République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

**Et analyse numérique**

Par :

**Melle Guerroudj Ikram**

## Intitulé

# Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard

**Dirigé par : Aissaoui Fatima**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr.Badi Sabrina | PROF | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr.Aissaoui Fatima | MCA | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr.Meftah Badreddine | MCA | Univ-Guelma |

**Session Juin 2022**

# Dédicace

Je commence mes dédicaces au nom de dieu et puis de son prophète Mohamed

Je tiens à dédier ce modeste travail

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier

Comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me

Guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force

Pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A mon très cher frère Oufa, Puisse Dieu te donne santé, bonheur, courage et surtout

De la Réussite

A ma famille, mes proches et ceux qui ont partagé avec moi tous les

Moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail. Ils m'ont

Chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis de la promotion « $2^{éme}$ année Master Mathématiques».

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

# Remerciement

-Au nom de dieu, le plus gracieux, le plus miséricordieux.

Qui m'a donné la force, le courage, et la détermination Nécessaire pour terminer ce Travail.

-Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir Le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr Aissaoui Fatima**, on la remercie Pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience et sa disponibilité durant Notre préparation de ce mémoire.

-Mes sincères remerciement à. **Prof. Badi Sabrina**. Pour avoir accepté de présider le jury.

-Et à **Dr Meftah Badr Eddine**. Pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée Et son soutien moral et ses encouragements.

-A tous les enseignants du département de Mathématique.

-Mes collègues, ma famille et tout le monde ceux qui m'ont aidé et soutenu De près ou de loin tout au long de ce travail.

**Ikram.**

# Abstract

In this memory, we will focus on the study of Hermite-Hadamard type integral inequalities.

In the first chapter, we recall some definitions of classical convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we quote some results already known in the literature.

While the last chapter will be entierly devoted to new Hermite-Hadamard inequalities.



**Keywords** : Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, convex and s-convex functions, Riemann-Liouville integral

# Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la convexité classique ainsi que quelques identités intégrales que nous utiliserons ci-dessous.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard.



**Mots clés** : inégalité d'Hermite-Hadamard, inégalités de Hölder, fonctions convexes et s-convexes, intégrale de Riemann-Liouville.

**ملخص**

في هده الاطروحة سوف نركز على دراسة عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

في الفصل الأول، ندكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، بالإضافة الى بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سندكّر ببعض النتائج المعروفة في الادب حول عدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة لعدم المساواة التكاملية من نوع هرميت هدامار

**كلمات مفتاحية**

عدم مساواة هرميت هدامار, عدم مساواة هولدر, الدوال المحدبة, تكامل ريمان ليوفيل

# Table des matières

## 0.1 Introduction

La théorie des inégalités a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années, celle-ci constitue également un important sujet de recherche où plusieurs situations mathématiques font appels à ces inégalités. En revanche les inégalités intégrales ont connues un grand développement et de nouvelles techniques voire de nouvelles méthodes sont apparues, ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans la théorie de probabilité, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, etc,

Une inégalité très intéressante qui est largement étudiée dans la littérature est due à Hermite et au Hadamard qui l'ont découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893). Maintenant elle est connue comme l'inégalité d'Hermite-Hadamard, on peut dire qu'elle est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications. Elle nous génère une estimation de la valeur moyenne d'une fonction convexe sur un intervalle borné. Ce célèbre résultat est interpreté comme suit :

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont accordé beaucoup d'attention à la théorie de la convexité en raison de sa grande utilité dans divers domaines des sciences pures et appliquées. La théorie des fonctions convexes et les inégalités sont étroitement liées. Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans une abondante littérature qui à été développée sur ce sujet et pour plus de détails on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [4].

Beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser et raffiner cette inégalité et l'étendre à différentes classes de fonctions : fonctions $s$-convexes, fonctions concaves, fonctions $p$-convexes, etc. Et l'appliquer en domaine de probabilité et à des moyens spéciales.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard dont les dérivées premières jouissent d'un certain type de convexité classique, aussi d'essayer de voir des généralisations de ce type d'inégalité. En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions préliminaires concernant certains types de convexité classique, une esquisse concernant le calcul fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales et inégalités utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard dont les fonctions sont convexes et concaves, $s$-convexes. Suivi de quelques applications.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à quelques inégalités de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires, avec des applications en probabilité.

On termine ce mémoire par une petite bibliographie.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Ce chapitre se compose de deux parties :

Dans la première partie nous rappelons quelques types de convexité classique, concavité classique, certaines classes de fonctions et quelques inégalités célèbres.

La deuxième partie est consacrée aux calculs fractionnaires, où nous rappelons quelques définitions utiles pour ce calcul qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations.

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

## 1.1 Convexité et concavité classique

**Définition 1.1** ([2]) *Un ensemble $I$ est dit convexe, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a :*

$$tx + (1-t)y \in I.$$

**Définition 1.2** ([14]) *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1.1}$$

*est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.*

**Définition 1.3** ([13]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction opposée $-f$ est convexe ou*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.2}$$

**Définition 1.4** ([9]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $s$-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{1.3}$$

*est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0.1]$.*

**Définition 1.5** ([5]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $s$-concave au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ si :*

$$f(tx + (1-t)y) \geq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{1.4}$$

*est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0.1]$.*

## 1.2 Quelques classes de fonctions

**Définition 1.6** ([7]) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $f$ est dite bornée sur $[a, b]$ s'il existe $-\infty < m < M < +\infty$ telle que pour tout $x \in [a, b]$ on a :*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

**Définition 1.7** *Soit $p \in [0, +\infty)$. On définit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

*pour $f \in L^p(\Omega)$, on note*

$$||f||_p = \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## 1.3 Inégalité d'Hermite-Hadamard

Nous rappelons la célèbre inégalité dite d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes puis nous exposerons une généralisation qui concerne les fonctions $s$-convexes

**Théorème 1.1** ([12]) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction convexe, alors*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \le \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \tfrac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.5}$$

**Théorème 1.2** *Supposons que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ soit une fonction $s$-convexe au second sens, où $s \in (0, 1]$ et $a, b \in [0, \infty)$ tel que $a < b$. Si $f \in L^1([a, b])$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$2^{s-1} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \le \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{1.6}$$

## 1.4 Inégalité de Hölder et sa variante

**Théorème 1.3** ([10]) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies sur $[a, b]$ où $a < b$, telle que $|f|$ et $|g|$ sont des fonctions $p$-intégrable et $q$-intégrable sur $[a, b]$ respectivement où $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.7}$$

**Théorème 1.4** ([10]) *Soient $|f|^p$ et $|g|^q$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, où $a < b$ et $q \ge 1$ , alors on a*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.8}$$

## 1.5 Moyens spéciales

**Définition 1.8** ([13]) *Considérons les moyens spéciales suivants :*

- *La moyenne arithmétique*

$$A(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

- *La moyenne géométrique*

$$G(\alpha,\beta)=\sqrt{\alpha\beta}.$$

- *La moyenne logarithmique*

$$L(\alpha,\beta)=\frac{\beta-\alpha}{\ln\beta-\ln\alpha}.$$

- *La moyenne identique*

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{e}\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}.$$

- *La moyenne logarithmique généralisée*

$$L_p(\alpha,\beta)=\left[\frac{\beta^{p+1}-\alpha^{p+1}}{(p+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{p}},p\neq-1,0.$$

## 1.6 Généralités sur la théorie fractionnaire

Dans cette section nous rappelons quelques définitions de base sur le calcul fractionnaire qui concernent des fonctions spéciales qui sont utilisées par la suite.

Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans l'intégration d'ordre arbitraire.

Nous présentons aussi l'approche de l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville.

### 1.6.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle $n!$ à l'ensemble des nombres réelles où même complexes.

**Définition 1.9** **(**[3]**)** *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{1.9}$$

*qui converge sur le demi-plan complexe* $\mathrm{Re}(x) > 0$.

**Remarque 1.1** *En intégrant par partie, nous montrons que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *où* $\mathrm{Re}(x) > 0$.

**Remarque 1.2** *En particulier* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

$$\Gamma(1) = 1.$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0.$$

### 1.6.2 Fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcule fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle très important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

**Définition 1.10** **(**[11]**)** *La fonction Bêta d'Euler est définie par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{1.10}$$

*où* $\mathrm{Re}(x) > 0$, $\mathrm{Re}(y) > 0$.

**Remarque 1.3** *La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est la suivante :*

$$B(x,y) = \tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.11}$$

### 1.6.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.11** ([12]) *Soit $f \in L^1([a,b])$, les intégrales de Riemann-Liouville à droite (resp. à gauche) d'ordre $\alpha > 0$ notées $J_{a+}^{\alpha} f$ (resp. $J_{b^-}^{\alpha} f$) est définie par :*

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \; x > a \tag{1.12}$$

$$(J_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \; x < b.$$

*Où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma.*

#### Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire

**Proposition 1.1** *Pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ on a :*

$$J_a^{\alpha}(J_a^{\beta} f)(x) = J_a^{\beta}(J_a^{\alpha} f)(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.13}$$

*Dans le cas où $\alpha = 1$, l'intégrale fractionnaire sera réduite à l'intégrale classique*

$$J_a^1 f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt. \tag{1.14}$$

#### Fonction de densité de probabilité

**Définition 1.12** ([12]) *Une fonction $f$ définie sur $[a,b]$ est dite une fonction de densité de probabilité si elle est continue, positive et*

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

**Exemple 1.1** *La fonction $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction de densité de probabilité.*

### Fonction de répartition de probabilité

**Définition 1.13** ([12]) *Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ qui suit une loi de probabilité $P$. On appelle fonction de répartition de $X$ la fonction*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt.$$

**Remarque 1.4** *La dérivée de $F$ est une fonction de densité de probabilité.*

**Proposition 1.2** $F(a) = 0, F(b) = 1, P(X > x) = 1 - F(x)$ *et* $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

### Espérance mathématique

**Définition 1.14** ([12]) *L'espérance mathématique $E(x)$ est définie par*

$$E(x) = \int_a^b x.f(x)dx,$$

*où $f$ est une (f.d.p), et qui vérifie les propriétés suivantes : $E(x)$ est une fonction linéaire, et l'espérance d'une constante vaut cette constante.*

# Chapitre 2

# Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard

Dans ce chapitre, nous verrons en détail certains résultats provenant des articles [3] , [14] , [11] , [7] .

## 2.1 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes

Les premiers résultats de cette section s'appuient sur l'identité donnée par le lemme suivant :

**Lemme 2.1** ([13]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur $I^\circ$, $a, b \in I^\circ$, où ( $I^\circ$ est l'intérieur de $I$) avec $a < b$. Si $f' \in L^1[a,b]$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \tfrac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt. \tag{2.1}$$

**Preuve.** Il suffit de noter que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(1-2t)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \tfrac{f(a)+f(b)}{b-a} - \tfrac{2}{b-a}\cdot\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

**Théorème 2.1** ([13]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur $I^\circ$, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8} \tag{2.2}$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.1, la convexité de $|f'|$ on obtient

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\tfrac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f''(ta+(1-t)b)dt\right| \\ &\leq \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\ &\leq \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt \\ &\leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{2}\int_0^1 |1-2t|tdt \\ &\leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}, \end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\int_0^1 |1-2t|(1-t)dt = \int_0^1 |1-2t|tdt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)tdt = \tfrac{1}{4}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

**Théorème 2.2** ([13]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$, $a, b \in I^\circ$*

*avec $a < b$, et soit $p > 1$. si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\tfrac{|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}}+|f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.3}$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.1 et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \qquad (2.4)\\ &\leq \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. D'après la convexité de $|f'|^q$, on a

$$\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q]dt = \tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}, \tag{2.5}$$

d'autre part on a :

$$\int_0^1 |1-2t|^p dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p dt = \tfrac{1}{p+1}. \tag{2.6}$$

Une combinaison de $(2.4)-(2.6)$ donne immédiatement l'inégalité requise (2.3). La preuve est terminée. ■

**Théorème 2.3** ([5]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur $I^\circ$, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ et $q \geq 1$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left[\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.7}$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.1

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt, \tag{2.8}$$

et par l'inégalité des moyennes d'ordre $q$

$$\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \leq \left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque $|f'|^q$ est convexe, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t|[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]dt \\ &\leq \tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 |1-2t|dt = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

En réarrangeant la dernière écriture on aboutit au résultat souhaité. ■

**Théorème 2.4** ([5]) *Supposons que les hypothèses du Théorème* 2.3 *soient vérifiées. Alors*

$$\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left[\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.9}$$

**Preuve.** Notre point de départ est l'identité

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b S(x)f'(x)dx, \tag{2.10}$$

où

$$S(x) = \begin{cases} x-a, & x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ x-b, & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

Un argument parallèle à celui du Théorème 2.3 mais avec (2.10) à la place du lemme 2.1 donne le résultat recherché. ■

Nous dérivons maintenant des résultats comparables aux théorèmes 2.3 et 2.4 avec une propriété de concavité au lieu de convexité.

**Théorème 2.5** ([5]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur $I^\circ$, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ et $q \geq 1$. Si $|f'|^q$ $(q \geq 1)$ est concave sur $[a, b]$. Alors*

$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \tfrac{b-a}{4} \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \tag{2.11}$$

*et*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \tfrac{b-a}{4} \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|. \tag{2.12}$$

**Preuve.** D'abord, on note que

$$\begin{aligned} |f'(\lambda x + (1-\lambda)y)|^q &\geq \lambda |f'(x)|^q + (1-\lambda)|f'(y)|^q \\ &\geq (\lambda |f'(x)| + (1-\lambda)|f'(y)|)^q, \end{aligned}$$

par la concavité de $|f'|^q$ et l'inégalité des moyennes d'ordre $q$.

$$f'(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda |f'(x)| + (1-\lambda)|f'(y)|,$$

alors $|f'|$ est aussi concave en conséquence par l'inégalité intégrale de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)dt| &\leq \left( \int_0^1 |1-2t|dt \right) \left| f'\left( \tfrac{\int_0^1 |1-2t|(ta+(1-t)b)dt}{\int_0^1 |1-2t|dt} \right) \right| \\ &= \tfrac{1}{2} \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

De (2.8) on trouve (2.11). De même en utilisant (2.10) nous pouvons prouver (2.12). ■

### 2.1.1 Applications à des moyens spéciales

**Proposition 2.1** ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors, l'inégalité suivante à lieu*

$$|A(a^n, b^n) - L_n(a, b)| \leq \tfrac{n(b-a)}{4} A(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}). \tag{2.13}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate à partir du Théorème 2.1 pour $f(x) = x^n$, $x \in [a, b]$.

■

**Proposition 2.2** ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors pour tout $p > 1$, l'inégalité suivante à lieu :*

$$|A(a^n, b^n) - L_n(a, b)| \leq \frac{n(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[ A\left( |a|^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}}, |b|^{\frac{(n-1)p}{(p-1)}} \right) \right]^{\frac{(p-1)}{p}}. \tag{2.14}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate à partir du Théorème 2.2 pour $f(x) = x^n$, $x \in [a, b]$.

■

**Proposition 2.3** ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a, b]$. Alors l'inégalité suivante à lieu*

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - \overline{L}^{-1}(a, b)| \leq \frac{(b-a)}{4} A(|a|^{-2}, |b|^{-2}). \tag{2.15}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate à partir du Théorème 2.1 pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$.

■

**Proposition 2.4** ([5]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin [a, b]$. Alors pour $p > 1$ l'inégalité suivante à lieu*

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - \overline{L}^{-1}(a, b)| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[ A\left( |a|^{\frac{-2p}{(p-1)}}, |b|^{\frac{-2p}{(p-1)}} \right) \right]^{\frac{(p-1)}{p}}. \tag{2.16}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate à partir du Théorème 2.2 pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$.

■

**Proposition 2.5** ([13]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$, et $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$. Alors pour tout $q \geq 1$*

$$|A(a^n, b^n) - L_n(a, b)^n| \leq \frac{|n|(b-a)}{4} [A(|a|^{(n-1)q}, |b|^{(n-1)q})]^{\frac{1}{q}} \tag{2.17}$$

*et*

$$|A(a, b)^n - L_n(a, b)^n| \leq \frac{|n|(b-a)}{4} [A(|a|^{(n-1)q}, |b|^{(n-1)q})]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.18}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate du Théorème 2.3 et du Théorème 2.4 avec $f(x) = x^n$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. ■

**Proposition 2.6** ([13]) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$. Alors pour tout $q \geq 1$,*

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b)| \leq \tfrac{(b-a)}{4}[A(|a|^{-2q}, |b|^{-2q})]^{\frac{1}{q}} \tag{2.19}$$

*et*

$$|A(a, b)^{-1} - L^{-1}(a, b)| \leq \tfrac{(b-a)}{4}[A(|a|^{-2q}, |b|^{-2q})]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.20}$$

**Preuve.** Le résultat découle du Théorème 2.3 et du Théorème 2.4 avec $f(x) = \frac{1}{x}$. ■

## 2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions $s$-convexes au second sens

**Lemme 2.2** ([8]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^{\circ}$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L[a, b]$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} &\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \qquad (2.21)\\ = \; &\tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt. \end{aligned}$$

**Preuve.** On note que

$$\begin{aligned} I_2 \;=\; &\tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt \\ &+\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, on trouve

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left[(t-1)\tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}\Big|_0^1 - \int_0^1 \tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}dt\right] \\
&\quad +\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left[(1-t)\tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}dt\right] \\
&= \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left[\tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right] \\
&\quad +\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left[-\tfrac{f(b)}{x-a} - \tfrac{1}{(x-b)^2}\int_b^x f(u)du\right] \\
&= \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du.
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

**Théorème 2.6** ([1]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$ tel que $f' \in L[a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a < b < \infty$. Si $|f'|$ est $s$-convexe sur $[a,b]$ pour $s \in (0.1]$, alors*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(x)|\left[\tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \tfrac{1}{(s+2)}\left[\tfrac{(x-a)^2}{b-a}|f'(a)| + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}|f'(b)|\right].
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.2 est la $s$-convexité de $|f'|$, on a

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&= \left|\tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt\right| \\
&\leq \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)\,|f'(tx+(1-t)a)|\,dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
&\leq \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(a)|]dt \\
&\quad +\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(b)|]dt \\
&\leq \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(x)|\left[\tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \tfrac{1}{(s+2)}\left[\tfrac{(x-a)^2}{b-a}|f'(a)| + \tfrac{(b-x)^2}{b-a}|f'(b)\right],
\end{aligned}
$$

où on a utilisé
$$\int_0^1 (1-t)t^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}$$
et
$$\int_0^1 (1-t)^{s+1} dt = \tfrac{1}{(s+2)}.$$
La preuve est terminée. ■

**Corollaire 2.1** ([1]) *Dans le Théorème précédent si on choisi* $x = \frac{a+b}{2}$ *et* $s = 1$, *avec* $|f'| \leq M$, *on obtient*
$$\left| \tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq M \tfrac{b-a}{4}. \tag{2.23}$$

**Théorème 2.7** ([1]) *Soit* $f : I \subset [0.\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $I^\circ$ *tel que* $f' \in [a,b]$, *où* $a, b \in I$ *avec* $a < b < \infty$. *Si* $|f'|^q$ *est* $s$*-convexe sur* $[a,b]$ *pour un nombre fixé* $s \in (0.1]$ , $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left( \tfrac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \tfrac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{s+1} \right]^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left( \tfrac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \tfrac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

**Preuve.** Du lemme 2.2, l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left( \int_0^1 (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left( \int_0^1 (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Comme $|f'|$ est $s$-convexe
$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \tfrac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{s+1} \tag{2.26}$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}. \tag{2.27}$$

En combinant (2.25) – (2.27), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Qui est le résultat souhaité. ■

**Corollaire 2.2** ([1]) *Dans le Théorème 2.7, si on prend $x = \frac{a+b}{2}$ on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left\{\left[\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

**Théorème 2.8** ([1]) *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 2.7 sont satisfaites. Alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q\frac{1}{(s+1)(s+2)} + |f'(a)|^q\frac{1}{s+2}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.29) \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q\frac{1}{(s+1)(s+2)} + |f'(b)|^q\frac{1}{s+2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

**Preuve.** D'après le lemme 2.2, puis l'inégalité des moyens d'ordre $q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt+\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1(1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1(1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|$ est $s$-convexe, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt &\leq \int_0^1[(t^s-t^{s+1})|f'(x)|^q+(1-t)^{s+1}|f'(a)|^q]dt \\
&= |f'(x)|^q\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}+|f'(a)|^q\tfrac{1}{s+2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1[(t^s-t^{s+1})|f'(x)|^q+(1-t)^{s+1}|f'(b)|^q]dt \\
&= |f'(x)|^q\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}+|f'(b)|^q\tfrac{1}{s+2}.
\end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^2}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}+|f'(a)|^q\tfrac{1}{s+2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-x)^2}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}+|f'(b)|^q\tfrac{1}{s+2}\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ■

Le résultat qui suit pour les fonctions $s$-concaves.

**Théorème 2.9** ([1]) *Soit $f : I \subset [0.\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$ tel que*

*$f' \in L[a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est $s$-concave sur $[a,b]$ pour $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\; & \tfrac{2^{\frac{s-1}{q}}}{(1+p)^{\frac{1}{p}}(b-a)} \left\{ (x-a)^2 \left| f'\left(\tfrac{x+a}{2}\right) \right| + (b-x)^2 \left| f'\left(\tfrac{x+b}{2}\right) \right| \right\}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

**Preuve.** Du lemme 2.2, l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \qquad (2.31) \\ \leq\; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \leq\; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left( \int_0^1 (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left( \int_0^1 (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Puisque $|f'|$ est $s$-concave, en utilisant l'inégalité (1.6), on trouve

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq 2^{s-1} \left| f'(\tfrac{x+a}{2}) \right|^q \tag{2.32}$$

et

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq 2^{s-1} \left| f'(\tfrac{x+b}{2}) \right|^q. \tag{2.33}$$

De $(2.31) - (2.33)$, on termine la preuve. ■

### 2.2.1 Application

**Proposition 2.7** ([1]) *Soit $a,b \in I^\circ$, $a < b$ et $0 < s < 1$. Alors pour tout $q > 1$, on a*

$$|A(a^s,b^s) - L_s^s(a,b)| \leq s\tfrac{b-a}{4} \left\{ \left[ \left| \tfrac{a+b}{2} \right|^{(s-1)q} + |a|^{(s-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[ \left| \tfrac{a+b}{2} \right|^{(s-1)q} + |b|^{(s-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}. \tag{2.34}$$

**Preuve.** La preuve est immédiate à partir du corollaire 2.2 pour la fonction $s$-convexe $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = x^s$. $\blacksquare$

# Chapitre 3

# Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires

## 3.1 Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard fractionnaires pour les fonctions s-convexes

**Lemme 3.1** ([12]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$ et $\alpha > 0$ on a*

$$\begin{aligned} & \tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-} f(a) + J^\alpha_{x^+} f(b)] \\ = \; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (t^\alpha - 1) f'(tx + (1-t)a)dt \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^\alpha) f'(tx+(1-t)b)dt, \end{aligned} \tag{3.1}$$

*où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$.*

**Preuve.** D'après l'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (t^\alpha - 1) f'(tx + (1-t)a)dt \\
= \;& (t^\alpha - 1) \tfrac{f(tx+(1-t)a}{x-a}\Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \tfrac{f(tx+(1-t)a)}{x-a} dt \\
= \;& \tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{\alpha}{x-a} \int_a^x \left(\tfrac{u-a}{x-a}\right)^{\alpha-1} \tfrac{f(u)}{x-a} du \\
= \;& \tfrac{f(a)}{x-a} - \tfrac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}} J_{x^-}^\alpha f(a). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1 - t^\alpha) f'(tx + (1-t)b)dt \\
= \;& (1 - t^\alpha) \tfrac{f(tx+(1-t)b}{x-b}\Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \tfrac{f(tx+(1-t)b)}{x-b} dt \\
= \;& \tfrac{f(b)}{b-x} - \tfrac{\alpha}{b-x} \int_x^b (\tfrac{u-b}{x-b})^{\alpha-1} \tfrac{f(u)}{x-b} du \\
= \;& \tfrac{f(b)}{b-x} - \tfrac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}} J_{x^+}^\alpha f(b). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de (3.2) et (3.3) par $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}$ et $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}$ respectivement, puis par addition, on obtient l'identité désirée. ■

**Théorème 3.1** ([12]) *Soit $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$ tel que $f' \in L[a, b]$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est $s$-convexe sur $[a, b]$ pour $s \in (0, 1]$ et $x \in [a, b]$ alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires avec $\alpha > 0$ à lieu*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \qquad (3.4) \\
\leq \;& \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left[ \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right] |f'(x)| \\
&+ \left[ \tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)} \right] \left[ \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)|+(b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a} \right],
\end{aligned}$$

*où $\Gamma$ est la fonction Gamma d'Euler.*

**Preuve.** D'après le lemme 3.1, la propriété du module et en utilisant la $s$-convexité de $|f'|$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left| \tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^\alpha_{x^-} f(a) + J^\alpha_{x^+} f(b)] \right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |t^\alpha - 1||f'(tx+(1-t)a)|dt \\
& + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 |1-t^\alpha||f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^\alpha)\left[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(a)|\right] dt \\
& + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^\alpha)\left[t^s|f'(x)| + (1-t)^s|f'(b)|\right] dt \\
=\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 (1-t^\alpha)t^s\, |f'(x)|\, dt + \int_0^1 (1-t^\alpha)(1-t)^s|f'(a)|dt \right\} \\
& + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 (1-t^\alpha)t^s\, |f'(x)|\, dt + \int_0^1 (1-t^\alpha)(1-t)^s|f'(b)|dt \right\} \\
=\ & \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left[ \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right] |f'(x)| \\
& + \left[ \tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)} \right] \left[ \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)|+(b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a} \right],
\end{aligned}
$$

où on a utilisé

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)t^s dt = \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}$$

et

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)(1-t)^s dt = \left[ \tfrac{1}{s+1} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \right].$$

La preuve est terminée. ■

**Théorème 3.2** ([12]) *Soit $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^\circ$ tel que $f' \in L[a, b]$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est $s$-convexe sur $[a, b]$ pour $s \in (0.1]$, $p, q > 1$,*

*$x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires à lieu*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

*où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $\Gamma$ est la fonction Gamma d'Euler.*

**Preuve.** D'après le lemme 3.1, les propriétés du module et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a} - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |t^\alpha - 1||f'(tx+(1-t)a)|dt \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 |1-t^\alpha||f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\ & + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est $s$-convexe sur $[a,b]$, on trouve

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q\, dt \leq \tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1},$$

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}$$

et par un simple calcul

$$\int_0^1 (1-t^\alpha)^p dt = \tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}.$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

**Corollaire 3.1** ([12]) *Dans le Théorème précédent, si on choisi* $x=\frac{a+b}{2}$, *on obtient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|(b-a)^{\alpha-1}\tfrac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{\frac{a+b}{2}^-}^{\alpha}f(a)+J_{\frac{a+b}{2}^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \qquad (3.6)\\
\leq\ & \left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}}\tfrac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha+1}}\left\{\left(\tfrac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

**Théorème 3.3** ([12]) *Soit* $f:I\subset[0.\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $I^{\circ}$ *tel que* $f'\in L[a,b]$, *où* $a,b\in I$ *avec* $a<b$. *Si* $|f'|^q$ *est* $s$*-convexe sur* $[a,b]$ *pour* $s\in(0.1]$, $q\geq 1$, $x\in[a,b]$, *alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires à lieu*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \qquad (3.7)\\
\leq\ & \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\tfrac{1}{s+1}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\tfrac{1}{s+1}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}$$

*où* $\alpha>0$ *et* $\Gamma$ *est la fonction Gamma d'Euler.*

**Preuve.** D'après le lemme 3.1, les propriétés du module et en utilisant l'inégalité des moyens d'ordre $q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \qquad (3.8)\\
\leq\; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|t^{\alpha}-1||f'(tx+(1-t)a)|dt\\
& +\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|1-t^{\alpha}||f'(tx+(1-t)b)|dt\\
\leq\; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\\
& +\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ est $s$-convexe sur $[a,b]$, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1(1-t^{\alpha})|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\\
\leq\; & \int_0^1(1-t^{\alpha})\left[t^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(a)|^q\right]\\
=\; & \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\tfrac{1}{s+1}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(a)|^q \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^1(1-t^{\alpha})|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\\
\leq\; & \int_0^1(1-t^{\alpha})\left[t^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right]\\
=\; & \tfrac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\tfrac{1}{s+1}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(b)|^q. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

En substituant (3.9) et (3.10) dans (3.8), on obtient le résultat souhaité. ∎

**Théorème 3.4** ([12]) *Soit $f: I\subset[0.\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $I^{\circ}$ tel que $f'\in L[a,b]$, où $a,b\in I$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-concave sur $[a,b]$ pour $s\in(0.1]$, $q>1$,*

*$x \in [a,b]$, alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires à lieu*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\; & \left(\tfrac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}}\tfrac{2^{\frac{s-1}{q}}}{b-a}\left\{(x-a)^{\alpha+1}\left|f'\left(\tfrac{x+a}{2}\right)\right|+(b-x)^{\alpha+1}\left|f'\left(\tfrac{x+b}{2}\right)\right|\right\},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

*où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $\Gamma$ est la fonction Gamma d'Euler.*

**Preuve.** D'après le lemme 3.1, les propriétés du module et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|t^{\alpha}-1||f'(tx+(1-t)a)|dt \\
&+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1|1-t^{\alpha}||f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\; & \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&+\tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\left(\int_0^1(1-t^{\alpha})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Puisque $|f'|^q$ est $s$-concave sur $[a,b]$, en utilisant l'inégalité 1.6 on trouve

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt\leq 2^{s-1}\left|f'\left(\tfrac{x+a}{2}\right)\right|^q \tag{3.13}$$

et

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\leq 2^{s-1}\left|f'\left(\tfrac{x+b}{2}\right)\right|^q. \tag{3.14}$$

De (3.13) et (3.14) la preuve est terminée. ■

## 3.2 Applications en Probabilité

Soit $X$ une variable aléatoire qui prend des valeurs dans l'intervalle fini $[a, b]$ et la fonction de densité de probabilité $f : [a, b] \to [0.1]$ avec une fonction de distribution commutative $F(x) = \int_a^b f(t)dt$.

**Proposition 3.1** ([12]) *Dans le Théorème* 3.1*, si on prend* $\alpha = 1$*, on obtient cette inégalité*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(b-x)F(b)+(x-a)F(a)}{b-a} - \tfrac{b-E(x)}{b-a} \right| \\ \leq \; & \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left[ \tfrac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \right] |F'(x)| + \tfrac{1}{s+2} \left[ \tfrac{(x-a)^2|F'(a)|+(b-x)^2|F'(b)|}{b-a} \right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

*Pour tout* $x \in [a, b]$ *et* $E(x)$ *est l'espérance de* $X$.

**Preuve.** Si on écrit l'inégalité du Théorème 3.1 avec $\alpha = 1$ pour $F$, on obtient le résultat désiré. ■

**Proposition 3.2** ([12]) *Dans le Théorème* 3.2*, si on prend* $\alpha = 1$*, on obtient l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(b-x)F(b)+(x-a)F(a)}{b-a} - \tfrac{b-E(x)}{b-a} \right| \\ \leq \; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left( \tfrac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \tfrac{|F'(x)|^q+|F'(a)|^q}{s+1} \right]^{\frac{1}{q}} + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left( \tfrac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \tfrac{|F'(x)|^q+|F'(b)|^q}{s+1} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

*pour tout* $x \in [a, b]$ *et* $E(x)$ *est l'espérance de* $X$.

**Preuve.** Si on écrit l'inégalité du Théorème 3.2 avec $\alpha = 1$ pour $F$, on obtient le résultat désiré. ■

**Proposition 3.3** ([12]) *Dans le Théorème* 3.3*, si on prend* $\alpha = 1$*, on obtient l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{(b-x)F(b)+(x-a)F(a)}{b-a} - \tfrac{b-E(x)}{b-a} \right| \\ \leq \; & \tfrac{(x-a)^2}{b-a} \left( \tfrac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[ |F'(x)|^q \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} + |F'(a)|^q \tfrac{1}{s+2} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \tfrac{(b-x)^2}{b-a} \left( \frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[ |F'(x)|^q \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} + |F'(b)|^q \tfrac{1}{s+2} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

*pour tout* $x \in [a,b]$ *et* $E(x)$ *est l'espérance de* $X$.

**Preuve.** Si on écrit l'inégalité du Théorème 3.3 avec $\alpha = 1$ pour $F$, on obtient le résultat désiré. ■

**Proposition 3.4** ([12]) *Dans le Théorème* 3.4, *si on prend* $\alpha = 1$, *on obtient l'inégalité*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{(b-x)F(b)+(x-a)F(a)}{b-a} - \tfrac{b-E(x)}{b-a}\right| \\ \leq\ &\tfrac{2^{\frac{s-1}{q}}}{(1+p)^{\frac{1}{p}}(b-a)} \left\{(x-a)^2 \left|F'\left(\tfrac{x+a}{2}\right)\right| + (b-x)^2 \left|F'\left(\tfrac{x+b}{2}\right)\right|\right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

*pour tout* $x \in [a,b]$ *et* $E(x)$ *est l'espérance de* $X$.

**Preuve.** Si on écrit l'inégalité du Théorème 3.4 avec $\alpha = 1$ pour $F$, on obtient le résultat désiré. ■

# conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaine inégalités de type Hermite-Hadamard et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstration de ce genre de problémes, et d'autre part d'essayer de voir des généralisations de ce type d'inégalité. En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

# Bibliographie


[1] M. Avci,H. Kavurmaci and M. E. Özdemir, New inequalities of Hermite-Hadamard type via $s$-convex functions in the second sense with applications. Appl. Math. Comput. 217 (2011), no. 12, 5171–5176.

[2] H. Budak and E. Pehlivan, Weighted Ostrowski, trapezoid and midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. AIMS Math. 5 (2020), no. 3, 1960–1984.

[3] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.

[4] Lj. Dedić, M. Matić and J. Pečarić, On Euler midpoint formulae. ANZIAM J. 46 (2005), no. 3, 417–438.

[5] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[6] S. S. Dragomir, P. Cerone, J. Roumeliotis and S. Wang, A weighted version of Ostrowski inequality for mappings of Hölder type and applications in numerical analysis. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 42(90) (1999), no. 4, 301–314.

[7] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type involving an $s$-convex function with applications. Appl. Math. Comput. 246 (2014), 752–760.

[8] H. Kavurmaci, M. Avci and M. E. Özdemir, New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications. J. Inequal. Appl. 2011, 2011 :86, 11 pp.

[9] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for functions whose $n^{th}$ derivatives are logarithmically convex. Ann. Math. Sil. 32 (2018), no. 1, 275–284.

[10] B. Meftah, New integral inequalities Through the $\varphi$-preinvexity. Iran. J. Math. Sci. Inform. 15 (2020), no. 1, 79-83.

[11] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Mathematics and its Applications (East European Series), 53. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[12] M. E. Özdemir, M. Gürbüz and H. Kavurmacı, Hermite-Hadamard-type inequalities for $(g, \varphi_h)$-convex dominated functions. J. Inequal. Appl. 2013, 2013 :184, 7 pp.

[13] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[14] E. Set, İ. İşcan, M. Z. Sarikaya and M. E. Özdemir, On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for convex functions via fractional integrals. Appl. Math. Comput. 259 (2015), 875–881.