République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Cours : 3 Année
De la Licence Académique en Mathématiques

INTRODUCTION AUX PROCESSUS ALEATOIRES

Dr : Abbes Benchaabane

Guelma 2021

Table des matières

1 Variables aléatoires continues **4**
1.1 Fonction de répartition et densité . . . 5
1.2 Espérance et variance . . . 5
1.3 Propriétés de l'espérance et de la variance . . . 6
1.4 loi uniforme . . . 7
1.5 Loi exponentielle . . . 7
1.6 La loi normale . . . 7
1.7 Fonction caractéristique d'une distribution de probabilité . . . 8
1.8 Exercices . . . 9

2 Couple aléatoires **21**
2.1 Fonction de répartition conjointe . . . 21
2.2 Fonction de densité de probabilité conjointe . . . 22
2.3 Probabilité d'un événement . . . 23
2.4 Distributions marginales . . . 23
2.5 Distributions conditionnelles . . . 24
2.6 Covariance . . . 25
2.7 Corrélation . . . 26
2.8 Exercices . . . 28

3 Processus aléatoires **34**
3.1 Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ . . . 35
3.2 Chaine de Markov . . . 35
3.3 Processus à accroissements indépendants et stationnaires . . . 35
3.4 Processus de Poisson . . . 36

3.4.1 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0$ 36
3.4.2 Processus de comptage 36
3.5 Processus gaussien 36
3.5.1 Variable gaussienne 36
3.5.2 Vecteurs gaussiens 37
3.6 Filtrations 37
3.7 Martingales 38
3.8 Mouvement Brownien 39
3.9 Processus de Markov 39
3.10 Exercices 40

4 Tables **45**

Introduction

Ce cours est une introduction à la théorie des probabilités et s'adresse à des étudiants de troisième année de Licence de Mathématiques donné à l'Université du 8 mai 1945 Guelma durant les années 2018-2021. L'objectif est d'acquérir les éléments fondamentaux en probabilités et processus aléatoires. A la fin de ce cours, les étudiants seront en mesure de résoudre des problèmes et des exercices concrets, d'utiliser les notions de base de la modélisation probabiliste et travailler avec des processus aléatoires. Ils pourront appliquer les techniques les plus fréquemment utilisées de la théorie des probabilités (probabilité et espérance conditionnelles, loi normale, martingale, mouvement Brownien) dans des domaines divers.
Nous avons également inclus à la fin de chaque chapitre un nombre considérable d'exercices résolus tant qu'ils ont été testés dans le cadre de travaux dirigés, ou ont fait l'objet de devoirs de réflexion ou de contrôle des connaissances.

Chapitre 1

Variables aléatoires continues

Soit un univers Ω associé à une expérience aléatoire, sur lequel on a défini une mesure de probabilité P.

Définition 1.0.1

1. *Une* variable aléatoire X *est une application de l'ensemble des événements élémentaires de l'univers* Ω *vers* $\mathbb{R}$.

$$X: \quad \begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

2. *Une variable aléatoire est une variable qui associe des valeurs numériques à des événements aléatoires.*

Par convention, une variable aléatoire sera représenté par une lettre majuscule X alors que les valeurs particulières qu'elle peut prendre seront désignées par des lettres minuscules $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Définition 1.0.2

1. *Une variable aléatoire est dite* continue *si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini.*
2. *Une variable aléatoire est dite continue si l'ensemble* $X(\Omega)$ *est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de* $\mathbb{R}$.

1.1 Fonction de répartition et densité

Définition 1.1.1 *La fonction de répartition F de la variable continue X est la fonction qui permet de connaitre la probabilité que X soit inférieure à une valeur donnée :*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Proposition 1.1.1 (Propriétés de la fonction de répartition)
1. *F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x)$.*
3. *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.*
4. *$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.*

Définition 1.1.2 *Une variable aléatoire possède une densité si sa fonction de répartition F est dérivable. La dérivée notée f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Proposition 1.1.2 *De ce fait,*

$$P[a \leq X \leq b] = \int_{a}^{b} f_X(x) dx$$

et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a, b]$ donné, apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f et l'axe des abscisses.

Proposition 1.1.3 (Propriétés de la densité)
1. *$\forall x \in R, \; f(x) \geq 0$.*
2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$*
3. *$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f_X(x) dx$*

1.2 Espérance et variance

L'espérance $\mathbb{E}(X)$ est la valeur que l'on s'attend à observer en moyenne pour la variable aléatoire X.

Définition 1.2.1 *Si la variable aléatoire X est continue et a pour fonction de densité de probabilité f,* son espérance mathématique *est*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx,$$

pourvu que la fonction $x \mapsto x f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

La variance $var(X)$ d'une variable aléatoire X est une mesure de la dispersion des valeurs de cette variable autour de sa moyenne. C'est donc une grandeur caractérisant le caractère plus ou moins fluctuant des valeurs de la variable.

Définition 1.2.2
1. *On appelle* variance *de la variable aléatoire X la valeur moyenne des carrés des écarts à la moyenne,*

$$var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

2. Le calcul de la variance se simplifie en utilisant l'expression :

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

3. On appelle écart-type *de la variable aléatoire X la racine carrée de sa variance.*

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$$

4. La variance d'une variable aléatoire continue $var(X)$, est la valeur telle que :

$$\begin{aligned} var(X) &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\, dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx \right) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

1.3 Propriétés de l'espérance et de la variance

1. Somme et différence.

   (a) Dans tous les cas,

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X+Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}(X-Y) &= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

   (b) Dans le cas de variables *indépendantes* :

   $$\begin{aligned} var(X+Y) &= var(X) + var(Y), \\ var(X-Y) &= var(X) + var(Y). \end{aligned}$$

2. Produit. Dans le cas de variables *indépendantes*,

   $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition 1.3.1 *Résumons les principales propriétés de ces deux paramètres dans un tableau.*

Changement d'origine	*Changement d'échelle*	*Transformation affine*
$\mathbb{E}(X+c) = \mathbb{E}(X) + c$	$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{E}(aX+c) = a\mathbb{E}(X) + c$
$var(X+c) = var(X)$	$var(aX) = a^2 var(X)$	$var(aX+c) = a^2 var(X)$
$\sigma(X+c) = \sigma(X)$	$\sigma(aX) = \lvert a\rvert\sigma(X)$	$\sigma(aX+c) = \lvert a\rvert\sigma(X)$

Définition *1.3.2* *1. Une variable aléatoire X est dite* centrée *si son espérance mathématique est nulle.*

2. Une variable aléatoire X est dite réduite *si son écart-type est égal à* 1

3. Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée.

4. A n'importe quelle variable aléatoire X, on peut associer la variable standardisée

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

1.4 loi uniforme

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Définition 1.4.1 *La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a; b]$ si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée $\mathcal{U}(a, b)$. Sa densité est alors,*

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & si\ x \in [a; b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

— *Son espérance est $\mathbb{E}(X) = (b + a)/2$ et sa variance est $var(X) = (b - a)^2/12$*

1.5 Loi exponentielle

Définition 1.5.1 *Soit α un réel strictement positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre α, notée $\mathcal{E}xp(\alpha)$, si elle admet pour densité :*

$$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x) 1_{[0;+\infty[}(x)$$

— *Son espérance est $\mathbb{E}(X) = 1/\alpha$ et sa variance est $var(X) = 1/\alpha^2$*

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Le paramètre α désigne l'inverse du temps d'attente moyen, par exemple,

— durée de vie d'une ampoule, d'un appareil électrique
— temps jusqu'au prochain tremblement de terre
— temps d'attente à la poste...

1.6 La loi normale

La loi normale est apparu naturellement (d'où son nom) comme limite de certains processus. C'est la loi la plus connue des probabilités, parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

Définition 1.6.1 *La loi normale centrée réduite est une loi continue, d'une v.a. X à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{R}$ tout entier, définie à partir de la densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2})$$

— *Un calcul intégral plus élaboré donne : $\mathbb{E}(X) = 0,\ var(X) = 1$*

Définition 1.6.2 *On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

— *On a également : $\mathbb{E}(X) = \mu,\ var(X) = \sigma^2$*

Théorème 1.6.1 *Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Remarque 1.6.1 *Attention, certains auteurs utilisent la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pas $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$*

1.7 Fonction caractéristique d'une distribution de probabilité

Définition 1.7.1 *On appelle* fonction caractéristique *de la variable aléatoire X la fonction suivante*

$$\begin{aligned} \xi_X : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & t \longmapsto \xi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \end{aligned}$$

Si X est une variable réelle de densité $f_X(x)$,

$$\xi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

Proposition 1.7.1 *Si le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X existe, alors la fonction caractéristique de X est k fois dérivable et :*

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{\xi_X^{(n)}(0)}{i^n}$$

Théorème 1.7.1 *Soient X et Y deux v.a.r. de fonction caractéristique ξ_X et ξ_Y. F_X et F_Y sont égales si et seulement si $\xi_X(t) = \xi_Y(t)$ pour tout réel t*

Proposition 1.7.2 *Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes. Alors,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \xi_{X+Y}(t) = \xi_X(t)\xi_Y(t)$$

Le tableau ci-dessous rappelle la moyenne, la variance, la fonction caractéristique des lois les plus courantes

Loi / v.a	Notation	Espérance	Variance	$\xi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{itb} - e^{ita})/(it(b-a))$
Exponentielle	$\mathcal{E}xp(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - it)$
Gaussienne	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$\exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$

1.8 Exercices

Exercise 1 *Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui déterminer la fonction de répartition de la v-a associée à cette densité*

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 4te^{-2t} & si\ t \geq 0 \end{cases}$
2. $u(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2}(1 - e^{-t/2}) & si\ t \geq 0 \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{1}{2\log 2}e^{-2t}\log(1 + e^t) & si\ t \geq 0 \end{cases}$, *Changement de variable* $u = e^{-t}$

Exercise 2 *Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité*

1. $F(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 - e^{-t^2/2} & si\ t \geq 0 \end{cases}$ 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x}$

Exercise 3 *Calculer, si elle existe, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est*

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 4te^{-2t} & si\ t \geq 0 \end{cases}$ 2. $h(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ \frac{4\log t}{t^3} & si\ t \geq 1 \end{cases}$

Exercise 4 *Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité de probabilité :*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ -k \leq x \leq k \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

1. *Trouver la constante k. Dans la suite de l'exercice, on prend $k = \frac{1}{2}$.*
2. *Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $var(X)$. Déduire, sans calculer l'intégrale*
$$\int_{-1/2}^{1/2}(x^3 + 2x^2 + x)dx$$
3. *Déterminer F la fonction de répartition de X. Déduire $P(-1 \leq X \leq 1/3)$.*

Solution :

1. f est une densité de probabilité donc
$$\begin{cases} (1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \\ (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$
   (a) (1) $\Rightarrow k \in [-1, 1]$,
   (b) 2) $\Rightarrow \int_{-k}^{+k}(x + 1)dx = 1 \Rightarrow k = 1/2$, d'après 1 et 2 $k = 1/2$.
2. (a)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-1/2}^{+1/2} x(x + 1)dx = 1/12. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \int_{-1/2}^{+1/2} x^2(x+1)dx - (1/12)^2 = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (x^3 + 2x^2 + x)dx &= \int_{-1/2}^{1/2} (x^2 + x)(x+1)dx \\ &= \mathbb{E}(X^2 + X) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercise 5 *Soit $f(x)$ une fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$. On définit*

$$f_{\epsilon,b}(x) = (1-\epsilon)f(x) + \frac{\epsilon}{b} f\left(\frac{x}{b}\right),$$

où $0 < \epsilon < 0,05$ et $b > 1$, une perturbation de $f(x)$.

1. *Montrer que $f_{\epsilon,b}(x)$ est une fonction de densité.*
2. *Soit $f(x)$ la densité d'une distribution normale avec espérance 0 et variance 1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $var(X)$, $X \sim f_{\epsilon,b}(x)$.*

Solution :

1. $f_{\epsilon,b}(x)$ est positive et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\epsilon,b}(x)dx &= (1-\epsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} f(\frac{x}{b})dx \\ &= (1-\epsilon) + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} f(\frac{x}{b})dx \\ &= (1-\epsilon) + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \end{aligned}$$

par le changement de variable $t = x/b$.

2. $f(x) = \varphi(x)$, où φ est la densité d'une variable aléatoire $\mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\epsilon,b}(x)dx \\ &= (1-\epsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} x \varphi(\frac{x}{b})dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbb{E}(X^2) = (1-\epsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{b} \varphi(\frac{x}{b})dx \\ &= (1-\epsilon) + \epsilon b^2 = 1 + \epsilon(b^2 - 1) \end{aligned}$$

Exercise 6 *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité*

$$f(x) = \begin{cases} C(x^2 - x + 2) & si\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer la constante* C*. Calculer* $BbbE(X)$ *et* $var(X)$.
2. *Déterminer la fonction de répartition de* X*, en déduire* $P(X \geq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{3}{2})$

Exercise 7 *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi de densité*

$$f_X(x) = \begin{cases} C\,|x-2| & si\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer la constante* C
2. *Calculer* $\mathbb{E}(X)$ *et* $var(X)$.
3. *Déterminer la fonction de répartition de* X*, en déduire* $P(X > 1\ /\ X \geq 0)$
4. *Déterminer la densité de la variable* Y *définie par* $Y = \frac{1}{2}\,|X-2|$

Exercise 8 *Soit* $\lambda > 0$*, on considère la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} & si\ 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer* λ *pour que* f *soit une densité de probabilité*
2. *Déterminer la fonction de répartition* $F_Y(x)$ *de la variable* Y.
3. *Calculer l'espérance de la variable* Y.
4. *Calculer :* $P[(0,488 < Y < 1,2) \mid (|Y-1| \geq 0.5)]$.

Exercise 9 *Soit* X *une variable aléatoire dont une densité est la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & si\ -\log 2 \leq x \leq \log 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer la fonction de répartition* F *de* X.
2. *On pose* $Y = |X|$*. Déterminer la fonction de répartition* G *de* Y *puis montrer que* Y *est une variable à densité et donner une densité de* Y.

Exercise 10 *Une variable aléatoire continue* X *a pour densité de probabilité la fonction*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{2} & si\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire* $Y = \sin X$.
2. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire* $Y = |\sin X|$.

Exercise 11 *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $[1, +\infty[$*, de fonction de densité* f *définie par* $f(x) = cx^{-4}1_{x\geq 0}$

1. *Déterminer* c *et donner la fonction de répartition de* X.
2. *Calculer l'espérance de* X.
3. *On pose* $Y = \ln(X)$*. Déterminer la loi de* Y *et calculer* $\mathbb{E}[Y]$.

Exercise 12 *Soit* X *une variable aléatoire dont une densité est la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & si\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2}C & si\ x \in [2, 3] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Déterminer C pour que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable X.
3. Calculer la moyenne de X
4. Calculer : $P_{(0\leq X\leq 2.5)}(0.5 \leq X \leq 1.9)$
5. Calculer $F_Y(y)$ pour $Y = X^2$.

Solution :

1. **La valeur de** C : $f_X(x)$ est une densité$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} i)\ \forall x \in R : f_X(x) \geq 0 \\ ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \end{cases}$$

$i) \Longrightarrow c \geq 0$

$ii) \Longrightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x dx + \int_2^3 \frac{1}{2} c dx = 1 \Longrightarrow$$
$$C = 1$$

Donc d'après $i)$ et $ii)$ on trouve $C = 1$.

2. **Détermination de** $F_X(x)$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

   (a) $x < 0, \quad F_X(x) = 0.$

   (b) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}\left[1 - \cos x\right].$

   (c) $\frac{\pi}{2} \leq x < 2, \quad F_X(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}$

   (d) $2 \leq x < 3, \quad F_X(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x dx + \int_2^x \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(x-1)$

   (e) $x \geq 3, \quad F_X(x) = 1.$

   Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}\left[1-\cos x\right], \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(x-1), \quad 2 \leq x < 3 \\ 1, \quad x \geq 3 \end{cases}$$

3. **L'espérance E(X)**:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x \sin x dx + \int_2^3 \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(0\leq X\leq 2.5)}(0.5 &\leq X \leq 1.9) = \frac{\mathbf{P}\left[(0.5 \leq X \leq 1.9)\cap(0 \leq X \leq 2.5)\right]}{\mathbf{P}\left(0 \leq X \leq 2.5\right)} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left[(0.5 \leq X \leq 1.9)\cap(0 \leq X \leq 2.5)\right]}{\mathbf{P}\left(0 \leq X \leq 2.5\right)} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left[(0.5 \leq X \leq 1.9)\right]}{\mathbf{P}\left(0 \leq X \leq 2.5\right)} = \frac{F(1.9)-F(0.5)}{F(2.5)-F(0)}.
\end{aligned}$$

5. La loi de la variable $Y = X^2$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

(a) Si $y < 0 : F_Y(y) = 0$

(b) Si $y > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq +\sqrt{y}) \\
&= F_X(+\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\
&= F_X(+\sqrt{y})
\end{aligned}$$

Exercise 13 *Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est*

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ c(4-x) & si\ 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Quelle est la valeur de c.*
2. *Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable X.*
3. *Calculer l'espérance de la variable $2X$.*
4. *Déduire $P(1 \leq 2X - 1 \leq 5),\ P(|2X - 1| \leq 5)$.*

Solution :

1. **La valeur de** c : $f_X(x)$ est une densité$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} i)\ \forall x \in R : f_X(x) \geq 0 \\ ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \end{cases}$$

$i) \Longrightarrow c \geq 0$

$ii) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 cxdx + \int_2^4 c(4-x)dx + \int_4^{+\infty} 0dx = 1 \Longrightarrow \\
&c\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 + c\left[4x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 = 1 \Longrightarrow \\
&2c + 2C = 1 \Longrightarrow c = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc d'après $i)$ et $ii)$ on trouve $c = \frac{1}{4}$.

2. **L'espérance de** $2X$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2X) &= 2\mathbb{E}(X) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \\ &= 2\times\frac{1}{4}\left(\int_0^2 x^2dx + \int_2^4 (4x-x^2)dx\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_2^4\right) = 4.\end{aligned}$$

3.

$$P(2X\geq 3) = P(X \geq \tfrac{3}{2})$$
$$= 1 - F_X(\tfrac{3}{2}) = 1 - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}P(|2X-1| &\leq 5) = P(-5\leq 2X-1\leq 5) = P(-2\leq X\leq 3) \\ &= F_X(3) - F_X(-2) = \frac{1}{4}\left(4\times 3 - \frac{1}{2}3^2 - 4\right) - 0.\end{aligned}$$

Exercise 14 *La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en* 1 *journée est une variable aléatoire* X *de fonction de densité*

$$f(x) = \begin{cases} Cx & si\ 0\leq x\leq 3 \\ C(6-x) & si\ 3\leq x\leq 6 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Calculer la valeur de* C*.*
2. *Quelle est la fonction de répartition de* X *?*
3. *Soit* A *l'événement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à* 300 *kg ». Soit* B *l'événement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre* 150 *et* 450 *kg ». Les événements sont-ils indépendants ?*

Solution :

1. **La valeur de** c : $f_X(x)$ est une densité$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} i)\ \forall x\in R : f_X(x)\geq 0 \\ ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1\end{cases}$$

$i) \Longrightarrow c\geq 0$

$ii) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^3 Cxdx + \int_3^6 C(6-x)dx &= 1 \quad\Leftrightarrow \\ Cx^2/2\big|_0^3 + C(6x - x^2/2)\big|_3^6 &= 1 \quad\Leftrightarrow \\ 9C &= 1 \quad\Leftrightarrow \\ C &= 1/9\end{aligned}$$

2. $F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
   (a) Si $t \le 0$ on a $F_X(t) = 0$
   (b) Si $0 \le t \le 3$ on a $F_X(t) = \int_0^t x/9dx = t^2/18$
   (c) Si $3 \le t \le 6$ on a $F_X(t) = \int_0^3 x/9dx + \int_3^t 1/9(6-x)dx = \frac{6t-t^2/2}{9} - 1$
   (d) Si $t \ge 6$ on $F_X(t) = 1$

   On obtient alors la fonction de répartition

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^2/18 & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ \frac{6t-t^2/2}{9} - 1 & \text{si} \quad 3 \le t < 6 \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 6 \end{cases}$$

3. Les événements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

On calcule les 3 termes pour vérifier (ou infirmer) la dernière égalité :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \ge 3) = 1 - F_X(3) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} P(B) &= P(1,5 \le X \le 4,5) = F_X(4,5) - F_X(1,5) \\ &= 7/8 - 1/8 = 3/4 \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(3 \le X \le 4,5) = F_X(4,5) - F_X(3) \\ &= 7/8 - 1/2 = 3/8 \end{aligned}$$

On vérifie donc bien que $P(A)P(B) = 3/8$, ce qui signifie que les 2 événements sont indépendants.

Exercise 15 *Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -x + \lambda & si\ x \in]\frac{1}{3}, 2] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité.*
2. *Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable X.*
3. *Calculer l'espérance et la variance de la variable X.*
4. *Calculer : $P_{(0.5 \le X+1 < 1)}\left[|X-1| < 0.25\right]$.*

Exercise 16 *Soi X une v.a qui suit la loi normale $\mathcal{N}(11.5, (3.2)^2)$*

1. *Calculer $P(X < 10)$*

2. *Calculer* $P(8 < X < 10)$

Solution :

1.

$$\begin{aligned} P(X &< 10) = P(\frac{X-11,5}{3,2} < \frac{10-11,5}{3,2}) = P(Z < -0,47) \\ &= \Phi(-0,47) = 1-\Phi(0,47) = 1-0,6808 = 0,3192 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(8 &< X < 10) = P(\frac{8-11,5}{3,2} < \frac{X-11,5}{3,2} < \frac{12-11,5}{3,2}) \\ &= P(-1,09 < Z < 0,16) = \Phi(0,16) - \Phi(-1,09) \\ &= \Phi(0,16) + \Phi(1,09) - 1 = 0,5636 + 0,8621 - 1 = 0,4257 \end{aligned}$$

Exercise 17 *On suppose que la taille, en centimètres, d'un homme âgé de* 30 *ans est une variable aléatoire normale de paramètres* $\mu = 175$ *et* $\sigma^2 = 36$.

1. *Quel est le pourcentage d'hommes de* 30 *ans ayant une taille supérieure à* 185 *cm ?*
2. *Parmi les hommes mesurant plus de* 180 *cm, quel pourcentage dépasse* 192 *cm ?*

Solution :
Soit X la taille en centimètres d'un homme âgé de 30 ans. X suit une distribution normale de paramètres $(175, 36)$. Soit Z la v.a qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

1. Le pourcentage d'hommes de 30 ans mesurant plus que 185 cm est

$$\begin{aligned} P(X &> 185) = P\left(\frac{X-175}{\sqrt{36}} > \frac{185-175}{\sqrt{36}}\right) \\ &= P(Z > 1.67) \\ &= 1-\Phi(1.67), \quad \text{voir la table de la loi normale} \\ &= 4.8\% \end{aligned}$$

2. La probabilité qu'un homme mesurant plus de 180 cm dépasse 192 cm est

$$\begin{aligned} P(X &> 192 \mid X > 180) = \frac{P(X > 192 \cap X > 180)}{P(X > 180)} \\ &= \frac{P(X > 192)}{P(X > 180)} = \frac{P\left(\frac{X-175}{\sqrt{36}} > \frac{192-175}{\sqrt{36}}\right)}{P\left(\frac{X-175}{\sqrt{36}} > \frac{180-175}{\sqrt{36}}\right)} \\ &= \frac{P(Z > 2.83)}{P(Z > 0.83)} = \frac{1-\Phi(2.83)}{1-\Phi(0.83)} = 1.1\% \end{aligned}$$

Exercise 18 *Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à* $11,5$ *mois avec un écart-type de* $3,2$ *mois. La distribution des âges étant normale, on souhaite*

1. *évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant* 10 *mois*

2. *évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après* 18 *mois*
3. *évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre* 8 *mois et* 12

Exercise 19 *Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(x) = Ce^{-2x^2+x}$, $x \in R$*

1. *Donner, sans calcul, la constante C, $\mathbb{E}(X)$, $var(X)$. En déduire l'intégral I suivant :*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)e^{-2x^2+x}dx.$$

2. *Déterminer la densité de la variable Y definie par $Y = \left(X - \frac{1}{4}\right)^2$.*

Exercise 20 *Soit X une v.a suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$.*

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$*
2. *Déterminer une densité de X^2*
3. *Déterminer une densité de X^3.*

Exercise 21 *Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ xe^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. (a) *Démonter que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par*

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

   (b) *Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unité de temps sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\frac{2e-3}{2e}$;*

2. *Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisse libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes ;*

   (a) *M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et T_B.*

   (b) *Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par*

$$P(M \leq t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 - (t+1)^2e^{-2t} & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

Solution :

1. (a) à vérifier

   (b) On veut calculer

$$\begin{aligned} P_{[T\geq 1]}(T \leq 2) &= \frac{P\left[(T \geq 1) \cap (T \leq 2)\right]}{P(T \geq 1)} \\ &= \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{P(T \geq 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{3e-3}{2e} \end{aligned}$$

(a) Le client C pourra passer en caisse d'es que le plus rapide de A ou B aura fini. Donc le temps d'attente de C correspond au plus petit temps de passage entre A et B : $M = \min(T_A, T_B)$

Les temps de passage T_A et T_B n'´etant jamais négatifs, lorsque $t \in]-\infty, 0[$, $P(M \leq t) = 0$. Si $t \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\begin{aligned}
P(M &\leq t) = 1 - P(M > t) \\
&= 1 - P([T_A > t] \cap [T_B > t]) \\
&= 1 - P([T_A > t]) \times P([T_B > t]), \text{ car les temps de passage des clients sont indépendants} \\
&= 1 - (1 - F_{T_A}(t))(1 - F_{T_B}(t)) \\
&= 1 - (t+1)e^{-t} \times \ (t+1)e^{-t} \\
&= 1 - (t+1)^2 e^{-2t}
\end{aligned}$$

Exercise 22 *Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit $Y = \exp(X)$. Déterminer la densité de Y, $\mathbb{E}[Y]$ ainsi que $var[Y]$.*

Exercise 23 *Soit X une v.a. de densité $f(x) = \lambda \exp(-|x|)$.*

1. (a) *Calculer λ ; déterminer la fonction de répartition de X et la loi de $|X|$.*
   (b) *Montrer que X possède des moments de tous les ordres et calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout entier n. En déduire la moyenne et la variance de X.*
2. *Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $S = 2X - Y,\ T = X^2$.*

Exercise 24 *Soient X et Y deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de la v.a. $X + Y$ dans le cas suivant :*

1. *X de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$*

Solution :
Si X suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et Y suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ indépendantes,

$$\begin{aligned}
\xi_{X+Y}(t) &= \xi_X(t)\xi_Y(t) \\
&= e^{it\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t} e^{it\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t} \\
&= e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t}
\end{aligned}$$

et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_2^2 + \sigma_1^2)$.

Exercise 25 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes : X suit la loi $\mathcal{N}(1,2)$, Y suit la loi $\mathcal{N}(-2,3)$. On pose $Z = 2X - Y$.*

1. *Calculer l'espérance et la variance de Z.*
2. *Que vaut $\mathbb{E}[Z^2]$?*
3. *Préciser la loi de la variable aléatoire Z.*

Solution

1. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[2X - Y] = 2\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 2 \times 1 - (-2) = 4,$$

   et puisque X et Y sont indépendantes

   $var(Z) = var(2X)+var(-Y) = (2)^2 var(X)+(-1)^2 var(Y) = 4var(X)+var(Y) = 4\times2+3 = 11.$

2. Par définition, nous avons

$$\mathbb{E}(Z^2) = var(Z) + \mathbb{E}[Z]^2 = 11 + 42 = 27.$$

3. Z est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires gaussiennes et indépendantes ; Z a donc une loi gaussienne. Par suite, Z suit la loi $\mathcal{N}(\mathbb{E}(Z), var(Z)) = \mathcal{N}(4, 11)$.

Exercise 26 *Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: X a pour densité la fonction f définie par*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x\geq 0} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. *Calculer $P(X < 0)$ et déterminer la fonction de répartition de X.*
2. *Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $Y = 1 + [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x ?*
3. *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .*

Solution :

1. La densité de X étant nulle sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, on a $P(X < 0) = 0$. Par suite, pour tout $t < 0$, $P(X \leq t) = 0$.Si $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

   Donc

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

2. Puisque $P(X < 0) = 0$, avec probabilité 1, X est positive et $Y = 1 + [X]$ est un entier strictement positif : Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
3. Pour tout entier $k > 0$, et puisque F_X est continue, notant $p = 1 - e^{-\lambda}$,

$$\begin{aligned} P(Y &= k) = P(1 + [X] = k) \\ &= P(k - 1 \leq X < k) = F_X(k) - F_X((k-1)) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= e^{-\lambda(k-1)} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &= p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

   Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Exercise 27 *Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$:*

1. *Soient a et b deux réels, $a > 0$. On note $X = aU + b$.*
   (a) *Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.*
   (b) *Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.*
2. *Trouver la loi de la variable aléatoire $Y = 1 + [6U]$, $[x]$ désignant la partie entière de x.*
3. *Déterminer la densité de la variable aléatoire $Z = (1 - U)/U$.*

Solution :

1. (a) Pour tout réel t, comme $a > 0$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) \\ &= P(U \leq (t-b)/a); \end{aligned}$$

Donc

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ (t-b)/a & \text{si } b \leq t < a+b \\ 1 & \text{si } t \geq a+b. \end{cases}$$

   (b) D'après la question précédente, X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[b, a+b] : b = -1,\ a = 2$.

2. Y est à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$ puisque U est à valeurs dans $]0, 1[$. Pour tout $k \in \{1, ..., 6\}$, comme la fonction de répartition de U est continue,

$$\begin{aligned} P(Y &= k) = P([6U] = k-1) \\ &= P(k-1 \leq 6U < k) \\ &= F(k/6) - F((k-1)/6) \\ &= 1/6; \end{aligned}$$

Y suit la loi uniforme sur $\{1, ..., 6\}$.

3. Soit f une fonction continue et bornée. On a, U ayant pour densité $u \longrightarrow 1_{[0,1]}(u)$,

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \int_0^1 f((1-u)/u)du$$

le changement de variable $z = (1-u)/u = 1/u - 1$, $u = 1/(z+1)$, $du = -1/(z+1)^2$ donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Z)] &= -\int_{+\infty}^{0} f(z)\frac{dz}{(z+1)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{dz}{(z+1)^2}1_{z\geq 0} \end{aligned}$$

Z a pour densité la fonction $z \to \frac{1}{(z+1)^2}1_{z\geq 0}$.

Exercise 28 *Soit X une v.a suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On rappelle que*

$$\xi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-t^2/2}$$

Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $2 + X$; préciser sa loi.

Chapitre 2

Couple aléatoires

2.1 Fonction de répartition conjointe

Deux variables aléatoires X et Y quelconque (discrètes, continues ou mixtes) peuvent être entièrement caractérisées par leur fonction de répartition conjointe, qui est l'extension au cas de deux variables de la notion de fonction de répartition. Dans tout ce qui suit, les fonctions de deux variables considérées sont supposées continues et bornées sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1.1 *pour un couple (X, Y), la fonction de répartition conjointe $F(x, y)$ est donnée par*

$$F(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

On admettra que la fonction F possède les propriétés suivantes

1. La fonction F prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, avec

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0; \quad F(+\infty, +\infty) = 1$$

2. La fonction $F(x, y)$ est monotone croissante par rapport à x et y

$$F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2); \quad \forall x_1 \leq x_2,\ \forall y_1 \leq y_2$$

3. Pour $a < b$ et $c < d$

$$P\left(X \in [a, b[\cap Y \in [c, d[\right) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

2.2 Fonction de densité de probabilité conjointe

Définition 2.2.1 *Pour un couple (X, Y) continu, la fonction de densité de probabilité conjointe $f(x, y)$ est donnée par*

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Réciproquement, la fonction $F(x, y)$ s'obtient à partir de $f(x, y)$ grâce à une double intégration, avec

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du$$

La fonction $f(x, y)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Elle possède les propriétés suivantes semblables à celles de la fonction de densité de probabilité d'une variable unique

1. La fonction $f(x, y)$ ne prend que les valeurs positives ou nulles :

$$f(x, y) \geq 0; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

2. La double intégrale de la fonction $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ est égale à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Dans la suite, nous utiliserons l'exemple type suivant pour illustrer les propriétés étudiées

Exemple 1 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, à valeurs réelles, de densité de probabilité :*

$$g(x, y) = \begin{cases} \exp(-x), & si\ (x, y) \in D \\ 0, & si\ (x, y) \notin D \end{cases} \tag{2.1}$$

où $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq x\right\}$

Remarque 2.2.1 *Toute fonction $f(x, y)$ respectant ces deux conditions est une fonction de densité de probabilité conjointe valide*

Application 1 : On peut vérifier que la fonction $g(x, y)$ possède les propriétés d'une densité de probabilité :

1. D'une part : $g(x, y) \geq 0; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) dx dy &= \int \int_D \exp(-x) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^x \exp(-x) dy\right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx \\ &= \left[-x \exp(-x) - \exp(-x)\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dxdy &= \int\int_D \exp(-x)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_y^{+\infty}\exp(-x)dx\right]dy \\
&= \int_0^{+\infty}\exp(-y)dy \\
&= [-\exp(-y)]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.3 Probabilité d'un événement

Le calcul de la probabilité d'un événement B quelconque défini conjointement sur les deux variables peut toujours s'effectuer en utilisant la fonction de probabilité conjointe

Définition 2.3.1 *La probabilité d'un événement $B = [(X,Y) \in \Delta]$, où Δ est un domaine Δ de $\mathbb{R}^2$, est donnée par*

$$\begin{aligned}
P(B) &= P([(X,Y) \in \Delta]) \\
&= \int\int_\Delta f(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

Application 2 : Calculons la probabilité de l'événement $B = [(X,Y) \in \Delta]$, où Δ est défini par $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x+y \leq 2\right\}$

$$\begin{aligned}
P(B) &= P([(X,Y) \in \Delta]) \\
&= \int\int_\Delta g(x,y)dxdy \\
&= \int\int_{\Delta\cap D} \exp(-x)dxdy \\
&= \int_0^1\left[\int_{2-y}^{y}\exp(-x)dx\right]dy \\
&= \int_0^1 (-e^{-2+y}+e^{-y})dy \\
&= 1-2e^{-1}+e^{-2}
\end{aligned}$$

2.4 Distributions marginales

Proposition 2.4.1 *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité de probabilité $f_{(X,Y)}$. Alors X et Y sont des v.a.r. à densité, de densités de probabilité respectives définies par*

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx
\end{aligned}$$

Les densités f_X et f_Y sont appelées densités marginales de X et Y.

Application 3 :

1. La densité f_X de la variable aléatoire X est définie

   (a) Pour tout $x < 0$, $g_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{(X,Y)}(x,y)dy = 0$, (car $g_{(X,Y)}(x,y) = 0$)

   (b) Pour tout $x \geq 0$

$$\begin{aligned} g_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{(X,Y)}(x,y)dy \\ &= \int_0^x \exp(-x)dy \\ &= [y\exp(-x)]_0^x \\ &= x\exp(-x) \end{aligned}$$

   Donc

$$g_X(x) = \begin{cases} x\exp(-x), \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

2. La densité g_Y de la variable aléatoire Y est définie

   (a) Pour tout $y < 0$, $g_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{(X,Y)}(x,y)dx = 0$, (car $g_{(X,Y)}(x,y) = 0$)

   (b) Pour tout $y \geq 0$

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{(X,Y)}(x,y)dx \\ &= \int_y^{+\infty} \exp(-x)dx \\ &= [-\exp(-x)]_y^{+\infty} \\ &= \exp(-y) \end{aligned}$$

   Donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-y), \ y \geq 0 \\ 0, \ y < 0 \end{cases}$$

2.5 Distributions conditionnelles

Un des intérêts majeurs qu'il y a à définir le couple (X,Y) est d'obtenir des informations sur l'une des variables lorsque des informations sont disponibles pour l'autre variable, en exploitant le lien existant entre elle.

Définition 2.5.1 *Pour un couple (X,Y) continu, les fonctions de densité de probabilité conditionnelles sont données par :*

$$\begin{aligned} f_{X/Y=y}(x) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}; \quad avec \ f_Y(y) > 0 \\ f_{Y/X=x}(y) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)}; \quad avec \ f_X(x) > 0 \end{aligned}$$

Application 4 :

1. On peut définir la densité conditionnelles de X sachant $Y = y$ seulement si $y \geq 0$ ($g_Y(y) \neq 0$). On a alors :

$$\begin{aligned} g_{X/Y=y}(x) &= \frac{g(x,y)}{g_Y(y)} \\ &= \begin{cases} e^{-x+y}, & si\ (x,y) \in D \\ 0, & si\ (x,y) \notin D \end{cases} \end{aligned}$$

2. On peut aussi définir la densité conditionnelles de Y sachant $X = x$ seulement si $x > 0$ ($g_X(x) \neq 0$). On a alors :

$$\begin{aligned} g_{Y/X=x}(y) &= \frac{g(x,y)}{g_X(x)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ (x,y) \in D \\ 0, & si\ (x,y) \notin D \end{cases} \end{aligned}$$

Sur base de la définition des distributions conditionnelles, on voit qu'il est toujours possible de définir une distribution conjointe en l'exprimant comme le produit d'une distribution conditionnelle et d'une distribution marginale quelconque, pourvu que ces deux fonctions soient valides. On pourra donc dire que

Théorème 2.5.1 (probabilités composées) *Pour un couple (X, Y), on peut écrire donc*

$$f(x,y) = f_{X/Y=y}(x) f_Y(y) = f_{Y/X=x}(y) f_X(x)$$

Il est aisé d'étendre la loi des probabilités totales au cas d'un couple (X, Y) de variables., ce qui aboutit au résultat suivant

Théorème 2.5.2 (probabilités totales) *Pour un couple (X, Y), on peut écrire donc*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X/Y=y}(x) f_Y(y) dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y/X=x}(y) f_X(x) dx \end{aligned}$$

2.6 Covariance

Définition 2.6.1 *La covariance d'un couple (X, Y) est définie par :*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Il est plus facile de calculer la $Cov(X, Y)$ à partir de $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Conclusion 2 (Interprétation de la covariance) *La première formule $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$ permet l'interprétation, mais attention seul le signe de la $Cov(X, Y)$ est interprétable.*

Remarque 2.6.1 1. *Si $Cov(X, Y) > 0 \Rightarrow$ les deux variables X et Y sont en même temps supérieures ou en même temps inférieurs à leur espérance.*

2. *Si* $Cov(X,Y) < 0 \Rightarrow$ *quand une des variables est supérieurs à son espérance, l'autre est inférieure à son espérance.*

   Ces deux cas correspondent aux situations où le lien est proche d'être linéaire entre les variables soit avec une pente positive pour un signe positif de la covariance ou une pente négative pour un signe négatif.

3. *Si* $Con(X,Y) = 0$, *c'est le cas de la pente nulle.* ***Attention***, *ce cas ne correspond pas forcement à l'indépendance entre les deux variables aléatoires*

Proposition 2.6.1 *Soient* a *et* b *deux réels*

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$
3. $Cov(aX + b, Y) = aCov(X,Y)$
4. $Cov(X,X) = var(X)$
5. $var(X+Y) = var(X) + var(Y) + Cov(X,Y)$

2.7 Corrélation

Définition 2.7.1 *Le coefficient de corrélation linéaire du couple* (X,Y) *est défini par :*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Avec toujours :$-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$

Remarque 2.7.1 *D'après la formule, la covariance et la corrélation ont le même signe puisque l'écart-type de toute variable est toujours positive. Ainsi, l'interprétation des signes de la corrélation et de la covariance sont identiques. Une valeur de la corrélation proche de* 1 *indique l'existence d'un lien linéaire avec une pente positive et une valeur proche de* -1 *indique plutôt que l'existence d'un lien linéaire mais avec une pente négative.*

Théorème 2.7.1 *Si* X *et* Y *sont indépendants* ***alors***

$$Cov(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple 3 *Les variables aléatoires* X *et* Y *ont la densité conjointe*

$$h(x,y) = \begin{cases} 2 & si\ x,y \in [0,1]\ et\ x+y \leq 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

1. $$h_X(x) = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2dy = 2y|_{y=0}^{y=1-x} = 2(1-x) & si\ x \in [0,1] \\ 0 & autrement \end{cases}$$

   Par symétrie, on obtient directement $h_Y(y) = 2(1-y)1_{[0,1]}$.

2.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x(1-x)dx = x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

Par symétrie, on obtient aussi $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$.

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyh(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 2xydy\right] dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{36}\end{aligned}$$

4.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \tfrac{1}{6}$$
$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \tfrac{1}{6} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{18}$$

Par symétrie, on a également $\sigma^2(Y) = \sigma^2(X) = \frac{1}{18}$.*Le coefficient de corrélation est donc*

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(X)} \\ &= \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

La corrélation négative entre ces deux variables vient de la contrainte $X+Y \leq 1$. *Pour* x *fixé, on a* $y \in [0, 1-x]$. *Si la valeur de* x *augmente, on voit que la borne supérieure pour* y *va diminuer en se rapprochant de* 0, *montrant ainsi que* X *et* Y *ont tendance à varier dans des sens opposés.*

2.8 Exercices

Exercise 29 *Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe*

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x^2y} & si\ x\geq 1\ et\ y\geq 0\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

1. *Calculer $P(X^2Y>1)$.*
2. *Calculer les densités marginales $f_X(x)$.*

Solution :

1.
$$\begin{aligned}P(X^2Y &> 1)=P\left(Y>\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \int_1^{+\infty}\left[\int_{1/x^2}^{+\infty}e^{-x^2y}dy\right]dx=\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y}\right)\Big|_{y=1/x^2}^{y=+\infty}dx\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=-e^{-1}\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=+\infty}=e^{-1}\end{aligned}$$

2. La densité marginale de X : Si $x\geq 1$
$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}dy\\ &= \left(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y}\right)\Big|_{y=0}^{y=+\infty}=\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

   Donc $f_X(x)=\frac{1}{x^2}1_{x\geq 1}$.

Exercise 30 *Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe*

$$f(x,y)=\begin{cases} 2xy+\frac{3}{2}y^2 & si\ 0<x<1\ et\ 0<y<1\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

1. *Vérifier que $f(x,y)$ est une densité.*
2. *Trouver les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.*
3. *Trouver les densités conditionnelles $f_{X|Y=y}(x)$ et $f_{Y|X=x}(y)$.*
4. *Calculer $P\left((X,Y)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$.*
5. *Trouver $P(X<Y)$.*
6. *Trouver $\mathbb{E}(Y\mid X=x)$.*

Solution :

1. $f(x,y)$ est une densité.si elle est positive sur $\mathbb{R}^2$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$. On a
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy &= \int_0^1\int_0^1\left(2xy+\frac{3}{2}y^2\right)dxdy\\ &= \int_0^1\left(x^2y+\frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \int_0^1\left(y+\frac{3}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=1\end{aligned}$$

   La fonction $f(x,y)$ est bien une densité.

2. La densité marginale de X : Si $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dy \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $f_X(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) 1_{0\leq x\leq 1}$, et celle de Y : $f_Y(y) = \left(y + \frac{3}{2}y^2\right) 1_{0\leq y\leq 1}$.

3. Si $0 < y \leq 1$ la densité conditionnelle $f_{X|Y=y}(x)$ existe et elle définie à l'aide de la relation

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{2xy + \frac{3}{2}y^2}{y + \frac{3}{2}y^2} 1_{0\leq x\leq 1} \\ &= \frac{4x + 3y}{2 + 3y} 1_{0\leq x\leq 1}, \end{aligned}$$

Et, de la même manière, si $0 \leq x \leq 1$, la densité conditionnelle $f_{Y|X=x}(y)$ existe et elle définie par

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{4xy + 3y^2}{2x + 1} 1_{0<y\leq 1}$$

4.

$$\begin{aligned} P\left((X,Y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dxdy \\ &= \int_0^{1/2} \left(x^2y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1/2} dy \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1/2} = 1/16 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^1 \left[\int_0^y \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dx\right] dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{5}{2}y^3 dy = \frac{5y^3}{8}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = 5/8 \end{aligned}$$

6. Si $0 \leq x \leq 1$, $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ existe et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \quad | \quad X = x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)dy = \int_0^1 y\frac{4xy + 3y^2}{2x + 1}dy \\ &= \left(\frac{4}{3}xy^3 + \frac{3}{4}y^4\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{12}\,\frac{16x + 9}{2x + 1} \end{aligned}$$

Exercise 31 *La densité conjointe de X et Y est donnée par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y} & si\ 0<x<\infty\ \ et\ 0<y<\infty\\ 0 & sinon\end{cases}$$

1. *Calculer $P(X>1 \mid Y=y)$.*

Solution :
Si $0<y<\infty$ fixé

$$\begin{aligned}P(X &> 1 \mid Y=y)=\int_1^{+\infty} f_{X|Y=y}(x)dx\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx,\end{aligned}$$

il faut calculer la densité marginale de Y, si $y>0$

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx=\frac{e^{-y}}{y}(-ye^{-\frac{-x}{y}})\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=e^{-y}$$

donc $f_Y(y)=e^{-y}1_{y>0}$, alors

$$\begin{aligned}P(X &> 1|Y=y)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{ye^{-y}}dx\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}dx=e^{-\frac{1}{y}}.\end{aligned}$$

Exercise 32 *On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha>0$, si*

$$\forall x\geq 1,\ P(X>x)=x^{-\alpha}$$

1. *Démontrer que cette propriété caractérise effectivement la loi de X. Montrer que X suit une loi à densité, et préciser cette densité.*
2. *Pour quelles valeurs de α la variable est-elle d'espérance finie ?*
3. *Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Pareto de paramètre α. On note f_Y la loi de Y. Montrer que, si $t\geq 1$, alors*

$$P(XY>t)=\int_1^{+\infty}P\left(X>\frac{t}{y}\right)f_Y(y)dy$$

4. *En déduire que, pour tout $t\geq 1$, $P(XY>t)=t^{-\alpha}(1+\alpha\ln t)$.*

Exercise 33 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles, de densité de probabilité g*

$$g(x,y)=\begin{cases}kxy & si\ (x,y)\in D\\ 0 & si\ (x,y)\notin D\end{cases}$$

où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ tel\ que\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\ (a\in\mathbb{R}_+^*)\right\}$

1. *Calculer k.*

2. *calculer la probabilité de l'événement "$X + Y < t$" où $0 \leq t \leq a$.*
3. *déterminer les densités de probabilité de X et de Y . Ces variables sont-elles indépendantes ?*
4. *déterminer la densité conditionnelle de Y , lorsque $X = x$.*

Exercise 34 *Considérons un vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$ dont la densité est donnée par*

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-\theta y} & si\ 0 \leq x \leq y \leq \infty \\ 0 & si\ ailleurs \end{cases}$$

1. *Montrez que $k = \theta^2$.*
2. *Calculez les densités marginales de X et de Y .*
3. *Calculez $P(X \leq 1 \mid Y \leq 1)$.*

Solution :

1. Comme f est une densité donc elle eest positive donc $k \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy &= 1 \Rightarrow \\ k\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-\theta y}dy\right)dx &= 1 \Rightarrow \\ k\int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta}e^{-\theta x}dx &= 1 \Rightarrow \\ k &= \theta^2 \end{aligned}$$

2. (a) Densité marginale en X :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ &= \begin{cases} 0, \ si\ x < 0 \\ \int_x^{+\infty} \theta^2 e^{-\theta y}dy, \ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ si\ x < 0 \\ \theta e^{-\theta x}, \ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Densité marginale en Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \\ &= \begin{cases} 0, \ si\ y < 0 \\ \int_0^{y} \theta^2 e^{-\theta y}dx, \ y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ si\ y < 0 \\ \theta^2 y e^{-\theta y}, \ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} P(Y &\leq 1) = \int_0^1 f_Y(y)dy \\ &= \int_0^1 \theta^2 y e^{-\theta y}dy = 1 - (1+\theta)e^{-\theta} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X &\leq 1 \mid Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} \\ &= \frac{1 - (1+\theta)e^{-\theta}}{1 - (1+\theta)e^{-\theta}} = 1 \end{aligned}$$

Exercise 35 *Soit un couple de variables aléatoires à valeurs réelles de densité de probabilité :*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[1 + xy(x^2 - y^2\right] & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \notin D \end{cases}$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$

1. *Vérifier que g possède les propriétés d'une densité de probabilité.*
2. *Calculer la probabilité :* $P\left[(0 \leq X \leq 1/2) \cap (0 \leq Y \leq 1)\right]$
3. *Déterminer la densité de probabilité de chacune des deux variables aléatoires ; sont-elles indépendantes ?*
4. *Calculer les espérances conditionnelles* $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ *et* $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$
5. *Calculer la covariance et le coefficient de corrélation des deux variables.*

Exercise 36 *Pour chacune des densités conjointes* $f_{X,Y}(x,y)$ *calculez :* C*, les densités marginales, les moyennes, les variances et le coefficient de corrélation. Préciser si les variables sont indépendantes.*

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{C}{1000} & si\ 0 \leq x \leq 1000\ et\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} C & si\ 0 \leq x \leq 1\ et\ 0 \leq y \leq 1,\ x \leq y \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Exercise 37 *Deux variables aléatoires ont une densité conjointe de probabilité*

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & si\ 0 \leq x < a\ et\ 0 \leq y < b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Calculez la constante* k*.*
2. *Calculez* $P[0 < X < a/2,\ 0 < Y < b/2]$ *.*
3. *Calculez les densités marginales.*
4. *Les variables sont-elles indépendantes ?*

Exercise 38 *Soit* X_1, X_2, X_3 *trois variables aléatoires indépendantes de moyenne* m *et de variance* σ^2*. Soit*

$$\begin{cases} Y = X_1 + X_2 \\ Z = aX_2 + bX_3 \end{cases}$$

1. *Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre* Y *et* Z*.*

Exercise 39 *Soit* X *une variable dénotant l'heure de la journée où une marchandise est envoyée et* Y *l'heure de la journée où la marchandise est reçue. La densité conjointe de* (X,Y) *est définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{288} & si\ 0 \leq x < y \leq 24 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. *Calculez la densité marginal de* X *et celle de* Y*.*
2. *Calculez les densités conditionnelles* $f_{X|Y=y}$ *et* $f_{Y|X=x}$*.*

3. *Calculez la probabilité que la réception de la marchandise ait lieu au plus tard 6 heures après son envoi.*

Exercise 40 *La densité conjointe $f_{X,Y}$ de deux variables X et Y est définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x+y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Calculez $P[X+Y \leq 0.5]$.*
2. *Calculez la densité marginale de X.*
3. *Les variables sont-elles indépendantes ?*

Exercise 41 *On modélise le diamètre d'un arbre par une variable aléatoire X, et sa hauteur par une autre variable aléatoire Y . La loi jointe de X et Y est donnée par la densité :*

$$f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{1}{4}(x+y)e^{-y}, \qquad \text{pour } y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x \leq 2$$

1. *Donner la densité marginale de X.*
2. *X et Y sont-elles indépendantes ?*
3. *Calculer $\mathbb{E}[X]$.*
4. *L'âge d'un arbre est donné par $W = 12XY$. Calculer $\mathbb{E}[W]$*

Chapitre 3

Processus aléatoires

Dans toute la suite on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Définition 3.0.1 *Un processus aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un ensemble infini$\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une fonction de 2 variables :*

$$X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

1. *L'ensemble $\mathbb{T}$ est l'espace des paramètres, aussi appelé espace du temps car le paramètre $t \in \mathbb{T}$ est souvent un paramètre temporel.*
2. *Si $\mathbb{T}$ est dénombrable, on parle de processus stochastique à temps discret et*
3. *Si $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on parle alors de processus stochastique à temps continu.*
4. *Pour un événement w fixé dans Ω, la fonction $t \rightarrow X_t(w)$ appelée* ***trajectoire*** *du processus associée au point w.*

Définition 3.0.2 *On dit que X est un processus continu (p.s.) si il est continu trajectoire par trajectoire, i.e. si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

3.1 Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Définition 3.1.1 *Soit $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite de v.a indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) telle que*

$$P(X_1 = +1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

Soient

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \end{cases}$$

Le processus $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ est appelé la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $var(S_n) = n$.

Remarque 3.1.1 *1. La marche aléatoire à temps asymétrique sur $\mathbb{Z}$:*

$$\begin{cases} S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \quad X_i \ i.i.d \\ P(X_1 = +1) = 1 - P(X_1 = -1) = p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. La marche aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \quad X_i \ i.i.d \\ X_1 \sim \mathcal{N}(0,1), \ \text{par exemple.} \end{cases}$$

3.2 Chaine de Markov

Définition 3.2.1 *Une chaine de Markov est un processus à temps discret $(M_n,\ n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans un ensemble D dénombrable tel que :*

$$P(M_{n+1} = x_{n+1} \mid M_n = x_n,\ M_{n-1} = x_{n-1}, ...M_0 = x_0) = P(M_{n+1} = x_{n+1} \mid M_n = x_n)$$

$\forall n \geq 1,\ x_0,\ x_1, ...x_{n+1} \in D$.

3.3 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

Définition 3.3.1

1. *Le processus stochastique $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ a des accroissements indépendants si $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$, les variables aléatoires*

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ...,\ X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes.

2. *Le processus stochastique $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ a des accroissements stationnaires si $\forall h > 0$, les variables aléatoires $X_{t+h} - X_t$ ont la même distribution $\forall t \in \mathbb{R}^+$.*

Intuitivement, la première propriété signifie que les occurrences du processus dans un intervalle sont indépendantes des occurrences du processus sur tout autre intervalle disjoint et la seconde veut dire que la distribution des occurrences du processus dans tout intervalle dépend juste de la longueur de cet intervalle.

Remarque 3.3.1 (importante) *Pour un processus à accroissements indépendants et stationnaires, donner la loi de $X_t - X_0,\ \forall t > 0$, ainsi que celle de X_0 suffit à caractériser entièrement le processus.*

3.4 Processus de Poisson

3.4.1 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0$

Définition 3.4.1 *N est une variable de Poisson de paramètre λ si*

$$P(N=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \textit{avec } k \in \mathbb{N}$$

On a alors : $\mathbb{E}(N) = \lambda,\ var(N) = \lambda.$

Proposition 3.4.1 *Si $N_1,\ N_2,\quad, N_n$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre respectif $\lambda_1,\ \lambda_2,\quad \lambda_n$ alors $N = N_1 + N_2 + \quad +N_n$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \quad +\lambda_n$.*

3.4.2 Processus de comptage

On s'intéresse ici à un type particulier de processus $N(t)$ appelés processus de comptage où $N(t)$ est un effectif à la date t. Par exemple

- $N(t) =$ nombre de poissons capturés dans l'intervalle de temps $[0, t]$;
- $N(t) =$ taille d'une population à la date t

Définition 3.4.2 *Un processus stochastique $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'événements qui sont produits entre 0 et t ; il doit donc satisfaire*

1. $N(t) \geq 0$;
2. *$N(t)$ des valeurs entières uniquement ;*
3. *Si $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$;*
4. *Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'événements qui ont eu lieu entre s et t.*

Un processus de comptage est un processus discret à temps continu.

Définition 3.4.3 *Un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si*

1. $N(0) = 0$;
2. *Le processus est à accroissement indépendants ;*
3. *Pour tout $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N(s+t) - N(s)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.*

Remarque 3.4.1 *Le paramètre d'intensité λ d'un processus de Poisson est tel que, $\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$ car $N(t)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda t)$.*

3.5 Processus gaussien

3.5.1 Variable gaussienne

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une variable aléatoire réelle X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle a pour densité

$$\Phi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

2. On a $\mathbb{E}(X) = m$ et $var(X) = \sigma^2$
3. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n}, \qquad \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$$

Proposition 3.5.1 *1. Si X est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)$$

2. Réciproquement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)$, la variable X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 3.5.2 *Soit X et Y deux variables gaussiennes tq X suit $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et Y suit $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ on a*

$$X \text{ et } Y \text{ sont } \textbf{indépendantes} \Longrightarrow X + Y \text{ suit la la normale } \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

3.5.2 Vecteurs gaussiens

Définition 3.5.1 *Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ Un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire des variables X_i suit une loi gaussienne : Pour tout n-uplet de nombres réels $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in BbbR^n$, la variable aléatoire $\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$ suit une loi gaussienne.*

Remarque 3.5.1 *En choisissant $\lambda_j = 1$, et $\lambda_i = 0$ si $i \neq j$, on voit que si X est un vecteur gaussien alors chacune de ses composantes X_j suit une loi gaussienne*

Proposition 3.5.3 *1. Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien :*

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \Leftrightarrow cov(X_1, X_2) = 0$$

2. Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables gaussiennes et indépendantes, alors $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien

Définition 3.5.2 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus gaussien **ssi** pour tout $n \in N^*, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, le vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est gaussien*

3.6 Filtrations

L'interprétation du paramètre t comme index de temps introduit un aspect dynamique : pour modéliser le fait que l'incertitude des évènements de Ω devient de moins en moins incertaine lorsque le temps s'écoule, i.e. on possède de plus en plus d'information, on introduit la notion de filtration.

Définition 3.6.1 *Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de soustribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ est appelé espace de probabilité filtré.*

Remarque 3.6.1 *$\mathcal{F}_t$ s'interprète comme l'information connue à la date t et elle augmente avec le temps.*

Définition 3.6.2 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté (par rapport à $\mathcal{F}$) si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tous t. Lorsqu'on veut préciser par rapport à quelle filtration le processus est adapté, on écrira $(\mathcal{F}_t)$-adapté.*

Remarque 3.6.2
1. *Un processus adapté est donc un processus dont la valeur à toute date t est révélée par l'information $\mathcal{F}_t$. On dit parfois que le processus est non anticipatif.*
2. *Il est clair que tout processus X est adapté par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$.*

Définition 3.6.3 *La filtration naturelle (ou canonique) de X, notée $\mathcal{F}_t^X$ est la suite croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X$ engendrées par $(X_s)_{s\leq t}$ i.e.*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

Remarque 3.6.3
1. *$\mathcal{F}_t^X$ s'interprète comme toute l'information qu'on peut extraire de l'observation des trajectoires de X entre 0 et t.*
2. *$\mathcal{F}_t^X$ la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.*

Définition 3.6.4 (Cas discret : filtration, processus adapté)
1. *Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une suite croissante de soustribus*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset .... \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$$

   on dit alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ un espace de probabilité filtré.
2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que le processus est adapté (par rapport à $\mathcal{F}_n$) si la variable aléatoire X_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$ pour tout n.*
3. *La filtration naturelle de X est $\mathcal{F}_n^X$ tq*

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$$

3.7 Martingales

Proposition 3.7.1 (Propriétés de l'espérance conditionnelle) *Soit X et Y deux variables aléatoires intégrables et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$*

a) *Linéarité : Soit a et b deux constantes. $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*

b) *Croissance : Si $X \leq Y$. Alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*

c) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right] = \mathbb{E}(X)$.

d) *Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$*

e) *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable bornée, $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$*

f) *Si X est independant de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$*

Définition 3.7.1 (Cas discret : Martingale) *Une suite de variable aléatoire réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F})_n$-martingale si*

d1) X_n *est* $(\mathcal{F})_n$*-adapté*

d2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, X_n *est intégrable, i.e. si* $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$

d3) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$, *p.s.pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 3.7.2 (cas continu : Martingale) *Un processus* M *est une* $(\mathcal{F})_t$*-martingale si*

c1) M *est* $(\mathcal{F})_t$*-adapté*

c2) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, M_t *intégrable, i.e. si* $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$

c3) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$, *p.s.pour tout* $0 \le s \le t$.

REMARQUE 3.7.1

1. *Une* ***sur-martingale*** *pour le cas discret (continu) est un processus qui vérifie les deux premières propriété d1 et d2 (c1 et c2) et* $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \le X_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \le M_s$, *pour tout* $0 \le s \le t)$.
2. *Une* ***sous-martingale*** *pour le cas discret (continu) est un processus qui vérifi les deux premières propriété d1 et d2 (c1 et c2) et* $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \ge X_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \ge M_s$, *pour tout* $0 \le s \le t)$.

Dans la suite, on se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P)$ et un processus $(B_t)_{t\ge 0}$ sur cet espace.

3.8 Mouvement Brownien

L'exemple basique de processus est le mouvement Brownien, nom donné par le botaniste Robert Brown en 1827 pour décrire le mouvement irrégulier de particules de pollen dans un fluide. Le cadre d'application du mouvement Brownien a largement dépassé l'étude des particules microscopiques pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'actions, historiquement depuis Bachelier en 1900.

DÉFINITION 3.8.1 (Mouvement Brownien standard) *Un mouvement Brownien standard est un processus à temps continu* $(t \in \mathbb{R}^+)$ *tel que*

1. $B_0 = 0,\ P - p.s.$
2. $(B_t)_{t\ge 0}$ *es t à accroissement indépendant :* $(B_t - B_s) \perp (\mathcal{F}_s^B) = \sigma(B_r,\ 0 \le r \le s)$, $\forall t > s \ge 0$
3. $(B_t)_{t\ge 0}$ *es t à accroissement stationnaires :* $B_t - B_s \sim B_{t-s} - B_0,\ \forall t > s \ge 0$
4. B_t *suit une loi gaussienne* $\mathcal{N}(0,t),\ \forall t > 0$
5. $(B_t)_{t\ge 0}$ *est à trajectoire continues*

3.9 Processus de Markov

DÉFINITION 3.9.1 *Un processus de Markov est un processus tel que*

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{E}\left(f(X_t) \mid X_s\right), \quad p.s,$$

pour tout $t > s \ge 0$ *et pour toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *borélienne et bornée avec* $\mathcal{F}_s^X = \sigma\left(X_r,\ r \le s\right)$.

3.10 Exercices

Exercise 42 *Soit X une v.a.r de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Calculer* $\mathbb{E}(X^3),\ \mathbb{E}(X^4),\ \mathbb{E}(|X|)$

Exercise 43 *Soit X une v.a.r de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.*

1. *Quelle est le loi de $\frac{X-m}{\sigma}$.*
2. *Montrer que $\mathbb{E}(e^{\theta X}\mathcal{F}(X)) = e^{m\theta+\sigma^2\theta^2/2}\mathbb{E}(f(X+\theta\sigma^2))$, pour f continue bornée*
3. *Montrer que $\mathbb{E}(f(X)(X-m)) = \sigma^2\mathbb{E}(f'(X))$.*

Exercise 44 *Montrer que si $X \in L^2$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = Y$ et $\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{G}) = Y^2$ alors $X = Y$.*

Exercise 45 *Soit X, Y deux variables aléatoires telles que la v.a. $X-Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est $\mathcal{G}$-mesurable.*

1. *Calculer $\mathbb{E}(X-Y \mid \mathcal{G})$. En déduire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.*
2. *Calculer $\mathbb{E}((X-Y)^2 \mid \mathcal{G})$. En déduire $\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{G})$.*

Exercise 46 *Soit $X = X_1 + X_2$. On suppose que X_1 est indépendante de $\mathcal{G}$, que X_2 est $\mathcal{G}$-mesurable et que X_1est gaussienne*

1. *Calculer $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ et $Var(X \mid \mathcal{G})$*
2. *Calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda X} \mid \mathcal{G})$.*

Exercise 47 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$*

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$$

1. *Soit t un réel. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \exp(tS_n)$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*

Solution :
On a

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= \exp(tS_{n+1}) = \exp\left[t\left(X_1 + ... + X_n + X_{n+1}\right)\right] \\
&= \exp(tS_n + tX_{n+1}) \\
&= \exp(tS_n)\exp(tX_{n+1}) \\
&= Z_n \exp(tX_{n+1})
\end{aligned}$$

On a pour $n \geq 0$,, puisque $Z_n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1} \quad &| \quad \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_n \exp(tX_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \quad Z_n\mathbb{E}[Z_n \exp(tX_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n], \quad \text{car } Z_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable.} \\
&= \quad Z_n\mathbb{E}[Z_n \exp(tX_{n+1})], \quad \text{car } tX_{n+1} \perp \mathcal{F}_n \\
&= \quad Z_n \exp(t^2/2), \quad \text{car } X_{n+1} \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&\geq \quad Z_n, \quad \text{car } \exp(t^2/2) \geq 1
\end{aligned}$$

Exercise 48 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable indépendantes et identiquement distribuées. On note m la moyenne de X_1 et σ^2 sa variance. On pose $S_0 = 0$, $M_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$*

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \quad M_n = S_n - nm, \quad \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$$

1. *Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.*
3. *Montrer que $(M_n^2 - n\sigma^2)_{n\geq 0}$ est une martingale.*

Solution :
Remarquons tout d'abord que, pour tout entier n, M_n est de carré intégrable et $\mathcal{F}_n$–mesurable.

1. On a, pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1} = M_n + (X_{n+1} - m)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} \quad | \quad \mathcal{F}_n] &= M_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - m \mid \mathcal{F}_n], \quad \text{car } M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ &= M_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - m], \quad \text{car } X_{n+1} \perp \mathcal{F}_n \\ &= M_n, \quad \text{car } \mathbb{E}[X_{n+1}] = m \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1}^2 = M_n^2 + 2M_n(X_{n+1} - m) + (X_{n+1} - m)^2$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = M_n^2 + 2M_n\mathbb{E}[(X_{n+1} - m) \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[(X_{n+1} - m)^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= M_n^2 + 2M_n\mathbb{E}[(X_{n+1} - m)] + \mathbb{E}[(X_{n+1} - m)^2] \\ &= M_n^2 + var(X_{n+1}) \\ &= M_n^2 + \sigma^2 \\ &\geq M_n^2 \end{aligned}$$

   Donc $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est donc une sous-martingale

3. Le calcul précédent donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 \quad | \quad \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - (n+1)\sigma^2 \\ &= M_n^2 + \sigma^2 - (n+1)\sigma^2 \\ &= M_n^2 - n\sigma^2 \end{aligned}$$

   Donc, $\left(M_n^2 - n\sigma^2\right)_{n\geq 1}$ est une martingale.

Exercise 49 *Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F})_n$-martingale alors*

$$\mathbb{E}(X_{n+r} \mid \mathcal{F}_n) = X_n, \ \forall n, r \in \mathbb{N}$$

Exercise 50 *Montrer que si $X_n = Y_1 + ... + Y_n$ où les Y_i sont indépendantes équidistribuées centrés alors X_n est une martingale.*

Exercise 51 *Si $(B)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.*

1. *Montrer que le processus $B_t^2 - t$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale*
2. *Montrer que le processus $B_t^3 - 3tB_t$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale*

Solution :
Un processus M est une $(\mathcal{F})_t$-martingale si

c1) M est $(\mathcal{F})_t$-adapté

c2) $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$

c3) Pour tout $0 \leq s \leq t. \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.

1. On a $B_t^2 - t$ est $(\mathcal{F})_t$-adapté, $\mathbb{E}\left|B_t^2 - t\right| \leq \mathbb{E}\left|B_t^2\right| + t < +\infty$, et Pour tout $0 \leq s \leq t$

   (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right], \quad \text{car } (B_t - B_s)^2 \perp \mathcal{F}_s \\ &= t - s \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[B_t^2 + B_s^2 - 2B_tB_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[B_tB_s \mid \mathcal{F}_s\right], \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - 2B_s\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right], \\ &\quad \text{car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - 2B_s^2, \\ &\quad \text{car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-martingale} \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^2. \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)\,3 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[B_t^3 - B_s^3 + 3B_tB_s^2 - 3B_tB_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[B_s^3 \mid \mathcal{F}_s\right] + 3\mathbb{E}\left[B_tB_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &\quad -3\mathbb{E}\left[B_t^2B_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^3 + 3B_s^2\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] - 3B_s\mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right], \\ &\quad \text{car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^3 + 3B_s^3 - 3B_s\mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right], \\ &\quad \text{car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-martingale} \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^3 + 3B_s^3 - 3B_s\left(B_s^2 + t - s\right), \\ &\quad \text{car } B_t^2 - t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-martingale} \\ &= \mathbb{E}\left[B_t^3 - 3tB_t \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^3 + 3sB_s. \end{aligned}$$

   D'après a) et b), on a Pour tout $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[B_t^3 - 3tB_t \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s^3 + 3sB_s = 0 \\ &\Longrightarrow \\ &\mathbb{E}\left[B_t^3 - 3tB_t \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s^3 - 3sB_s \end{aligned}$$

   Donc $B_t^3 - 3tB_t$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Exercise 52 *Si $(B)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement Brownien*

1. *Montrer que le processus $e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.*

Solution :

1. On a $e^{\sigma B_t-\sigma^2 t/2}$ est $\mathcal{F}_t$-adapté, $\mathbb{E}\left|e^{\sigma B_t-\sigma^2 t/2}\right|<+\infty$ et pour $t\geq s$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{\sigma B_t-\sigma^2 t/2}\mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t-B_s)+\sigma B_s-\sigma^2 t/2}\mid \mathcal{F}_s\right)\\
&= e^{\sigma B_s-\sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t-B_s)}\mid \mathcal{F}_s\right), \quad \text{car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable}\\
&= e^{\sigma B_s-\sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t-B_s)}\right), \quad \text{car } (B_t-B_s)\perp \mathcal{F}_s\\
&= e^{\sigma B_s-\frac{\sigma^2}{2}t}e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}, \quad \text{car } (B_t-B_s)\sim\mathcal{N}(0,t-s)\\
&= e^{\sigma B_s-\frac{\sigma^2}{2}s}
\end{aligned}$$

Donc $e^{\sigma B_t-\sigma^2 t/2}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Exercise 53 *Démontrer que* $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

$$M_t=e^{\frac{-\alpha^2 t}{2}}\cosh(\alpha B_t)$$

*est une martingale.(**Rappel** :* $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$).

Exercise 54 *Calculer pour tout couple* (s,t) *les quantités*

1. $Cov(B_t,B_s)$.
2. $\mathbb{E}(B_tB_s^2)$, $\mathbb{E}(B_t^2B_s^2)$
3. *Quelle est la loi de* B_t+B_s?
4. *Soit* θ_s *un variable aléatoire bornée* $\mathcal{F}_s$*-mesurable.*
   (a) *Calculer pour* $t\geq s$, $\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s)$
   (b) *Calculer pour* $t\geq s$ $\mathbb{E}(\theta_s(B_t-B_s)^2)$.

Solution :

1. Pour tout couple (s,t), soit $t\geq s$

$$\begin{aligned}
Cov(B_t,B_s) &= \mathbb{E}(B_tB_s), \quad \text{car } \mathbb{E}(B_t)=\mathbb{E}(B_s)=0\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[B_tB_s\mid\mathcal{F}_s\right]\right),\\
&= \mathbb{E}\left(B_s\mathbb{E}\left[B_t\mid\mathcal{F}_s\right]\right), \quad \text{car } B_s \text{ est}\mathcal{F}_s\text{-mesurable}\\
&= \mathbb{E}\left(B_s^2\right)=s, \quad \text{car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-martingale}
\end{aligned}$$

2. Pour tout couple (s,t), on a deux cas
   (a) soit $t\geq s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_tB_s^2) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[B_tB_s^2\mid\mathcal{F}_s\right]\right),\\
&= \mathbb{E}\left(B_s^2\mathbb{E}\left[B_t\mid\mathcal{F}_s\right]\right), \quad \text{car } B_s\text{est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable}\\
&= \mathbb{E}\left(B_s^3\right)=0, \quad \text{car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-martingale}
\end{aligned}$$

   (b) soit $t\leq s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_tB_s^2) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[B_tB_s^2\mid\mathcal{F}_t\right]\right),\\
&= \mathbb{E}\left(B_t\mathbb{E}\left[B_s^2\mid\mathcal{F}_t\right]\right), \quad \text{car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\\
&= \mathbb{E}\left(B_t(B_t^2-t+s)\right), \quad \text{car } B_s^2-s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-martingale}\\
&= \mathbb{E}(B_t^3)+(s-t)\mathbb{E}(B_t)\\
&= 0
\end{aligned}$$

3. La variable $B_t + B_s$ est gaussienne (car B est un processus gaussien), centré (car $\mathbb{E}(B_t + B_s) = \mathbb{E}(B_t) + \mathbb{E}(B_s) = 0$) mais B_t et B_s ne sont pas indépendants. On a $B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s$ avec $B_t + B_s = (B_t - B_s) \perp (2B_s)$, donc d'aprés le théoème de la somme des variables aléatoires gaussiennes **indépendantes** on a $B_t + B_s$ est une v.a gaussienne de moyenne
$$\mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) + \mathbb{E}(2B_s) = 0$$
et de variance
$$\begin{aligned} var\left(B_t - B_s\right) + var(2B_s) &= (t-s) + 2^2 var(B_s) \\ &= t - s + 4s \\ &= t + 3s \end{aligned}$$
Donc $(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, t+3s)$.

(a)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\theta_s(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right]\right), \\ &= \mathbb{E}\left(\theta_s \mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right]\right), \quad \text{car } \theta_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\ &= \mathbb{E}\left(\theta_s \mathbb{E}(B_t - B_s)\right), \quad \text{car } (B_t - B_s) \perp \mathcal{F}_s \\ &= \mathbb{E}(\theta_s \times 0), \quad \text{car } \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s)^2) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\theta_s(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\right), \\ &= \mathbb{E}\left(\theta_s \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\right), \quad \text{car } \theta_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable} \\ &= \mathbb{E}\left(\theta_s \mathbb{E}(B_t - B_s)^2\right), \quad \text{car } (B_t - B_s) \perp \mathcal{F}_s \\ &= (t-s)\mathbb{E}(\theta_s), \quad \text{car } \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = t - s \end{aligned}$$

Exercise 55 *Soit X une v.a intégrable. Montrer que $(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t),\ t \geq 0)$ est une martingale*

Exercise 56 *Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0),\ \forall t$*

Exercise 57 *Soit $(M_t,\ t \geq 0)$ une $\mathcal{F}_t-$martingale de carré intégrable (telle que M_t^2 soit d'espérance finie, pour tout t. montrer que*

1. *$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - M_s^2$, pour $t > s$*
2. *$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2) = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2)$, pour $t > s$*

Exercise 58 *Soient W et W^* deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0, 1[$ une constante. Montrez que $\left(\rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} W_t^*\right)_{t \geq 0}$ est aussi un mouvement Brownien.*

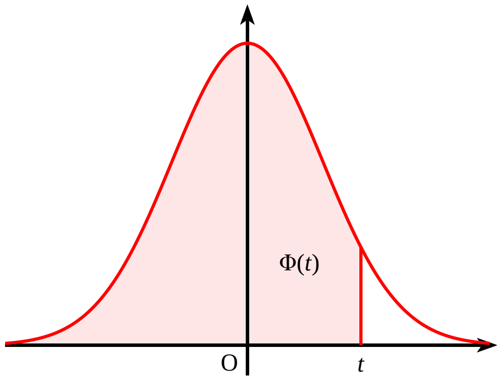
Exercise 59 *Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ défini pour tout $t \in [0, 1]$ par*
$$X_t = B_t - B_1$$

1. *Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.*
2. *Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.*
3. *En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?*
4. *Est-ce $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale ?*

Chapitre 4

Tables

Table de la loi normale centrée réduite



$$P(-1,96 < T < 1,96) = 0,95$$
$$P(-2,58 < T < 2,58) = 0,99$$

Rappel :

$P(T > t) = 1 - P(T < t) = 1 - \Phi(t)$

$P(T < -t) = P(T > t) = 1 - \Phi(t)$

Exemple :

$P(T < 1,24) = 0{,}892\ 5$

$P(T > 1,24) = 1 - 0{,}892\ 5 = 0{,}107\ 5$

$P(T < -1,24) = P(T > 1,24) = 0{,}107\ 5$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Bibliographie

[1] Bogaert, Patrick. Probabilités pour scientifiques et ingenieurs : Introduction au calcul des probabilités. De Boeck Superieur, 2005

[2] Cantoni, Eva, Philippe Huber, and Elvezio Ronchetti. Maitriser l'aléatoire Exercices résolus de probabilités et statistique. Springer, 2009.

[3] Jeanblanc, Monique, and Thomas Simon. "Eléments de calcul stochastique." IRBID, septembre (2005).

[4] Philippe Briand ."Probabilité de base"'(2005).

[5] Hervé Carrieu, Probabilité : Exercices corrigés, 2008, EDP Sciences

[6] Leveque, Olivier. Cours de probabilités et calcul stochastique. No. LECTURE. 2005.

[7] Chorro, Christophe. "Cours de calcul stochastique Master M2 IRFA." (2006).