

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

Djebabla Hala

## Intitulé

**Etude des cycles limites de certaines classes d'équations  
différentielles ordinaires perturbées du quatrième ordre**

Dirigé par : Dr. Sellami Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.	Djenaoui Saliha	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.	Sellami Nabil	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.	Bouattia Yassine	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2022

## Dédicace

**Je dédie ce modeste travail :**

A la mémoire de ma très chère mère *\*Hadda\**, aucun mot ne peut exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à votre égard *\*qu'ALLAH ait pitié de ton âme\**.

A l'homme qui n'a jamais épargné aucun effort pour me rendre heureuse mon cher père *\* Amor \**.

A mes frères qui n'ont pas cessé à me soutenir tout au long de mes études "*Sofiane, Zouhir, Hamza, Khamissi, Bilel, Amer*".

A ma **grand-mère**, et toute ma famille.

A mes chères amies et tous mes camarades de la promo de math 2022, sans oublier tous mes professeurs du primaire, du moyen et du secondaire, ou de supérieur.

A toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail ainsi de ma formation.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Système dynamique, flot, points d'équilibre et linéarisation . . .	1
1.2 Nature des points d'équilibre . . . . .	3
1.3 Portrait de phase et cycles limites . . . . .	6
<b>2 Théorie de moyennisation</b>	<b>9</b>
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques . . . . .	9
2.1.1 Première Méthode . . . . .	9
2.1.2 Deuxième Méthode . . . . .	11
<b>3 Solutions périodiques de deux classes d'équations différen- tielles du quatrième ordre</b>	<b>20</b>
3.1 Etude d'une E.D.O du quatrième ordre non-autonome . . . . .	20
3.1.1 Cas 1 : $p \neq -1, 0, 1$ . . . . .	21
3.1.2 Cas 2 : $p = \pm 1$ . . . . .	27
3.2 Etude d'une E.D.O du quatrième ordre autonome . . . . .	33

# ملخص

نهتم بدراسة الحلول الدورية المعزولة لصنفين من المعادلات التفاضلية من الرتبة الرابعة باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى.  
الصنف الأول عبارة عن معادلات تفاضلية غير ذاتية أي غير مستقلة من الشكل:

$$x^{(4)} + (p^2 + 1)\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

حيث  $p$  عدد ناطق،  $\varepsilon$  صغير كفاية و  $F \in C^2$  دالة حقيقية غير خطية و دورية دورها  $T$ .

الصنف الثاني عبارة عن معادلات تفاضلية ذاتية أي مستقلة من الشكل:

$$x^{(4)} + (p^2 + 1)\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

حيث  $p$  عدد ناطق،  $\varepsilon$  صغير كفاية و  $F \in C^2$  دالة حقيقية غير خطية.

# Résumé

Dans ce mémoire, on étudie l'existence et le nombre des cycles limites pour deux classes d'équations différentielles du quatrième ordre en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

La première classe étudiée est non-autonome de la forme

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$$

où  $p$  est un nombre rationnel,  $\varepsilon$  est un petit paramètre réel et  $F$  est une fonction de classe  $C^2$  et  $T$ -périodique en  $t$ .

La deuxième classe est autonome de la forme

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$$

où  $p$  est un nombre rationnel,  $\varepsilon$  est un petit paramètre réel et  $F$  est une fonction de classe  $C^2$ .

# Abstract

We study the existence and number of limit cycles for two classes of fourth-order differential equations using first-order averaging theory.

The first class studied is non-autonomous of the form

$$\ddot{\ddot{x}} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

where  $p$  is a rational number,  $\varepsilon$  is a small real parameter and  $F$  is a function of class  $C^2$  and  $T$ -periodic in  $t$ .

The second class is autonomous of the form

$$\ddot{\ddot{x}} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

where  $p$  is a rational number,  $\varepsilon$  is a small real parameter and  $F$  is a function of class  $C^2$ .

# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force d'accomplir ce modeste travail.

Le messager d'ALLAH, le Puissant et Sublime, a dit : « Il ne remercie pas ALLAH celui qu'il ne remercie pas les gens » .

Deuxièmement, je tiens tout particulièrement à remercier et à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mon encadreur, **Dr. Sellami Nabil**, pour ses encouragements et ses précieux conseils. Je le remercie également pour ses suggestions, car il a été attentif et intéressé à mes nombreuses questions, autre ses nombreuses corrections à mon mémoire. Mon mémoire lui doit beaucoup. Merci mon professeur.

J'adresse également mes sincères remerciements à chacun des professeurs **Dr. Djenaoui Saliha** et **Dr. Bouattia Yassine** Pour leur approbation de faire partie du jury.

Enfin, je remercie celle qui est absente de moi, mais qui n'a pas été oubliée dans mon esprit, tu vivras toujours dans mon coeur.

# Introduction

Les équations différentielles sont apparues pour la première fois, vers la fin du dix-septième siècle dans les travaux d'Isaac Newton, Leibniz, et Bernoulli. Elles jouent un rôle essentiel pour la modélisation des systèmes physique, mécaniques, économique ....

L'étude de l'existence, le nombre et la stabilité des solutions périodiques est l'un des plus importants problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques.

Un cycle limite d'une EDO est une solution périodique isolée. Plusieurs méthodes pour la recherche des solutions périodiques des EDO ont été créées et développées, on peut citer le théorème de Poincaré Bendixson, le critère de non existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov, méthodes de perturbations,...

Le seizième problème de Hilbert consiste à déterminer le nombre maximum de cycles limites d'un système planaire polynomial de degré  $n$ , il a été présenté en 1900 [4] et reste irrésolu.

La méthode de Moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des EDO's et des systèmes dynamiques.

Cette méthode remonte à 1788, lorsque Lagrange à formulé le problème gravitationnel de trois corps comme une perturbation du problème de deux corps. La validité de cette méthode à attendu que Fatou en 1928 prouve certains des résultats asymptotiques. Ensuite les résultats de Krylov et Bogoliubov en 1937 [5], Malkin (1956) [8], Bogoliubov et Mitropolskii [1] 1961, Roseau (1966) [9], ont rendu la méthode de Moyennisation comme un outil classique important pour l'analyse des oscillations non linéaire. Elle a été ensuite développée par Sanders and Verhulst [10], Buica, Françoise et Llibre (2007) [3]. . .

Dans ce mémoire, on utilise la méthode de Moyennisation du premier ordre

afin d'étudier les cycles limites de deux classes d'équations différentielles ordinaires perturbées du quatrième ordre autonome et non autonome.

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un chapitre préliminaire qui contient des définitions et des théorèmes de base de la théorie qualitative des EDO et des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, on introduit deux types différents de la théorie de Moyennisation du premier ordre, pour chaque type on donne un théorème avec des exemples d'applications.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode de moyennisation du premier ordre citée dans le deuxième chapitre à l'étude des cycles limites de deux classes d'équations différentielles ordinaires du quatrième ordre autonome et non-autonome.

# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Premièrement on définit le système dynamique et les notions de : flot, point d'équilibre, la linéarisation, stabilité, la nature de points d'équilibre et on passe à la définition du portrait de phase et cycles limites, solution périodique, amplitude de cycle limite...

### 1.1 Système dynamique, flot, points d'équilibre et linéarisation

**Définition 1.1.1 (Système dynamique)** : Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(0, x) = x$ .
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1.1** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constante, la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

**Définition 1.1.2 (Flot d'un système différentiel) :** Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

telle que  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des application  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

où :  $\phi(t, x_0)$  est la solution telle que  $\phi(0, x_0) = x_0$ .

**Remarque :** Si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , alors le flot est dit autonome sinon il est dit non autonome.

**Définition 1.1.3 (Points d'équilibre) :** On appelle point d'équilibre ou point critique, du système différentiel non linéaire (1.2) tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie  $f(x_0) = 0$ .

**Définition 1.1.4 (Système linéarisé) :** On appelle système linéarisé de (1.2) au voisinage du point d'équilibre  $x_0$ , le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = Df(x_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \tag{1.3}$$

**Théorème 1.1.1 (de cauchy-lipschitz) :** Soit la fonction  $f(t, x)$  qui admet des dérivées partielles par rapport à  $t$  et  $x$  et qu'elle sont continues, et soit  $t_0, x_0$  des réels, il existe une seule solution  $\phi(t)$  de l'équation  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  définie sur un intervalle contenant  $t_0$  qui vérifie  $\phi(t_0) = x_0$ .

**Définition 1.1.5 (Stabilité) :** Soit le système différentiel non autonome et non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

## 1.2. NATURE DES POINTS D'ÉQUILIBRE

---

On suppose que  $f(t, x)$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions. Une solution  $\phi(t)$  du système (1.4) telle que

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

est dite stable au sens de Lyapunov si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus :  $\lim \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ , alors la solution  $\phi(t)$  est asymptotiquement stable.

### 1.2 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour chercher la nature des points d'équilibres. Soit le système différentiel linéaire  $\dot{x} = Ax$ , où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  et soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

(1). Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1).

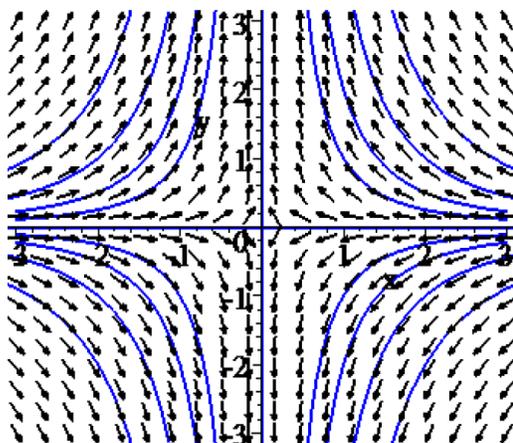


Figure (1.1) : Point selle.

(2). Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de même signe, on a trois cas :

(a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud stable (voir Figure 1.2.a).

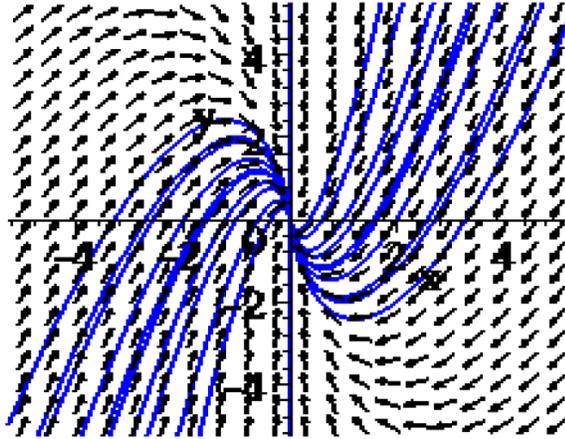


Figure (1.2.a) : Noeud stable

(b) Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud instable (voir Figure 1.2.b).

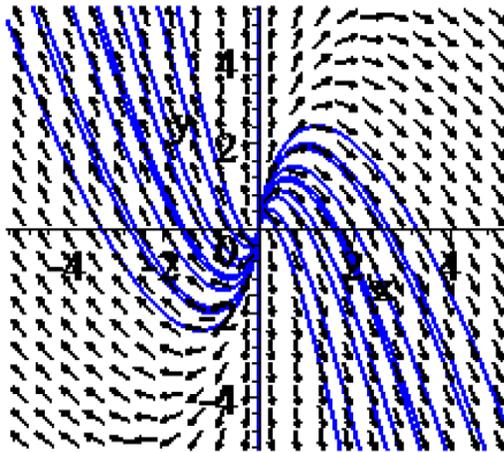


Figure (1.2.b) : Noeud instable.

(c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  le point critique  $x = x_0$  est un noeud propre, il est stable

## 1.2. NATURE DES POINTS D'ÉQUILIBRE

si  $\lambda < 0$ , sinon il est instable (voir Figure 1.2.c).

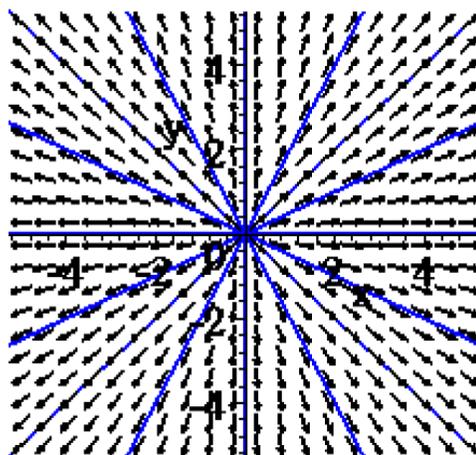


Figure (1.2.c) : Noeud propre instable.

(3). Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des complexes conjuguées  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  telle que  $\alpha_j \neq 0$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un foyer, il est asymptotiquement stable si  $\alpha_j < 0$  sinon il est instable (voir Figure 1.3).

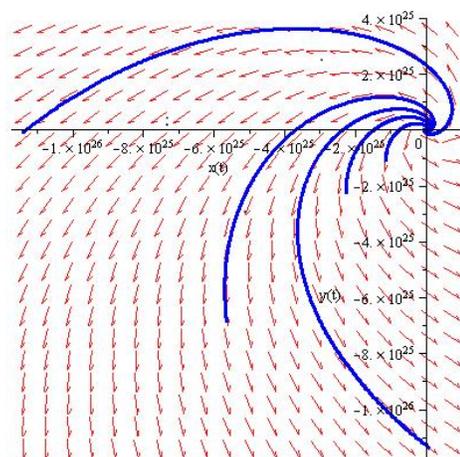


Figure (1.3) : Foyer.

(4). Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des complexes conjuguées  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  telle que  $\beta_j \neq 0$  et  $\alpha_j = 0$  alors le point critique  $x = x_0$  est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Figure 1.4).

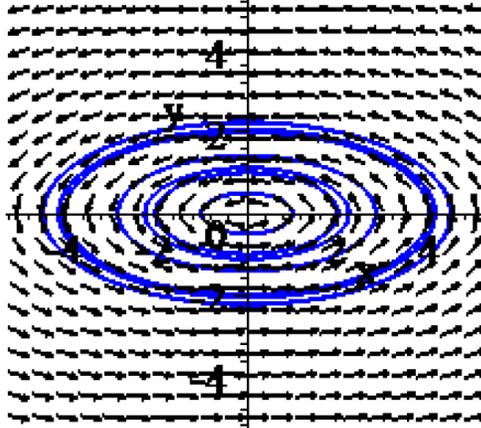


Figure (1.4) : Centre.

**Définition 1.2.1 (Points d'équilibre hyperboliques) :** Si la jacobienne  $A = Df(x_0)$  n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle, alors le point d'équilibre est dit hyperbolique.

### 1.3 Portrait de phase et cycles limites

**Définition 1.3.1** Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes en  $x$  et  $y$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.5) sont représentées dans le plan  $(x, y)$  par des courbes appelées orbites. Les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points d'équilibre représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

**Définition 1.3.2 (Solution périodique) :** On appelle solution périodique ou cycle toute trajectoire  $\Psi_t(x)$  du système différentiel non linéaire (1.2) telle

qu'il existe un nombre  $T > 0$ , vérifiant

$$\Psi(t + T, x) = \Psi(t, x) \text{ pour } T > 0.$$

Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie la formule précédente est appelé période. Pour un système autonome, à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace de phase.

**Définition 1.3.3 (Cycle limite) :** Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

**Définition 1.3.4 (Amplitude de cycle limite) :** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.

**Définition 1.3.5 (Cycle limite hyperbolique) :** Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in C^1(E)$ . Soit  $\varphi(t)$  un cycle limite de période  $T$  du système (1.2), alors  $\varphi(t)$  est hyperbolique si  $\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt \neq 0$  ou  $\nabla f(\varphi(t))$  est la divergence de  $f$  en  $\varphi(t)$

–  $\varphi(t)$  est stable si  $\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt < 0$ ,

–  $\varphi(t)$  est instable si  $\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt > 0$ ,

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 1.3.1** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.6)$$

Après le passage au coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système (1.6) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = 2r(1 - r^2).$$

On a

$$f(r) = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

On a la solution périodique

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$$

dans le plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On a donc un point d'équilibre  $(0, 0)$  et un cycle limite d'amplitude

$$r = 1 \text{ et } \theta = t + \theta_0.$$

**Définition 1.3.6 (Ensemble isochrone) :**

L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

# Chapitre 2

## Théorie de moyennisation

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques, cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel non autonome et d'un système moyenné lequel est autonome.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de moyennisation d'ordre un et on l'applique aux équations différentielles contenant un petit paramètre  $\varepsilon$ .

### 2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

#### 2.1.1 Première Méthode

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.1)$$

Avec  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{D}$  un domaine bornée et  $t \geq 0$ . On suppose que  $F(t, \mathbf{x}(t))$  et  $R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon)$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ . Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \mathbf{y}) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

**Théorème 2.1.1** Considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles  $F$ ,  $R$ ,  $D_x F$ ,  $D_x^2 F$  et  $D_x R$  sont continues et bornées par une constante  $M$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) dans  $[0, \infty[ \times \mathbb{D}$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . De plus, on suppose que  $F$  et  $R$  sont  $T$ -périodiques en  $t$  avec  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ .

(1) Si  $g \in \mathbb{D}$  est un point singulier du système moyenné (2.2) telle que

$$\det(D_x f^0(g)) \neq 0. \quad (2.4)$$

Alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$  du système (2.1) telle que  $\mathbf{x}_\varepsilon(t) \rightarrow g$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(2) Si le point singulier  $\mathbf{y} = g$  du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$  du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que  $g$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve :** voir [12].

**Exemple 2.1.1** Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(|y| - 1)\dot{x},$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(|y| - 1)y. \end{cases} \quad (2.5)$$

En coordonnées polaire  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (|r \sin \theta| - 1) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos \theta (|r \sin \theta| - 1) \sin \theta, \end{cases}$$

où d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (|r \sin \theta| - 1) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2).$$

## 2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR LES ORBITES PÉRIODIQUES

---

De (2.3) on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(|r \sin \theta| - 1) \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} r \left( \frac{-4}{3} r + \frac{1}{2} \pi \right).$$

Le seule racine positive de  $f^0(r)$  est  $r = \frac{3}{8}\pi$ . Comme  $(\frac{df^0}{dr})(\frac{3}{8}\pi) = \frac{-1}{2}$ , d'après le théorème 2.1.1, il suit que le système (2.5) pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon  $r = \frac{3}{8}\pi$  du système non perturbé (2.5) avec  $\varepsilon = 0$ . De plus, comme

$$\left( \frac{df^0}{dr} \right) \left( \frac{3}{8}\pi \right) = \frac{-1}{2} < 0,$$

ce cycle limite est stable.

### 2.1.2 Deuxième Méthode

On considère le problème de la bifurcation des solutions  $T$ -périodiques d'un système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Avec  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Les fonctions  $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions de classe  $C^2$ ,  $T$ -périodiques par rapport à la première variable et  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que le système non perturbé (2.6) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

a une sous variété de solutions périodiques de dimension  $k$ . Soit  $\mathbf{x}(t, z)$  une solution du système (2.6) telle que  $\mathbf{x}(0, z) = z$ . La linéarisation du système non perturbé (2.7) le long d'une solution périodique  $\mathbf{x}(t, z)$  est

$$\dot{\mathbf{y}} = D_x F_0(t, \mathbf{x}(t, z)) \mathbf{y}. \quad (2.8)$$

Dans la suite on note par  $M_z(t)$  la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.8) et par  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $k$  premières coordonnées ;

i.e.  $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ .

**Théorème 2.2.2** [11] et [6] Soit  $V \subset \mathbb{R}^k$  un ouvert borné,  $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une fonction  $C^2$ . On suppose que

(i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$  et que pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $\mathbf{x}(t, z_\alpha)$  de (2.6) est  $T$ -périodique.

(ii) Pour chaque  $z_\alpha \in Z$  il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.8) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions  $k \times (n-k)$  et dans le bas coin droit une matrice  $\Delta_\alpha((n-k) \times (n-k))$  avec  $\det \Delta_\alpha \neq 0$ .

On considère la fonction  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$  définie par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left( \int_0^t M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt \right), \quad (2.9)$$

s'il existe  $a \in V$  telle que  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det(\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}(a)) \neq 0$ , alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.7) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve :** voir [8] et [9].

**Exemple 2.2.2** Soit l'équation

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3), \quad (2.10)$$

si  $y = \dot{x}$ , et  $z = \ddot{x}$ , l'équation (2.10) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \quad (2.11)$$

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.11) lorsque  $\varepsilon = 0$ . La partie linéaire du système (2.11) avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\pm i$  et 1. Avec la transformation linéaire inversible  $(X, Y, Z)^t = B(x, y, z)^t$ , on transforme le système (2.11) en un autre système dont sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (2.11) avec  $\varepsilon = 0$ , c.à.d  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^t = J(X, Y, Z)^t$ , où  $J$  est la forme de Jordan réelle de la matrice  $A$  donnée par

2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR  
LES ORBITES PÉRIODIQUES

---

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$BAB^{-1} = J \implies BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = x - y, \\ Y = -y + z, \\ Z = x + z, \end{cases}$$

Le nouveau système est donné par

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F} \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F} \end{cases} \quad (2.12)$$

avec

$$\tilde{F}(t, X, Y, Z) = F \left( t, \frac{X - Y + Z}{2}, \frac{-X - Y + Z}{2}, \frac{-X + Y + Z}{2} \right).$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , la solution du système  $(2.12)_{\varepsilon=0}$  est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

Avec les notations introduites dans le **Théorème 2.2.2**. Le système (2.12) est similaire au système (2.6) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z), \quad F_0(t, \mathbf{x}) = (-Y, X, Z), \\ F_1(t, \mathbf{x}) &= (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \quad \text{et} \quad F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

soit  $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$  la solution du système (2.12) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, Z_0) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Le système (2.12) avec  $\varepsilon = 0$  a un centre linéaire à l'origine dans le plan  $(X, Y)$  qui est un plan invariant par le flot du système non perturbé, les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t)),$$

telles que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \quad Z(t) = 0. \quad (2.13)$$

Notons que ces solutions sont  $2\pi$ -périodiques.

Pour notre système le  $V$  et le  $\alpha$  du **Théorème 2.2.2**, sont  $V = \{(X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\}$  pour  $\rho > 0$  et  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ .

La matrice fondamentale  $M(t)$  du système (2.12) avec  $\varepsilon = 0$  par rapport à la solution périodique (2.13) telle que  $M(0) = I$  est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales  $(X_0, Y_0, 0)$  et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix}$$

On a  $(1 - e^{-2\pi}) \neq 0$ . Alors toutes les conditions du **Théorème 2.2.2** sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$  des deux premières composantes  $(\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha))$  de la fonction  $F(\alpha)$  donnée dans (2.9) telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \sin t \tilde{F}(t, x(t, X_0, Y_0, 0)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t F\left(t, \frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}\right) dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR  
LES ORBITES PÉRIODIQUES

---

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t \tilde{F}(t, x(t, X_0, Y_0, 0)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t F\left(t, \frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}\right) dt,\end{aligned}\quad (2.15)$$

où  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont données par (2.13). On pose  $F(X_0, Y_0) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$  et on intègre (2.14) et (2.15) on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{-1}{16}(Y_0 + X_0)(6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0), \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{3}{8}(-Y_0X_0^2 + Y_0^2X_0) - \frac{3}{8}(-Y_0^3 + X_0^3) \\ \quad + \frac{1}{8}(Y_0^2 + X_0^2) - \frac{1}{8}Y_0X_0. \end{cases}\quad (2.16)$$

Si  $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ , on trouve  $(X_0^*, Y_0^*) = (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$ . On a

$$\det \left( \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{|(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})} = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors pour  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  avec  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation différentielle (2.10) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4}.$$

**Théorème 2.2.3 [3] (Perturbation d'un ensemble isochrone  $k = n$ ) :**  
Supposons qu'il existe un ensemble  $V$  ouvert et borné avec  $\bar{V} \subset \Omega$  tel que pour chaque  $z \in \bar{V}$ , la solution  $\mathbf{x}(t, z)$  est  $T$ -périodique, alors on considère la fonction  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.17)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det \left( \frac{d\mathcal{F}}{da}(a) \right) \neq 0$ , Alors il existe une solution  $T$ -périodique du système(2.6) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve :** voir [7].

**Exemple 2.2.3** On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon (3x \cos^2 t - 2 \cos^3 t), \quad (2.18)$$

si  $y = \dot{x}$ , et  $z = \ddot{x}$ , l'équation (2.18) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x + \varepsilon(3x \cos^2 t - 2 \cos^3 t) = -x + \varepsilon F(t, x), \end{cases} \quad (2.19)$$

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.19) lorsque  $\varepsilon = 0$ . La partie linéaire du système (2.19) avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\pm i$ . Avec la transformation linéaire inversible  $(X, Y)^t = B(x, y)^t$ , on transforme le système (2.19) à un autre système dont sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (2.19) avec  $\varepsilon = 0$ , c.-à-d.  $(\dot{X}, \dot{Y})^t = J(X, Y)^t$ , où  $J$  est la forme de Jordan réelle de la matrice  $A$  donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \implies BA - JB = 0$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} X = -3x + y, \\ Y = x + 3y, \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR  
LES ORBITES PÉRIODIQUES

---

Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y), \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$\tilde{F}(t, X, Y) = F\left(t, \frac{-Y}{10}, \frac{X + 3Y}{10}\right).$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , la solution du système (2.20) <sub>$\varepsilon=0$</sub>  est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \end{pmatrix}.$$

Avec les notations introduites dans le **Théorème 2.2.3**. Le système (2.20) est similaire au système (2.7) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y), \text{ et } F_0(t, \mathbf{x}) = (Y, -X), \\ F_1(t, \mathbf{x}) &= (0, \tilde{F}) \text{ et } F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, \varepsilon)$  la solution du système (2.20) telle que

$$\mathbf{x}(0, X_0, Y_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0).$$

Le système (2.14) avec  $\varepsilon = 0$  a un centre linéaire à l'origine dans le plan  $(X, Y)$  qui est un plan invariant par le flot du système non perturbé, les solutions périodiques de ce centre sont

$$\mathbf{x}(t, X_0, Y_0, ) = (X(t), Y(t))$$

telles que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t. \quad (2.21)$$

Notons que ces solutions sont  $2\pi$ -périodiques.

Pour notre système le  $V$  et le  $\alpha$  du **Théorème 2.2.3**. Sont

$$V = \{(X, Y) : 0 < \mathbf{x}^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V.$$

La matrice fondamentale  $M(t)$  du système (2.20) avec  $\varepsilon = 0$  par rapport à la solution périodique (2.21) telle que  $M(0) = I$  est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on doit étudier les zéros  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$  de la fonction  $F(\alpha)$  donnée dans (2.17), on trouve que  $F(\alpha) = (\mathcal{F}_1(a), \mathcal{F}_2(a))$  telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \sin t \tilde{F}(t, \mathbf{x}(X_0, Y_0, t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t F\left(t, \frac{-Y}{10}, \frac{X+3Y}{10}\right) dt, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} \cos t \tilde{F}(t, \mathbf{x}(t, X_0, Y_0)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t F\left(t, \frac{-Y}{10}, \frac{X+3Y}{10}\right) dt, \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont données par (2.21). On pose  $F(X_0, Y_0) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$  et on intègre (2.22) et (2.23), on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{-3}{8} X_0 \sin Y_0 \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{9}{8} X_0 \cos Y_0 - \frac{3}{4} \end{cases}$$

Si  $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ , on trouve  $(X_0^*, Y_0^*) = (\frac{2}{3}, 0)$ . On a

$$\det \left( \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{|(X_0^*, Y_0^*)} = \frac{9}{32} \neq 0.$$

Alors pour  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  avec  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation différentielle (2.16) telle que

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{x}^*(t) = \frac{2}{3} \cos t.$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR  
LES ORBITES PÉRIODIQUES

---

**Théorème 2.2.4 [12] (Cas  $n = 2m$ ) :**

Supposons que  $n=2m$  et soit  $V$  un sous ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^m$  et soit  $\beta : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^2$ .

On note  $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $(n-k)$  dernières coordonnées ;

i.e.  $\xi^\perp(x_1, \dots, x_n) = (x_{n+1}, \dots, x_n)$ , supposons que

(i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $\mathbf{x}(t, z_\alpha)$  du système (2.6), est  $T$ -périodique.

(ii) pour tout  $z_\alpha \in Z$ , il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.8) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le coin supérieur droit une matrice  $\Delta_\alpha(m \times m)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ , et dans le coin inférieur droit une matrice  $m \times m$  nulle. On considère la fonction  $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.24)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$ . Alors il existe une solution  $T$ -périodique du système (2.6) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve :** voir [7].

# Chapitre 3

## Solutions périodiques de deux classes d'équations différentielles du quatrième ordre

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions périodiques de deux classes d'équations différentielles du quatrième ordre non-autonome et autonome via la méthode de moyennisation.

### 3.1 Etude d'une E.D.O du quatrième ordre non-autonome

On considère l'E.D.O du quatrième ordre suivante

$$\ddot{\ddot{x}} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}), \quad (3.1)$$

où  $p$  est un nombre rationnel,  $\varepsilon$  est un petit paramètre réel et  $F$  est une fonction non-autonome,  $T$ -périodique en  $t$ , de classe  $C^2$ . En utilisant la théorie de moyennisation, on étudie les cycles limites de l'équation (3.1). On distingue deux cas suivant les valeurs de  $p$ ,  $p \neq -1, 0, 1$  et  $p = \pm 1$ , pour chaque cas, on présente un théorème d'existence des cycles limites de l'équation (3.1) et on donne des exemples.

### 3.1.1 Cas 1 : $p \neq -1, 0, 1$

**Théorème 3.1.1** [2] Soit  $p = \frac{p_1}{p_2}$  un nombre rationnel différent de  $-1, 0, 1$  avec  $p_1$  et  $p_2$  sont premiers entre eux. Pour chaque  $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  solution du système

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

satisfaisant

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, U_0)} \Big|_{(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \right) \neq 0, \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \int_0^{2\pi p_2} \cos t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= - \int_0^{2\pi p_2} \sin t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{-1}{p} \int_0^{2\pi p_2} \sin(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{-1}{p} \int_0^{2\pi p_2} \cos(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{X_0 \sin t + Y_0 \cos t - Z_0 \cos(pt) + U_0 \sin(pt)}{p^2 - 1}, \\ B(t) &= \frac{X_0 \cos t - Y_0 \sin t + p(Z_0 \sin(pt) + U_0 \cos(pt))}{p^2 - 1}, \\ C(t) &= \frac{-X_0 \sin t - Y_0 \cos t + p^2(Z_0 \cos(pt) - U_0 \sin(pt))}{p^2 - 1}, \\ D(t) &= \frac{-X_0 \cos t + Y_0 \sin t - p^3(Z_0 \sin(pt) + U_0 \cos(pt))}{p^2 - 1}, \end{aligned}$$

*CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE*

---

l'équation différentielle (3.1) a une solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  tendant vers la solution

$$x^*(t) = \frac{X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t - Z_0^* \cos(pt) + U_0^* \sin(pt)}{p^2 - 1}, \quad (3.5)$$

de l'équation

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\ddot{x} + p^2x = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Notons que cette solution est périodique de période  $2\pi p_2$ .

**Preuve**

Introduisant les variables  $(t, x, y, z, u) = (t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ , on écrit l'équation différentielle du quatrième ordre non autonome (3.1) sous la forme d'un système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -p^2x - (1 + p^2)z + \varepsilon F(t, x, y, z, u). \end{cases} \quad (3.6)$$

L'origine est l'unique point singulier du système (3.6) lorsque  $\varepsilon = 0$ . La partie linéaire du système (3.6) avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p^2 & 0 & -1 - p^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Les valeurs propres du système non perturbé sont des complexe imaginaires  $\pm i$  et  $\pm ip$ , écrivons le système (3.6) de manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan. En faisant le changement de variable  $(X, Y, Z, U)^\top = B(x, y, z, u)^\top \Rightarrow (x, y, z, u)^\top = B^{-1}(X, Y, Z, U)^\top$  telle que  $B$  est la matrice de changement de variables, avec la forme normale réelle de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A = B^{-1}JB \text{ et } BA = JB \Rightarrow BA - JB = 0.$$

3.1. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE  
NON-AUTONOME

---

En résolvant un système de 16 équations à 16 inconnus, on trouve la matrice de changement de variable  $B$ , telle que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & p^2 & 0 & 1 \\ p^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} & 0 & \frac{-1}{p} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

La matrice  $B$  est définie si  $p$  est différent de 0. Donc

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{cases} p^2 \dot{y} + \dot{u}, \\ p^2 \dot{x} + \dot{z}, \\ \dot{x} + \dot{z}, \\ -(\frac{\dot{y} + \dot{u}}{p}), \end{cases}$$

on trouve donc

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = -pU, \\ \dot{U} = pZ - \frac{\varepsilon}{p} \tilde{F}(t, X, Y, Z, U). \end{cases} \quad (3.9)$$

On a

$$(x, y, z, u)^\top = B^{-1}(X, Y, Z, U)^\top.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & p^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Le système (3.9) prend la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{p} \tilde{F} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

**CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE**

---

où  $\tilde{F}(t, X, Y, Z, U) = F(t, A, B, C, D)$ , avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{Y-Z}{p^2-1} \\ B = \frac{pU+X}{p^2-1} \\ C = \frac{p^2Z-Y}{p^2-1} \\ D = -\frac{p^3U+X}{p^2-1} \end{array} \right.$$

Notons que le changement de variable (3.10) est défini lorsque  $p$  est différent de  $-1, 1$  parce que le déterminant de la matrice de passage est  $\frac{1}{p^2-1}$ . Nous allons appliquer le **Théorème 2.2.3** au système différentiel (3.9).

Posant

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U), \quad F_0(t, \mathbf{x}) = (-Y, X, -pU, pZ), \\ F_1(t, \mathbf{x}) &= (\tilde{F}, 0, 0, \frac{-1}{p}\tilde{F}) \text{ et } F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

et  $\Omega = \mathbb{R}^4$ . Pour  $\varepsilon = 0$  le système (3.9) a un centre linéaire à l'origine. La solution périodique  $\mathbf{x}(t)$  de ce centre est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \end{pmatrix} = e^{J(t)} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \sin t + X_0 \cos t \\ Z_0 \cos(pt) - U_0 \sin(pt) \\ Z_0 \sin(pt) + U_0 \cos(pt) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Cet ensemble de solutions périodiques est de dimension 4, ayant toutes une période  $2\pi p_2$ . La matrice fondamentale  $M(t)$  le long d'une solution périodique  $\mathbf{x}(t)$  du système (3.9) avec  $\varepsilon = 0$  est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(pt) & -\sin(pt) \\ 0 & 0 & \sin(pt) & \cos(pt) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

L'inverse de cette matrice est

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(pt) & \sin(pt) \\ 0 & 0 & -\sin(pt) & \cos(pt) \end{pmatrix}.$$

3.1. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE  
NON-AUTONOME

---

Calculons maintenant la fonction  $\mathcal{F}(\alpha)$  définie par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^T M^{-1}(t) F_1(t, x(t)) dt,$$

on trouve  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$ , et  $\alpha = (X_0, Y_0, Z_0, U_0)$ , où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \int_0^{2\pi p_2} \cos t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= - \int_0^{2\pi p_2} \sin t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \quad (3.14) \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{-1}{p} \int_0^{2\pi p_2} \sin(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{-1}{p} \int_0^{2\pi p_2} \cos(pt) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \end{aligned}$$

avec  $A(t), B(t), C(t)$  et  $D(t)$  sont données dans l'énoncé du **Théorème 3.1.1**. Pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, si les zéros  $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  du système

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

sont simples alors ils donnent des orbites périodiques, c'est à dire si

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, U_0)} \Big|_{(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \right) \neq 0,$$

pour chaque racine simple  $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  du système (3.15), on obtient une solution  $(X(t), Y(t), Z(t), U(t))$  du système (3.9) telle que

$$(X(t), Y(t), Z(t), U(t)) \rightarrow (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*)$$

**CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE**

---

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En remontant par le changement de variables, on obtient une solution  $x(t)$ ,  $2\pi p_2$ -périodique de l'équation (3.1) avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  qui tend vers la solution périodique

$$x^*(t) = \frac{X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t - Z_0^* \cos(pt) + U_0^* \sin(pt)}{p^2 - 1}, \quad (3.16)$$

de l'équation

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\ddot{x} = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 3.1.1** On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} + \frac{13}{9}\ddot{x} + \frac{4}{9}x = \varepsilon \left( (x^2 - 2x + \ddot{x}) \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right), \quad (3.17)$$

telle que  $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) = (x^2 - 2x + \ddot{x}) \cos(\frac{t}{3})$  et  $p = \frac{2}{3}$ .

Dans ce cas, les fonctions  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$  sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{243}{100}U_0^2\pi - \frac{33}{5}Z_0\pi + \frac{243}{100}Z_0^2\pi, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{243}{50}Z_0U_0\pi - \frac{33}{5}K_0\pi, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{729}{100}Y_0U_0\pi + \frac{729}{100}X_0Z_0\pi - \frac{243}{20}X_0\pi, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{243}{20}Y_0\pi + \frac{729}{100}Y_0Z_0\pi - \frac{729}{100}U_0X_0\pi. \end{aligned}$$

Le système  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4) = (0, 0, 0, 0)$  possède une racine  $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) = (0, 0, \frac{220}{81}, 0)$  qui vérifie

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, U_0)} \Big| \left( 0, 0, \frac{220}{81}, 0 \right) \right) = \frac{25492401}{10000}\pi^4 \neq 0,$$

alors, on obtient une solution  $x(t)$   $6\pi$ -périodique de l'équation (3.17), avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  qui tend vers la solution périodique

$$x^*(t) = -\frac{44}{9} \cos\left(\frac{2}{3}t\right),$$

de l'équation

$$\ddot{x} + \frac{13}{9}\ddot{x} + \frac{4}{9}x = 0,$$

3.1. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE  
NON-AUTONOME

---

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 3.1.2** On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} + \frac{29}{25}\dot{x} + \frac{4}{25}x = \varepsilon(2y + 3 + \sin t), \quad (3.18)$$

telle que  $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 2y + 3 + \sin t$  et  $p = \frac{2}{5}$ .

Dans ce cas, les fonctions  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$  sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -\frac{250}{21}X_0\pi, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= -5\pi - \frac{250}{21}Y_0\pi, \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{250}{21}Z_0\pi, \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, U_0) &= \frac{250}{21}U_0\pi. \end{aligned}$$

Le système  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4) = (0, 0, 0, 0)$  possède une racine  $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, U_0^*) = (0, 0, \frac{-21}{50}, 0)$  qui vérifie

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, U_0)} \Big| \left( 0, 0, \frac{21}{50}, 0 \right) \right) = \frac{3906250000}{194481}\pi^4 \neq 0$$

alors, on obtient une solution  $x(t)$ ,  $10\pi$ -périodique de l'équation (3.18), avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  qui tend vers la solution périodique

$$x^*(t) = -\frac{24}{25} \cos\left(\frac{2}{5}t\right),$$

de l'équation

$$\ddot{x} + \frac{29}{25}\dot{x} + \frac{4}{25}x = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3.1.2 Cas 2 : $p = \pm 1$

**Théorème 3.1.2 [6]** On suppose que  $p = \pm 1$  et on remplace dans (3.1), on trouve

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (3.19)$$

**CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE**

---

S'il existe  $(Z_0^*, U_0^*)$  telle que  $\mathcal{F}_1(Z_0^*, U_0^*) = \mathcal{F}_2(Z_0^*, U_0^*) = 0$  et

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (Z_0, U_0)} \Big|_{(Z_0^*, U_0^*)} \neq 0 \right),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, A, B, C, D) \sin t \, dt, \\ \mathcal{F}_2(Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, A, B, C, D) \cos t \, dt, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{25} [(-9Z_0 + 13U_0) \cos t + (9U_0 + 13Z_0) \sin t], \\ B &= \frac{1}{25} \left[ \left( 28Z_0 + \frac{13}{2}U_0 \right) \cos t + \left( -28U_0 + \frac{13}{2}Z_0 \right) \sin t \right], \\ C &= \frac{1}{25} [(4Z_0 - 3U_0) \cos t - (4U_0 + 3Z_0) \sin t], \\ D &= \frac{1}{25} \left[ \left( 2Z_0 - \frac{3}{2}U_0 \right) \cos t - \left( 2U_0 + \frac{3}{2}Z_0 \right) \sin t \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Alors pour tout  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  et  $\varepsilon_0$  plus petit, il existe une solution  $2\pi$ -périodique  $x(t)$  de l'équation (3.19) qui tend quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers la solution périodique  $x^*(t)$  de la même équation avec  $\varepsilon = 0$ , telle que

$$x^*(t) = \frac{1}{25} [(-9Z_0^* + 13U_0^*) \cos t + (9U_0^* + 13Z_0^*) \sin t].$$

La preuve du **Théorème 3.1.2** est basée sur la théorie de la moyennisation  
**Preuve**

On écrit l'équation différentielle du quatrième ordre non autonome (3.19) sous forme d'un système différentiel du premier ordre. Soit le changement de variables suivant  $(x, y, z, u) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -x - 2z + \varepsilon F(t, x, y, z, u). \end{cases} \quad (3.21)$$

3.1. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE  
NON-AUTONOME

---

L'origine est l'unique point singulier du système (3.21) lorsque  $\varepsilon = 0$ . La partie linéaire du système (3.21) avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Les valeurs propres du système non perturbé sont des complexes imaginaires  $\pm i$  et  $\pm i$ , écrivons le système (3.21) de manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan. En faisant le changement de variable  $(X, Y, Z, U)^\top = B(x, y, z, u)^\top \Rightarrow (x, y, z, u)^\top = B^{-1}(X, Y, Z, U)^\top$  telle que  $B$  est la matrice de changement de variables, avec la forme normale réelle de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = B^{-1}JB \text{ et } BA = JB \Rightarrow BA - JB = 0.$$

En résolvant un système de 16 équations à 16 inconnus, on trouve la matrice de changement de variables  $B$ , telle que

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

donc

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\dot{x} - \dot{y} + 6\dot{z} + \dot{u} \\ 2\dot{z} - 4\dot{u} \\ -\dot{x} + 2\dot{y} - \dot{z} + 2\dot{u} \\ 2\dot{x} + \dot{y} + 2\dot{z} + \dot{u} \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE

---

On trouve donc

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{cases} -Y + Z + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ X + U + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ -U - 2\varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ Z - \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \end{cases} \quad (3.24)$$

et on a

$$(x, y, z, u)^\top = B^{-1}(X, Y, Z, U)^\top$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{9}{25} & \frac{13}{25} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & \frac{13}{50} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{25} & -\frac{3}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Le système (3.24) prend la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{F} \\ -2\tilde{F} \\ -\tilde{F} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

où  $\tilde{F}(t, X, Y, Z, U) = F(t, A, B, C, D)$ , avec

$$\begin{aligned} A &= -\frac{9}{25}Z + \frac{13}{25}U, \\ B &= \frac{28}{25}Z + \frac{13}{50}U, \\ C &= \frac{4}{25}Z - \frac{3}{25}U, \\ D &= -\frac{2}{25}Z - \frac{3}{50}U. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Posant

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (X, Y, Z, U), \quad F_0(t, \mathbf{x}) = (-Y + Z, X + U, -U, Z), \\ F_1(t, \mathbf{x}) &= (\tilde{F}, \tilde{F}, -2\tilde{F}, -\tilde{F}) \quad \text{et} \quad F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

et  $\Omega = \mathbb{R}^4$ . Pour  $\varepsilon = 0$  le système (3.24) a un centre linéaire à l'origine. La solution périodique  $\mathbf{x}(t)$  de ce centre est

3.1. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE  
NON-AUTONOME

---

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ U(t) \end{pmatrix} = e^{J(t)} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \\ 0, \\ Z_0 \cos t - U_0 \sin t, \\ U_0 \cos t + Z_0 \sin t. \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Ces solutions périodiques sont des cercle sur le plan  $X = Y = 0$  du système (3.24) avec  $\varepsilon = 0$ . Toutes ces orbites sont  $2\pi$ -périodiques.

Nous décrirons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du **Théorème 2.2.4** ( $n = 4 = 2 \times 2$ ).

Nous prenons le sous-ensemble ouvert borné  $V \subset \mathbb{R}^2$  comme  $V = \{(Z_0, U_0) : Z_0^2 + U_0^2 < r^2\}$ , avec  $r > 0$ .

Soit  $\alpha = (Z_0, U_0)$  et  $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $\beta(Z_0, U_0) = (0, 0)$ . L'ensemble  $Z = \{z_\alpha = (Z_0, U_0, 0, 0) : (Z_0, U_0) \in V\}$ .

Donc à partir de maintenant, pour appliquer le **Théorème 2.2.4 (cas  $n=2m$ )**. Il faut écrire le système (3.24) comme suit

$$\begin{cases} \dot{Z} = -U - 2\varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ \dot{U} = Z - \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ \dot{X} = -Y + Z + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U), \\ \dot{Y} = X + U + \varepsilon \tilde{F}(t, X, Y, Z, U). \end{cases} \quad (3.29)$$

La matrice fondamentale  $M(t)$  du système (3.29) associée à la solution  $2\pi$ -périodique

$$\begin{pmatrix} Z(t) \\ U(t) \\ X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 \cos t - U_0 \sin t \\ U_0 \cos t + Z_0 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & t \cos t & -t \sin t \\ \sin t & \cos t & t \sin t & t \cos t \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est

$$M^{-1}(t) = \frac{1}{\cos 2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & -t \cos t & t \sin t \\ -\sin t & \cos t & t \sin t & -t \cos t \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

*CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE*

---

Par conséquent la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

satisfait les conditions du **Théorème 2.2.4**. Calculons maintenant la fonction  $\mathcal{F}(\alpha)$  défini par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (3.31)$$

On trouve  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , et  $\alpha = (Z_0, U_0)$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_2(Z_0, U_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, si les zéros  $(Z_0^*, U_0^*)$  du système

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(Z_0, U_0) \\ \mathcal{F}_2(Z_0, U_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

sont simples alors ils donnent des orbites périodiques, c'est à dire si

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (Z_0, U_0)} \Big|_{(Z_0^*, U_0^*)} \right) \neq 0.$$

Pour chaque racine simple  $(Z_0^*, U_0^*)$  du système (3.32), on obtient une solution  $(Z(t), U(t), X(t), Y(t))$  du système (3.29) telle que

$$(Z(t), U(t), X(t), Y(t)) \rightarrow (Z_0^*, U_0^*, 0, 0)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3.2. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE AUTONOME

---

En remontant par le changement de variables, on obtient une solution  $x(t)$ ,  $2\pi p_2$ -périodique de l'équation (3.19) avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  qui tend vers la solution périodique

$$\dot{x}^*(t) = -\frac{9}{25}(Z_0^* \cos t - U_0^* \sin t) + \frac{13}{25}(U_0^* \cos t + Z_0^* \sin t), \quad (3.33)$$

de l'équation

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 3.2 Etude d'une E.D.O du quatrième ordre autonome

On considère l'équation différentielle ordinaire autonome du quatrième ordre suivante

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\dot{x} + p^2x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}), \quad (3.34)$$

où  $p$  est un nombre rationnel,  $\varepsilon$  est un petit paramètre réel et  $F$  est une fonction de classe  $C^2$ .

**Théorème 3.2.1 [6]** Soit  $p = \frac{p_1}{p_2}$  un nombre rationnel différent de  $-1, 0, 1$  avec  $p_1$  et  $p_2$  sont premiers entre eux. Pour chaque  $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  solution du système (3.35)

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0) = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

satisfaisant

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial (r_0, Z_0, U_0)} \Big|_{(r_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \right) \neq 0, \quad (3.36)$$

CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE

---

avec

$$\mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0) = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} [\cos \theta F(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))] d\theta,$$

$$\mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0) = -\frac{1}{pr_0} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} [(p^2 U_0 \sin \theta + r_0 \sin(p\theta)) F(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))] d\theta,$$

$$\mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{pr_0} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} [(p^2 Z_0 \sin \theta - r_0 \cos(p\theta)) F(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))] d\theta,$$

et

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{r_0 \sin \theta - Z_0 \cos(p\theta) + U_0 \sin(p\theta)}{p^2 - 1}, \\ B(\theta) &= \frac{r_0 \cos \theta + p(Z_0 \sin(p\theta) + U_0 \cos(p\theta))}{p^2 - 1}, \\ C(\theta) &= \frac{-r_0 \sin \theta + p^2(Z_0 \cos(p\theta) - U_0 \sin(p\theta))}{p^2 - 1}, \\ D(\theta) &= \frac{-r_0 \cos \theta - p^3(Z_0 \sin(p\theta) + U_0 \cos(p\theta))}{p^2 - 1}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (3.34) admet une solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  tendant vers la solution

$$x^*(t) = \frac{r_0^* \sin \theta - Z_0^* \cos(p\theta) + U_0^* \sin(p\theta)}{p^2 - 1}, \quad (3.37)$$

de l'équation

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\dot{x} + p^2 x = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Notons que la période de  $x^*(t)$  est  $2\pi p_2$ .

**Preuve :**

On Introduisant les variables  $(x, y, z, u) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ ; On écrit l'équation différentielle du quatrième ordre autonome (3.34) sous forme d'un système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -p^2 x - (1 + p^2)z + \varepsilon F(x, y, z, u). \end{cases} \quad (3.38)$$

### 3.2. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE AUTONOME

---

Le système (3.38) avec  $\varepsilon = 0$  sera appelé le système non perturbé, sinon on a le système perturbé. Le système non perturbé a un point singulier unique à l'origine avec les valeurs propres  $\pm i$  et  $\pm ip$ . On écrira le système (3.38) de telle manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan. En faisant le changement de variable  $(X, Y, Z, U) = B(x, y, z, u)$  donné par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p^2 & 0 & 1 \\ p^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} & 0 & \frac{-1}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

le système différentiel (3.38), devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, U), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = -pU, \\ \dot{U} = pZ - \frac{\varepsilon}{p} \tilde{F}(X, Y, Z, U), \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $\tilde{F}(X, Y, Z, U) = F(A, B, C, D)$ , avec

$$\begin{cases} A = \frac{Y-Z}{p^2-1}, \\ B = \frac{pU+X}{p^2-1}, \\ C = \frac{p^2Z-Y}{p^2-1}, \\ D = -\frac{p^3U+X}{p^2-1}. \end{cases}$$

Notez que la partie linéaire du système différentiel (3.40) à l'origine est dans sa forme normale réelle de Jordan et que le changement de variable est défini lorsque  $p$  est différent de  $-1, 0, 1$  car le déterminant de la matrice du changement est  $\frac{(p^2-1)^2}{p}$ .

On passe des variables cartésiennes  $(X, Y, Z, U)$  aux variables cylindriques  $(r, \theta, Z, U)$  de  $\mathbb{R}^4$ , où  $X = r \cos \theta$  et  $Y = r \sin \theta$ . Dans ces nouvelles variables le système différentiel (3.40) peut être écrit comme

CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE

---

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \varepsilon \cos \theta H(r, \theta, Z, U), \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 1 - \varepsilon \frac{\sin \theta}{r} H(r, \theta, Z, U), \\ \dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = -pU, \\ \dot{U} = \frac{dU}{dt} = pZ - \frac{\varepsilon}{p} H(r, \theta, Z, U), \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $H(r, \theta, Z, U) = F(a, b, c, d)$  avec

$$\begin{cases} a = \frac{r \sin \theta - Z}{p^2 - 1}, \\ b = \frac{pU + r \cos \theta}{p^2 - 1}, \\ c = \frac{p^2 Z - r \sin \theta}{p^2 - 1}, \\ d = \frac{-p^3 U - r \cos \theta}{p^2 - 1}. \end{cases}$$

Maintenant nous changeons la variable indépendante de  $t$  à  $\theta$ , et en désignant la dérivée par rapport à  $\theta$  par une prime, le système différentiel (3.41) devient

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta H + o(\varepsilon^2), \\ Z' = \frac{dZ}{d\theta} = -pU - \varepsilon \frac{pU \sin \theta}{r} H + o(\varepsilon^2), \\ U' = \frac{dU}{d\theta} = pZ + \varepsilon \frac{p^2 Z \sin \theta - r}{pr} H + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.42)$$

où  $H = H(r, \theta, Z, U)$ . On va appliquer le **Théorème 2.2.3** au système différentiel (3.42), on note que le système (3.42) peut s'écrire comme le système (2.6) du chapitre 2 avec

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ U \end{pmatrix}, \quad t = \theta, \quad F_0(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -pU \\ pZ \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta H \\ \frac{-pU \sin \theta}{r} H \\ \frac{p^2 Z \sin \theta - r}{pr} H \end{pmatrix}.$$

Les solutions périodiques du système (3.42) avec  $\varepsilon = 0$  sont

$$\begin{aligned} r(\theta) &= r_0, \\ Z(\theta) &= Z_0 \cos(p\theta) - U_0 \sin(p\theta), \\ U(\theta) &= U_0 \cos(p\theta) + Z_0 \sin(p\theta), \end{aligned}$$

### 3.2. ETUDE D'UNE E.D.O DU QUATRIÈME ORDRE AUTONOME

pour tout  $r_0 > 0$ . Cet ensemble d'orbites périodiques est de dimension 3, ayant toutes la même période  $\frac{2\pi}{p}$ . Pour chercher les solutions périodiques de notre équation (3.42), il faut calculer les zéros du système  $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ , où  $\mathcal{F}(\alpha)$  est défini par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(\mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt.$$

Nous avons obtenu que  $\alpha = (r_0, Z_0, U_0)$  et  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ , où

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0) = \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0) = \frac{-1}{pr_0} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} (p^2 U_0 \sin \theta + r_0 \sin(p\theta)) F(A, B, C, D) d\theta, \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0) = \frac{1}{pr_0} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} (p^2 Z_0 \sin \theta - r_0 \cos(p\theta)) F(A, B, C, D) d\theta, \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $A, B, C$  et  $D$  sont données dans l'énoncé du **Théorème 3.2.1**. Les zéros  $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  du système  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) = (0, 0, 0)$ , s'ils sont simples, c'est-à-dire si

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial (r_0, Z_0, U_0)} \Big|_{(r_0^*, Z_0^*, U_0^*)} \right) \neq 0,$$

donnent une solution périodique  $(r(\theta), Z(\theta), U(\theta))$  du système (3.42). En remontant par le changement de variables, pour tout zéro simple  $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*)$  du système  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) = (0, 0, 0)$ , on obtient une solution périodique  $x(t)$  de période  $2\pi p_2$  de l'équation différentielle (3.34) pour  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que  $x(t)$  tend vers la solution périodique

$$x^*(t) = \frac{r_0^* \sin \theta - Z_0^* \cos(p\theta) + U_0^* \sin(p\theta)}{p^2 - 1},$$

de l'équation

$$\ddot{x} + (1 + p^2)\dot{x} + p^2 x = 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 3.2.1** On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = (\varepsilon(2x^2 - y + 1)), \quad (3.44)$$

*CHAPITRE 3. SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX CLASSES  
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE*

---

telle que  $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = 2x^2 - y + 1$  et  $p = 2$ . Dans ce cas, les fonctions  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont données par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(r_0, Z_0, U_0) &= -\frac{16}{135}Z_0U_0 + \frac{1}{9}r_0U_0\pi + \frac{1}{6}r_0\pi, \\ \mathcal{F}_2(r_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{135r_0}(-30r_0^2 + 180U_0 - 56U_0Z_0^2 - 112U_0r_0^2 - 64U_0^3 - 30r_0U_0Z_0\pi), \\ \mathcal{F}_3(r_0, Z_0, U_0) &= \frac{1}{540r_0}(224Z_0^3 + 256U_0^2Z_0 + 432r_0^2Z_0 - 720Z_0 + 120r_0Z_0^2\pi + 15r_0\pi).\end{aligned}$$

Le système  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) = (0, 0, 0)$

possède une racine  $(r_0^*, Z_0^*, U_0^*) = \left(-16\frac{\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2}, \frac{3\pi\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2}, \frac{-5}{4}\right)$  qui vérifie

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(r_0, Z_0, U_0)}\bigg|_{\left(-16\frac{\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2}, \frac{3\pi\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2}, \frac{-5}{4}\right)}\right) = \frac{128}{3645}\pi \neq 0,$$

alors, on obtient une solution  $x(t)$   $2\pi$ -périodique de l'équation (3.44), avec  $0 < \varepsilon \ll 1$  qui tend vers la solution périodique

$$x^*(t) = \frac{\frac{-16\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2} \sin \theta - \frac{3\pi\sqrt{2816-1170\pi^2}}{-2816+117\pi^2} \cos(p\theta) - \frac{5}{4} \sin(2\theta)}{3}, \quad (3.45)$$

de l'équation

$$\ddot{\ddot{x}} + 5\ddot{x} + 4x = 0.$$

---

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et le nombre de cycles limites de deux classes d'équations différentielles ordinaires perturbées du quatrième ordre en utilisant la méthode de moyennisation. La première classe étudiée était non-autonome et la deuxième était autonome. On a distingué deux cas selon les valeurs du paramètre  $p$  pour la première classe et un seul cas pour la deuxième classe d'équations. Il existe d'autres cas qu'on n'a pas pu les étudier via cette méthode.

La méthode de moyennisation nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes de l'existence des cycles limites en transformant le problème de l'existence des cycles limites en un problème algébrique de l'existence des solutions non dégénérées d'un système non linéaire, ce dernier n'est pas facile à résoudre mais il est moins difficile que le problème initial.

La méthode est applicable pour plusieurs classes d'équations différentielles et donne de bons résultats, mais elle ne donne pas toutes les solutions périodiques de l'EDO.

# Bibliographie

- [1] N. N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [2] A. Boulfoul, A. Makhlouf. *On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations*, *International Journal of Differential Equations and Applications*, vol 11 N° 3, 2012, 135-144.
- [3] A. Buica, J.P Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of non linear periodic differential systems with a small parameter, *Comm. On Pure and Appl. Anal*, 6 (2007), 103-111.
- [4] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture in Second Internat. Congr. Math. Paris, 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Goett. Math-Phys. Kl.* (1900), 253-297 ; English transl : *Bull. Amer. Math. Soc.* 8 (1902), 437-479.
- [5] N. M. Krylov and N. N. Bogoliubov. *Introduction to Nonlinear Mechanics* (in Russian), *Izd. AN UkSSR*, Kiev, 1937. *Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku*.
- [6] J Llibre and A. Makhlouf. *On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations*, *J. Phys. A : Math. Theor*, 45(2012) 055214 (16pp).
- [7] J. Llibre, Rebollo-Perdomo S and Torregrosa J, Limit cycles bifrucating from isochronous surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , *J. Math. Anal. Appl.* 381, 414-426. 2011.
- [8] I. G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Rus-sian) *Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit*, Moscow, 1956.
- [9] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, (French) *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Vol 8. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

- [10] J. A. Sanders, and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, New York,1985.
- [11] F. Touati, Cycles limites d'une classe des équations différentielles du second ordre et de l'équation de duffing , Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2014/2015.
- [12] F. Vehrulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems (Universitext) (Berlin : Springer). 1996.