ). [Voir(FIG. 2.1)].

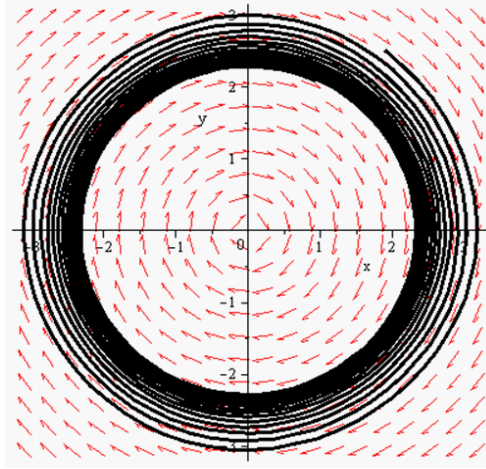


FIG.2.1

**Exemple 2.2.2** Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + x - 6x^2)y \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

On pose en coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(r \cos(\theta) + 6r^2 \cos^2(\theta) - 1)r \sin^2(\theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 6r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)) \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

En dérivant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon(r \sin^2(\theta) - r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))}{1 - \varepsilon(r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 6r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta))}, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon(r \sin^2(\theta) - r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) + O(\varepsilon^2). \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Où

$$F_1(r, \theta) = r \sin^2(\theta) - r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta).$$

## 2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

On cherche maintenant la fonction moyenné  $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r \sin^2(\theta) - r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) d\theta \\ &= r \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} r^2 \right]. \end{aligned}$$

Le système moyenné

$$\dot{r} = \varepsilon F_{10}(r) = \varepsilon r \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} r^2 \right].$$

La racine positive de  $F_{10}(r)$  est  $r_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} : 0.816\ 50$

Donc l'équation différentielle a pour  $\varepsilon$  suffisamment petit un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon  $r_0 = \frac{2}{\sqrt{6}}$  du système perturbé, de plus

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r) = \frac{1}{2} - \frac{9}{4} r^2,$$

on a

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r_0 = \frac{2}{\sqrt{6}}) = -1 < 0,$$

a un cycle limite instable d'amplitude  $r = \frac{2}{\sqrt{6}} \simeq 0.82$ , ce cycle limite est stable ( $\frac{dF_{10}}{dr}(\frac{2}{\sqrt{6}}) < 0$ ). [Voir (FIG.2.2)].

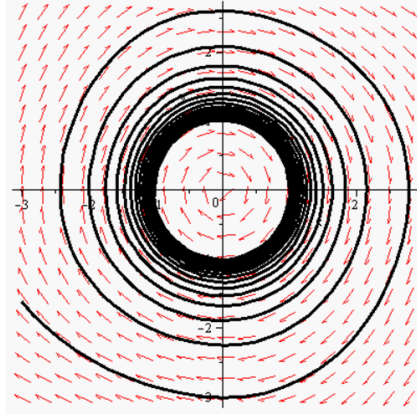


FIG.2.2

## 2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

**Théorème 2.3.1** *Considérons le système différentiel*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.4)$$

où  $F_1$  et  $F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodique par rapport à  $t$ ,  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On définit

$$F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tel que

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_s F_1(s, z) \cdot y_1(s, z) + F_2(s, z)] ds, \quad (2.5)$$

### 2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

---

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt.$$

On suppose que

(i)  $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipshitzziennes par rapport à  $x$ ,  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .

(ii) pour  $V \subset D$  un sous ensemble ouvert bornée et pour tout

$$\varepsilon \in ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \setminus \{0\},$$

il existe  $a_\varepsilon \in V$  tel que

$$(F_{10} + \varepsilon F_{20})(a_\varepsilon) = 0 \text{ et } d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, a_\varepsilon) \neq 0,$$

(i.e le degré de Brouwer de  $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) \setminus \{a_\varepsilon\}$  est non nul).

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique isolée  $\Phi(\cdot, \varepsilon)$  de l'équation (2.4) telle que  $\Phi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$ .

Pour la démonstration voir [3].

**Exemple 2.3.1** Soit le système différentiel polynômial perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 - 2x^2 + 8xy) - \varepsilon^2(2x) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(4xy) - \varepsilon^2(2y) \end{cases}, \quad (2.6)$$

qui s'écrit en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(5r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta)) - \varepsilon^2(2r) \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r(\sin^3(\theta) + 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \end{cases},$$

est équivalent à l'équation différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3) \\ &= \frac{\varepsilon(5r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta)) - \varepsilon^2(2r)}{1 - \varepsilon r(\sin^3(\theta) + 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin(\theta))}, \end{aligned}$$

où

$$F_1(r, \theta) = r^2(5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)),$$

et

$$F_2(r, \theta) = r^3(5 \cos(\theta) \sin^5(\theta) + 48 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 32 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) - 64 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + 12 \cos^5(\theta) \sin(\theta)) - 2r,$$

$F_{10}(r)$  la fonction moyenné de  $F_1(r, \theta)$  est

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} [5I_{1.2} + 8I_{2.1} - 2I_{3.0}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque  $F_{10}(r) = 0$  on passe la méthode de la moyenne seconde ordre, on a

$$D_r F_1(r, \theta) = 2r(5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)),$$

et

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta = r^2 \int_0^s (5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)) d\theta,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos^3(\theta) d\theta &= \frac{3}{4} \sin s + \frac{1}{12} \sin 3s = \frac{3}{4} \sin s + \frac{1}{4} \cos^3 s \sin s - \frac{1}{12} \cos s \sin^3 s \\ \int_0^s (\cos^2(\theta) \sin(\theta)) d\theta &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos^3 s \\ \int_0^s (\cos(\theta) \sin^2(\theta)) d\theta &= \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s \\ &= \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{4} \cos^3 s \sin s + \frac{1}{12} \cos s \sin^3 s \end{aligned}$$

Alors

$$y_1(s, z) = r^2 \left( \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cos^3 s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{7}{4} \cos^3 s \sin s + \frac{7}{12} \cos s \sin^3 s \right).$$

### 2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

---

Donc

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r F_1(r, s) \cdot y_1(r, s) + F_2(r, s)] ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} (2r^3 (\frac{40}{3} I_{1,2} - \frac{46}{3} I_{5,1} - \frac{5}{4} I_{1,3} + \frac{35}{12} I_{2,5} + \frac{64}{3} I_{2,1} - 2I_{2,2} - \\
 &\quad 14I_{5,2} + \frac{14}{3} I_{3,4} - \frac{16}{3} I_{3,0} + \frac{16}{3} I_{6,0} + \frac{1}{2} I_{3,1} + \frac{7}{2} I_{6,1} - \frac{119}{12} I_{4,3} \\
 &\quad - \frac{136}{3} I_{4,2} + 24I_{2,4} + 16I_{3,3} + \frac{5}{2} I_{1,5}) - 2r) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ 2r^3 (\frac{16}{3} I_{6,0} - 2I_{2,2} - \frac{136}{3} I_{4,2} + 24I_{2,4}) - 2r \right] \\
 &= r(\frac{1}{6} r^2 - 2),
 \end{aligned}$$

à au plus une seul racine positive  $r_0 = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$ , de plus

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r) = \frac{1}{2} r^2 - 2.$$

Donc

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r_0 = 2\sqrt{3}) = 4 > 0,$$

par conséquent, le système un cycle limite unique, et ce cycle limite est instable d'amplitude  $r_0 = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$ . [Voir (FIG.2.3)].

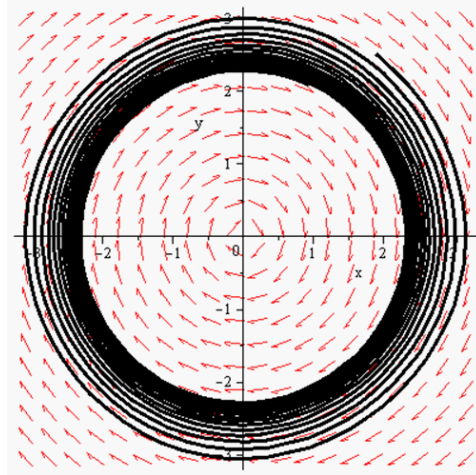


FIG.2.3

## Chapitre 3

# Nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels polynômiaux par la méthode de moyennisation

Dans ce chapitre, nous étudions premièrement le nombre maximum de Cycles limites des systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{1\ell}(x) + f_{1\ell}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \sum_{\ell \geq 1} \varepsilon^\ell (g_{2\ell}(x) + f_{2\ell}(x)y) \end{cases}, \quad (3.1)$$

pour chaque  $\ell = 1, 2$ ,  $g_{1\ell}(x)$ ,  $f_{1\ell}(x)$ ,  $g_{2\ell}(x)$  et  $f_{2\ell}(x)$  sont de degré 4 et  $\varepsilon$  suffisamment petit, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre et du deuxième ordre.

La second partie de ce travail est l'étude du nombre maximum de Cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Kukles, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. De plus, Cette étude est illustrée par des applications.



## 3.1 Le nombre maximum de cycles limites d'une famille de systèmes différentiels

### 3.1.1 Présentation du problème

Les chercheurs considèrent deux classe spéciales des équations différentielles, l'équation de Liénard et l'équation de Kukles. L'équation de Liénard polynômiale (1928) s'écrit :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

où  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des polynômes. Cette équation peut se transformer en un système de deux équations du premier ordre en posant  $\dot{x} = y$  on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (3.2)$$

En 2010, Llibre, Mereu et Teixeira [9], ont étudié le nombre maximum de cycles limites du système (3.2) qui bifurquent d'un centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = x$  en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre  $k$ , où  $k = 1, 2, 3$ .

Dans cette part, en utilisant le théorie de moyennisation, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = x$  d'une classe d'équations différentielles de type (3.1). Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans (Proc.R.Soc) (2012) [8]

**Théorème 3.1.1** *Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le système différentiel polynômial (3.1) avec  $\ell = 1$ , a au plus deux cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre.*

**Théorème 3.1.2** *Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le système différentiel polynômial (3.1) avec  $\ell = 2$ , a au plus trois cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre, en utilisant la méthode de moyennisation du deuxième ordre.*

### 3.1.2 Preuve du théorème 3.1.1

Considérons le système (3.1) avec  $\ell = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y), \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1. LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE  
DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

où  $g_{11}$ ,  $f_{11}$ ,  $g_{21}$  et  $f_{21}$  de degré 4, et  $\varepsilon$  suffisamment petit.

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= \sum_{i=0}^4 a_i x^i, & f_{21}(x) &= \sum_{i=0}^4 b_i x^i, \\ g_{11}(x) &= \sum_{i=0}^4 c_i x^i \text{ et } g_{21}(x) &= \sum_{i=0}^4 d_i x^i. \end{aligned}$$

Dans cette preuve, on utilise la théorie de moyenisation du premier ordre. En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système (3.3) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left[ \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^{i+1} \theta \right] \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left[ \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right] \end{aligned} \right. ,$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon A}{1 + \frac{\varepsilon}{r} B},$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\ &\quad + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^{i+1} \theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^{i+1} \theta \\ &\quad - \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^i \theta \sin \theta, \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. NOMBRE MAXIMAL DE CYCLES LIMITES DES  
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNÔMIAUX PAR LA MÉTHODE  
DE MOYENNISATION

---

donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\ &+ \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^{i+1} \theta. \end{aligned}$$

On applique la méthode de moyennisation du premier ordre pour

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^{i+1} \theta \right) d\theta, \end{aligned}$$

on a :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} [b_0 r I_{0,2} + b_2 r^3 I_{2,2} + b_4 r^5 I_{4,2} + c_1 r I_{2,0} + c_3 r^3 I_{4,0}],$$

où

$$I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta.$$

Donc

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{8} b_4 r^4 + \left( \frac{b_2 + 3c_3}{4} \right) r^2 + (b_0 + c_1) \right). \quad (3.4)$$

C'est dire elle a au plus deux racine positive de la fonction  $F_{10}(r)$ , donc selon la théorème de moyennisation du premier ordre, le système (3.1) possède au plus deux cycle limite.

### 3.1.3 Application

Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^4y + x^3 - 4x) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(2x^2y - 2x^4y + 3y - x^3) \end{cases}, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.5)$$

On passe au coordonnées polaires,  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r(r^4 \cos^5 \theta \sin \theta + r^2 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 + 2r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \quad - 2r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon(r^2 \cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \quad - 2r^4 \cos^5 \theta \sin \theta - r^2 \cos^4 \theta - r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta) \end{cases}.$$

En divisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = r(r^4 \cos^5 \theta \sin \theta + r^2 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 + 2r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ - 2r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta).$$

En cherche maintenant la fonction moyenné  $F_{10}(r)$ .

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} [r^4 I_{5,1} + r^2 I_{4,0} - 4I_{2,0} + 2r^2 I_{2,2} - 2r^4 I_{4,2} + 3I_{0,2} - r^2 I_{2,1}] \\ &= \frac{r}{8} (-r^4 + 5r^2 - 4). \end{aligned}$$

Les racines positives de  $F_{10}(r)$  est  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ , alors, d'après le théorème 2.2.1, le système (3.4) possède deux cycles limites d'amplitude  $r = 1$  et  $r = 2$ , qui bifurque des orbites périodiques du systèmes non perturbées quand  $\varepsilon = 0$ .

### 3.1.4 Preuve du théorème 3.1.2

Considérons le système (3.1) avec  $\ell = 2$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y) \end{cases}, \quad (3.6)$$

où  $g_{11}, f_{11}, g_{21}, f_{21}, g_{12}, f_{12}, g_{22}$  et  $f_{22}$  sont de degré 4, et  $\varepsilon$  suffisamment petit.

On pose

$$f_{12} = \sum_{i=0}^4 e_i x^i, \quad f_{22} = \sum_{i=0}^4 h_i x^i, \quad g_{12} = \sum_{i=0}^4 k_i x^i \quad \text{et} \quad g_{22} = \sum_{i=0}^4 l_i x^i,$$

dans cette preuve, on utilise la théorie de moyennisation du second ordre.

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système (3.6) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon A - \varepsilon^2 C \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} B - \frac{\varepsilon^2}{r} D. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=0}^4 h_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 l_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\ &+ \sum_{i=0}^4 e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 k_i r^i \cos^{i+1} \theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=0}^4 h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 l_i r^i \cos^{i+1} \theta \\ &- \sum_{i=0}^4 e_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^4 k_i r^i \cos^i \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

3.1. LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE  
DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

où

$$F_1(r, \theta) = \sum_{i=0}^4 b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\ + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^i \cos^{i+1} \theta,$$

et

$$F_2(r, \theta) = S(r, \theta) + rN(r, \theta),$$

où

$$S(r, \theta) = \sum_{i=0}^4 h_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 l_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\ + \sum_{i=0}^4 e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 k_i r^i \cos^{i+1} \theta,$$

et

$$N(r, \theta) = \left( \sum_{i=0}^4 b_i r^i \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^4 a_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 c_i r^{i-1} \cos^{i+1} \theta \right) \\ \times \left( \sum_{i=0}^4 b_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^{i-1} \cos^{i+1} \theta \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^4 a_i r^i \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^4 c_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right).$$

De (3.4),  $F_{10}$  est identiquement nulle si et seulement si

$$\begin{cases} c_{2i+1} = -\frac{b_{2i}}{2i+1}, & i = 0, 1 \\ b_{2i} = 0, & i = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -b_0, & c_3 = -\frac{b_2}{3} \\ b_4 = 0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

calculons maintenant  $F_{20}$  pour cela, nous commençons par chercher  $y_1(r, s)$

$$y_1(r, s) = \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta.$$

CHAPITRE 3. NOMBRE MAXIMAL DE CYCLES LIMITES DES  
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNÔMIAUX PAR LA MÉTHODE  
DE MOYENNISATION

---

Pour faire cela, réécrire

$$\begin{aligned}
 F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^1 b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta - \sum_{i=0}^1 b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+3} \theta + \sum_{i=0}^2 b_{2i} r^{2i+1} \cos^{2i} \theta \\
 &\quad - \sum_{i=0}^2 b_{2i} r^{2i+1} \cos^{2i+2} \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^1 c_{2i+1} r^{2i+1} \cos^{2i+2} \theta + \sum_{i=0}^2 c_{2i} r^{2i} \cos^{2i+1} \theta,
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^1 b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta - \sum_{i=0}^1 b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+3} \theta + \sum_{i=0}^1 b_{2i} r^{2i+1} \cos^{2i} \theta \\
 &\quad - \sum_{i=0}^1 \frac{2i+2}{2i+1} b_{2i} r^{2i+1} \cos^{2i+2} \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^2 c_{2i} r^{2i} \cos^{2i+1} \theta.
 \end{aligned}$$

D'après la relation (3.7) on a :

$$\begin{aligned}
 F_1(\theta, r) &= (b_1 r^2 + c_0) \cos \theta + r(b_2 r^2 + 2b_0) \cos^2 \theta + r^2(b_3 r^2 - b_1 + c_2) \cos^3 \theta \\
 &\quad - \frac{4}{3} b_2 r^3 \cos^4 \theta + r^4(c_4 - b_3) \cos^5 \theta + \sum_{i=0}^4 d_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^4 a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_1(\theta, r)}{dr} &= (2b_1 r + c_0) \cos \theta + (3b_2 r^2 + 2b_0) \cos^2 \theta + 2r(2b_3 r^2 - b_1 + c_2) \cos^3 \theta \\
 &\quad - 4b_2 r^2 \cos^4 \theta + 4r^3(c_4 - b_3) \cos^5 \theta + \sum_{i=0}^4 i d_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^4 (i+1) a_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta.
 \end{aligned}$$

3.1. LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE  
DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

Pour calculer l'expression exacte de  $y_1(s, r)$ , nous utilisons les expressions des intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i \phi \sin \phi d\phi &= \frac{1}{i+1}(1 - \cos^{i+1} \theta), \\ \int_0^\theta \cos^{2i} \phi d\phi &= \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta + \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=1}^i \binom{2i}{i+l} \frac{1}{l} \sin(2l\theta), \\ \int_0^\theta \cos^{2i+1} \phi d\phi &= \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=1}^i \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1} \sin((2l+1)\theta), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} y_1(s, r) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= (b_1 r^2 + c_0) \sin s - \left(\frac{b_2}{6} r^3 + b_0 r\right) \cos s \sin s + \frac{r^2}{4} (b_3 r^2 - b_1 + c_2) \\ &\quad \times (3 \sin s + \cos^3 s \sin s - \cos s \sin^3 s) - b_2 r^3 \left(\frac{1}{12} \cos^3 s \sin s - \frac{1}{12} \cos s \sin^3 s\right) \\ &\quad + r^4 (c_4 - b_3) \left(\frac{5}{8} \sin s + \frac{5}{16} \cos^3 s \sin s - \frac{5}{16} \cos s \sin^3 s\right) \\ &\quad + \frac{1}{20} \cos^7 s \sin s - \frac{1}{20} \cos^5 s \sin^3 s + \frac{1}{20} \cos^3 s \sin^5 s \\ &\quad - \frac{1}{20} \cos s \sin^7 s - \frac{3}{10} \cos^5 s \sin^3 s - \frac{3}{10} \cos^3 s \sin^5 s \\ &\quad - \frac{1}{80} \cos s \sin s + \sum_{i=0}^4 \left( \frac{a_i r^{i+1}}{i+2} + \frac{d_i r^i}{i+1} \right) - \sum_{i=0}^2 \frac{a_{2i} r^{2i+1}}{2i+2} \cos^{2i+2} \\ &\quad - \sum_{i=0}^1 \frac{d_{2i+1} r^i}{2i+2} \cos^{2i+2} - \sum_{i=0}^1 \frac{a_{2i+1} r^{2i+2}}{2i+3} \cos^{2i+3} - \sum_{i=0}^2 \frac{d_{2i} r^{2i}}{2i+1} \cos^{2i+1}. \end{aligned}$$



CHAPITRE 3. NOMBRE MAXIMAL DE CYCLES LIMITES DES  
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNÔMIAUX PAR LA MÉTHODE  
DE MOYENNISATION

---

On trouve

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F(r, s) y_1(r, s) ds \\
 &= \frac{r}{2} \left( \frac{5}{24} a_1 b_1 r^2 + \frac{23}{48} a_1 b_3 r^4 + \frac{19}{24} a_1 c_2 r^2 + \frac{5}{32} a_3 b_1 r^4 + \frac{67}{160} a_3 b_3 r^6 + \frac{19}{32} a_3 c_2 r^4 \right. \\
 &\quad + \frac{63}{160} a_3 c_4 r^6 + \frac{35}{48} a_1 c_4 r^4 + \frac{1}{2} b_1 d_0 + \frac{1}{2} b_3 d_0 r^2 + \frac{3}{2} d_0 c_2 + \frac{5}{2} c_4 d_0 r^2 + \frac{5}{24} d_2 b_1 r^2 \\
 &\quad + \frac{23}{48} d_2 b_3 r^4 + \frac{19}{24} d_2 c_2 r^2 + \frac{35}{48} c_4 d_2 r^4 + \frac{5}{32} d_4 b_1 r^4 + \frac{67}{160} d_3 b_4 r^6 + \frac{19}{32} d_4 c_2 r^4 \\
 &\quad \left. + \frac{63}{160} c_4 d_4 r^6 + \frac{1}{2} c_0 d_2 + \frac{1}{2} c_0 d_4 r^2 + \frac{1}{2} a_1 c_0 + \frac{1}{2} a_3 c_0 r^2 \right),
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 M &= r \left( \frac{1}{320} (67(a_3 b_3 + d_3 b_4) + 63c_4(a_3 + d_4)) r^6 \right. \\
 &\quad + \frac{1}{32} \left( \frac{23}{3} b_3(a_1 + d_2) + \frac{5}{2} b_1(a_3 + d_4) + \frac{35}{3} c_4(a_1 + d_2) + \frac{19}{2} c_2(a_3 + d_4) \right) r^4 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{5}{12} b_1(a_1 + d_2) + \frac{19}{12} c_2(a_1 + d_2) + 5d_0 c_4 + a_3 c_0 + b_3 d_0 + c_0 d_4 \right) r^2 \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} (a_1 c_0 + b_1 d_0 + c_0 d_2 + 3c_2 d_0) \right). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

On trouve que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \theta) d\theta,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta &= \frac{r}{2} \left( \frac{1}{8} h_4 r^4 + \frac{3}{4} k_3 r^2 + \frac{1}{4} h_2 r^2 + k_1 + h_0 \right) \\
 &= r \left( \frac{1}{16} h_4 r^4 + \frac{1}{8} (h_2 + 3k_3) r^2 + \frac{1}{2} (h_0 + k_1) \right), \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

3.1. LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE  
DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \theta) d\theta &= \frac{1}{8} (2b_0d_1 + b_0d_3r^2 + b_2d_1r^2 + \frac{5}{8}b_2d_3r^4 + 2b_1d_0 + b_1d_2r^2 \\
&+ \frac{3}{16}b_1d_4r^4 + b_3d_0r^2 + \frac{5}{8}b_3d_2r^4 - \frac{7}{16}b_3d_4r^6 + 4b_0a_0 + \frac{1}{8}b_0a_4r^4 \\
&+ \frac{1}{8}b_2a_2r^4 + \frac{1}{8}b_2a_4r^6 + \frac{1}{8}b_1a_3r^4 + \frac{1}{8}b_3a_1r^4 + \frac{1}{8}b_3a_3r^6 + 2d_0c_2 \\
&+ 2d_0c_4r^4 + 2d_2c_0 + 2d_2c_2r^2 + \frac{15}{8}d_2c_4r^4 + 2d_4c_0r^2 + \frac{15}{16}d_4c_2r^4 \\
&+ \frac{7}{4}d_4c_4r^6 + 2d_1c_3r^2 + 2d_3c_1r^2 + \frac{15}{8}d_3c_3r^4 + 2a_0b_0 + \frac{1}{3}a_0b_2r^2 \\
&+ 2a_1b_0r^2 + \frac{5}{24}a_2b_2r^4 + \frac{5}{8}a_4b_0r^4 + \frac{7}{48}a_4b_2r^6 - 2a_1c_0 - a_1c_2r^2 \\
&- \frac{5}{8}a_1c_4r^4 - a_3c_0r^2 - \frac{5}{16}a_3c_2r^4 - \frac{7}{16}a_3c_4r^6).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \theta) d\theta &= \left( \frac{1}{64}a_3b_3 + \frac{13}{384}a_4b_2 - \frac{7}{128}a_3c_4 - \frac{7}{128}b_3d_4 + \frac{7}{32}c_4d_4 \right) r^6 \\
&+ \left( \frac{1}{64}a_1b_3 + \frac{1}{24}a_2b_2 + \frac{3}{32}b_0a_4 + \frac{1}{64}a_3b_1 - \frac{5}{64}a_1c_4 - \frac{5}{128}a_3c_2 \right. \\
&+ \frac{3}{128}b_1d_4 + \frac{5}{64}b_2d_3 + \frac{5}{64}b_3d_2 + \frac{1}{4}d_0c_4 + \frac{15}{128}c_2d_4 + \frac{15}{64}c_3d_3 + \frac{15}{64}c_4d_2 \left. \right) r^4 \\
&+ \left( \frac{1}{4}a_1b_0 + \frac{1}{24}a_0b_2 - \frac{1}{8}a_1c_2 - \frac{1}{8}a_3c_0 + \frac{1}{8}b_0d_3 + \frac{1}{8}b_1d_2 + \frac{1}{8}b_2d_1 \right. \\
&+ \frac{1}{8}b_3d_0 + \frac{1}{4}c_0d_4 + \frac{1}{4}c_1d_3 + \frac{1}{4}c_2d_2 + \frac{1}{4}c_3d_1 \left. \right) r^2 \\
&+ \left( \frac{3}{4}a_0b_0 - \frac{1}{4}a_1c_0 + \frac{1}{4}b_0d_1 + \frac{1}{4}b_1d_0 + \frac{1}{4}c_0d_2 + \frac{1}{4}c_2d_0 \right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

De (3.8), (3.9) et (3.10) on obtient le polynôme  $F_{20}$

$$F_{20}(r) = M + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} rN(r, \theta) d\theta,$$

on a

$$F_{20}(r) = r(A_6r^6 + A_4r^4 + A_2r^2 + A_0),$$

où

$$A_6 = \frac{9}{40}a_3b_3 + \frac{13}{384}a_4b_2 + \frac{91}{640}a_3c_4 - \frac{7}{128}b_3d_4 + \frac{67}{320}b_4d_3 + \frac{133}{320}c_4d_4,$$

$$A_4 = \frac{1}{16}h_4 + \frac{49}{192}a_1b_3 + \frac{1}{24}a_2b_2 + \frac{3}{32}b_0a_4 + \frac{3}{32}a_3b_1 + \frac{55}{192}a_1c_4 + \frac{33}{128}a_3c_2 \\ + \frac{13}{128}b_1d_4 + \frac{5}{64}b_2d_3 + \frac{61}{192}b_3d_2 + \frac{1}{4}d_0c_4 + \frac{53}{128}c_2d_4 + \frac{15}{64}c_3d_3 + \frac{115}{192}c_4d_2,$$

$$A_2 = \frac{1}{8}h_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{1}{4}a_1b_0 + \frac{1}{24}a_0b_2 + \frac{5}{48}a_1b_1 + \frac{13}{48}a_1c_2 + \frac{1}{8}a_3c_0 + \frac{1}{8}b_0d_3 \\ + \frac{11}{48}b_1d_2 + \frac{1}{8}b_2d_1 + \frac{3}{8}b_3d_0 + \frac{1}{2}c_0d_4 + \frac{1}{4}c_1d_3 + \frac{31}{48}c_2d_2 + \frac{5}{4}d_0c_4 + \frac{1}{4}c_3d_1,$$

et

$$A_0 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{4}a_0b_0 + \frac{1}{4}b_0d_1 + \frac{1}{2}b_1d_0 + \frac{1}{2}c_0d_2 + c_2d_0.$$

Alors le polynôme  $F_{20}(r)$  peut avoir au plus trois racines positives. Par conséquent, le système différentiel (3.6) peut avoir au plus trois cycles limites.

### 3.1.5 Application

Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(40x^3y) - \varepsilon^2(-9x + 56x^3) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(\frac{4}{9}x^3y) - \varepsilon^2(1 - 336x^4) \end{cases}, \quad (s_*)$$

On passe au coordonnées polaires,  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon(\frac{4}{9}r^4 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 40r^4 \cos^4 \theta \sin \theta) \\ \quad -\varepsilon^2(r \sin^2 \theta - 336r^5 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 9r \cos^2 \theta + 56r^3 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r}(\frac{4}{9}r^4 \cos^4 \theta \sin \theta - 40r^4 \cos^3 \theta \sin^2 \theta) - \frac{\varepsilon^2}{r}(r \cos \theta \sin \theta \\ \quad - 336r^5 \cos^5 \theta \sin \theta + 9r \cos \theta \sin \theta - 56r^3 \cos^3 \theta \sin \theta). \end{cases}$$

3.1. LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE  
DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

En divisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \frac{4}{9}r^4 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 40r^4 \cos^4 \theta \sin \theta,$$

$$F_2(r, \theta) = S(r, \theta) + rN(r, \theta),$$

avec

$$S(r, \theta) = r \sin^2 \theta - 336r^5 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 9r \cos^2 \theta + 56r^3 \cos^4 \theta,$$

et

$$N(r, \theta) = \frac{16}{81}r^6 \cos^7 \theta \sin^3 \theta - \frac{160}{9}r^6 \cos^6 \theta \sin^4 \theta + \frac{160}{9}r^6 \cos^8 \theta \sin^2 \theta - 1600r^6 \cos^7 \theta \sin^3 \theta,$$

Calculons maintenant  $F_2$  pour cela, nous commençons par chercher  $y_1(r, s)$

$$\begin{aligned} y_1(r, s) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \int_0^s \left( \frac{4}{9}r^4 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 40r^4 \cos^4 \theta \sin \theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{540}r^4 [2700 \cos s - 30 \sin s + 1350 \cos 3s + 270 \cos 5s \\ &\quad + 5 \sin 3s + 3 \sin 5s - 4320], \end{aligned}$$

et

$$\frac{dF_1(\theta, r)}{dr} = \frac{16}{9}r^3 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 160r^3 \cos^4 \theta \sin \theta.$$

On trouve

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F(r, s) y_1(r, s) ds \\ &= \frac{67}{18}r^7, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta &= r(-21r^4 + 21r^2 - 4), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \theta) d\theta &= \frac{5}{18} r^6,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}F_{20}(r) &= M + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} rN(r, \theta) d\theta \\ &= r(4r^6 - 21r^4 + 21r^2 - 4).\end{aligned}$$

L'équation  $F_{20}(r) = 0$  possède trois racines positives  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 2$ . D'après le théorème (2.3.1), le système  $(S_*)$  a exactement trois cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$ , en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux.

## 3.2 Perturbation et cycles limites pour une classe généralisée de systèmes de Kukles

### 3.2.1 Présentation du problème

Considérons le système différentiel polynômial de Kukles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $Q(x, y)$  est polynômial avec des coefficients réels d'un degré donné.

Il a été initié par Kukles [7], donnant les conditions nécessaires et suffisantes dans ordonnez que (3.10) avec  $n = 3$  a un centre à l'origine. Ce système cubique sans le terme  $y^3$  est le si appelé système **Kukles** réduit. En [5], Christopher et Lloyd ont donné une classe de systèmes de Kukles possédant cinq cycles limites. Dans Llibre et Mereu [9] ont étudié par la méthode

### 3.2. PERTURBATION ET CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DE SYSTÈMES DE KUKLES

---

de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , du système différentiel polynômial de Kukles de type :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où les polynômes  $f(x), g(x)$  et  $h(x)$  sont de degrés  $n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement et  $d_0 = 0$  est un nombre réel.

Dans Makhoulf et Menaceur [11], en utilisant théorie de moyennisation pour étudié le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée de systèmes différentiels de Kukles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - g(x)y^3, \end{cases}$$

où les polynômes  $f(x), g(x)$  et  $h(x)$  sont de degrés  $n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement.

Dans cette part, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  d'une classe de systèmes différentiels de Kukles

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 + y^2)(q(x, y) - A), \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $A > 0$  et le polynôme  $q(x, y)$  d'ordre  $n - 2 \geq 1$  et  $q(0, 0) = 0$ . Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal *Nonlinear Analysis* [14].

**Théorème 3.2.1** *Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (3.11) qui bifurquent d'un centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est  $k - 2$  cycles limites où*

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} .$$

#### 3.2.2 Preuve du théorème 3.2.1

On utilise la méthode de moyennisation d'ordre un. Pour cela posons

$$q(x, y) = \sum_{d=1}^{n-2} \left( \sum_{j=0}^d a_{j,d} x^{d-j} y^j \right).$$

CHAPITRE 3. NOMBRE MAXIMAL DE CYCLES LIMITES DES  
SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNÔMIAUX PAR LA MÉTHODE  
DE MOYENNISATION

---

Nous considérons

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= \overbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i} x^{2i-2j+1} y^{2j-1} \right)}^{A_{q(x,y)}} \\
 &+ \overbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=0}^i a_{2j, 2i-1} x^{2i-1-2j} y^{2j} \right)}^{B_{q(x,y)}} \\
 &+ \overbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \left( \sum_{j=0}^i a_{2j, 2i} x^{2i-2j} y^{2j} \right)}^{C_{q(x,y)}} \\
 &+ \overbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i-1} x^{2i-2j} y^{2j-1} \right)}^{D_{q(x,y)}}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r > 0$ ; le système (3.11) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^2 (q(r \cos \theta, r \sin \theta) - A) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon r (q(r \cos \theta, r \sin \theta) - A) \cos \theta. \end{cases} \tag{3.13}$$

Considérons maintenant comme nouvelle variable indépendante, le système (3.13) s'écrit sous la forme standard du théorème de moyennisation d'ordre un

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r^2 (q(r \cos \theta, r \sin \theta) - A) \sin \theta + O(\varepsilon^2).$$

Maintenant, on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 (q(r \cos \theta, r \sin \theta) - A) \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta d\theta - \frac{r^2}{2\pi} A \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta,
 \end{aligned}$$

### 3.2. PERTURBATION ET CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DE SYSTÈMES DE KUKLES

---

donc

$$F_{10}(r) = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta d\theta.$$

En utilisant (3.12), on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} q(x, y) \sin \theta d\theta &= r^{2i} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{2\pi \left[ \frac{n-2}{2} \right]} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i} \cos^{2i-2j+1} \theta \sin^{2j-1} \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &+ r^{2i-1} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=0}^i a_{2j, 2i-1} \cos^{2i-1-2j} \theta \sin^{2j} \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &+ r^{2i} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{2\pi \left[ \frac{n-2}{2} \right]} \left( \sum_{j=0}^i a_{2j, 2i} \cos^{2i-2j} \theta \sin^{2j} \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &+ r^{2i-1} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i-1} \cos^{2i-2j} \theta \sin^{2j-1} \theta \right) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Posons

$$I_{i,j} = \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta.$$

Comme  $I_{i,j} = 0$  si  $i$  ou  $j$  est impair et  $I_{i,j} \neq 0$  si  $i$  et  $j$  sont pairs, alors nous avons

$$\int_0^{2\pi} q(x, y) \sin \theta d\theta = \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i-1} I_{2i-2j, 2j} \right) r^{2i-2},$$

alors

$$F_{10}(r) = \frac{r^3}{2\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^i a_{2j-1, 2i-1} I_{2i-2j, 2j} \right) r^{2i-2}.$$

On voit que le polynôme  $F_{10}(r)$  a au plus  $\frac{2(k-1)-2}{2} = k-2$  racines positives. De plus ce polynôme peut admettre exactement  $k-2$  racines positives simples, avec un bon choix des coefficients  $a_{2j-1, 2i-1}$ . Cela complète la preuve du Théorème 3.2.1.



**Exemple 3.2.1** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \varepsilon((x^2 + y^2)(q(x, y) - 1)), \end{cases} \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.14)$$

Où

$$q(x, y) = x^4 + x^2y^3 - 2y,$$

on pose en coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , et  $r > 0$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^2 (r^4 \cos^4 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - 2r \sin \theta) - 1) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon r (r^4 \cos^4 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - 2r \sin \theta) - 1) \cos \theta. \end{cases}$$

En divisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r^2 (r^4 \cos^4 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - 2r \sin \theta) - 1) \sin \theta + O(\varepsilon^2),$$

on cherche maintenant la fonction moyenné  $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 (r^4 \cos^4 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - 2r \sin \theta) - 1) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{r^3}{2} \left[ \frac{r^4}{8} - 2 \right]. \end{aligned}$$

L'équation  $F_{10}(r) = 0$  a une seule racine positive  $r = 2$  et on a

$$\frac{dF_{10}}{dr} \Big|_{r=2} = 16 > 0,$$

alors le système différentiel (3.14) a un cycle limite instable d'amplitude

$$r = 2.$$

## Conclusion

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynômiaux. La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes différentiels. Elle permet aussi de donner une borne supérieure pour le nombre de cycles limites que peut avoir l'équation différentielle perturbée. Nous continuons à travailler sur la recherche des cycles limites des équations différentielles ordinaires. On se propose d'étudier les cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de Kukles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (x^2 + y^2)(q_k(x, y) - A_k), \end{cases}$$

pour  $k = 1, 2$ ,  $A_k > 0$  et le polynôme  $q_k(x, y)$  d'ordre  $n_k - 2 \geq 1$ ,  $q_k(0, 0) = 0$  et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.

# Bibliographie

- [1] A. Buica, J.P. Françoise, J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Commun. Pure Appl. Anal.* 6 (2007) 103–111.
- [2] A. Buica and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull. Sci. Math.* 128 :7-22,2004.
- [3] A. Buica, J.P. Françoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter. *Comm. On Pure and Appl. Anal.* 6 :103-111,2007.
- [4] N. N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolskii, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Gordon and Breach, New York,1961.
- [5] C.J. Christopher and N.G.Lloyd, On the paper of Jin.X. and Wang.D. concerning the conditions for a centre in certain cubic systems *Bull. London Math. Soc.* 22 :5-12, 1990.
- [6] N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics* (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. *Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku*.
- [7] I.S. Kukles, Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre, (French) *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 42 :208-211, 1944.
- [8] J. Llibre and C. Valls, On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems, *Proc. R. Soc. A* (2012) 468, 2347-2360.
- [9] J. Llibre, A. C. Mereu, M. A. Teixeira ; Limit cycles of generalized polynomial Li enard differential equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (2009), 000, 1.
- [10] I.G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.

- [11] A. Makhlouf and A. Menaceur, On the Limit cycles of a class of generalized Kukles polynomial differential systems via averaging theory. *International Journal of Differential Equations*, Article ID 325102, 10 pages, 2015.
- [12] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. Math. Pures. Appl.* Vol. 3 No. 7, 375–422 (1881).
- [13] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8 Springer–Verlag, Berlin–New York, 1966.
- [14] R. Rabanal, On the limit cycles of a class of Kukles type differential systems, *Nonlinear Analysis* 95 (2014) 676–690.
- [15] J. A. Sanders, and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, New York, 1985.