République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l’Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

THÈSE

EN VUE DE L’OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : Mathématiques

Présentée par

Guechi Sarra

Intitulée

Systèmes dynamiques non linéaires fractionnaires et contrôle optimal

Soutenue le : 16/11/2021   Devant le Jury composé de :

Mr. BOUSSETILA Nadjib	**Prof**	Univ. de 8 mai 1945	Président
Mr. DEBBOUCHE Amar	**Prof**	Univ. de 8 mai 1945	Rapporteur
Mr. TORRES Delfim F.M.	**Prof**	Univ. d’Aveiro-Portugal	Co-encadreur
Mr. ABBAS Karim	**Prof**	Univ. de Bejaia	Examinateur
Mr. BOUCHAIR Abderrahmane	**Prof**	Univ. de Jijel	Examinateur
Mr. KERBOUA Mourad	**MCA**	Univ. de 8 mai 1945	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

*En préambule à cette thèse, je tiens à remercier en premier lieu **ALLAH** qui m'a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.*

*En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude sont destinés à mon directeur de thèse le Professeur **DEBBOUCHE Amar**. Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités.*

*Je voudrais adresser un remerciement spécial à mon Co-encadreur **Mr. TORRES Delfim F.M.***

*Mes remerciements les plus respectueux vont au Professeur **BOUSSETILA Nadjib** d'avoir accepté de présider le jury et au **Dr KERBOUA Mourad** pour ces encouragements, et d'avoir accepté de juger cette thèse.*

*Je remercie vivement les Professeurs : **BOUCHAIR Abderrahmane** et **KARIM Abbas** qui ont accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse.*

Je termine avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de près ou de loin a contribué à ma réussite.

Dédicace

***J**e dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère, à mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protège. Que Dieu les gardes et les protège.*

***A** mes adorables sœurs :Imen, Afef, Nassima, Chaima et Roumaissa, je veux dire merci beaucoup mes belles sœurs et je vous souhaite une belle vie pleine de joie et de réussite.*

***A** mon mari Walid Khirouni.*

***A** mes enfants : Djana , Mouhamed et Allaa que Dieu les gardes et les protège.*

Abstract

The study of fractional calculus of variations problems is a very common research topic because of its numerous applications in science and engineering, including mechanics, chemistry, biology, economics and control theory. On the other hand, optimal control problems can be achieved from control theory (the analysis of controlled dynamical systems).
The work in this thesis is concerned with fractional nonlinear dynamic control systems and our main objective is to use general fractional operators, in particular derivatives of variable controls, to define and develop a more general class of fractional nonlinear dynamic control systems, and to prove corresponding structural properties, e.g., approximate controllability and optimality.
First it is the study of fractional nonlinear dynamic control systems fractional nonlinear dynamic control systems, we develop a more general class of these systems, prove the existence of solution and corresponding structural properties of approximate controllability and optimality of a proposed system.
Moreover, we consider a new class of fractional phi-Hilfer differential equations with impulses and nonlocal conditions, we discuss the existence of optimal control.
Moreover we organize a group of sufficient conditions of fractional Sobolev-type integro-differential inclusions with infinite delay by solving operators to prove the approximate controllability.

Keywords: Fractional integrals and derivatives, Controllability, semi-group theory, Fixed point techniques, Optimal control, Non-local and impulsive conditions

Résumé

L'étude des problèmes fractionnaires du calcul des variations, est un sujet de recherche fortement courant en raison de ses nombreuses applications en sciences et ingénierie, y compris la mécanique, la chimie, la biologie, l'économie et la théorie du contrôle (l'analyse des systèmes dynamiques contrôlés). Cette dernière qui peut atteindre les problèmes de contrôle optimal.
Dans cette thèse, nous avons étudié les systèmes de contrôle dynamiques non linéaires fractionnaires et notre objectif principal est d'utiliser les opérateurs fractionnaires généraux, pour définir et développer une classe de systèmes de contrôle dynamiques non linéaires fractionnaires, et prouver des propriétés qualitatives correspondantes aux contrôlabilités approchées et d'optimalité.

D'abord, nous avons prouvé l'existence de la solution et des propriétés qualitatives correspondantes aux contrôlabilités approchées et d'optimalité d'un système dynamique impulsif non-local et non linéaire d'ordre fractionnaire.

En outre, nous avons discuté l'existence de contrôle optimal d'une nouvelle classe d'équations différentielles fractionnaires de phi-hilfer avec impulsions et conditions non locales.

De plus, nous avons étudié un groupe de conditions suffisantes d'inclusions intégro-différentielles fractionnaires du type Sobolev avec un retard infini par des opérateurs résolvants en vue de prouver la contrôlabilité approchée.

Enfin, nous avons terminé par une conclusion qui résume nos contributions scientifiques dans cette thèse, ainsi que, quelques problèmes ouverts possibles à étudier à l'avenir comme de nouvelles directions.

Mots-clés: Intégrales et dérivées fractionnaires, Contrôlabilité, théorie du semi-groups, Techniques du point fixe, Contrôle optimal, ….

الملخص

تعد دراسة المشكلات الكسرية في حساب الاختلافات من مواضيع البحث الجد شائع بسبب تطبيقاته العديدة في العلوم والهندسة ، بما في ذلك الميكانيك والكيمياءوالبيولوجيا والاقتصاد ونظرية التحكم. من ناحية أخرى ، يمكن الوصول إلى مشاكل التحكم المثلى من نظرية التحكم (تحليل الأنظمة التي يتم التحكم فيها ديناميكيًا).

يركز عمل هذه الأطروحة على أنظمة التحكم الديناميكي غير الخطية ، وهدفنا الرئيسي هو استخدام عوامل التشغيل الكسرية العامة ، وخاصة مشتقات الأوامر المتغيرة ، لتحديد وتطوير فئة أكثر عمومية من أنظمة التحكم الديناميكي غير الخطي. الخصائص الهيكلية ، على سبيل المثال ، للتحكم التقريبي والأمثل.

أولاً ، دراسة أنظمة التحكم الديناميكي للكسور الغير خطية ، قمنا بتطوير فئة أكثر عمومية من هذه الأنظمة ، وإثبات وجود الحلول والخصائص الهيكلية المقابلة للتحكم التقريبي والأمثل للنظام المقترح .

بالإضافة إلى ذلك ، فإننا نعتبر فئة جديدة من المعادلات التفاضلية الكسرية ل ايلفر ذات النبضات والظروف غير المحلية ، نناقش وجود التحكم الأمثل.

بالإضافة إلى ذلك ننظم مجموعة من الشروط الكافيةلشوائب تفاضلية كسرية من نوع سوبوليف مع تأخير لانهائي عن طريق حل المشغلين لإثبات إمكانية التحكم التقريبية.

الكلمات المفتاحية: التكاملات والمشتقات الجزئية ، القدرة على التحكم ، نظرية المجموعة شبه ، تقنيات النقطة الثابتة ، التحكم الأمثل ، الظروف غير المحلية والاندفاعية.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel, permettant de définir les dérivées (et les intégrales) d'ordre réel ou complexe ([34], [42], [43]).

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin 17-ième siècle jusqu'à nos jours. À la fin de l'année 1695 les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles".

La première application de calcul fractionnaire appartient à Niels Henrik Abel (1802-1829) et remonte à 1823, ou il appliqua le calcul fractionnaire pour résoudre la solution d'une équation intégrale qui se pose dans la formulation du problème tautochrone. Ce problème, parfois appelée aussi le problème du synchronisme d'horloge, est celui de la recherche de la forme

d'un fil sans frottement se situant dans un plan vertical de telle sorte que le temps d'un bourrelet placé sur le fil glisse de la pointe du fil le plus bas, en même temps, quelque soit l'emplacement du bourrelet. La cycloïde et le synchronisme d'horloge ainsi que la courbe brachistochrone : elle donne le temps le plus court de la glissière et marque la naissance du calcul des variations.
Les dérivées et les intégrales d'ordre arbitraire sont des objets principaux du calcul fractionnaire (FC),ont gardé l'intérêt de nombreux scientifiques ces dernières années, fournir un excellent outil pour décrire les propriétés héréditaires de divers matériaux et les processus. Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire et ses applications ont gagné beaucoup d'importance, en raison de résultats réussis dans la modélisation de plusieurs phénomènes complexes de nombreuse apparemment diversifiée et des domaines répandue de la science et de l'ingénierie, telle que la conduction thermique, la diffusion, la propagation d'ondes, le transfert radiatif, la théorie cinétique des gaz, les problèmes diffraction et les ondes d'eau, la radiation, la mécanique des milieux continus, la géophysique, l'électricité et le magnétisme, ainsi que dans l'économie mathématique, la théorie de la communication, génétique des populations, la théorie de la file d'attente et la médecine. Pour plus de détails sur la théorie et applications de calcul fractionnaire (voir [34]).
De nombreux phénomènes et processus du monde réel qui ont soumis à des influences externes, pendant un petit intervalle de temps, au cours de leur évolution peuvent être représentés par des équations différentielles impulsives. Les équations différentielles impulsives sont devenues le cadre naturel pour la modélisation de nombreux processus et phénomènes évolutifs étudiés dans les domaines de la science et de l'ingénierie, tels que les systèmes méca-

niques, les systèmes biologiques, la dynamique des populations, la physique, l'économie et la théorie du contrôle. Récemment, en se basant sur la théorie du semi-group et sur celle du point fixe, de nombreux auteurs ont étudié les propriétés qualitatives des solutions des équations différentielles impulsives dans les problèmes différentiels fractionnaires non locaux et impulsifs (voir [11], [12], [29], [40]) et les références qui s'y trouvent.
L'étude des problèmes de calcul des variations fractionnaire, cas particulier de contrôle optimal, et les équations du type Euler -Lagrange respectifs, est un sujet intéressant de recherche courante en raison de ses nombreuses applications en sciences et ingénierie, y compris la mécanique, la chimie, la biologie, l'économie et la théorie du contrôle [44] . En 1996-1997 Riewe obtient une version de l'Euler-Lagrange équations pour des problèmes variationnels fractions combinant les cas Conservateur et non Conservateur ([55], [58]) . Depuis, de nombreux travaux sur le calcul des variations fractionnaire, contrôle optimal fractionnaire et ses applications ont été écrites, voir, par exemple [1], [2], [5], [6], [26], [27], [28], [43] et les références citées ..
D'autre part, les problèmes de contrôle optimal peuvent être atteints à partir de la théorie du contrôle (l'analyse des systèmes dynamiques contrôlés). Autrement dit, le contrôle optimal fournit notamment les techniques de contrôle dans lequel le signal de commande optimise un certain coût. Récemment, de nombreux travaux concernant la théorie du contrôle de commande variables sont apparus dans la littérature consacrée aux mathématiques et ses applications (Voir par exemple [6],[13], [25], [41], [56], [57], [64]).

Organisation de la thèse

L'objectif de cette thèse est l'étude des systèmes de contrôle dynamiques non-linéaires fractionnaires, où on a développé une classe de ces systèmes, en prouvant l'existence et l'unicité de solution et des propriétés qualitatives correspondantes la contrôlabilité approchée et l'optimalité des systèmes proposés.
Le travail comporte quatre chapitres organisés comme suit :

Premier chapitre

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on fait un rappel des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle et théorie de semi-groupe, qui représentent un outil indispensable pour notre étude. Nous présentons quelques préliminaires du calcul fractionnaire, la théorie des opérateurs et des techniques sur le théorème du point fixe qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

Deuxième chapitre

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un système dynamique impulsif non-local et non linéaire d'ordres fractionnaires avec un contrôle de la forme suivante.

$$\begin{cases} {}^CD_t^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), (Hx)(t)) + Bu(t), \ t \in (0, b] \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, \\ x(0) + g(x) = x_0 \in X, \\ \triangle x(t_i) = I_i(x(t_i^-)) + Dv(t_i^-), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{0.1}$$

où ${}^CD_t^q$ c'est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < q < 1$, l'état $x(\cdot)$ prend leur valeurs dans l'espace de Banach X avec la norme $\|\cdot\|$, et $x_0 \in X$.

$A : D(A) \subset X \to X$ c'est un opérateur sectoriel de type (M, θ, q, μ) dans X, $H : I \times I \times X \to X$ représentant un Opérateur de type Volterra telle que $(Hx)(t) = \int_0^t h(t, s, x(s))ds$,

les fonctions de contrôle $u(\cdot)$ et $v(\cdot)$ sont donnés dans $L^2(I, U)$

U est un espace de Banach, B et D sont des opérateurs linéaires bornés de U dans X.

Ici, on a $I = [0, b]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$, $I_i : X \to X$ sont des fonctions impulsives qui caractérisent le saut des solutions aux points d'impulsion t_i.

Le terme non linéaire $f : I \times X \times X \to X$, et la fonction non-locale $g : PC(I, X) \to X$, avec PC sera défini plus tard

$\triangle x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, où $x(t_i^+)$ et $x(t_i^-)$ sont les limites droites et gauches de x à ce point t_i.

On présente d'abord quelques résultats préliminaires qui seront utilisés pour démontrer l'existence de la solution du système (0.1) et à l'aide de ce théorème, on montre un résultat de contrôlabilité approchée et enfin l'existence du contrôle optimal.

Troisième chapitre

L'objectif de ce chapitre est de considérer une nouvelle classe d'équations différentielles fractionnaire de φ-Hilfer avec impulsions et conditions non-locales. En utilisant le calcul fractionnaire, la théorie des semi-groupes et à l'aide du théorème du point fixe, l'existence et l'unicité des solutions milds sont obtenues pour le système fractionnaire proposé. De plus, nous discutons l'existence de contrôle optimal pour le système de contrôle fractionnaire de φ-Hilfer. Nos principaux résultats sont bien étayés par un exemple illustratif. Nous sommes concernés par le système :

$$\begin{cases} {}^{H}\mathrm{D}_{t_\gamma{}^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi} z(t) = \mathcal{A}z(t) + \Delta(t, z(t)),\ t \in (0,b] - \{t_1, t_2, \ldots, t_{\mathcal{H}}\}, \\ I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} z(t_\gamma^+) = z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-)),\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}, \\ I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} [z(t)]_{t=0} + \mathcal{G}(z) = z_0, \end{cases}$$

où ${}^{H}\mathrm{D}_{t_\gamma{}^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi}$ désigne la dérivée fractionnaire de φ-Hilfer d'ordre $1/2 < \sigma_1 < 1,\ 0 < \sigma_2 < 1$ et $z(\cdot)$ prend des valeurs dans un espace de Hilbert E et $\mathcal{J}_0 = [0, b]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{\mathcal{H}} < t_{\mathcal{H}+1} = b$. $\mathcal{A}$ est le générateur de C_0-semi groupe $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ dans E. Comme d'habitude $z(t_\gamma^+)$ et $z(t_\gamma^-)$ sont les limites droite et gauche de z au point t_γ, respectivement. $\mathcal{I}_\gamma : E \to E$ sont des fonctions impulsives qui caractérisent le saut de z au points t_γ. Les fonctions $\Delta : \mathcal{J}_0 \times E \to E$, $\mathcal{G} : C(\mathcal{J}_0, E) \to E$ sont des fonctions appropriées qui seront précisées ultérieurement.

Quatreième chapitre

Dans ce dernier, on introduit un ensemble de conditions suffisantes d'inclusions intégro-différentielles fractionnaires de type Sobolev avec un retard infini par des opérateurs résolvants pour prouver nos résultats. Nous nous concentrons principalement sur la contrôlabilité approchée des inclusions intégro-différentielles fractionnaires de type Sobolev de la forme suivante :

$$D_t^{\alpha}[Lx(t)] \in M\left[x(t)+\int_0^t K(t-s)x(s)ds\right]+F(t,x_t)+Bu(t), t \in V=[0,T],$$

$$x(t)=\psi(t) \in P_g, \qquad t \in (-\infty,0]$$

et les inclusions intégro-différentielles fractionnaires neutres de type Sobolev ont la forme suivante :

$$D_t^{\alpha}[Lx(t)-H(t,x_t)] \in M\left[x(t)+\int_0^t K(t-s)x(s)ds\right]+F(t,x_t)+Bu(t), t \in V=[0,T],$$

$$x(t)=\psi(t) \in P_g, \qquad t \in (-\infty,0]$$

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Introduction

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans notre étude et nous présentons quelques préliminaires du calcul fractionnaire [34], la théorie des opérateurs [51]et des techniques sur le théorème du point fixe [51, 59] qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

1.2 Espaces de base

Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2.1 *Soit* $\Omega = [a,b](-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ *et* $n \in N$
On désigne par $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *continues sur* Ω*, muni de la norme*

$$\|f\|_{c^n} := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_C := \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in N.$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$

l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_C := \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Définition 1.2.2 *Soit $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini On désigne par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables,c'est à dire :*

$$AC([a,b]) = \left\{ f/\exists\varphi \in L([a,b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\}$$

et on appelle $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

Définition 1.2.3 *Pour $n \in N$ on désigne par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, i.e.,*

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow C et f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$.

Espaces complets

Définition 1.2.4 *Un espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Proposition 1.2.1 *Si (X,d) est complet et $Y \subset X$. Alors (Y,d) est complet ssi Y est fermé dans X.*

Définition 1.2.5 *Soit (X, d) métrique et $k \geq 0$. Une application $f : X \longrightarrow X$ est k-lipschitzienne si*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \textit{pour tous} \quad x, y \in X.$$

Théorème 1.2.1 *Soit (X, d) complet et $f : X \longrightarrow X$ k-lipschitzienne avec $k < 1$. Alors f admet un point fixe unique.*

1.2.1 Espace de Banach

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $K = R$ ou $K = C$, sauf mention du contraire.

Définition 1.2.6 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé(evn) complet.*

Corollaire 1.2.1 *Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite. On rappelle le résultat suivant :*

Théorème 1.2.2 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.2.2 *Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemples d'espaces de Banach

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions importants en analyse.
Soit F un espace de Banach, dont on note $| \,.\, |_F$ la norme (par exemple, F

est un evn de dimension finie, K^N où K).
** $B(A, F)$, l'espace des applications bornées de $A \longrightarrow F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup : $\|f\|_B = \sup_{x\in A} \mid f(x) \mid_F$.*
** $C_b(X, F)$, l'espace des applications continues bornées de (X, d), espace métrique, à valeurs dans F, muni de la norme du* $\sup \|.\|_B$.
** $C_0(E, F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E, evn de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme du* $\sup \|.\|_B$.
** $C(K, F)$, l'espace des applications continues de (K, d), espace métrique compact, à valeurs dans F, muni de la norme du* $\sup \|.\|_B$.
La norme du $\sup \|.\|_B$ *définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F.*

1.2.2 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.2.7 *Soient $\Omega = (a, b)(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ un intervalle fini ou infinie de R et $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*
1. Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_a^b f(x)dx < +\infty.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω.

Théorème 1.2.3 *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infinie de R.*
1. Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

. L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = inf\left\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad p.p \quad sur \quad \Omega\right\}.$$

1.3 Théorie des opérateurs

1.3.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.3.1 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*
pour tout x, y dans $D(A)$ et α, β dans $\mathbb{R}$

(i) $Ax \in Y$.

ii) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Remarque 1.3.1 *- $D(A)$ c'est le domaine de A.*

- $D(A)$ est dense si $\overline{D(A)} = X$.

- L'image de A notée $Img(A) = \{y \in Y \, \exists x \in D(A) : y = Ax\}$.

- Le noyau de A, noté $Ker(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

1.3.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.2 *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Ax\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \, \forall x \in X.$$

Définition 1.3.3 *Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle un opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y.*
On note $L(X;Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y.
L'opérateur identité de X dans X sera noté par $\mathbb{I}$.

Proposition 1.3.1 *Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$, on a*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Proposition 1.3.2 *Si Y est un espace de Banach, alors $L(X;Y)$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans X.*
Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Spectre d'un opérateur

L'ensemble résolvant d'un opérateur A est l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)\, est\, inversible\, dans\, L(X)\}$$

L'ensemble résolvant est un ouvert de $\mathbb{C}$.

On définit le spectre $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

On définit alors la résolvante de A *comme* $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Théorème 1.3.2 *(Identité de la résolvante)*

Soit A *un opérateur sur un Banach* X, *on a :*

1- Pour λ *et* μ *dans une même composante connexe de* $\rho(A)$,

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

De plus sur cette composante connexe, les résolvantes commutent.

2- $\lambda \longrightarrow R_\lambda(A)$ *est analytique sur* $\rho(A)$.

1.3.3 Opérateurs compacts

Parmi les opérateurs bornés, on distingue les opérateurs compacts, et on note leur espace vectoriel $K(X)$. *Ce sont des opérateurs qui envoient les parties bornées de* X *sur des parties relativement compactes de* Y.

Exemple 1.3.1 *Les opérateurs de rang finis sont compacts par le théorème de Riesz.*

On a plusieurs propriétés et caractérisation intéressantes de la compacité des opérateurs :

Proposition 1.3.3

Si T *où* S *est compact, alors* TS *est compact.*

Proposition 1.3.4

Sur un Hilbert séparable, T *est compact si et seulement si il est la limite au sens de la norme d'opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 1.3.5
Si T_n est une suite d'opérateurs compacts qui converge vers T pour la norme d'opérateur, alors T est compact.

Corollaire 1.3.1 *(Alternative de Fredholm)*
Soit T un opérateur compact sur H, alors $I-T$ est inversible si et seulement si $I-T$ est injective.

1.3.4 Opérateur contractant

Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur borné, l'opérateur T est dit opérateur contractant s'il existe une constante L telle que $0 < L < 1$ et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H \, \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leqslant L\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Théorème 1.3.3 *(principe de contraction de Banach)*
Soit T un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H. Alors, $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Corollaire 1.3.2 *Supposons que l'opérateur T admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H, alors l'opérateur T^n, $n \in N$ admet le même point fixe.*

Corollaire 1.3.3 *Soit T un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur $T^n \, n \in N$ est un opérateur contractant, alors T admet un unique point fixe φ dans l'espace H.*

1.3.5 Opérateurs sectoriels

Définition 1.3.4 *Un opérateur $A \in Cl(V)$ est appelé sectoriel s'il satisfait les conditions*

$$\exists a \in \mathbb{R},\, \exists \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi),\; S_{a,\theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C},\, |\arg(\mu - a)| < \theta,\, \mu \neq a\} \subset \rho(A),$$

$$\exists K \in \mathbb{R}_+,\, \forall \mu \in S_{a,\theta}(A),\, \|R_\mu(A)\|_{l(v)} \leqslant \frac{K}{\mu - a}.$$

1.4 Semi-groupes

Soit E un espace de Banach et $B(E)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés.

Définition 1.4.1 *Un semi-groupe est une famille à un paramètre $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset B(E)$ satisfaisant les conditions :*
(a) $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$, pour $t, s \geqslant 0$,
(b) $T(0) = I$.
Ici I est l'opérateur d'identité de E.

Définition 1.4.2 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ est uniformément continu si*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - T(0)\|_{B(E)} = 0,$$

i.e.,

$$\lim_{|t-s| \longrightarrow 0} \|T(t) - T(s)\|_{B(E)} = 0.$$

Définition 1.4.3 *Nous disons que le semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est fortement continu (ou un* C_0*-semi-groupe) si* $t \longrightarrow T(t)(x)$ *est fortement continu, pour chaque* $x \in E$*, i.e.,*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} T(t)x = T(0)x,\ \forall x \in E.$$

Définition 1.4.4 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un* C_0*-semi-groupe défini sur* E*. Le générateur infinitésimal* $A \in B(E)$ *de* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est l'opérateur linéaire défini par :*

$$A(x) = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)(x) - T(0)x}{t},\ pour\, x \in D(A),$$

où $D(A) = \{x \in E : \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)(x)-x}{t}\, existe\, dans\, E\}$.

Proposition 1.4.1 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors,*

(a) il existe une constante $\omega \geqslant 0$ *telle que*

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leqslant e^{\omega t},\ pour\, t \geqslant 0.$$

b) L'opérateur uniquement défini par $T(t) = e^{tA}$ *est le générateur infinitésimal de* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *.*

(c) $t \longrightarrow T(t)$ *est différentiable en norme. De plus, si* $x \in D(A)$*, alors*

$$\frac{d}{dt}T(t)(x) = A(T(t)(x)) = T(t)(A(x)),\ t \geqslant 0.$$

1.4.1 Semi-groupes intégrés

Définition 1.4.5 *Soit* E *un espace de Banach. Un semi-groupe intégré est une famille d'opérateurs* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *linéaires bornés* $S(t)$ *sur* E *avec les propriétés suivants :*

(i) $S(0) = 0$,

(ii) $t \longrightarrow S(t)$ *est fortement continu,*

(iii) $S(s)S(t) = \int_0^s (S(t+r) - S(r))dr$, *pour tout,* $t, s \geqslant 0$.

Définition 1.4.6 *Un opérateur* A *est appelé un générateur de semi-groupe intégré s'il existe* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que* $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ ($\rho(A)$ *; est l'ensemble résolvant de* A) *et il existe une famille fortement continue et exponentiellement bornée* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *d'opérateurs bornés tels que* $S(0) = 0$ *et* $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt$ *existe pour tout* λ *avec* $\lambda > \omega$.

Définition 1.4.7 *(i) Un semi-groupe intégré* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *est appelé localement Lipschitz continu si, pour tout* $\tau > 0$ *il existe une constante* L *telle que :*

$$|S(t) - S(s)| \leqslant L|t - s|,\ t, s \in [0, \tau].$$

(ii) Un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *est appelé non dégénéré si* $S(t)x = 0$, *pour tous* $t \geqslant 0$ *implique que* $x = 0$.

1.5 Calcul fractionnaire

1.5.1 La fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.5.1 *[34] la fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

ou $t^{z-1} = e^{(z-1)ln(t)}$.

Propriétés

1-La fonction Gamma $\Gamma(z)$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

pour tout $z \in C \backslash Z_-$ où $Z_- = Z \backslash N$.

2-Pour tout $n \in N^*$, la fonction Gamma généralise la factorielle

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

3- On peut également définir la fonction Gamma à l'aide de la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \qquad (Re(z) > 0),$$

la condition $Re(z) > 0$, peut être étendue à $z \in C \backslash Z_-$.

Cas Particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = 1.$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

1.5.2 La fonction bêta

Définition 1.5.2 *La fonction bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler) est une fonction définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad Re(p) > 0 \quad et \quad Re(q) > 0.$$

Propriété 1.5.1 *Le lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad Re(p) > 0 \quad et \quad Re(q) > 0.$$

1.5.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in C(\Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois.

$$(I^{(1)}f)(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

$$(I^{(2)}f)(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du = \int_a^x (x-t)f(t)dt,$$

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n.$$

Par récurrence on peut montrer que :

$$(I_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma, on aura la définition suivante :

Définition 1.5.3 *[34] 1-L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in R_+^*$ d'une fonction $f \in L^1([a,b]) \longrightarrow R$, est formellement définie par*

$$I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

si $a = 0$,on écrit $I_{0^+}^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t)$, telle que

$$g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

et $*$ noté la convolution des fonctions. De plus, $\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(t) = \delta(t)$, avec δ est la fonction de Dirac .

2-L'intégrale fractionnaire à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in R_+^*$ d'une fonction $f \in L^1([a,b]) \longrightarrow R$, est formellement définie par

$$I_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Exemple 1.5.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x)^\beta$ avec $\beta > -1$, on a*

$$I_0^\alpha f(x) = I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt,$$

et le changement de variable $t = xu$, donne $dt = xdu$ d'où

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^1 (xu)^\beta (x(1-u))^{\alpha-1} xdu \\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\times\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Théorème 1.5.1 *Si $f \in L^1([a,b])$ alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$.*

Proposition 1.5.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f),$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in C([a,b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$.
Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.5.2 *Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :*

$$[I_a^\alpha(\lim_{k\to+\infty} f_k)](x) = \lim_{k\to+\infty}(I_a^\alpha f_k)(x).$$

1.5.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5.4 *[34] La dérivé fractionnaire aux sens de Riemann - Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, pour la fonction $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, est définie par :*

$$^{L}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds, \quad t > a,$$

où la fonction f est absolument continue et dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$.

Remarque 1.5.1

$$(D_a^\alpha f)(x) = (\frac{d}{dx})^n (I_a^{n-\alpha} f)(x)$$

tel que : $n = [\Re(\alpha)] + 1, x > a$.

Exemple 1.5.2 *Soit $f(x) = (x-\alpha)^\beta$ avec $\beta > -1$. Pour $\alpha \geq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, on a d'après la remarque précédente :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}.$$

Alors, pour $(\alpha-\beta)\in\{1,2,\ldots,\ n\}$ *on a :*

$$D_a^{\alpha}f(x)=D_a^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j}=0\, j\in\{1,2,\ldots,\ n\}.$$

Par ailleurs si $(\alpha-\beta)\notin\{1,2,\ldots,\ n\}$ *on trouve*

$$D_a^{\alpha}f(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

En particulier, si $\beta=0$ *et* $\alpha>0$*, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante* $f(x)=C$ *est non nulle, sa valeur est :*

$$D_a^{\alpha}C=\frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

1.5.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5.5 *[34] La dérivé fractionnaire aux sens de caputo à gauche d'ordre* $\alpha>0$*,* $n-1<\alpha<n$*,* $n\in\mathbb{N}$*, pour la fonction* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$*,est définie par :*

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds=I_{a^+}^{n-\alpha}f^{(n)}(t),\quad t>a,$$

où la fonction f *est absolument continue et dérivable jusqu'à l'ordre* $n-1$*.*

Remarque 1.5.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha\in]m-1,m[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $m-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* m*, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 1.5.3 *Pour* $f(x)=(x-a)^{\beta}$ *avec* $\beta\geq 0$*, on a*

$${}^{c}D_a^{\alpha}f(x)=\begin{cases}0 & si\,\beta\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}\\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} & si\,\beta>n-1\end{cases}$$

En particulier, si f est constante sur $[a,b]$, alors :

$$^{c}D_{a}^{\alpha}f(x)=0.$$

1.5.6 Dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

Définition 1.5.6 *[34] La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre $0<\alpha<1$ et de type $\beta\in[0,1]$ de la fonction $h:[a,+\infty)\in\mathbb{R}$ est définie par :*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta}h(t)=\Big[I_{a^+}^{(1-\alpha)\beta}D\Big(I_{a^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)}h\Big)\Big](t) \tag{1.1}$$

Relation avec les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo

- *si on pose $\beta=0$, $0<\alpha<1$ et $a=0$, dans la formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.1) on obtient la dérivée fractionnaire classique au sens de Riemann-Liouville :*

  $$D_{0^+}^{\alpha,0}h(t)=\frac{d}{dt}I_{0^+}^{(1-\alpha)}h(t)=\ ^{L}D_{0_+}^{\alpha}h(t)$$

  ,
- *si on pose $\beta=1$, $0<\alpha<1$ et $a=0$, dans la formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.1) on obtient la dérivée fractionnaire classique au sens de Caputo :*

  $$D_{a^+}^{\alpha,1}h(t)=I_{a^+}^{(1-\alpha)}\frac{d}{dt}h(t)=\ ^{c}D_{0_+}^{\alpha}h(t).$$

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer peut être considérée comme un interpolateur entre la dérivée de Riemann- Liouville et de Caputo .

1.6 Systèmes impulsifs

Plusieurs processus réels et phénomènes naturels étudiés en physique, en biologie, en technologie, en économie et autres, sont assujettis à des perturbations dont la durée par rapport à celle du développement du processus ou du phénomène est négligeable, mais ces perturbations provoquent des changements considérables. La modélisation la plus adéquate de tels phénomènes se fait par des systèmes impulsifs. Un système impulsif est en fait une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle (ordinaire, aux dérivées partielles ou autres) et une équation aux différences qui représente les sauts instantanés de l'état dit "impulsions".
La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initiée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham. A partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

1.7 Théorème du point fixe

Nous allons présenter les théorèmes du point fixe pour une application continue dans les espaces de Banach en dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer, Schauder et Krasnoselskii[59].

Définition 1.7.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que $f(u) = u$.*

1.7.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algèbrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Théorème 1.7.1 *Sur K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe alors $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

1.7.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930 ; est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire établir des estimés sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach.

Théorème 1.7.2 *Soit K un sous-ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

1.7.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

En 1955 ; et pour la première fois, Kranoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très éfficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité[20].

Théorème 1.7.3 *Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U, V sont deux applications de D dans X telles que :*
U est une contraction de constante k et V est compacte et continue.
$Ux + Vy, \in D \, \forall x,\ y \in D$, alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Vx = x$.

1.8 Théorie de contrôle

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette défnition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications, un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux, un chimiste pourra vouloir améliorer son procédé en régulant la température, etc.

1.8.1 Système de contrôle

Définition 1.8.1 *De manière abstraite, un système de contrôle est la donnée d'un espace d'états X, d'un espace de contrôles U et d'une loi d'évolution du type :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où $x(t) \in X$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ et $u(t) \in U$ le contrôle choisi. Évidemment, toute la complexité de l'étude d'un système de contrôle dépendra de la complexité des espaces X et U, et surtout de la nature de l'équation d'évolution . En particulier, la distinction majeure est de savoir si X et U sont des espaces de dimension finie ou infinie. Intuitivement, on sent déjà que si l'état $x(t)$ n'est caractérisé que par un nombre finis de paramètres, il sera beaucoup plus facile de les maîtriser que s'ils sont en nombre infinis. Quant à l'équation d'évolution, la principale simplification possible sera de supposer que la valeur de la fonction $f(t, x, u)$ dépend linéairement du couple (x, u).

Définition 1.8.2 *Soit $A \in L^\infty([0, T], \quad M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in L^\infty([0, T], \quad M_{n,m}(\mathbb{R}))$. On se donne un état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un contrôle $u(t) \in L^1([0, T], \quad \mathbb{R}^m)$. Introduisons le système de contrôle :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Nous dirons que $x \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ est une trajectoire solution du système de contrôle lorsque :

$$\forall \tau \leq T, \quad x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau A(t)x(t) + B(t)u(t)dt.$$

1.8.2 Grammienne de contrôlabilité

La première façon de caractériser la contrôlabilité du système de contrôle a été décrite dès 1963 par Kalman, Ho et Narendra. Elle fait intervenir une matrice dite " grammienne " .

Théorème 1.8.1 *Le système de contrôle est contrôlable si et seulement si sa grammienne*

$$\Im = \int_0^T R(T,t)B(t)B(t)^* R(T,t)^* dt,$$

est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$, *où l'on a noté* $R(t_1, t_2)$ *la résolvante du système* $\dot{M} = A(t)M$, *entre les instants* t_2 *et* t_1, *c'est'a-dire la solution matricielle de* $R(t_2, t_2) = Id_n$ *et* $\partial_1 R = A(t)R$.

1.8.3 Formulation de Bolza

On considère le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaire suivant : trouver $x : [t_0, t_1] \longrightarrow R^n$ *avec* $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ *satisfaisant le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + g(t),\ t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $u : [t_0, t_1] \in R^m$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))^T$.
On va introduire une fonctioneelle S *dépendant de* x *et de* u *appellée fonction coût, qui sera toujours de la forme.*

$$S(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_1)),$$

avec

$$L : [t_0, t_1] \times R^n \times R^m \longrightarrow R,$$

et

$$\varphi : R^n \longrightarrow R,$$

des fonctions données.

Le problème de contrôle optimal consiste à trouver parmi toutes les paires de fonctions (x, u) *satisfaisant le système* (1.2) *avec* $u \in U_{ad}$ *et* $x(t_1) \in C_1$ *celles qui minimisent la fonctionnelle* S *donnée.*

On peut alors écrire le problème sous la forme

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_1))/ \\ x_0 = Ax + Bu + g,\ x(t_0) = x^0, u \in U_{ad},\ x(t_1) \in C_1. \end{array} \right\}. \qquad (1.3)$$

On peut voir ceci comme un problème de minimisation avec contraintes :

$$\min_{(x,u)\in Ctr} S(x, u),$$

avec $Ctr =$ *un ensemble des contraintes défini par*

$$Ctr = \{(x, u), x' = Ax + Bu + g,\ x(t_0) = x^0,\ u \in U_{ad}, x(t_1)\beta C_1\}.$$

On appelle le problème de contrôle optimal (1.3) *problème linéaire en formulation de Bolza.*

1.8.4 Le problème de Lagrange

Ce problème simplifié est le suivant. On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad (1.4)$$

où les contrôles $u(.) \in U$ *sont définis sur* $[0, T]$ *et les trajectoires associées doivent vérifier* $x(0) = x_0$ *et* $x(T) = x_1$*, le problème est de minimiser un coût* *de la forme*

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt, \tag{1.5}$$

où T est fixé.

Associons au système (1.4) le système augmenté suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \dot{x}_0(t) = f^0(t, x(t), u(t)), \tag{1.6}$$

et notons $\tilde{x} = (x, x^0)$, $\tilde{f} = (f, f^0)$. Le problème revient donc à chercher une trajectoire solution de (1.6) joignant les points $\tilde{x_0} = (x_0, 0)$ et $\tilde{x_1} = (x_1, x^0(T))$, et minimisant la dernière coordonnée $x^0(T)$.

Exemple 1.8.1 *Considérons le gestionnaire d'un barrage hydraulique. Grâce aux données hydrométriques historiques, il connaît les apports en eau $a(t)$ sur lesquels il peut compter. Par ailleurs, grâce à sa connaissance du marché de l'électricité, il connaît à l'avance le prix de gros de l'électricité $\pi(t)$. Enfin, il dispose de tables permettant de calculer la puissance électrique P délivrée par ses turbines en fonction du débit $u(t)$ qu'il choisit et de la hauteur d'eau H dans le barrage. En notant $x(t)$ le volume d'eau présent dans son réservoir, on obtient le système de contrôle avec contrainte sur l'état suivant*

$$\begin{cases} x^{\cdot}(t) = a(t) - u(t), \\ 0 \leqslant x(t) \leqslant x_{max}, \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant u_{max}. \end{cases}$$

Supposons que le gestionnaire souhaite avoir vidé son barrage en $t = T$ afin de réaliser une maintenance. Il doit donc imposer $x(T) = 0$. Enfin, il cherche à maximiser la quantité

$$\int_0^T \pi(t)P(u(t), H(x(t)))dt.$$

Chapitre 2

Étude de la contrôlabilité approchée et le contrôle optimal d'un problème du système dynamique impulsif non-local et non linéaire d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un système dynamique impulsif non-local et non-linéaire d'ordres fractionnaires avec un contrôle de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), (Hx)(t)) + Bu(t), \;\; t \in (0, b] \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, \\ x(0) + g(x) = x_0 \in X, \\ \triangle x(t_i) = I_i(x(t_i^-)) + Dv(t_i^-), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^C D_t^q$ *c'est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* $0 < q < 1$, *l'état* $x(\cdot)$ *prend ses valeurs dans l'espace de Banach* X *avec la norme* $\|\cdot\|$, *et* $x_0 \in X$.
$A : D(A) \subset X \to X$ *est un opérateur sectoriel de type* (M, θ, q, μ) *dans* X,
$H : I \times I \times X \to X$ *représentant un Opérateur de type Volterra telle que* $(Hx)(t) = \int_0^t h(t, s, x(s))ds$,
les fonctions de contrôle $u(\cdot)$ *et* $v(\cdot)$ *sont donnés dans* $L^2(I, U)$.
U *est un espace de Banach,* B *et* D *sont des opérateurs linéaires bornés de* U *dans* X.
Ici, on a $I = [0, b]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$, $I_i : X \to X$ *sont des fonctions impulsives qui caractérisent le saut des solutions aux points d'impulsion* t_i.
Le terme non-linéaire $f : I \times X \times X \to X$, *et la fonction non-locale* $g : PC(I, X) \to X$, *avec* PC *seront définis plus tard.*
$\triangle x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, *ou* $x(t_i^+)$ *et* $x(t_i^-)$ *sont les limites droite et gauche de* x *au point* t_i.

2.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous mentionnons les notations, les définitions, les lemmes et les faits préliminaires nécessaires pour établir nos principaux résultats.
On a besoin d'introduire l'espace $PC(I, X)$, *l'espase des fonctions bornnées de* I *à valeurs dans* X *avec la norme :* $\|x\|_{PC} = \sup\{\|x(t)\|, t \in I\}$ *tels que* $x(t_i^+)$ *existent pour tout* $i = 0, \ldots, m$ *et* $x(t)$ *est continue sur* $(t_i, t_{i+1}]$,

$i = 0, \ldots, m$, $t_0 = 0$ *et* $t_{m+1} = b$.

Définition 2.2.1 (Voir[13]) *Soit* $A : D \subseteq X \to X$ *un opérateur linéaire et fermé. Nous disons que* A *est* sectoriel *du type* (M, θ, q, μ), *s'il existe* $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *et* $M > 0$ *tel que la q-resolvent de* A *existe en dehors du secteur*

$$\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda^q : \lambda \in \mathbb{C}, |Arg(-\lambda^q)| < \theta\},$$

et

$$\|(\lambda^q I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda^q - \mu|}, \lambda^q \notin \mu + S_\theta.$$

Remarque 2.2.1 *Si* A *est un opérateur sectoriel du type* (M, θ, q, μ), *alors* A *est un générateur infinitésimal d'une famille q -resolvent* $\{T_q(t)\}_{t \geq 0}$ *dans un espace de Banach , où* $T_q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} R(\lambda^q, A) d\lambda$.

Définition 2.2.2 (Modifier par [1, 13]) *Une fonction d'état* $x \in PC(I, X)$ *est appelée une solution de* (2.1) *si elle satisfait les équations intégrales suivantes :*

$$x(t) = S_q(t)(x_0 - g(x)) + \int_0^t T_q(t-s)(f(s, x(s), (Hx)(s)) + Bu(s))ds,$$

si $t \in [0, t_1]$, *et*

$$\begin{aligned} x(t) = S_q(t - t_i)[x(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)) + Dv(t_i^-)] \\ + \int_{t_i}^t T_q(t-s)[f(s, x(s), (Hx)(s)) + Bu(s)]ds, \end{aligned}$$

si $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$, *où*

$$S_q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} \lambda^{q-1} R(\lambda^q, A) d\lambda, \quad et \quad T_q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} R(\lambda^q, A) d\lambda.$$

avec c étant un chemin approprié tel que $\lambda^q \notin \mu + S_\theta$ *pour* $\lambda \in c$.

$x_{t_k}(x(0), \triangle x(t_{k-1}); u, v)$, $k = 1, \ldots, m+1$,*est la valeur d'état de* (2.1) *dans le temps* t_k, *correspondant à la valeur initiale non-locale* $x(0)$, *les valeurs impulsives* $\triangle x(t_{k-1}) = x(t_{k-1}^+) - x(t_{k-1}^-)$ *et les contrôles* u *et* v.*Pour chaque* $x(0)$ *et* $\triangle x(t_{k-1}) \in X$, *nous présentons l'ensemble :*

$$\Re(t_k, x(0), \triangle x(t_{k-1})) = \left\{ x_{t_k}\left(x(0), \triangle x(t_{k-1}); u, v\right) : u(\cdot), v(\cdot) \in L^2(I, U) \right\},$$

qui s'appelle l'ensemble accessible du système (2.1) *dans le temps* t_k *(si* $k = m+1$, *alors* t_k *est le temps final). la ferméture dans* X *est notée par* $\overline{\Re(t_k, x(0), \triangle x(t_{k-1}))}$.

Définition 2.2.3 *Le système de contrôle impulsif* (2.1) *est approximativement contrôlable sur* I *si* $\overline{\Re(t_k, x(0), \triangle x(t_{k-1}))} = X$, *c'est-à-dire, donné un arbitraire* $\epsilon > 0$, *il est possible de diriger à partir des points* $x(0)$ *et* $\triangle x(t_{k-1})$ *au temps* t_k *tous les points dans l'espace d'état* X *à distance* ϵ.

Considérons le système de contrôle impulsif linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_t^q x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \in X, \\ \triangle x(t_i) = Dv(t_i^-), \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.2}$$

La contrôlabilité approchée pour le système de contrôle linéaire impulsif d'ordre fractionnaire (2.2)*est la généralisation de la notion du contrôlabilité approchée pour le système de contrôle linéaire de premier ordre (*$q = 1$ *et* $t_i = D = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *i.e.,* $t \in [t_m, t_{m+1}] = [0, b]$*). Les opérateurs de la contrôlabilité associés avec*(2.2) *sont :*

$$\begin{aligned} \Psi_{t_{k-1},1}^{t_k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s) BB^* T_q^*(t_k - s) ds, \quad k = 1, \ldots, m+1, \\ \Psi_{t_{k-1},2}^{t_k} &= S_q(t_k - t_{k-1}) DD^* S_q^*(t_k - t_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, m+1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $T_q^*(\cdot)$, $S_q^*(\cdot)$, B^* et D^* notés les adjoints de $T_q(\cdot)$, $S_q(\cdot)$, B et D, respectivement, et pour $\lambda > 0$, nous considérons l'opérateur suivant :

$$\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}) = \left(\lambda I + \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}\right)^{-1}, \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

$\Psi_{t_{k-1},1}^{t_k}$ *et* $\Psi_{t_{k-1},2}^{t_k}$ *sont des opérateurs linéaires bornés.*

Lemme 2.2.1 (Voir [1]) *Le système de contrôle linéaire impulsif d'ordre fractionnaire (2.2) est approximativement contrôlable sur I si et seulement si $\lambda\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}) \to 0$ lorsque $\lambda \to 0^+$, $i = 1, 2$, dans la topologie uniforme .*

Lemme 2.2.2 (Theoréme de Krasnoselskii [12]) *Soit X un espace de Banach et E est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de X. Soit Q_1, Q_2 des applications de E dans X telles que $Q_1x + Q_2y \in E$ pour tout $x, y \in E$. Si Q_1 est une contraction et Q_2 est compact et continu alors l'équation $Q_1x + Q_2x = x$ a une solution sur E.*

2.3 Existence de la solution

Nous prouvons l'existence pour le système (2.1). Définissons $K_i^* = \sup_{t\in I} \int_{t_{i-1}}^{t_i} m(t,s)ds < \infty$, $i = 1, \ldots, m+1$. Pour tout $r > 0$, soit $\Omega_r := \{x \in PC(I, X),\ \|x\| \leq r\}$.

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) les opérateures $S_q(t)_{t\geq 0}$ et $T_q(t)_{t\geq 0}$, engendrés par A, sont bornés et compacts, tels que :

$$\sup_{t\in I} \|S_q(t)\| \leq M \text{ et } \sup_{t\in I} \|T_q(t)\| \leq M.$$

.

(H_2) La fonction non linéaire $f : I \times X \times X \to X$ est continue et compacte, il existe des fonctions $\mu_i \in L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, 3$, et des constantes positives α_1 et α_2 telles que :

$$\|f(t, x, y)\| \leq \mu_1(t) + \mu_2(t)\|x\| + \mu_3(t)\|y\|,$$

et

$$\|f(t, x, Hx) - f(t, y, Hy)\| = \alpha_1\|x - y\| + \alpha_2\|Hx - Hy\|.$$

(H_3) La fonction $g : PC(I, X) \to X$ est complètement continue et il existe une constante positive β telle que :

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \beta\|x - y\|,\ x, y \in X.$$

(H_4) Pour la fonction $h : \Delta \times X \to X$, il existe $m(t, s) \in PC(\Delta, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\|h(t, s, x(s))\| \leq m(t, s)\|x\|,$$

pour tout $(t, s) \in \Delta$ et $x, y \in X$, où

$$\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 | t_i \leq s,\ t \leq t_{i+1}, i = 0, \ldots, m\}.$$

(H_5) Pour tout $x_1, x_2, x \in X$ et $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$, I_i sont continues et compactes et il existe des constantes positives d_i, e_i telle que :

$$\|I_i(x_1(t_i^-)) - I_i(x_2(t_i^-))\| \leq d_i \sup_{t \in (t_i, t_{i+1}]} \|x_1(t) - x_2(t)\|,$$

et

$$\|I_i(x(t_i^-))\| \leq e_i \sup_{t \in (t_i, t_{i+1}]} \|x(t)\|.$$

Théorème 2.3.1 *Soit $x_0 \in X$. Si les conditions (H_1)–(H_5) sont vérifiées, alors le système de contrôle impulsif non-local d'ordre fractionnaire(2.1) admet un point fixe sur I à condition que $M\beta < 1$ et $M(1 + d_i) < 1$, $i = 1, \ldots, m$, et donc le système(2.1) a au moins une solution mild pour $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.*

Preuve : *On définit les opérateurs Q_1 et Q_2 sur Ω_r tels que :*

$$(Q_1 x)(t) = \begin{cases} S_q(t)(x_0 - g(x)), & t \in [0, t_1], \\ \\ S_q(t - t_i)[x(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)) + Dv(t_i^-)], & t \in (t_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

$$(Q_2 x)(t) = \begin{cases} \int_0^t T_q(t-s))(f(s, x(s), (Hx)(s)) + Bu(s))ds, & t \in [0, t_1], \\ \\ \int_{t_i}^t T_q(t-s))(f(s, x(s), (Hx)(s)) + Bu(s))ds, & t \in (t_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, m$. *Nous prenons les contrôles*

$$\begin{aligned} u &= B^* T_q^*(t_k - t)\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},1}^{t_k}) P_1^k(x(\cdot)), \\ v &= D^* S_q^*(t_k - t_{k-1})\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},2}^{t_k}) P_2^k(x(\cdot)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$P_1^k(x(\cdot)) = \begin{cases} x_1 - S_q(t_1)(x_0 - g(x)) \\ \qquad - \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s) f(s, x(s), (Hx)(s))ds, & k = 1, \\ \\ x_k - S_q(t_k - t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))] \\ \qquad - \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s) f(s, x(s), (Hx)(s))ds, & k = 2, \ldots, m+1, \end{cases}$$

$$P_2^k(x(\cdot)) = \begin{cases} x_k - S_q(t_k - t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))] \\ \qquad - \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s) f(s, x(s), (Hx)(s))ds, & k = 2, \ldots, m+1. \end{cases}$$

Pour toute $\lambda > 0$,nous montrons que $Q_1 + Q_2$ admet un point fixe sur Ω_r, qui est une solution du système(2.1).D'après (2.5), ainsi que (2.3) et (2.4), nous avons

$$\|u(t)\| \leq \frac{1}{\lambda} M\|B\|\|P_1(x(\cdot))\| \text{ and } \|v(t)\| \leq \frac{1}{\lambda} M\|D\|\|P_2(x(\cdot))\|. \tag{2.6}$$

En utilisant les hypothèses (H_1)–(H_5)*, on a*

$$\begin{aligned}\|P_1^1(x(\cdot))\| &\leq \|x_1\| + \|S_q(t_1)\|\|(x_0 - g(x))\| \\ &\quad + \int_0^{t_1} \|T_q(t_1 - s)\|\|f(s, x(s), (Hx)(s))\|ds \\ &\leq \|x_1\| + M(\|x_0\| + \|g(x)\|) \\ &\quad + Mt_1 \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right) \\ &\leq \|x_1\| + M\|x_0\| + M\beta\|x\| + M\|g(0)\| \\ &\quad + Mt_1 \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right)\end{aligned}$$

et , pour $k = 2, \ldots, m+1$,

$$\begin{aligned}\|P_1^k(x(\cdot))\| &\leq \|x_k\| + \|S_q(t_k - t_{k-1})\|[\|x(t_{k-1}^-)\| + \|I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))\|] \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|T_q(t_k - s)\|\|f(s, x(s), (Hx)(s))\|ds \\ &\leq \|x_k\| + M(\|x(t_{k-1}^-)\| + e_i\|x\|) + M(t_k - t_{k-1}) \\ &\quad \times \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right) \\ &\leq \|x_k\| + M(\|x(t_{k-1}^-)\| + re_i) + M(t_k - t_{k-1}) \\ &\quad \times \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|P_2^k(x(\cdot))\| &\leq \|x_k\| + M(\|x(t_{k-1}^-)\| + re_{k-1}) \\ &\quad + M(t_k - t_{k-1}) \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right),\end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, m+1$. *Pour toute* $x \in \Omega_r$*, on obtient*

$$\begin{aligned}&\|(Q_1x)(t) + (Q_2x)(t)\| \\ &\quad \leq M\left(\|x_0\| + \|g(x)\|\right) \\ &\qquad + Mt_1 \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|\right) \\ &\quad \leq M(\|x_0\| + \beta r + \|g(0)\|) \\ &\qquad + Mt_1(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|)\end{aligned}$$

pour $t \in [0, t_1]$,*et*

$$
\begin{aligned}
&\|(Q_1x)(t) + (Q_2x)(t)\| \\
&\qquad \le M\left(\|x(t_{k-1}^-)\| + e_{k-1}\|x\| + \|D\|\|v(t_{k-1}^-)\|\right) + M(t_k - t_{k-1}) \\
&\qquad\quad \times \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|\right) \\
&\qquad \le M(\|x(t_{k-1}^-)\| + e_{k-1}r + \|D\|\|v(t_{k-1}^-)\| + M(t_k - t_{k-1}) \\
&\qquad\quad \times \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|\right)
\end{aligned}
$$

pour $t \in (t_{k-1}, t_k]$. *Par les inégalités* (2.6), *nous pouvons trouver* $\xi_1, \xi_2 > 0$ *tel que*

$$
\|(Q_1x)(t) + (Q_2x)(t)\| \le \begin{cases} \xi_1, t \in [0, t_1], \\ \xi_2, t \in (t_{k-1}, t_k], k = 2, \ldots, m+1. \end{cases}
$$

Par conséquent, $Q_1x + Q_2x$ *est bornée.*
Maintenant , soit $x, y \in \Omega_r$. *Nous avons*

$$
\|(Q_1x)(t) - (Q_1y)(t)\| \le \|S_q(t)\|\|g(x) - g(y)\| \le M\beta\|x - y\|
$$

pour $t \in [0, t_1]$ *et*

$$
\begin{aligned}
&\|(Q_1x)(t) - (Q_1y)(t)\| \\
&\quad \le \|S_q(t - t_{k-1})\|[\|x(t_{k-1}^-) - y(t_{k-1}^-)\| + \|I_{k-1}(x(t_{k-1}^-)) - I_{k-1}(y(t_{k-1}^-))\|] \\
&\quad \le M\left[\|x(t_{k-1}^-) - y(t_{k-1}^-)\| + d_{k-1}\|x - y\|\right]
\end{aligned}
$$

pour $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = 2, \ldots, m+1$. *Puisque* $M\beta < 1$ *et* $M(1 + d_{k-1}) < 1$, $k = 2, \ldots, m+1$, *il s'ensuit que* Q_1 *est une application contractante. Soit* $\{x_n\}$ *est une suite dans* Ω_r *tel que* $x_n \to x \in \Omega_r$. *Puisque* f *et* g *sont continues, i.e., pour toute* $\epsilon > 0$, *il existe un entier positive* n_0, *tel que pour* $n > n_0$ $\|f(s, x_n(s), (Hx_n)(s)) - f(s, x(s), (Hx)(s))\| \le \epsilon$ *et* $\|g(x_n) - g(x)\| \le$

ϵ, la continuité de $I_i(x)$ sur $(t_i, t_{i+1}]$ donne $\|I_i(x_n(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))\| \leq \epsilon$, $i = 1, \ldots, m$. Maintenant, pour toute $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
&\|(Q_2x_n)(t) - (Q_2x)(t)\| \\
&\leq \int_0^{t_1} \|T_q(t-\tau)\| \|BB^*T_q^*(t_1-\tau)\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_0,1}^{t_1})\| \Big[\|S_q(t_1)(g(x_n) - g(x))\| \\
&\quad + \int_0^{t_1} \|T_q(t_1-s)\| f(s, x_n(s), (Hx_n)(s)) - f(s, x(s), (Hx)(s))\| ds\Big] d\tau \\
&\quad + \int_0^{t_1} \|T_q(t-s)\| \|f(s, x_n(s), (Hx_n)(s)) - f(s, x(s), (Hx)(s))\| ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{\lambda} M^3 \|B\|^2 t_1(2t_1 + 1).
\end{aligned}$$

De plus, pour toute $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$, on a

$$\begin{aligned}
&\|(Q_2x_n)(t) - (Q_2x)(t)\| \\
&\leq \int_{t_i}^{t} \|T_q(t-\tau)\| \|BB^*T_q^*(t_{i+1}-\tau)\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_i,1}^{t_{i+1}})\| \\
&\quad \times \Big[\|S_q(t_{i+1}-t_i)[x_n(t_i^-) - x(t_i^-) + I_i(x_n(t_i^-)) - I_i(x(t_i^-))]\| \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|T_q(t_{i+1}-s)\| f(s, x_n(s), (Hx_n)(s)) - f(s, x(s), (Hx)(s))\| ds)\Big] d\tau \\
&\quad + \int_{t_i}^{t} \|T_q(t-s)\| \|(f(s, x_n(s), (Hx_n)(s)) - f(s, x(s), (Hx)(s))\| ds \\
&\leq \frac{2\epsilon}{\lambda} M^3 \|B\|^2 (t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i + 1).
\end{aligned}$$

Donc, Q_2 est continue. En suite, nous prouvons la compacité de Q_2. Pour cela, nous montrons d'abord que l'ensemble $\{(Q_2x)(t) : x \in \Omega_r\}$ est relativement compact dans $PC(I, X)$. Par les hypothèses de notre théorème, nous avons

$$\|(Q_2x)(t)\| \leq Mt_1(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|),$$

pour $t \in [0, t_1]$, *et*

$$\begin{aligned}\|(Q_2x)(t)\| &\leq M(t_k - t_{k-1}) \\ &\quad \times \left(\|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_k^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + \|B\|\|u\|\right),\end{aligned}$$

pour $t \in (t_{k-1}, t_k]$, *ce qui donne que* $\{(Q_2x)(t) : x \in \Omega_r\}$ *est uniformément bornée. Nous montrons maintenant que* $Q_2(\Omega_r)$ *est équicontinue.*
Les fonctions $\{(Q_2x)(t) : x \in \Omega_r\}$ *sont equicontinues en* $t = 0$. *Pour toute* $x \in \Omega_r$, *si* $0 < r_1 < r_2 \leq t_1$, *alors*

$$\begin{aligned}&\|(Q_2x)(r_2) - (Q_2x)(r_1)\| \\ &\quad\leq \int_0^{r_1} \|T_q(r_2 - s) - T_q(r_1 - s)\|[\|Bu(s)\| + \|f(s, x(s), (Hx)(s))\|]ds \\ &\qquad + \int_{r_1}^{r_2} \|T_q(r_2 - s)\|[\|Bu(s)\| + \|f(s, x(s), (Hx)(s))\|]ds \\ &\quad\leq [r_1\|T_q(r_2 - s) - T_q(r_1 - s)\| + M(r_2 - r_1)] \\ &\qquad \times \left(\|B\|\|u\| + \|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned}$$

De même, si $t_i < r_1 < r_2 \leq t_{i+1}$, *alors*

$$\begin{aligned}&\|(Q_2x)(r_2) - (Q_2x)(r_1)\| \\ &\quad\leq \int_{t_i}^{r_1} \|T_q(r_2 - s) - T_q(r_1 - s)\|[\|Bu(s)\| + \|f(s, x(s), (Hx)(s))\|]ds \\ &\qquad + \int_{r_1}^{r_2} \|T_q(r_2 - s)\|[\|Bu(s)\| + \|f(s, x(s), (Hx)(s))\|]ds \\ &\quad\leq [(r_1 - t_i)\|T_q(r_2 - s) - T_q(r_1 - s)\| + M(r_2 - r_1)] \\ &\qquad \times \left(\|B\|\|u\| + \|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_{i+1}^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned}$$

De (H_1), *il résulte la continuité de l'opérateur* $T_q(\cdot)$ *dans la topologie uniforme. Ainsi, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand* $r_2 \to$

r_1. Donc, $\{(Q_2x)(t) : x \in \Omega_r\}$ est une famille des fonctions équicontinues. Selon la théorie de la dimension infinie du théorème d'Ascoli-Arzela, il reste à prouver que, pour tout $t \in [0,b]\backslash\{t_1,\ldots,t_m\}$, l'ensemble $V(t) := \{(Q_2x)(t) : x \in \Omega_r\}$ est relativement compact dans $PC(I,X)$. Dans le cas $t = 0$ est trivial : $V(0) = \{(Q_2x)(0) : x(\cdot) \in \Omega_r\}$ est compact dans $PC(I,X)$. Soit $t \in (0,t_1]$ un nombre réel constant et h un nombre réel donné satisfaisant $0 < h < t_1$. Définissons $V_h(t) = \left\{(Q_2^hx)(t) : x \in \Omega_r\right\}$,

$$\begin{aligned}
(Q_2^hx)(t) &= \int_0^{t-h} T_q(t-s)Bu(s)ds + \int_0^{t-h} T_q(t-s)f(s,x(s),(Hx)(s))ds \\
&= T_q(h)\int_0^{t-h} T_q(t-s-h)Bu(s)ds \\
&\quad + T_q(h)\int_0^{t-h} T_q(t-s-h)f(s,x(s),(Hx)(s))ds \\
&= T_q(h)y_1(t,h).
\end{aligned}$$

Nous utilisons les mêmes arguments, nous fixons $t \in (t_i,t_{i+1}]$, et soit h un nombre réel donné satisfaisant $t_i < h < t_{i+1}$, nous définissons $V_h(t) = \left\{(Q_2^hx)(t) : x \in \Omega_r\right\}$

$$\begin{aligned}
(Q_2^hx)(t) &= \int_{t_i}^{t-h} T_q(t-s)Bu(s)ds + \int_{t_i}^{t-h} T_q(t-s)f(s,x(s),(Hx)(s))ds \\
&= T_q(h)\int_{t_i}^{t-h} T_q(t-s-h)Bu(s)ds \\
&+ T_q(h)\int_{t_i}^{t-h} T_q(t-s-h)f(s,x(s),(Hx)(s))ds \\
&= T_q(h)y_2(t,h).
\end{aligned}$$

La compacité de $T_q(h)$ dans $PC(I,X)$, ainsi que le caractère borné de $y_1(t,h)$ et $y_2(t,h)$ sur Ω_r, donne la compacité relative de l'ensemble $V_h(t)$ dans $PC(I,X)$.

De plus, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
&\|(Q_2x)(t) - (Q_2^h x)(t)\| \\
&\qquad \leq \int_{t-h}^{t} T_q(t-s)Bu(s)ds + \int_{t-h}^{t} T_q(t-s)f(s, x(s), (Hx)(s))ds \\
&\qquad \leq hM\left(\|B\|\|u\| + \|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_1^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

De même, pour tous $t \in (t_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}
&\|(Q_2x)(t) - (Q_2^h x)(t)\| \\
&\qquad \leq \int_{t-h}^{t} T_q(t-s)Bu(s)ds + \int_{t-h}^{t} T_q(t-s)f(s, x(s), (Hx)(s))ds \\
&\qquad \leq hM\left(\|B\|\|u\| + \|\mu_1\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + r\|\mu_2\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)} + K_{i+1}^* r\|\mu_3\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

On choisit h assez petit. Cela implique qu'il existe des ensembles relativement compacts, arbitrairement proches de l'ensemble $V(t)$ pour chaque $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$, et donc $V(t)$, $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$, est relativement compact dans $PC(I, X)$.Comme il est compact en $t = 0$, nous avons la compacité relative de $V(t)$ en $PC(I, X)$ pour tous $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$. Par conséquent, par le théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que Q_2 est compact. D'après le lemme 2.2.2, nous nous assurons que le système de contrôle (2.1) a au moins une solution sur $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.

2.4 La contrôlabilité approchée

Dans cette section, à l'aide du théorème d'existence, nous montrons un résultat de contrôlabilité approchée pour le système (2.1).

Théorème 2.4.1 *Si (H_1)–(H_5) sont satisfaites et $\lambda\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}) \to 0$ lorsque $\lambda \to 0^+$, $i = 1, 2$,alors le système de contrôle fractionnaire impulsif non-local est approximativement contrôlable pour $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.*

Preuve : *Selon le théorème 2.3.1, $Q_1^\lambda + Q_2^\lambda$ admet un point fixe dans Ω_r pour toute $\lambda > 0$. Cela implique qu'il existe $\overline{x}^\lambda \in (Q_1^\lambda + Q_2^\lambda)(\overline{x}^\lambda)$ tel que*

$$\overline{x}^\lambda(t) = \begin{cases} S_q(t)(x_0 - \overline{g}^\lambda(\overline{x}^\lambda)) \\ \qquad + \int_0^t T_q(t-s)[\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s)) + B\overline{u}^\lambda(s)]ds, \ t \in [0, t_1], \\ S_q(t - t_{k-1})[\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^\lambda(\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-)) + D\overline{v}^\lambda(t_{k-1}^-)] \\ \qquad + \int_{t_{k-1}}^t T_q(t-s)[\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s)) + B\overline{u}^\lambda(s)]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

où pour $t \in [0, t_1]$ nous avons

$$\overline{u}^\lambda = B^* T_q^*(t_1 - t)\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{0,1}^{t_1})\Big[x_1 - S_q(t_1)(x_0 - \overline{g}^\lambda(\overline{x}^\lambda)) - \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s)\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s))ds\Big]$$

pour $k = 2, \ldots, m+1$

$$\overline{u}^\lambda = B^* T_q^*(t_k - t)\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},1}^{t_k})\Big[x_k - S_q(t_k - t_{k-1})[\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^\lambda(\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-))] - \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s))ds\Big]$$

et

$$\overline{v}^\lambda = D^* S_q^*(t_k - t_{k-1})\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},2}^{t_k}) \times \Big[x_k - S_q(t_k - t_{k-1})[\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^\lambda(\overline{x}^\lambda(t_{k-1}^-))] - \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s))ds\Big].$$

En plus de ce qui précède,

$$\overline{x}^\lambda(t_1) = S_q(t_1)(x_0 - \overline{g}^\lambda(\overline{x}^\lambda)) + \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s)[\overline{f}^\lambda(s, \overline{x}^\lambda(s), (H\overline{x}^\lambda)(s)) + B\overline{u}^\lambda(s)]ds,$$

$$\overline{x}^{\lambda}(t_k) = S_q(t_k - t_{k-1})[\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-)) + D\overline{v}^{\lambda}(t_{k-1}^-)]$$
$$+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)[\overline{f}^{\lambda}(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s)) + B\overline{u}^{\lambda}(s)]ds,$$

$k = 2, \dots, m+1,$ *avec*

$$x_{t_1} - \overline{x}^{\lambda}(t_1) = x_1 - \Psi_{0,1}^{t_1}\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{0,1}^{t_1})\Big\{x_1 - S_q(t_1)(x_0 - \overline{g}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}))$$
$$- \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s)\overline{f}^{\lambda}(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s))ds\Big\}$$
$$- S_q(t_1)(x_0 - \overline{g}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda})) - \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s)\overline{f}^{\lambda}(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s))ds,$$

$$x_{t_k} - \overline{x}^{\lambda}(t_k) = x_k - \Psi_{k-1,2}^{t_k}\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{k-1,2}^{t_k})$$
$$\times \left\{x_k - S_q(t_k - t_{k-1})\left[\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-))\right]\right.$$
$$\left. - \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^{\lambda}\left(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s)\right) ds\right\}$$
$$- S_q(t_k - t_{k-1})\left[\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-))\right]$$
$$- \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^{\lambda}\left(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s)\right) ds$$
$$- \Psi_{k-1,1}^{t_k}\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{k-1,1}^{t_k})\Big\{x_k - S_q(t_k - t_{k-1})\left[\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-))\right]$$
$$- \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^{\lambda}\left(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s)\right) ds\Big\}, \quad k = 2, \dots, m+1.$$

d'aprés (2.4) *on a* $I - \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}\mathcal{R}\left(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}\right) = \lambda\mathcal{R}\left(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}\right)$, $i = 1, 2,$ *et*

$$x_{t_1} - \overline{x}^{\lambda}(t_1) = \lambda\mathcal{R}\left(\lambda, \Psi_{0,1}^{t_1}\right)\left\{x_1 - S_q(t_1)(x_0 - \overline{g}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}))\right.$$
$$\left. - \int_0^{t_1} T_q(t_1 - s)\overline{f}^{\lambda}(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s))ds\right\}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x_{t_k} - \overline{x}^{\lambda}(t_k) &= \lambda \left[\mathcal{R}\left(\lambda, \Psi_{k-1,1}^{t_k}\right) + \mathcal{R}\left(\lambda, \Psi_{k-1,2}^{t_k}\right)\right] \\ &\times \Big\{ x_k - S_q(t_k - t_{k-1}) \left[\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-) + \overline{I_{k-1}}^{\lambda}(\overline{x}^{\lambda}(t_{k-1}^-))\right] \\ &- \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_q(t_k - s)\overline{f}^{\lambda}(s, \overline{x}^{\lambda}(s), (H\overline{x}^{\lambda})(s))]ds \Big\}, \ k = 2, \ldots, m+1. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Puisque la compacité de $S_q(t)_{t>0}$ et $T_q(t)_{t>0}$ est vérifiée, et que $\overline{f}^{\lambda}$, $\overline{g}^{\lambda}$ et $\overline{I_{k-1}}^{\lambda}$ sont également bornés, nous pouvons utiliser pour (2.7)-(2.8) le fait que $\lambda\mathcal{R}(\lambda, \Psi_{t_{k-1},i}^{t_k}) \to 0$ lorsque $\lambda \to 0^+$, $i = 1, 2$. Cela donne $\|x_{t_k} - \overline{x}^{\lambda}(t_k)\|_{\alpha} \to 0$ lorsque $\lambda \to 0^+$, $i = 1, 2$.Par conséquent, le système de contrôle impulsif non-local fractionnaire(2.1) est approximativement contrôlable pour $t \in [0, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.

2.5 Optimalité

Soit Yun espace de Banach réflexif séparable et $w_f(Y)$ représente une classe de sous-ensembles non vides, fermés et convexes de Y. La fonction $w : I \longrightarrow w_f(Y)$ est mesurable $w(\cdot) \subset E$, où E est un ensemble borné de Y. Nous donnons l'ensemble de contrôle admissible suivant :

$$U_{ad} = \left\{(u, v) \in L^1(E) \times L^1(E) | u(t), v(t) \in w(t) \ a.e.\right\} \neq \emptyset.$$

Considérons le système de contrôle fractionnaire impulsif non-local suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), (Hx)(t)) + \mathcal{B}u(t), t \in (0, b] \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, \\ x(0) + g(x) = x_0 \in X, \\ \triangle x(t_i) = I_i(x(t_i^-)) + \mathcal{D}v(t_i^-), i = 1, 2, \ldots, m, \quad (u, v) \in U_{ad}, \end{cases} \quad (2.9)$$

où $\mathcal{B}, \mathcal{D} \in L^{\infty}(I, L(Y, X))$. Il est clair que $\mathcal{B}u, \mathcal{D}v \in L^1(I, X)$ pour toute $(u, v) \in U_{ad}$. Soit $x^{u,v}$ une solution mild du système (2.9) correspondant aux contrôles $(u, v) \in U_{ad}$.

Nous considérons le problème de Bolza (BP) :
trouver un triplet optimal $(x^0, u^0, v^0) \in PC(I, X) \times U_{ad}$ *tels que* $\mathcal{J}(x^0, u^0, v^0) \leq \mathcal{J}(x^{u,v}, u, v)$, *pour toute* $(u, v) \in U_{ad}$*, où*

$$\mathcal{J}(x^{u,v}, u, v) = \sum_{i=1}^{m+1} \left[\Phi(x^{u,v}(t_i)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{L}(t, x^{u,v}(t), u(t), v(t)) dt \right],$$

$i = 1, \ldots, m+1$. *Les hypothèses supplémentaires suivantes sont nécessaires :*

- *(H_6) la fonction* $\mathcal{L} : I \times X \times Y^2 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est Borel mesurable*
- *(H_7)* $\mathcal{L}(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ *est séquentiellement semi-continue inférieure sur* $X \times Y^2$*, i.e., sur* I.
- *(H_8)* $\mathcal{L}(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ *est convexe sur* Y^2 *pour chaque* $x \in X$ *et pour* $t \in I$.
- *(H_9) Il existe une fonction non négative* $\varphi \in L^\infty(I, \mathbb{R})$ *et* $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ *telle que* $\mathcal{L}(t, x, u, v) \geq \varphi(t) + c_1\|x\| + c_2\|u\|_Y^p + c_3\|v\|_Y^p$.
- *(H_{10}) la fonction* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *est continue et non négative.*

Théorème 2.5.1 *Si (H_6)–(H_{10}) sont vérifiées avec les hypothèses du Théorème 2.3.1, alors le problème de Bolza (BP) admet au moins un triplet optimal sur* $PC \times U_{ad}$.

Preuve : *Supposons que* $\inf \{\mathcal{J}(x^{u,v}, u, v) | (u, v) \in U_{ad}\} = \delta < +\infty$. *De ($H_6$)-($H_{10}$),on a*

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(x^{u,v}, u, v) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m+1} \left[\Phi(x^{u,v}(t_i)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\varphi(t) + c_1\|x(t)\| + c_2\|u(t)\|_Y^p + c_3\|v(t)\|_Y^p\} \, dt \right] \\ &\geq -\eta > -\infty, \ i = 1, \ldots, m+1. \end{aligned}$$

Ici η *est une constante positive , i.e.,* $\delta \geq -\eta > -\infty$. *Par la définition d'infimum, il existe une suite de minimisation possible des triplets* $\{(x^n, u^n, v^n)\} \subset$

$\mathcal{A}_{ad}$,où $\mathcal{A}_{ad} \equiv \{(x,u,v)|\ x$ est une solution mild du système (2.9) correspondant à $(u,v) \in U_{ad}\}$, tel que $\mathcal{J}(x^n,u^n,v^n) \to \delta$ pour $m \to +\infty$. Pour $\{(u^n,v^n)\} \subseteq U_{ad}$ et $\{u^n,v^n\}$ est borné dans $L^1(I,Y)$, alors il existe une sous-suite, toujours désignée par $\{(u^n,v^n)\}$, et $u^0,v^0 \in L^1(I,Y)$, tel que $(u^n,v^n) \overset{weakly}{\longrightarrow} (u^0,v^0)$ dans $L^1(I,Y)\times L^1(I,Y)$. Puisque l'ensemble de contrôle admissible U_{ad} est convexe et fermé, par le lemme de Marzur, nous avons $(u^0,v^0) \in U_{ad}$. Supposons que x^n est une solution mild de système (2.9), correspondant à u^n et v^n, qui satisfait

$$x^n(t) = S_q(t)(x_0 - g(x^n)) + \int_0^t T_q(t-s)(f(s,x^n(s),(Hx^n)(s)) + \mathcal{B}u^n(s))ds,$$

pour $t \in [0,t_1]$, et

$$x^n(t) = S_q(t-t_i)[x^n(t_i^-) + I_i(x^n(t_i^-)) + \mathcal{D}v^n(t_i^-)] + \int_{t_i}^t T_q(t-s)[f(s,x^n(s),(Hx^n)(s)) + \mathcal{B}u^n(s)]ds$$

pour $t \in (t_i,t_{i+1}]$, $i = 1,\dots,m$. De (H_2), la fonction non-lineaire f est bornnée et continue, de plus, il existe une sous-suite (avec la même notation) $\{f(s,x^n,(Hx^n)(s))\}$ et $f(s,x^0,(Hx^0)(s)) \in L^1(I,X)$ telle que $f(s,x^n,(Hx^n)(s))$ converge faiblement vers $f(s,x^0,(Hx^0)(s))$. En outre, les mêmes arguments (H_3) et (H_5) donnent d'autres convergences faibles de $g(x^n)$ et $I_i(x^n)$ à $g(x^0)$ et $I_i(x^0)$, respectivement. Notons

$$(P_1x)(t) = S_q(t)g(x) + \int_0^t T_q(t-s)(f(s,x(s),(Hx)(s)) + \mathcal{B}u(s))ds, \quad t \in [0,t_1],$$

$$(P_2x)(t) = S_q(t-t_i)[x(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)) + \mathcal{D}v(t_i^-)] + \int_{t_i}^t T_q(t-s)[f(s,x(s),(Hx)(s)) + \mathcal{B}u(s)]ds,\ t \in (t_i,\ t_{i+1}],\ i = 1,\dots,m.$$

Évidemment, $(P_1x)(t)$ *et* $(P_2x)(t)$ *sont des opérateurs fortement continus. Ainsi,* $(P_1x^n)(t)$ *et* $(P_2x^n)(t)$ *convergent fortement vers* $(P_1x)(t)$ *et* $(P_2x)(t)$*, respectivement. Ensuite, nous considérons le système*

$$x^0(t) = S_q(t)(x_0 - g(x^0)) + \int_0^t T_q(t-s)(f(s, x^0(s), (Hx^0)(s)) + \mathcal{B}u^0(s))ds,$$

$t \in [0, t_1]$*, et*

$$\begin{aligned} x^0(t) = S_q(t-t_i)[x^0(t_i^-) + I_i(x^0(t_i^-)) + \mathcal{D}v^0(t_i^-)] \\ + \int_{t_i}^t T_q(t-s)[f(s, x^0(s), (Hx^0)(s)) + \mathcal{B}u^0(s)]ds, \end{aligned}$$

$t \in (t_i, t_{i+1}]$*,* $i = 1, \ldots, m$*. Il n'est pas difficile de vérifier que* $\|x^n(t) - x^0(t)\| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$*. Par conséquent, nous pouvons déduire que* x^n *converge fortement vers* x^0 *dans* $PC(I, X)$ *lorsque* $n \to \infty$*. D'aprés les hypothèses (*H_6*)–(*H_{10}*) et le théorème de Balder, on a*

$$\begin{aligned} \eta &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} \left[\Phi(x^n(t_i)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{L}(t, x^n(t), u^n(t), v^n(t))dt \right] \\ &\geq \sum_{i=1}^{m+1} \left[\Phi(x^0(t_i)) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{L}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t))dt \right] \\ &= \mathcal{J}(x^0, u^0, v^0) \geq \eta, \ i = 1, \ldots, m+1, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{J}$ *atteint son minimum en* $(x^0, u^0, v^0) \in PC(I, X) \times U_{ad}$*.*

2.6 Exemple

Considérant le système de contrôle dynamique impulsif non linéaire non local d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} z(t,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} z(t,y) + \dfrac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}} cos[z(t,y) + \int_0^1 z(s,y)ds + \int_0^t h(t,y)z(s,y)ds] + \\ \qquad \int_0^1 K_1(t,s)u(s,y)ds \qquad y \in [0,\pi], t \in I = [0,1]/\{t_1, t_2, \dots, t_m\}\ u \in U_{ad} \\ z(t,0) = z(t,1) = 0 \qquad t \in I, \\ z(0,y) + \sum_{j=1}^n C_j z(t_j, y) = z_0(y) \qquad 0 \le y \le \pi \\ I_{t_k}(z(t_k^+, y)) = z(t_k^-, y) + \int_0^1 K_2(t_k^-, s)v(s,y)ds \qquad k = 1, \dots, m \qquad v \in U_{ad} \end{cases} \tag{2.10}$$

Avec la fontion coût suivante

$$J(z,u,v) = \sum_{k=1}^{m+1} \left[\begin{array}{l} + \int_0^\pi |z^{u,v}(t_k,y)|^2 dy + \int_{k-1}^k \int_0^\pi |z^{u,v}(t,y)|^2 dydt + \int_{k-1}^k \int_0^\pi |u(t,y)|^2 dydt \\ + \int_{k-1}^k \int_0^\pi |v(t,y)|^2 dydt \end{array} \right] \tag{2.11}$$

Où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$, $k = 1, 2, \dots, m$

$h, K_i \in C(I \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^+)$, $i = 1,2$, $u, v : I \times [0,\pi] \longrightarrow [0,\pi]$ *sont des fonctions de contrôle continues*

On prend $X = U = L^2[0,\pi]$,

$f(t, z(t,y), (Hz)(t,y)) = \dfrac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}} cos[z(t,y) + \int_0^1 z(s,y)ds + \int_0^t h(t,y)z(s,y)ds]$,

$\|f(t, x(t,y), (Hx)(t,y))\| \le \dfrac{e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \varphi(t)$, $\varphi(t) \in L^\infty(I, \mathbb{R}^+)$, *alors* H_2 *est vérifiée.*

$(Hz)(t,y) = \int_0^t h(t,y)z(s,y)ds$, $\|(Hz)(t,y)\| \le \|z\| \int_0^t h(t,y)ds$ *alors* H_4 *est vérifiée,* $g(z(t,y)) = \sum_{j=1}^n C_j z(t_j, y)$ *est totalement continue et* $\|g(z_1(t,y)) - g(z_2(t,y))\| \le nc\|z_1(t,y) - z_2(t,y)\|$, *alors* H_3 *est vérifiée,* $Bu(t,y) = \int_0^1 K_1(t,s)u(s,y)ds$, $Dv(t,y) = \int_0^1 K_2(t,s)v(s,y)ds$

On définit $A : X \longrightarrow X$ *par* $Aw = w^{"}$ *avec le domaine*

$D(A) = \Big\{ w \in X | w^{'}, w^{"} \textit{sont absolument continues}, \; w^{"} \in X, w(0) = w(\pi) = 0 \Big\}$

dense dans l'espace de Banach X*, qui est indépendant de* t*, alors* A *s'écrit comme suit* $Aw = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 < w, w_n > w_n$, $w \in D(A)$ *où* $< .,. >$ *est le produit interieur dans* $L^2[0,\pi]$ *c'est bien que* A *engendre un semi-groupe fortement continu* $\{S(t), t \geqslant 0\}$ *sur* X*, d'où* A *est compact, analytique et auto-adjoint et l'hypotèse* (H_1) *est satisfaite.*

De plus A *a un spectre discret avec des valeurs propres* $-n^2, n \in \mathbb{N}$ *et les fonctions propres sont données par* $w_n(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin(ny), 0 \leqslant y \leqslant \pi$ *avec* $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ *une base orthonormale de* X *et*

$$S(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} < w, w_n > w_n,$$

pour tout $t \geqslant 0$ *et* $w \in X$.

En particulier, $S(\cdot)$ *est un semi-groupe uniformiment stable et* $\|S(t)\|_{L^2[0,\pi]} \leqslant e^{-t}$*. Aussi, pour chaque* $w \in X, A^{\frac{1}{2}} w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < w, w_n > w_n$ *avec* $\|A^{\frac{1}{2}}\|_{L^2[0,\pi]} = 1$ *et l'opérateur* $A^{\frac{1}{2}}$ *est donné dans l'éspace* $D(A^{\frac{1}{2}}) = X_{\frac{1}{2}} := \{w \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n < w, w_n > w_n \in X\}$ *par* $A^{\frac{1}{2}} w = \sum_{n=1}^{\infty} n < w, w_n > w_n$.

L'endsemble de contrôles admissibles $U_{ab} = u \in U | \|u\|_{L^2([0,1]),U} \leq 1$ *Trouver les contrôles* $u(t,y), v(t,y)$ *qui réduisent au minimum la fonctionnelle* (2.11) *On peut transformer le systéme*(2.10) *à un système de type* (2.1) *avec la fonction de coût*

$$J(x,u,v) = \|z(t_k)\|^2 + \sum_{k=1}^{m+1} \Big(\int_{k-1}^{k} (\|z(t)\|^2 + \|u(t)\|_U^2 + \|v(t)\|_U^2)(t) \Big).$$

Nous pouvons vérifier que toutes les hypothéses $H_1 - H_{10}$ *sont vérifiées, d'où le théorème* (2.5.1) *et théorème* (2.3.1) *sont correctement appliqués pour assurer* *que le problème* (2.10) *admet une solution et au moins une paire optimale.*

Chapitre 3

Analyse et contrôle optimal d'une équation différentielle semi-linéaire fractionnaire de φ-Hilfer impliquant des conditions impulsives non locales

L'objectif de ce chapitre est de considérer une nouvelle classe d'équation différentielle fractionnaire de φ-Hilfer avec impulsions et conditions non-locales. En utilisant le calcul fractionnaire, la théorie des semi-groupes et à l'aide du théorème du point fixe, l'existence et l'unicité des solutions milds sont obtenue pour le système fractionnaire proposé. De plus, nous discutons l'existence de contrôle optimal pour le système de contrôle fractionnaire de φ-Hilfer.

3.1 Position du problème

Nous sommes concernés par une équation différentielle fractionnaire de φ-hilfer avec impulsions et conditions non locales suivantes :

$$\begin{cases} {}^{H}\mathrm{D}_{t_\gamma{}^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi} z(t) = \mathcal{A}z(t) + \Delta(t, z(t)),\ t \in (0, b] - \{t_1, t_2, \ldots, t_{\mathcal{H}}\}, \\ I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} z(t_\gamma^+) = z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-)),\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}, \\ I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} [z(t)]_{t=0} + \mathcal{G}(z) = z_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{H}\mathrm{D}_{t_\gamma{}^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi}$ désigne la dérivée fractionnaire de φ-Hilfer d'ordre $1/2 < \sigma_1 < 1,\ 0 < \sigma_2 < 1$ et $z(\cdot)$ prend des valeurs dans un espace de Hilbert E et $\mathcal{J}_0 = [0, b],\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{\mathcal{H}} < t_{\mathcal{H}+1} = b$. $\mathcal{A}$ est le générateur de C_0-semi groupe $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ dans E. $z(t_\gamma^+)$ et $z(t_\gamma^-)$ sont les limites droites et gauches de z au point t_γ, respectivement. $\mathcal{I}_\gamma : E \to E$ sont des fonctions impulsives qui caractérisent le saut de z au points t_γ. Les fonctions $\Delta : \mathcal{J}_0 \times E \to E$, $\mathcal{G} : C(\mathcal{J}_0, E) \to E$ sont des fonctions appropriées qui seront précisées ultérieurement.
Soit $\mathcal{J}_1 = [a, b]$ et $\varphi \in C^m(\mathcal{J}_1, \mathbb{R})$ une fonction croissante telle que : $\varphi'(t) \neq 0,\ \forall\ t\ \in\ \mathcal{J}_1$.

Définition 3.1.1 *L'intégrale fractionnaire au sens de φ-Riemann d'ordre $\sigma_1 > 0$ de la fonction $\mathcal{R}$ est donné par*

$$I_{a^+}^{\sigma_1;\varphi} \mathcal{R}(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_1)} \int_a^t (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1} \mathcal{R}(s) \varphi'(s) ds.$$

Définition 3.1.2 *La dérivée fractionnaire au sens de φ-Riemann de la fonction $\mathcal{R}$ d'ordre σ_1 $(m - 1 < \sigma_1 < m,\ m \in \mathbb{N})$, est définie par*

$$\mathrm{D}_{a^+}^{\sigma_1;\varphi} \mathcal{R}(t) = \left(\frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^m I_{a^+}^{m-\sigma_1;\varphi} \mathcal{R}(t) = \frac{\left(\frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^m}{\Gamma(m-\sigma_1)} \int_a^t (\varphi(t) - \varphi(s))^{m-\sigma_1-1} \mathcal{R}(s) ds,$$

tel que $m = [\sigma_1] + 1$.

Définition 3.1.3 *La dérivée fractionnaire au sens de* φ*-Hilfer de la fonction* $\mathcal{R}$ *d'ordre* σ_1 $(m-1 < \sigma_1 < m,\ m \in \mathbb{N})$ *et de type* $0 \leq \sigma_2 \leq 1$*, est définie par :*

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi}\mathcal{R}(t) = I_{a^+}^{\sigma_2(m-\sigma_1);\varphi}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m I_{a+}^{(1-\sigma_2)(m-\sigma_1);\varphi}\mathcal{R}(t). $$

La dérivée fractionnaire au sens de φ*-Hilfer peut s'écrire comme suit :*

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi}\mathcal{R}(t) = I_{a^+}^{\delta-\sigma_1;\varphi}\,\mathrm{D}_{a^+}^{\delta;\varphi}\mathcal{R}(t), $$

avec $\delta = (\sigma_1 + \sigma_2(m-\sigma_1))$.

Lemme 3.1.1 *Si* $\mathcal{R} \in \mathcal{C}^m[a,b]$, $m-1 < \sigma_1 < m$ *et* $0 \leq \sigma_2 \leq 1$*, alors*

$$ I_{a+}^{\sigma_1;\varphi}\,{}^{H}\mathrm{D}_{a^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi}\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{(\varphi(t)-\varphi(a))^{\delta-k}}{\Gamma(\delta-k+1)}\mathcal{R}_{\varphi}^{[m-k]}I_{a+}^{(1-\sigma_2)(m-\sigma_1);\varphi}\mathcal{R}(a). $$

Lemme 3.1.2 *Soit* $\sigma_1 > 0$ *et* $\sigma_2 > 0$*, alors*

$$ I_{a^+}^{\sigma_1,\varphi}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\sigma_2-1} = \frac{\Gamma(\sigma_2)}{\Gamma(\sigma_2+\sigma_1)}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\sigma_2+\sigma_1-1}. $$

Définition 3.1.4 *Soit* $z, \varphi : [c,\infty) \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions telles que* $\varphi(t)$ *est continu et* $\varphi'(t) > 0$ *sur* $[0,\infty)$*. Alors la transformée de Laplace généralisée de la fonction* $z(t)$ *est donné par :*

$$ \mathcal{L}_{\varphi}\{z(t)\}(s) = \int_c^{\infty} e^{-s(\varphi(t)-\varphi(a))}z(t)\varphi'(t)dt, \quad \textit{pour tout } s. $$

Pour plus de détails sur la dérivée fractionnaire de φ- Hilfer et ses propriétés, voir [66, 36, 70].

Considérons l'espace pondéré (voir [36]) défini par :

$$\mathcal{C}_{1-\rho;\varphi}(\mathcal{J}_0, E) = \{z : [0,b] \to E : \ (\varphi(t) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho} z(t) \in C(\mathcal{J}_0, E)\}.$$

Considérons l'espace des fonctions continues par morceaux défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{PC}_{1-\rho;\varphi}(\mathcal{J}_0, E) &= \Big\{ z : [0,b] \to E : \ z \in \mathcal{C}_{1-\rho;\varphi}((t_\gamma, t_{\gamma+1}], E), \ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}, \\ & \quad I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\rho);\varphi} z(t_\gamma^+) \, et \, I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\rho);\varphi} z(t_\gamma^-) = I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\rho);\varphi} z(t_\gamma) \text{ existe pour} \\ & \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}, \ \rho = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 \Big\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{PC}(E) = \mathcal{PC}_{1-\rho;\varphi}(\mathcal{J}_0, E)$ *est un espace de Banach avec la norme*

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \max_{\gamma=1,2,\ldots,\mathcal{H}} \left\{ \sup_{t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]} \left\| [\varphi(t) - \varphi(t_\gamma)]^{1-\rho} z(t) \right\| \right\}.$$

3.2 Représentation de la solution mild

Lemme 3.2.1 *Considérons le système différentiel fractionnaire linéaire de φ-Hilfer :*

$$\begin{cases} {}^H\mathrm{D}_{0^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi} z(t) = \mathcal{A}z(t) + \Delta(t), \ t \in (0, b], \\ I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} [z(t)]_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution mild définie par :

$$z(t) = \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t, 0) z_0 + \int_0^t (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1} \mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t, s) \Delta(s) \varphi'(s) ds, \tag{3.3}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varphi^{\sigma_1}(t, s) z &= \int_0^\infty \phi_{\sigma_1}(\theta) \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1} \theta) z d\theta, \\ \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t, s) z &= I_{a^+}^{(1-\sigma_1)(\sigma_2 - 1);\varphi} \mathcal{P}_\varphi^{\sigma_1}(t, s) z, \\ \mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t, s) z &= \sigma_1 \int_0^\infty \theta \phi_{\sigma_1}(\theta) \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1} \theta) z d\theta, \ 0 \le s \le t \le b, \end{aligned}$$

avec

$$\phi_{\sigma_1}(\theta) \geq 0 \ \ for \ \ \theta \geq 0, \qquad \int_0^\infty \phi_{\sigma_1}(\theta)d\theta = 1, \ \ et \ \ \int_0^\infty \theta\phi_{\sigma_1}(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma_1)}.$$

Preuve : On réécrivons le problème 3.2 dans l'équation intégrale équivalente

$$z(t) = \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}}{\Gamma(\sigma_2(1-\sigma_1)+\sigma_1)}z_0 + \frac{1}{\Gamma(\sigma_1)}\int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}[\mathcal{A}z(s)+\Delta(s)]\varphi'(s)ds, \tag{3.4}$$

à condition que l'intégrale dans Eq (3.4) existe. Soit $\beta > 0$, l'application de la transformée de Laplace généralisée se donne

$$Z(\beta) = \frac{1}{\beta^{\sigma_2(1-\sigma_1)+\sigma_1}}z_0 + \frac{1}{\beta^{\sigma_1}}\left(\mathcal{A}Z(\beta) + \hat{\Delta}(\beta)\right),$$

où

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_0^\infty e^{-\beta(\varphi(\mu)-\varphi(0))}z(\mu)\varphi'(\mu)d\mu, \\ \hat{\Delta}(\beta) &= \int_0^\infty e^{-\beta(\varphi(\mu)-\varphi(0))}\Delta(\mu)\varphi'(\mu)d\mu. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \beta^{\sigma_2(\sigma_1-1)}(\beta^{\sigma_1}I-\mathcal{A})^{-1}z_0 + (\beta^{\sigma_1}I-\mathcal{A})^{-1}\hat{\Delta}(\beta) \\ &= \beta^{\sigma_2(\sigma_1-1)}\int_0^\infty e^{-\beta^{\sigma_1}s}\mathcal{T}(s)z_0ds + \int_0^\infty e^{-\beta^{\sigma_1}s}\mathcal{T}(s)\hat{\Delta}(\beta)ds. \end{aligned}$$

Pour $s = \hat{t}^{\sigma_1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \sigma_1\beta^{(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)}\int_0^\infty (\beta\hat{t})^{\sigma_1-1}e^{-(\beta\hat{t})^{\sigma_1}}\mathcal{T}(\hat{t}^{\sigma_1})z_0d\hat{t} \\ &+ \sigma_1\int_0^\infty \hat{t}^{\sigma_1-1}e^{-(\beta\hat{t})^{\sigma_1}}\mathcal{T}(\hat{t}^{\sigma_1})\hat{\Delta}(\beta)d\hat{t} \\ &= \beta^{(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)}I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 \int_0^{\infty} (\beta \hat{t})^{\sigma_1 - 1} e^{-(\beta \hat{t})^{\sigma_1}} \mathcal{T}(\hat{t}^{\sigma_1}) z_0 d\hat{t}, \\
I_2 &= \sigma_1 \int_0^{\infty} \hat{t}^{\sigma_1 - 1} e^{-(\beta \hat{t})^{\sigma_1}} \mathcal{T}(\hat{t}^{\sigma_1}) \hat{\Delta}(\beta) d\hat{t}.
\end{aligned}
$$

Pour $\hat{t} = \varphi(t) - \varphi(0)$*, on a*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 \int_0^{\infty} \beta^{\sigma_1 - 1} (\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1 - 1} e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))^{\sigma_1}} \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) z_0 \varphi'(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{-1}{\beta} \frac{d}{dt} \left(e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))^{\sigma_1}} \right) \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) z_0 dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sigma_1 \int_0^{\infty} (\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1 - 1} e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))^{\sigma_1}} \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) \hat{\Delta}(\beta) \varphi'(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma_1 (\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1 - 1} e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))^{\sigma_1}} \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) \\
&\quad \times e^{-(\beta(\varphi(s) - \varphi(0)))} \Delta(s) \varphi'(s) \varphi'(t) ds dt.
\end{aligned}
$$

Nous considérons la densité de probabilité stable à sens unique suivante :

$$
\rho_{\sigma_1}(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \theta^{-\sigma_1 k - 1} \frac{\Gamma(\sigma_1 k + 1)}{k!} \sin(k \pi \sigma_1), \ \theta \in (0, \ \infty),
$$

et son intégration est donnée par

$$
\int_0^{\infty} e^{-\beta \theta} \rho_{\sigma_1}(\theta) d\theta = e^{-\beta^{\sigma_1}}, \ \sigma_1 \in (0,1). \tag{3.5}
$$

En utilisant l'équation (3.5)*, nous obtenons*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{-1}{\beta} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{\infty} e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))\theta} \rho_{\sigma_1}(\theta) d\theta \right) \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) z_0 dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta \rho_{\sigma_1}(\theta) e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))\theta} \mathcal{T}((\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}) z_0 \varphi'(t) d\theta dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(\beta(\varphi(t) - \varphi(0)))} \left(\int_0^{\infty} \rho_{\sigma_1}(\theta) \mathcal{T} \left(\frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}} \right) d\theta \right) z_0 \varphi'(t) dt.
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \sigma_1(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1-1}\rho_{\sigma_1}(\theta)e^{-(\beta(\varphi(t)-\varphi(0)))\theta}\\
&\quad \mathcal{T}((\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1})e^{-(\beta(\varphi(s)-\varphi(0)))}\times\Delta(s)\varphi'(s)\varphi'(t)d\theta dsdt\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \sigma_1 e^{-(\beta(\varphi(t)+\varphi(s)-2\varphi(0)))}\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1-1}}{\theta^{\sigma_1}}\rho_{\sigma_1}(\theta)\\
&\quad \mathcal{T}\left(\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)\times\Delta(s)\varphi'(s)\varphi'(t)d\theta dsdt\\
&= \int_0^\infty\int_0^\mu\int_0^\infty \sigma_1 e^{-(\beta(\varphi(\mu)-\varphi(0)))}\rho_{\sigma_1}(\theta)\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1-1}}{\theta^{\sigma_1}}\\
&\quad \mathcal{T}\left(\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)\times\Delta(\varphi^{-1}(\varphi(\mu)-\varphi(t)+\varphi(0))))\varphi'(\mu)\varphi'(t)d\theta dtd\mu\\
&= \int_0^\infty e^{-(\beta(\varphi(\mu)-\varphi(0)))}\left(\int_0^\mu\int_0^\infty \sigma_1\rho_{\sigma_1}(\theta)\frac{(\varphi(\mu)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}}{\theta^{\sigma_1}}\right.\\
&\quad \left.\mathcal{T}\left(\frac{(\varphi(\mu)-\varphi(s))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)\times\Delta(s)\varphi'(s)d\theta ds\right)\varphi'(\mu)d\mu.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= \beta^{(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)}\int_0^\infty e^{-(\beta(\varphi(t)-\varphi(0)))}\left(\int_0^\infty \rho_{\sigma_1}(\theta)\mathcal{T}\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)z_0 d\theta\right)\varphi'(t)dt\\
&+ \int_0^\infty e^{-(\beta(\varphi(\mu)-\varphi(0)))}\left(\int_0^\mu\int_0^\infty \sigma_1\rho_{\sigma_1}(\theta)\frac{(\varphi(\mu)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}}{\theta^{\sigma_1}}\mathcal{T}\left(\frac{(\varphi(\mu)-\varphi(s))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)\right.\\
&\quad \left.\times\Delta(s)\varphi'(s)d\theta ds\right)\varphi'(\mu)d\mu.
\end{aligned}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on arrive à

$$\begin{aligned}
z(t) &= I_{a^+}^{(1-\sigma_1)(\sigma_2-1);\varphi}\int_0^\infty \rho_{\sigma_1}(\theta)\mathcal{T}\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)z_0 d\theta\\
&+ \int_0^t\int_0^\infty \sigma_1\rho_{\sigma_1}(\theta)\frac{(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}}{\theta^{\sigma_1}}\mathcal{T}\left(\frac{(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1}}{\theta^{\sigma_1}}\right)\Delta(s)\varphi'(s)d\theta ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} z(t) &= I_{a^+}^{(1-\sigma_1)(\sigma_2-1);\varphi} \int_0^\infty \phi_{\sigma_1}(\theta)\mathcal{T}\left(\varphi(t)-\varphi(0))^{\sigma_1}\theta\right) z_0 d\theta \\ &+ \sigma_1 \int_0^t \int_0^\infty \theta\phi_{\sigma_1}(\theta)(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}\left((\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1}\theta\right)\Delta(s)\varphi'(s)d\theta ds, \end{aligned}$$

où $\phi_{\sigma_1}(\theta)=\frac{1}{\sigma_1}\theta^{-1-\frac{1}{\sigma_1}}\rho_{\sigma_1}(\theta^{-\frac{1}{\sigma_1}})$ *est la fonction de densité de probabilité définie sur* $(0,\infty)$.

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)z &= \int_0^\infty \phi_{\sigma_1}(\theta)\mathcal{T}((\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1}\theta)zd\theta, \\ \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)z &= I_{a^+}^{(1-\sigma_1)(\sigma_2-1);\varphi}\mathcal{P}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)z, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)z=\sigma_1\int_0^\infty \theta\phi_{\sigma_1}(\theta)\mathcal{T}((\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1}\theta)zd\theta,\ 0\leq s\leq t\leq b.$$

On obtient donc

$$z(t) = \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)z_0+\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s)\varphi'(s)ds.$$

Remarque 3.2.1 *Soit* $\mathcal{A}$ *le générateur d'un* C_0*-semi groupe* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* E*. Alors il existe* $\mathcal{M}\geq 1$*, tel que* $\mathcal{M}=\sup_{t\in[0,b]}\mathcal{T}(t)$.

Lemme 3.2.2 *[70, 80] Les opérateurs* $\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}$ *et* $\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}$ *satisfont aux conditions suivantes*

1. $\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)$ *et* $\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)$ *sont des opérateurs linéaires bornés pour tout* $t\geq s\geq 0$*, et*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)(z)\| &\leq \frac{\mathcal{M}(\varphi(b)-\varphi(0))^{(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}}{\Gamma(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_1\sigma_2)}\|z\|=\mathcal{M}_1\|z\|, \\ \|\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)(z)\| &\leq \frac{\sigma_1\mathcal{M}}{\Gamma(1+\sigma_1)}\|z\|=\frac{\mathcal{M}}{\Gamma(\sigma_1)}\|z\|=\mathcal{M}_2\|z\|. \end{aligned}$$

2. *Si* $\mathcal{T}(t)$ *un opérateur compact pour tout* $t > 0$*, alors* $\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)$, $\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)$ *sont compactes pour tout* $t, s > 0$*. Donc,* $\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)$ *et* $\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)$ *sont fortement continues.*
3. *Les opérateurs* $\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,s)$ *et* $\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)$ *sont fortement continues. Pour tout* $z \in E$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq b$*, nous avons*

$$\|\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t_2,s)z - \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t_1,s)z\| \to 0 \text{ et } \|\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t_2,s)z - \mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t_1,s)z\| \to 0 \text{ si } t_1 \to t_2.$$

Définition 3.2.1 *La fonction* $z \in \mathcal{PC}(E)$ *est appelée une solution mild du problème (3.1) si pour chaque* $t \in \mathcal{J}_0$*,* $z(t)$ *satisfait*

$$I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi}[z(t)]_{t=0} + \mathcal{G}(z) = z_0,$$

$$I_{t_\gamma{}^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} z(t_\gamma^+) = z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-)),\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H},$$

et

$$z(t) = \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z)] + \int_0^t (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s, z(s))\varphi'(s)ds,$$

pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$z(t) = \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-))\right] + \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s, z(s))\varphi'(s)ds,$$

pour tout $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$.

3.3 Existence et unicité

Dans cette section, nous prouvons les résultats d'existence du système proposé (3.1). Nous introduisons les hypothèses suivantes :

[X1] : $\mathcal{T}(t)$ *est compact pour tout* $t > 0$.

[X2] : La fonction $\Delta : \mathcal{J}_0 \times E \to E$ *satisfait*

(a) Pour tout $z \in E$*, la fonction* $t \to \Delta(t, z)$ *est fortement mesurable et la fonction* $\Delta(t, \cdot) : E \to E$ *est continue pour a.e* $t \in \mathcal{J}_0$.

(b) Il existe une fonction continue $\hat{\mathcal{K}}_\Delta \in L^1(\mathcal{J}_0, \mathbb{R}^+)$ *tel que*

$$\|\Delta(t, z)\| \leq \hat{\mathcal{K}}_\Delta(t)\,\|z\|, \text{ pour tout } (t, z) \in \mathcal{J}_0 \times E,$$

avec $\mathcal{K}_\Delta = \sup_{t\in\mathcal{J}_0} \hat{\mathcal{K}}_\Delta(t)$.

[X3] : La fonction $\mathcal{G} : C(\mathcal{J}_0, E) \to E$ *est Lipschitz continue, i.e., il existe une constante positive* $\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G}$ *tel que*

$$\|\mathcal{G}(z_1) - \mathcal{G}(z_2)\| \leq \hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G}\|z_1 - z_2\|, \ \forall\, z_1, z_2 \in E.$$

[X4] : Pour tout $z, z_1, z_2 \in E$ *et tout* $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}$, *il existe* $\mathcal{D}_\gamma, \mathcal{K}_\gamma > 0$, *satisfait*

$$\|\mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-))\| \leq \mathcal{K}_\gamma, \quad \|\mathcal{I}_\gamma(z_1(t_\gamma^-)) - \mathcal{I}_\gamma(z_2(t_\gamma^-))\| \leq \mathcal{D}_\gamma\|z_1(t_\gamma^-) - z_2(t_\gamma^-)\|.$$

[X5] : L'inégalité suivante est valable

$$\hat{\mathcal{O}} = \max_{1\leq\gamma\leq\mathcal{H}} \Big[\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G},\ \mathcal{M}_1(1 + \mathcal{D}_\gamma)\Big] < 1.$$

[X6] : Il existe une constante $\hat{\mathcal{R}}_\Delta > 0$ *tel que*

$$\|\Delta(t, z_1) - \Delta(t, z_2)\| \leq \hat{\mathcal{R}}_\Delta\ \|z_1 - z_2\|, \text{ pour tout } z_1, z_2\ \in E.$$

Théorème 3.3.1 *Si les hypothèses [X1]-[X5] sont vérifiées, et si*

$$\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G} + \mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho + \sigma_1)}(\varphi(b) - \varphi(0))^{\sigma_1} < 1, \tag{3.6}$$

alors le système φ-fractionnaire (3.1) a au moins une solution mild sur $\mathcal{J}_0$.

Preuve. *Pour tout $\pi > 0$, on définit*

$$\Omega_\pi = \{z \in \mathcal{PC}(E) : \|z\|_{\mathcal{PC}} \leq \pi\},$$

qui est un sous-ensemble convexe fermé et borné de $\mathcal{PC}(E)$.

Nous définissons un opérateur $\Pi : \Omega_\pi \to \mathcal{PC}(E)$ par

$$(\Pi z)(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z)] \\ + \int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z(s))\varphi'(s)ds, & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-))\right] \\ + \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z(s))\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Maintenant, nous divisons Π sous la forme $\Pi_1 + \Pi_2$, où

$$(\Pi_1 z)(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z)], & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-))\right], & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1, \end{cases}$$

et

$$(\Pi_2 z)(t) = \begin{cases} \int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z(s))\varphi'(s)ds, & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z(s))\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Étape 1. Il existe $\pi > 0$ tel que $\Pi(\Omega_\pi) \subset \Omega_\pi$. Si nous supposons que la proposition n'est pas vraie, alors pour $\pi > 0$, nous prenons $t \in \mathcal{J}_0$ et $z^\pi \in \Omega_\pi$

tel que $\|\Pi(z^\pi)\|_{\mathcal{PC}} > \pi$. *For* $t \in [0, t_1]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\pi < \|\Pi(z^\pi)\|_{\mathcal{PC}} &\leq \left\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0-\mathcal{G}(z^\pi)]\right\| \\
&+ \left\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z^\pi(s))\varphi'(s)ds\right\| \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\pi+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right] \\
&+ \mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\|z^\pi(s)\|\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\pi+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}(\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\pi+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\Gamma(\sigma_1)I_{0^+}^{\sigma_1:\varphi}(\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1} \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\pi+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\rho+\sigma_1-1} \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\pi+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\sigma_1}.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, $\gamma = 1, 2 \ldots, \mathcal{H}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\pi < \|\Pi(z^\pi)\|_{\mathcal{PC}} &\leq \left\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z^\pi(t_\gamma^-)+\mathcal{I}_\gamma(z^\pi(t_\gamma^-))\right]\right\| \\
&+ \left\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z^\pi(s))\varphi'(s)ds\right\| \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right] \\
&+ \mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\|z^\pi(s)\|\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{\rho-1}\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\Gamma(\sigma_1)I_{t_\gamma^+}^{\sigma_1;\varphi}(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{\rho-1} \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{\rho+\sigma_1-1} \\
&\leq \mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right] \\
&+ \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{\sigma_1}.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathcal{J}_0$, on obtient

$$\pi < \|\Pi(z^\pi)\|_{\mathcal{PC}} \leq \mathcal{W}^* + \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G}\pi + \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1}, \quad (3.7)$$

où

$$\mathcal{W}^* = \max_{1\leq\gamma\leq\mathcal{H}}\left\{\mathcal{M}_1\left[\|z_0\|_{\mathcal{PC}}+\|\mathcal{G}(0)\|_{\mathcal{PC}}\right]+\mathcal{M}_1\left[\|z^\pi(t_\gamma^-)\|_{\mathcal{PC}}+(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{K}_\gamma\right]\right\}.$$

Ici, $\mathcal{W}^*$ est indépendant de π, les deux côtés de l'équation (3.7) sont divisés par π et en prenant $\pi \to \infty$, on obtient

$$1 < \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G} + \mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1},$$

ce qui est en contradiction avec l'Eq(3.6). Par conséquent, pour un certain $\pi > 0$, $\Pi(\Omega_\pi) \subset \Omega_\pi$.

Etape 2. Nous allons prouver que Π_1 *est une application contractante.*
Pour $z^*, z^{**} \in \Omega_\pi$, *si* $t \in [0, t_1]$, *on a*

$$\begin{aligned} \|\Pi_1 z^* - \Pi_1 z^{**}\|_{\mathcal{PC}} &= \|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[\mathcal{G}(z^*)-\mathcal{G}(z^{**})]\| \\ &\leq \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|z^*-z^{**}\|_{\mathcal{PC}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

De même, si $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}$, *on trouve*

$$\begin{aligned} \|\Pi_1 z^* - \Pi_1 z^{**}\|_{\mathcal{PC}} &= \|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)[z^*(t_\gamma^-)-z^{**}(t_\gamma^-)]\| \\ &+ \|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)[\mathcal{I}_\gamma(z^*(t_\gamma^-))-\mathcal{I}_\gamma(z^{**}(t_\gamma^-))]\| \\ &\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|z^*-z^{**}\|_{\mathcal{PC}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A partir des équations (3.8)-(3.9), il s'ensuit que

$$\|\Pi_1 z^* - \Pi_1 z^{**}\|_{\mathcal{PC}} \leq \hat{\mathcal{O}}\|z^*-z^{**}\|_{\mathcal{PC}},$$

avec $\hat{\mathcal{O}} = \max_{1\leq\gamma\leq\mathcal{H}}\left[\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}},\ \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\right]$. *Par [X5], on voit que* $\hat{\mathcal{O}} < 1$. *Donc,* Π_1 *est une application contractante.*

Etape 3. On va prouver que l'opérateur $\Pi_2 : \Omega_\pi \to \Omega_\pi$ *est continue.*
Soit $\{z_k\} \subset \Omega_\pi$ *alors* $z_k \to z$ *si* $k \to \infty$. *Par [X2], on obtient*

$$\Delta(t, z_k) \to \Delta(t, z) \ \text{ si } \ k \to \infty,$$

et

$$\|\Delta(t, z_k(t)) - \Delta(t, z(t))\| \leq 2\hat{\mathcal{K}}_\Delta(t)\pi.$$

Pour tout $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma = 0, 1, \dots, \mathcal{H},$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|\Pi_2(z_k) - \Pi_2(z)\|_{\mathcal{PC}} &\leq \left\|(\varphi(t) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho} \int_{t_\gamma}^{t} (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1} \mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t, s)\right. \\
&\times \left. [\Delta(s, z_k(s)) - \Delta(s, z(s))]\varphi'(s)ds\right\| \\
&\leq \mathcal{M}_2(\varphi(t_{\gamma+1}) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho} \\
&\times \int_{t_\gamma}^{t} (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1} \|\Delta(s, z_k(s)) - \Delta(s, z(s))\|\varphi'(s)ds.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons

$$\|\Pi_2(z_k) - \Pi_2(z)\|_{\mathcal{PC}} \to 0 \ si\ k \to \infty.$$

Donc, Π_2 *est continue.*

Etape 4. Nous démontrons que $\{\Pi_2 z : z \in \Omega_\pi\}$ *est équicontinu.*

Soit $\kappa_1,\ \kappa_2 \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, *avec* $t_\gamma < \kappa_1 < \kappa_2 \leq t_{\gamma+1}$, *alors on obtient pour tout* $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma = 0, 1, \dots, \mathcal{H},$

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi(\kappa_2) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho}(\Pi_2 z)(\kappa_2) - (\varphi(\kappa_1) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho}(\Pi_2 z)(\kappa_1)\| \\
&\quad\leq \int_{t_\gamma}^{\kappa_1} \|(\varphi(\kappa_2) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho}(\varphi(\kappa_2) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(\kappa_2, s) \\
&\quad -(\varphi(\kappa_1) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho}(\varphi(\kappa_1) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(\kappa_1, s)\|\|\Delta(s, z(s))\|\varphi'(s)ds \\
&\quad + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \|(\varphi(\kappa_2) - \varphi(t_\gamma))^{1-\rho}(\varphi(\kappa_2) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(\kappa_2, s)\|\|\Delta(s, z(s))\|\varphi'(s)ds. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

En tant que $\kappa_2 \to \kappa_1$, *la partie droite de Eq. (3.10) tend vers zéro. Ainsi, l'équicontinuité de* $\{\Pi_2 z : z \in \Omega_\pi\}$ *est obtenu.*

Etape 5. Nous démontrons que $\delta(t) = \{(\Pi_2 z)(t) : z \in \Omega_\pi\}$ *est relativement compact dans* E.

Évidemment, $\delta(0) = \{0\}$ *est relativement compact. Soit* $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$ *est fixé, et* $0 < \epsilon < t$, *où* ϵ *est une nombre réel. Pour* $z \in \Omega_\pi$, *on obtient*

$$(\Pi_2^\epsilon z)(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\epsilon} (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t, s)\Delta(s, z(s))\varphi'(s)ds, & t \in [0, t_1],\ \gamma = 0, \\ \int_{t_\gamma}^{t-\epsilon} (\varphi(t) - \varphi(s))^{\sigma_1 - 1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t, s)\Delta(s, z(s))\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Utilisant l'hypothèse [X1], on obtient $\delta^{\epsilon}(t) = \{(\Pi^{\epsilon}z)(t) : z \in \Omega_{\pi}\}$ *est relativement compact dans* E.

Pour tout $z \in \Omega_{\pi}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(t_{\gamma}))^{1-\rho}[(\Pi_2 z)(t)-(\Pi_2^{\epsilon}z)(t)]\| &\leq \pi\mathcal{M}_2\mathcal{K}_{\Delta}(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_{\gamma}))^{1-\rho} \\
&\times \int_{t-\epsilon}^{t}(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}(\varphi(s)-\varphi(t_{\gamma}))^{\rho-1}\varphi'(s)ds \\
&\to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Alors $\delta(t)$ *est relativement compact dans* E.

D'après les étapes (3-5)et le théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que Π_2 *est complètement continu.*

Par conséquent,d'après le théorème du point fixe de Krasnoselskii [65] il existe au moins une solution mild sur $\mathcal{J}_0$.

Théorème 3.3.2 *Si les hypothèses [X1]-[X6] sont vérifieés. Alors le système* φ*-fractionnaire (3.1) a une solution unique mild sur* $\mathcal{J}_0$.

Preuve. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux solutions milds du système* φ*-fractionnaire (3.1) dans* Ω_{π}. *Alors, pour chaque* $k \in \{1,2\}$, *la solution mild* z_k *satisfait*

$$(\Pi z_k)(t) = \begin{cases}
\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0-\mathcal{G}(z_k)] & \\
+\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z_k(s))\varphi'(s)ds, & t\in[0,t_1],\ \gamma=0, \\
\mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_{\gamma})\left[z_k(t_{\gamma}^-)+\mathcal{I}_{\gamma}(z_k(t_{\gamma}^-))\right] & \\
+\int_{t_{\gamma}}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)\Delta(s,z_k(s))\varphi'(s)ds, & t\in(t_{\gamma},t_{\gamma+1}],\ \gamma\geq 1.
\end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, t_1],\ \gamma = 0,$ *on trouve*

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| &= \|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[(\Pi z_1)(t)-(\Pi z_2)(t)]\| \\
&\leq \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times (\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}K_0^*(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times \|(\varphi(s)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds,
\end{aligned}$$

avec $K_0^* = \sup_{0\leq s\leq t_1}(\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| &\leq \frac{\mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}K_0^*(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}}{(1-\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}})}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times \|(\varphi(s)-\varphi(0))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds,
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}} < 1$.
Pour tout $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H},$ *on a*

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| &= \|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[(\Pi z_1)(t)-(\Pi z_2)(t)]\| \\
&\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(t_\gamma^-)-z_2(t_\gamma^-)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times (\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(t_\gamma^-)-z_2(t_\gamma^-)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}K_\gamma^*(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times \|(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds,
\end{aligned}$$

avec $K_\gamma^* = \sup_{t_\gamma\leq s\leq t_{\gamma+1}}(\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1},\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}$.

Alors

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(t)-z_2(t)]\| &\leq \frac{\mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_{\Delta}K_\gamma^*(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}}{(1-\mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma))}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times \|(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z_1(s)-z_2(s)]\|\varphi'(s)ds,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma) < 1$.

En utilisant l'inégalité de Gronwall (Théorème 2.11,[70]), on obtient

$$\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{PC}} = 0,$$

ce qui implique que $z_1 \equiv z_2$. *Par conséquent, le système* φ*-fractionnaire (3.1) a une unique solution mild sur* $\mathcal{J}_0$.

3.4 Existence de contrôle optimal

Soit v *prend la valeur dans l'espace de Banach séparable et réflexif* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{V}_f(\mathcal{T})$ *est une classe de sous-ensembles de* $\mathcal{T}$, *qui est non vide, convexe et fermée. La fonction* $g : \mathcal{J} \to \mathcal{V}_f(\mathcal{T})$ *est mesurable et* $g(\cdot) \subset \triangle$, *l'ensemble de contrôle admissible*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\triangle) : v(t) \in g(t) \ a.e.\},$$

où $\triangle$ *est un ensemble borné de* $\mathcal{T}$. *Alors* $\mathcal{U}_{ad} \neq \phi$.

Considérons le système de contrôle différentiel impulsif fractionnaire de φ*-Hilfer suivant :*

$$\begin{cases} {}^H\mathrm{D}_{t_\gamma+}^{\sigma_1,\sigma_2:\varphi} z(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{D}v(t) + \Delta(t, z(t)),\ t \in (0,b] - \{t_1, t_2, \ldots, t_{\mathcal{H}}\}, \\ I_{t_\gamma+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} z(t_\gamma^+) = z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-)),\ \gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}, \\ I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi}[z(t)]_{t=0} + \mathcal{G}(z) = z_0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Supposons les hypothèses suivantes :

[X7] : $\mathcal{D} \in L^\infty(\mathcal{J}_0, L(\mathcal{T}, E))$, *qui implique que* $\mathcal{D}v \in L^2(\mathcal{J}_0, E)$ *pour* $v \in \mathcal{U}_{ad}$.

[X8] : $\mathcal{K}_* = \sup_{t \in \mathcal{J}_0} \varphi'(t) < \infty$.

Théorème 3.4.1 *Si les hypothèses du Théorème (3.3.2) et [X7]-[X8] sont vérifieés. Alors le système φ-fractionnaire (3.11) admet une solution mild pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$, donnée par :*

$$z^v(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z)] \\ + \int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v(s) + \Delta(s,z(s))]\varphi'(s)ds, & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \mathcal{S}_\varphi^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z(t_\gamma^-))\right] \\ + \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v(s) + \Delta(s,z(s))]\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Preuve.Considérons

$$\mathcal{H}(t) = \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\mathcal{D}v(s)\varphi'(s)ds.$$

Par l'inégalité de Hölder et [X7], on obtient

$$\begin{aligned} \|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\mathcal{H}(t)\| &\leq \mathcal{M}_2\|\mathcal{D}\|_\infty(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\|v(s)\|_{\mathcal{T}}\varphi'(s)ds \\ &\leq \mathcal{M}_2\|\mathcal{D}\|_\infty(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho} \\ &\times \left(\int_{t_\gamma}^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{2(\sigma_1-1)}\varphi'(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_{t_\gamma}^t\|v(s)\|_{\mathcal{T}}^2\varphi'(s)ds\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\mathcal{M}_2\|\mathcal{D}\|_\infty(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}}\left(\int_{t_\gamma}^t\|v(s)\|_{\mathcal{T}}^2\varphi'(s)ds\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\mathcal{M}_2\mathcal{K}_*^{1/2}\|\mathcal{D}\|_\infty(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}}\|v\|_{L^2(\mathcal{J}_0,\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_\varphi^{\sigma_1}(t,s)\mathcal{D}v(s)\varphi'(s)ds$ est intégrable sur $\mathcal{J}_0$, ici, $\|\mathcal{D}\|_\infty$ est la norme de $\mathcal{D}$ dans l'espace de Banach $L^\infty(\mathcal{J}_0, L(\mathcal{T},E))$. Par conséquent, $\mathcal{H}(\cdot) \in \Omega_\pi$. En utilisant le théorème (3.3.2), nous obtenons les résultats requis. $\square$

Nous considérons le problème de Lagrange

$$(\mathcal{LP}) \quad \begin{cases} \text{trouver } (z^*,v^*) \in \mathcal{PC}(E)\times\mathcal{U}_{ad} \\ \text{tel que } \mathfrak{J}(z^*,v^*) \leq \mathfrak{J}(z^v,v),\ (z^v,v) \in \mathcal{PC}(E)\times\mathcal{U}_{ad}, \end{cases}$$

où la fonction de coût est

$$\mathfrak{J}(z^v, v) = \sum_{\gamma=0}^{\mathcal{H}} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \mathcal{L}(t, z^v(t), v(t))dt,$$

où z^v est la solution mild de (3.11) par rapport au contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$. Nous supposons que

[X9] :

1. *La fonction $\mathcal{L} : \mathcal{J}_0 \times E \times \mathcal{T} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est Borel mesurable.*
2. *$\forall t \in \mathcal{J}_0$, $\mathcal{L}(t, \cdot, \cdot)$ est séquentiellement semi-continue inférieure sur $E \times \mathcal{T}$.*
3. *Pour chaque $z^v \in E$ et pour $t \in \mathcal{J}_0$, $\mathcal{L}(t, z^v, \cdot)$ est convexe sur $\mathcal{T}$.*
4. *Il existe des constantes $d_1 \geq 0$, $d_2 > 0$, ϕ est une fonction non-négative dans $L^1(\mathcal{J}_0, \mathbb{R})$ tel que*

$$\mathcal{L}(t, z^v, v) \geq \phi(t) + d_1\|z^v\| + d_2\|v\|^2_{\mathcal{T}}.$$

[X10] : $\mathcal{D}$ est un opérateur fortement continu.

Théorème 3.4.2 *Si les hypothèses [X1]-[X10] sont satisfaites, alors le problème $(\mathcal{LP})$ admet au moins une paire optimale.*

Preuve. Supposons que $\inf\{\mathfrak{J}(z^v, v) : v \in \mathcal{U}_{ad}\} = \epsilon < +\infty$. *En utilisant [X9], on obtient $\epsilon > -\infty$. Par définition de l'infimum, il existe une séquence minimisante réalisable par paire $(z^k, v^k) \subset \mathcal{P}_{ad}$, où*

$$\mathcal{P}_{ad} = \{(z^v, v) : z^v \textit{ est une solution de } (3.11) \textit{ avec respect to } \; v \in \mathcal{U}_{ad}\}$$

Puisque $\mathfrak{J}(z^k, v^k) \to \epsilon$ lorsque $k \to +\infty$, et $v^k \subseteq \mathcal{U}_{ad}$, v^k est borné dans $L^2(\mathcal{J}_0, \mathcal{T})$, il existe une sous-suite représentée par v^k et $v^* \in L^2(\mathcal{J}_0, \mathcal{T})$ telle que

$$v^k \longrightarrow v^*$$

, dans $L^2(\mathcal{J}_0, \mathcal{T})$. Puisque $\mathcal{U}_{ad}$est convexe et fermé, en utilisant le lemme de Marzur, on obtient $v^* \in \mathcal{U}_{ad}$. Soit z^k et z^* la solution mild du système (3.11) par rapport à v^k et v^*, respectivement

$$z^k(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z^k)] \\ + \int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v^k(s) + \Delta(s, z^k(s))]\varphi'(s)ds, & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z^k(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z^k(t_\gamma^-))\right] \\ + \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v^k(s) + \Delta(s, z^k(s))]\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1, \end{cases}$$

et

$$z^*(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,0)[z_0 - \mathcal{G}(z^*)] \\ + \int_0^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v^*(s) + \Delta(s, z^*(s))]\varphi'(s)ds, & t \in [0,t_1],\ \gamma = 0, \\ \mathcal{S}_{\varphi}^{\sigma_1,\sigma_2}(t,t_\gamma)\left[z^*(t_\gamma^-) + \mathcal{I}_\gamma(z^*(t_\gamma^-))\right] \\ + \int_{t_\gamma}^t (\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1}\mathcal{T}_{\varphi}^{\sigma_1}(t,s)[\mathcal{D}v^*(s) + \Delta(s, z^*(s))]\varphi'(s)ds, & t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}],\ \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Il résulte d'après le caractère borné de $\{v^k\}$, $\{v^*\}$ et du Théorème (3.3.2),qu'il existe une constante $\Theta > 0$ telle que $\|z^k\|_\infty$, $\|z^*\|_\infty \leq \Theta$.
Pour chaque $t \in [0, t_1]$, $\gamma = 0$, on a

$$\begin{aligned} \|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z^k(t)-z^*(t)]\| &\leq \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z^k(t)-z^*(t)]\| \\ &+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\ &\times (\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(0))^{1-\rho}[z^k(s)-z^*(s)]\|\varphi'(s)ds \\ &+ \mathcal{M}_2(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\ &\times \|\mathcal{D}v^k(s)-\mathcal{D}v^*(s)\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)}\varphi'(s)ds \\ &\leq \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|(\varphi(t)-\varphi(0))^{1-\rho}[z^k(t)-z^*(t)]\| \\ &+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{1-\rho}\int_0^t(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\ &\times (\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(0))^{1-\rho}[z^k(s)-z^*(s)]\|\varphi'(s)ds \\ &+ \frac{\mathcal{M}_2\mathcal{K}_*^{1/2}(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}}\|\mathcal{D}v^k-\mathcal{D}v^*\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)}. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in (t_\gamma, t_{\gamma+1}]$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z^k(t)-z^*(t)]\| &\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z^k(t_\gamma^-)-z^*(t_\gamma^-)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^{t}(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times (\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z^k(s)-z^*(s)]\|\varphi'(s)ds \\
&+ \mathcal{M}_2(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^{t}(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times \|\mathcal{D}v^k(s)-\mathcal{D}v^*(s)\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)}\varphi'(s)ds \\
&\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|(\varphi(t)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z^k(t_\gamma^-)-z^*(t_\gamma^-)]\| \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}\int_{t_\gamma}^{t}(\varphi(t)-\varphi(s))^{\sigma_1-1} \\
&\times (\varphi(s)-\varphi(0))^{\rho-1}\|(\varphi(s)-\varphi(t_\gamma))^{1-\rho}[z^k(s)-z^*(s)]\|\varphi'(s)ds \\
&+ \frac{\mathcal{M}_2\mathcal{K}_*^{1/2}(\varphi(t_{\gamma+1})-\varphi(t_\gamma))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}}\|\mathcal{D}v^k-\mathcal{D}v^*\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)}.
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in \mathcal{J}_0$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
\|z^k-z^*\|_{\mathcal{PC}} &\leq \mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)\|z^k-z^*\|_{\mathcal{PC}} + \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}\|z^k-z^*\|_{\mathcal{PC}} \\
&+ \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1}\|z^k-z^*\|_{\mathcal{PC}} \\
&+ \frac{\mathcal{M}_2\mathcal{K}_*^{1/2}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}}\|\mathcal{D}v^k-\mathcal{D}v^*\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)},
\end{aligned}$$

alors il existe une constante $\mathcal{N}^* > 0$ *telle que*

$$\|z^k-z^*\|_{\mathcal{PC}} \leq \mathcal{N}^*\|\mathcal{D}v^k-\mathcal{D}v^*\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)}, \tag{3.12}$$

où

$$\mathcal{N}^* = \frac{\mathcal{M}_2\mathcal{K}_*^{1/2}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1-\rho+(1/2)}}{(2\sigma_1-1)^{1/2}\left(1-\mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)-\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}-\mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1}\right)},$$

avec $\mathcal{M}_1(1+\mathcal{D}_\gamma)+\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_{\mathcal{G}}+\mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta\frac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\sigma_1)}(\varphi(b)-\varphi(0))^{\sigma_1} < 1$ *pour chaque* $\gamma = 1, 2, \ldots, \mathcal{H}$.

Puisque $\mathcal{D}$ est fortement continu, on obtient

$$\|\mathcal{D}v^k - \mathcal{D}v^*\|_{L^2(\mathcal{J}_0,E)} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Ainsi, nous avons

$$\|z^k - z^*\|_{\mathcal{PC}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \to \infty,$$

il en résulte que $z^k \longrightarrow z^*$ dans $\mathcal{PC}(E)$ lorsque $k \to \infty$. Depuis $\mathcal{PC}(E) \subset L^1(\mathcal{J}_0, E)$, en utilisant le théorème de Balder, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\gamma=0}^{\mathcal{H}} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \mathcal{L}(t, z^k(t), v^k(t))dt \\
&\geq \sum_{\gamma=0}^{\mathcal{H}} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \mathcal{L}(t, z^*(t), v^*(t))dt = \mathfrak{J}(z^*, v^*) \geq \epsilon,\ \gamma = 0, 1, \ldots, \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathfrak{J}$ atteint son minimum à $v^* \in \mathcal{U}_{ad}$..

3.5 Exemple

Considérons le système de contrôle différentiel impulsif fractionnaire de φ-Hilfer suivant :

$$\begin{cases}
{}^H\mathrm{D}_{t_\gamma^+}^{\sigma_1,\sigma_2;\varphi} z(t,\alpha) = z_{\alpha\alpha}(t,\alpha) + v(t,\alpha) + \dfrac{t\, e^{-t} z(t,\alpha)}{18(1+|z(t,\alpha)|)},\ t \in (0,1] - \{t_1\},\ \alpha \in [0,\pi], \\
I_{t_1{}^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} z(t_1^+, \alpha) = z(t_1^-, \alpha) + \dfrac{1}{100}\, z(t_1^-, \alpha),\ \alpha \in [0,\pi], \\
I_{0^+}^{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2);\varphi} [z(t,\alpha)]_{t=0} + \dfrac{1}{15} z(t,\alpha) = z_0(\alpha), \\
z(t,0) = 0 = z(t,\pi),
\end{cases} \tag{3.13}$$

avec la fonction coùt suivante :

$$\mathfrak{J}(z^v, v) = \sum_{\gamma=0}^{\mathcal{H}} \left[\int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \int_0^\pi |z^v(t,\alpha)|^2 d\alpha\, dt + \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \int_0^\pi |v(t,\alpha)|^2 d\alpha\, dt \right],$$

où $\gamma = 0, 1,\ \sigma_1 = 2/3,\ \ \sigma_2 = 1/4$ *et* $0 = t_0 < t_1 < t_2 = b$ *avec* $t_1 = 0.5,\ b = 1$. *Soit* $\varphi(t) = t$ *et* $E = \mathcal{T} = L^2([0, \pi])$. *On définit un opérateur* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq E \to E$ *par* $\mathcal{A}\psi = \psi''$ *avec*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\psi \in E : \psi,\ \psi' \text{ sont absolument continues et } \psi'' \in E,\ \psi(0) = 0 = \psi(\pi)\}.$$

$\mathcal{A}$ *a un spectre discret, les vecteurs propres normalisés* $e_n(\alpha) = \sqrt{2/\pi}\, sin(n\alpha)$ *correspondant à la valeur propre sont* $n^2,\ n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathcal{A}$ *génère un semigroupe analytique* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ *dans* E*, qui est uniformément borné et défini comme*

$$\mathcal{T}(t)\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle \alpha, e_n\rangle e_n,\ \alpha \in E,$$

avec $\|\mathcal{T}(t)\| \leq e^{-t}\ \forall\ t \geq 0$. *Ainsi, nous choisissons* $\mathcal{M} = 1$ *qui implique que* $\sup_{t\in[0,\infty)} \|\mathcal{T}(t)\| = 1$ *et [X1] est satisfait. On obtient* $\mathcal{M}_1 = 0.8161$ *et* $\mathcal{M}_2 = 0.7385$. *L'ensemble des contrôles admissibles est*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in \mathcal{T}\ :\ \|v\| \in L^2([0, 1], \mathcal{T}) \leq 1\}.$$

Soit $z(t)(\alpha) = z(t, \alpha)$ *et les fonctions* Δ, $\mathcal{I}_1$ *et* $\mathcal{G}$ *sont définie comme suit*

$$\Delta(t, z)(\alpha) = \frac{t\, e^{-t} z(t, \alpha)}{18(1 + |z(t, \alpha)|)}, \quad \mathcal{I}_1 = \frac{1}{100}\, z(t_1^-, \alpha), \quad \mathcal{G}(z)(\alpha) = \frac{1}{15} z(t, \alpha).$$

on obtient $\mathcal{K}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta = 1/18,\ \hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G} = 1/15,\ \mathcal{D}_1 = 1/100$ *et*

1. $\hat{\mathcal{O}} = \max\Big[\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G},\ \mathcal{M}_1(1 + \mathcal{D}_1)\Big] = \max\,[0.0544,\ 0.8243] < 1,$
2. $\mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G} + \mathcal{M}_2\mathcal{K}_\Delta \dfrac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho + \sigma_1)}(\varphi(b) - \varphi(0))^{\sigma_1} = 0.1312 < 1,$
3. $\mathcal{M}_1(1 + \mathcal{D}_1) + \mathcal{M}_1\hat{\mathcal{K}}_\mathcal{G} + \mathcal{M}_2\hat{\mathcal{R}}_\Delta \dfrac{\Gamma(\sigma_1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho + \sigma_1)}(\varphi(b) - \varphi(0))^{\sigma_1} = 0.9555 < 1.$

Le système (3.13) peut être transformé en (3.11) avec la fonction

$$\mathfrak{J}(z^v, v) = \sum_{\gamma=0}^{\mathcal{H}} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} \left[\|z^v(t)\|^2 + \|v(t)\|_\mathcal{T}^2\right] dt.$$

Toutes les hypothèses des Théorèmes (3.4.1) et (3.4.2) sont satisfaites. Par conséquent, le problème (3.13) a au moins une paire optimale.

Chapitre 4

LA CONTRÔLABILITÉ APPROCHÉE DES INCLUSIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES DU TYPE SOBOLEV AVEC RETARD INFINI

Dans ce chapitre, nous avons étudié un groupe des conditions suffisantes d'inclusions intégro-différentielles fractionnelles du type Sobolev avec un retard infini par des opérateurs résolvants. En appliquant le théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin pour les cartes multivaluées, pour prouver nos résultats.

4.1 Introduction

Ce chapitre se concentre principalement sur la contrôlabilité approchée des inclusions intégro-différentielles fractionnaires du type Sobolev de la forme *suivante :*

$$D_t^{\alpha}[Lx(t)] \in M\left[x(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds\right] + F(t,x_t) + Bu(t), t \in V = [0,T], \tag{4.1}$$

$$x(t) = \psi(t) \in P_g, \qquad t \in (-\infty, 0] \tag{4.2}$$

et les inclusions intégro-différentielles fractionnaires neutres de type Sobolev ont la forme suivante :

$$D_t^{\alpha}[Lx(t) - H(t,x_t)] \in M\left[x(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds\right] + F(t,x_t) + Bu(t), t \in V = [0,T], \tag{4.3}$$

$$x(t) = \psi(t) \in P_g, \qquad t \in (-\infty, 0] \tag{4.4}$$

où l'opérateur $K(t), t \in V$ est borné sur l'espace de Hilbert X, le variable d'état $x(.)$ prend ces valeurs dans X avec $|.|_.$. Les opérateures L et M sont linéaires dans Y . L'opérateur linéaire B est borné par V en X. La fonction de contrôle $u(.)$ est présenté dans $L^2(V;U)$, un espace de Hilbert des fonctions de contrôle admissibles, $F : V \times P_g \longrightarrow BCC(X)$ est une application non vide, bornée, fermée et convexe et multivaluée, $H : V \times P_g \longrightarrow X$. $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow P_g, x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \leq 0 \in P_g$, où P_g est l'espace défini plus tard.

4.2 Préliminaires

Nous présentons les faits essentiels, les idées et les lemmes souhaités pour organiser les principaux résultats de ce chapitre.
$B_p(x;X)$ désigne la boule fermée ayant pour centre et rayon x et $p > 0$ respectivement dans X.
Nous présentons maintenant $M : D(M) \subset X \longrightarrow X$ et $L : D(M) \subset X \longrightarrow$

X satisfait aux conditions suivantes[38] :

E1 : *Les opérateurs linéaires M et L sont fermés.*

E2 : *$D(L) \subset D(M)$ et L est bijectif.*

E3 : *$L^{-1} : X \longrightarrow D(L)$ est continue.*

*De plus, en raison de **E1** et **E2** L^{-1} est fermé, par **E3** et en appliquant le théorème du graphe fermé, on peut obtenir la bornité de $ML^{-1} : X \longrightarrow X$. De plus, ML^{-1} crée un semi-groupe fortement continu $\{Q(t)\}_{t\geq 0}, Q(t) = e^{ML^{-1}t}$ dans X .*

Désignant $||L^{-1}|| = \tilde{l}$ et $||L|| = l$.

Actuellement, nous caractérisons l'espace de phase abstrait P_g et on peut se référer à [79] pour plus de détails.

Considérons $g : (-\infty; 0] \longrightarrow (0; +\infty)$ une fonction continue le long de $j = \int_{-\infty}^{0} H(\alpha)d\alpha < +\infty$. Pour tout $c > 0$;

$$P = \{\psi : [-c; 0] \longrightarrow X \ni \psi(t)\, bornée\, et\, mésurable\},$$

et

$$||\psi||_{[-c;0]} = sup_{\xi\in[-c;0]}||\psi(\xi)||, \forall\psi \in P.$$

Nous caractérisons maintenant

$$P_g = \left\{\psi : [-c; 0] \longrightarrow X \ni\ pou\, tout\, b > 0, \psi|_{[-b;0]} \in P\, et \int_{-\infty}^{0} g(\xi)||\psi||_{[\xi,0]}d\xi < +\infty\right\}.$$

Prouvons que P_g est muni de

$$||\psi||_{P_g} = \int_{-\infty}^{0} g(\xi)||\psi||_{[\xi,0]}d\xi, \forall\psi \in P_g,$$

donc $(P_g; ||.||_{P_g})$ *est un espace de Banach .*
Et on a

$$P_g^{'} = \{x : (-\infty; b] \longrightarrow Y \, tel\, que\, x|_V \in C(V, Y), x_0 = \psi \in P_g\} .$$

Fixons $||.||_g^{'}$ *un semi-norme dans* $P_g^{'}$ *caractérisé par*

$$||x||_g^{'} = ||\psi||_{P_g} + sup\, \{||x(\xi)|| : \xi \in [0, c]\} \, , x \in P_g^{'}.$$

Lemme 4.2.1 *Supposons que* $x \in P_g^{'}$ *, alors pour* $t \in V, x(t) \in P_g$*. De plus,*

$$j|x(t)| \leq ||x(t)||_{P_g} \leq ||\psi||_{P_g} + j sup_{\xi \in [0,t]}|x(\xi)|,$$

où $j = \int_{-\infty}^{0} H(t)dt < +\infty.$

Lemme 4.2.2 *Le système de contrôle intégro-différentiel fractionnaire* (4.1) *est équivalent à l'inclusion intégrale*

$$\begin{aligned} &Lx(t) \in L\psi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\ &\times \Big[M \left[x(r) + \textstyle\int_0^r K(r-s)x(r)dr \right] + F(r, x_r) + Bu(r) \Big] dr \quad , t \in V = [0, T]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Remarque 4.2.1 *Pour* $x \in X$ *nous définissons deux familles d'opérateurs* $\{S_{\alpha,L}(t) : t \geq 0\}$ *et* $\{\mathcal{T}_{\alpha,L}(t) : t \geq 0\}$ *par*

$$\mathcal{T}_{\alpha,L}(t) = t^{\alpha-1} P_{\alpha,L}(t), \, tel\, que\, P_{\alpha,L}(t) = \int_0^\infty L^{-1} \alpha \theta O_\alpha(\theta) Q(t^\alpha \theta) \mathrm{d}\theta,$$

$$S_{\alpha,L}(t) = I_{0+}^{(1-\alpha)}\mathcal{T}_{\alpha,L}(t),$$

avec $O_\alpha(\theta)$ est la fonction de Wright, qui est définie par

$$O_\alpha(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-\alpha n)}, \ 0 < \alpha < 1, \ \theta \in \mathbb{C}, \tag{4.6}$$

qui satisfait l'égalité suivante $\displaystyle\int_0^\infty \theta^\delta O_\alpha(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\alpha\delta)}$, *for* $\theta \geq 0$.

Lemme 4.2.3 *Si l'inclusion intégrale (4.5) tient et*

$$x(t) = S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)\left(M\int_0^s K(s-r)x(r)dr + F(s,x_s)\right)ds$$
$$+\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \ t \in V. \tag{4.7}$$

Nous posons les hypothèses suivantes.

- $(\boldsymbol{E}_4)$ $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ *est uniformément bornée, i.e., $\exists m > 1$ tel que*

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} |Q(t)| < m.$$

Proposition 4.2.1 *(Fečkan et al., 2013 ; Gu and Trujillo, 2015) : Sous les conditions $(\boldsymbol{E}_1)$, $(\boldsymbol{E}_2)$, $(\boldsymbol{E}_3)$ et $(\boldsymbol{E}_4)$, on a*

- *Pour tout $t > 0$, $\{P_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$, $\{\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$ et $\{S_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$ sont des opérateures linéaires compactes, et pour chaque $x \in X$,*

$$\|P_{\alpha,L}(t)x\| \leq \frac{m\tilde{l}}{\Gamma(\alpha)}\|x\|,$$

$$\|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)x\| \leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|x\|,$$

$$\|S_{\alpha,L}(t)x\| \leq m\tilde{l}t^{(\alpha-1)}\|x\|.$$

- *$\{P_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$, $\{\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$ et $\{S_{\alpha,L}(t)\}_{t>0}$ sont continues au sens de la topologie de l'opérateur uniforme.*

Théorème 4.2.1 *Si* $(\boldsymbol{E}_1)$, $(\boldsymbol{E}_2)$, $(\boldsymbol{E}_3)$ *et* $(\boldsymbol{E}_4)$, *sont satisfaites, alors le système* (4.1) *permis* $(Q(t))_{t\geq 0}$.

Nous présentons quelques définitions et des idées liées aux applications .

Une application $F : X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ *est convexe (fermée) à condition que* $F(x)$ *soit convexe(fermée) pour chaque* $x \in X$. F *est bornée sur des ensembles bornés à condition que* $F(H) = \bigcup_{x\in H} F(x)$ *est bornée dans* X *pour tout ensemble borné* H *de* X , *i.e.,* $sup_{x\in H}\{sup||x|| : x \in F(x)\} < \infty$.

Définition 4.2.1 *On dit que l'application* F *est semi-continue supérieure* X *à condition que pour chaque* $x_0 \in X, F(x_0)$ *est un sous-ensemble fermé non vide de* X *et à condition que, pour chaque ensemble ouvert* H *de* X *incluant* $F(x_0)$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *tel que* $F(V) \subseteq H$.

Définition 4.2.2 *On dit que l'application* F *est complètement continue à condition que* $F(H)$ *soit relativement compacte pour tout sous-ensemble borné* H *de* X.

A condition que F *est complètement continu à valeurs non vides, à un autre moment* F *est semi-continu supérieur, si* F *a un graphe fermé, c'est-à-dire,* $x_n \longrightarrow x_*$, $v_n \longrightarrow v_*$, $v_n \in Fx_n$ *impliquent* $x_* \in Fx_*$. *L'application* F *a un point fixe à condition qu'il existe* $x \in X$ *tel que* $x \in F(x)$.

Nous présentons deux opérateurs appropriés et les hypothèses fondamentales sur les opérateurs comme suit :

$$\Gamma_0^c = \int_0^c (c-s)^{\alpha-1} P_{\alpha,L}(c-s) BB^* P^*_{\alpha,L}(c-s) ds, \ 0 < \alpha \leq 1,$$

$$R(\beta, \Gamma_0^c) = (\beta I + \Gamma_0^c)^{-1} : X \longrightarrow X.$$

Dans ce qui précède, B^* *représente l'adjoint de* B *et* $P^*_{\alpha,L}(c)$ *l'adjoint de* $P_{\alpha,L}(c)$. *Nous pouvons facilement conclure que l'opérateur linéaire* Γ_0^c *est* *borné.*

Pour examiner la contrôlabilité approchée de (4.3)-(4.4)*, nous établissons l'hypothèse suivante :*

$\boldsymbol{H}_0$ *$\beta R(\beta, \Gamma_0^c) \to 0$ tel que $\beta \to 0^+$ dans la topologie uniforme.*

L'hypothèse $\boldsymbol{H}_0$ se vérifie si le système linéaire

$$D_t^\alpha[Lx(t)] = M\left[x(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds\right] + Bu(t), t \in V = [0,T], \quad (4.8)$$

$$x(0) = x_0 \quad (4.9)$$

est approximativement contrôlable sur V.

Lemme 4.2.4 *Supposons que V un intervalle réel compact, l'ensemble non vide $BCC(X)$ est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de X et l'application Y satisfait à $Y : V \times X \to BCC(X)$ est mesurable en t pour chaque $x \in X$ fixé, semi-continu supérieur sur x pour $t \in V, x \in C$ l'ensemble*

$$S_{F,x} = \left\{h \in L^1(V,X) : h(t) \in Y(t, x(t))\, t \in V\right\},$$

est non vide. Supposons que l'opérateur linéaire Γ est continu de $L^1(V,X)$ à C, d'autre part

$$\Gamma \circ S_F : C \to BCC(C); x \to (\Gamma \circ S_F)(x) = \Gamma(S_{F,x}),$$

est fermé dans $C \times C$.

Lemme 4.2.5 *[Théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin]. Assumons que l'ensemble non vide B est un sous-ensemble de X , qui est borné, fermé et* *convexe. Supposons que $F : B \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ est semi-continue supérieurement à valeurs fermées et convexes et telle que $F(B) \subseteq B$ et $F(B)$ est compacte, alors F a un point fixe.*

4.3 La contrôlabilité approchée

Cette section se concentre principalement sur la contrôlabilité approchée de (4.1)- (4.2). Dans un premier temps, nous caractérisons la solution mild de (4.1) - (4.2).

Définition 4.3.1 *La fonction $x : (-\infty, c] \to X$ est appelée une solution mild de (4.1)- (4.2) à condition que $x_0 = \psi \in P_g$ sur $(-\infty, c]$*

$$x(t) = S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \ t \in V$$

est satisfaite.

Nous introduisons les hypothèses suivantes pour discuter de nos principaux résultats dans cette section.

- ***H**$_1$: $S_{\alpha,L}(t)_{t>0}, \mathcal{T}_{\alpha,L}(t)_{t>0}$ sont des opérateurs linéaires compacts.*
- ***H**$_2$: $F : V \times P_g \to BCC(X)$ est L^1-Carathéodorie et qui satisfait : Pour tout $t \in V$, $F(t, .)$ est s.c.u ; pour tout $x \in P_g$, $F(., x)$ est mesurable et $x \in P_g$,*

  $$S_{F,x} = \left\{h \in L^1(V, X) : h(t) \in F(t, x(t))\, \forall t \in V\right\}$$

  est non vide.
- ***H**$_3$: pour $p > 0$, il existe $\beta_p : V \to R^+$ tel que*

  $$\sup\{||h|| : h(t) \in F(t, x_t)\} \leq \beta_p(t)$$

  pour a.e $t \in V$.

$\boldsymbol{H}_4$: $\xi \to \beta_r(\xi) \in L^1(V, R^+)$ *et* $\exists \gamma > 0$ *tel que*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\int_0^\alpha \beta_p(\xi)d\xi}{p} = \gamma < \infty.$$

$\boldsymbol{H}_5$: ML^{-1} *est le générateur infiniment petit de* $S_{\alpha,L}(t)\,\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)$ *dans* X *et* $\tilde{l} > 0$ *et* $k > 0$ *:*

$$\|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)x\| \leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|x\|, \quad \|S_{\alpha,L}(t)x\| \leq m\tilde{l}t^{(\alpha-1)}\|x\|, \, \|K(t)\| \leq k.$$

$\forall t \in V$.

Pour démontrer que (4.1)-(4.2) *est approximativement contrôlable, à condition que* $\forall \beta > 0$, *il existe une fonction* $x(.)$ *continue telle que*

$$x(t) = S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \; t \in V \quad h \in S_{F,x}, \tag{4.10}$$

$$u(t) = B^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c)p(x(.)) \tag{4.11}$$

où

$$p(x(.)) = x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s)ds$$

Théorème 4.3.1 *Si* $\boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H}_5$ *sont vérifiées, alors* (4.1)-(4.2) *a une solution mild sur* V, *à condition que*

$$\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\|B\|^2c\right)\gamma j < 1. \tag{4.12}$$

Preuve : Pour tout $\varrho > 0$, *nous considérons l'opérateur* $\wedge^\varrho : P_g^{'} \to 2^{P_g^{'}}$ *décrits par* $\wedge^\varepsilon u$ *l'ensemble des* $x \in P_g^{'}$

$$x(t) = \begin{cases} \psi(t), \quad t \in (-\infty, 0], \\ S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \; t \in V. \end{cases}$$

où $h \in S_{F,x}$.

Pour démontrer que $\wedge^{\varrho}$ a un point fixe et nous concluons qu'il s'agit de la solution de (4.3)-(4.4). Évidemment, $x_1 = x(c) \in (\wedge^{\varrho} x)(c)$, ce qui signifie que $u_{\varrho}(x;t)$ entraîne (4.1)-(4.2) à partir de $x_0 \to x_c$ dans un temps fini c.

Pour $\psi \in P_g$, nous caractérisons maintenant $\hat{\psi}$ en tant que

$$\hat{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in (-\infty, 0], \\ S_{\alpha,L}(t)L\psi(0), & t \in V, \end{cases}$$

alors $\hat{\psi} \in P'_g$.

Soit $x(t) = y(t) + \hat{\psi}(t), -\infty < t \leq c$. Nous concluons maintenant que y satisfait à $y_0 = 0$ et

$$y(t) = \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)\times \left[x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right](s)ds,\ t \in V.$$

Si u satisfait à

$$\begin{aligned} x(t) &= S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s) \\ &\quad R(\beta,\Gamma_0^c)\times\left[x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right](s)ds,\ t \in V. \end{aligned}$$

et $x(t) = \psi(t), t \in (-\infty, 0]$.

Soit $P''_g = \left\{y \in P'_g : y_0 = 0 \in P_g\right\}$. Pour $y \in P''_g$,

$$||y||_c = ||y_0||_{P_g} + \sup\{||y(s)|| : 0 \leq s \leq c\}$$

$$= \sup\{||y(s)|| : 0 \leq s \leq c\},$$

donc $(P''_g, ||.||_b)$ est un espace de Banach . Fixons $B_p = y \in P''_g : ||y||_c \leq p$ pour $p > 0$, d'autre par $B_p \subseteq B''_h$ est uniformément bornée, et pour $y \in B_p$, *en raison de Lemme (4.2.1), on peut obtenir*

$$\begin{aligned} ||y_t + \hat{\psi}_t||_{p_g} &\leq ||y_t||_{P_g} + ||\hat{\psi}||_{P_g} \\ &\leq j(p + m\tilde{l}t^{\alpha-1}|\psi(0)|) + ||\psi||_{P_g} \\ &\leq j(p + M|\psi(0)|) + ||\psi||_{P_g} = p'. \end{aligned} \tag{4.13}$$

On définie $\Psi : P_g^{''} \to P_g^{''}$ *fourni par* $\Psi(y)$ *l'ensemble des* $\bar{x} \in P_g^{''}$ *tel que*

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 0, \quad \alpha \in (-\infty, 0], \\ S_{\alpha,L}(t)L\psi(0) + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s) \\ R(\beta, \Gamma_0^c) \times \left[x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right](s)ds, \; t \in V. \end{cases}$$

Un point fixe de Ψ^{ϱ} *existe si un point fixe de* Π *existe. Donc, notre but est de montrer qu'un point fixe de* Π *existe. Nous divisons maintenant notre preuve en cinq étapes pour plus de confort.*

Etape 1. Ψ *est convexe* $\forall x \in B_p$. *En effet, si* ϕ_1, ϕ_2 *alors* $\exists h_1, h_2 \in S_{F,x}$ *de sorte que pour chaque* $t \in V$, *on a*

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_i(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta, \Gamma_0^c) \\ &\quad \times \left[x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_i(\eta)d\eta\right](s)ds, \; t \in V., i = 1, 2. \end{aligned}$$

Supposons que $\delta \in [0, 1]$, *alors pour* $t \in V$, *on a*

$$\begin{aligned} (\delta\phi_1 + (1-\delta)\phi_2)(t) &= \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)[\delta h_1(s) + (1-\delta)h_2(s)]ds \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta, \Gamma_0^c) \\ &\quad \times \Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)[\delta h_1(\eta) \\ &\quad + (1-\delta)h_2(\eta)]d\eta\Big](s)ds, \; t \in V. \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement prouver que $S_{F,x}$ est convexe puisque F a des valeurs convexes. Par conséquent, $\delta h_1 + (1-\delta)h_2 \in S_{F,x}$ .Par conséquent

$$\delta\psi_1 + (1-\delta)\psi_2 \in \Pi(x).$$

Etape 2. *Pour prouver que $p > 0$ tel que $\Pi(B_p) \subseteq B_p$. D'autre part ,$\exists \varrho > 0, \forall p > 0$ et $t \in V$, $\exists y_p \in B_p$, mais $\Pi(y_p) \notin Bp$, c'est-à-dire, $|\Pi(y_p)(t)| > p$ pour certains $t \in V$. Pour ces $\varrho > 0$,*

$$\begin{aligned}
p < |(\Psi_{y^p})(t)| &\leq |\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds| + |\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu_\beta(s, y+\hat{\psi})ds| \\
&\leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\|B\|^2c \\
&\quad \left(|u_1| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}||0|| + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds\right) \\
&\leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\|B\|^2c\right) + \widehat{M} \\
&\leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\|B\|^2c\right)\left[\int_0^t \beta_{p'}(s)ds\right] + \widehat{M}
\end{aligned}$$

où $\widehat{M}$ est indépendant de p. En séparant les deux côtés de l'inégalité mentionnée ci-dessus par p et en remarquant que $p' = j(p + M|\psi(0)|) + ||\psi||_{P_g}$ en tant que $p \to \infty$, nous obtenons que

$$\lim_{p\to+\infty}\inf \frac{\int_0^\alpha \beta_{p'}(s)ds}{p} = \lim_{p\to+\infty}\inf\left(\frac{\int_0^\alpha \beta_{p'}(s)ds}{p'}.\frac{p'}{p}\right) = \gamma j,$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}^2 c\right)\gamma j \geq 1,$$

qui est un contradiction avec (4.12). Donc, $p > 0$ et $h \in S_{F,x}, \Pi(B_p) \subseteq B_p$.

Etape 3. *$\Psi(B_p)$ équicontinue. En fait, supposons $\varrho > 0$ est petit,*

$0 < t_1 < t_2 \leq c$. Pour chaque $y \in B_p$ et $\bar{x} \in \Psi_1 y, \exists h \in S_{F,x}$ de telle sorte que, pour tout t de V, on peut obtenir

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)h(s)ds\right| + \left|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)]h(s)ds\right| \\
&+ \left|\int_{0}^{t_1-\varepsilon} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)]h(s)ds\right| \\
&+ \left|\int_{0}^{t_1-\varepsilon} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)]Bu_\beta^p(\eta,u)dsd\eta\right| \\
&+ \left|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)]Bu_\beta^p(\eta,u)dsd\eta\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)Bu_\beta^p(\eta,u)dsd\eta\right| \\
&\leq \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \beta_{p'}(s)ds + \int_0^{t_1-\varepsilon} ||\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)||\beta_{p'}(s)ds \\
&+ \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} ||\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)||\beta_{p'}(s)ds \\
&+ \|B\| \int_0^{t_1-\varepsilon} ||\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|| \left[|u_1| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}||\psi(0)|| + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \beta_{p'}(s)ds\right] \\
&+ \|B\| \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} ||\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|| \left[|u_1| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}||\psi(0)|| + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \beta_{p'}(s)ds\right] \\
&+ \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|B\| \int_{t_1}^{t_2} \left[|u_1| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}||\psi(0)|| + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \beta_{p'}(s)ds\right]
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Par conséquent, pour $\varrho > 0$, on peut confirmer que (4.15) tend vers zéro lorsque $t_2 \to t_1$. Puis, la compacité de $\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)$ pour $t > 0$ donne une continuité dans la topologie uniforme. Par conséquent, Π transforme B_p en une famille de fonctions équicontinue.

Etape 4. *$\Pi(t) = \phi(t) : \phi \in \Psi(B_p)$ est relativement compact dans X.*

Supposons que $t \in (0, c], \varrho > 0, 0 < \varrho < t$. Maintenant $x \in B_p$, nous propo-

sons

$$\begin{aligned}\phi_\varrho(t) &= \int_0^{t-\varrho}\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds+\int_0^{t-\varrho}\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)\\ &\times\left[x_c-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)-\int_0^c\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right](s)ds,\ t\in V.\end{aligned}$$

Parce que $\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)$ et $S_{\alpha,L}(t)$ sont compacts, $\Pi_\varrho(t)=\phi_\varrho(t):\phi_\varrho\in\Psi(B_p)$ est relativement compact dans X pour chaque $\varrho, 0<\varrho<t$. En outre, $\forall 0<\varrho<t$, on peut avoir

$$\begin{aligned}|\phi(\alpha)-\phi_\varrho(\alpha)| &\leq \int_{t-\varrho}^{t}\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds+\int_{t-\varrho}^{t}\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)\\ &\quad R(\beta,\Gamma_0^c)\times\left[x_c-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)-\int_0^c\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right](s)ds.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proches $\wedge(t)=\psi(t):\psi\in\Pi(B_p),\tilde{\wedge}(t)$ est relativement compact dans X ,$\forall t\in[0,c]$. On a la compacité au point $t=0$, donc $\wedge(t)$ est relativement compact dans X ,$\forall\in[0,c]$.

Etape 5. *Ψ possède un graphe fermé.*

Supposons que $y_n\to y_*$ si $n\to\infty$, $\bar{x_n}\in\Pi_{y_n}$, $\forall y_n\in B_p$, et

$\bar{x_n}\to\bar{x_*}$ si $n\to\infty$. Maintenant, nous démontrons $\bar{x_*}\in\Pi_{y_*}$. Car $\bar{x_n}\in\Pi_{y_n}$, $\exists h_n\in S_{F,y_n}\ni$

$$\begin{aligned}\bar{x_n}(t)=&\int_0^t\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_n(s)ds+\int_0^t\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)\\ &\times\left[x_c-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)-\int_0^c\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_n(\eta)d\eta\right](s)ds\,,t\in V.\end{aligned}$$

Nous devons démontrer que $\exists h_*\in S_{F,y_*}\ni$

$$\begin{aligned}\bar{x_*}(t)=&\int_0^t\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_*(s)ds+\int_0^t\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)\\ &\times\left[x_c-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)-\int_0^c\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_*(\eta)d\eta\right](s)ds\,,t\in V.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $t \in V$, puisque F est continue et à partir de x^{o}, on peut obtenir

$$\Bigg\|\left(\bar{x_n}(t) - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c) \times [x_c - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)](s)ds\right)$$
$$-\left(\bar{x_*}(t) - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c) \times [x_c\right.$$
$$\left.-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)](s)ds\right)\Bigg\| \to 0\, as\, n \to \infty.$$

Supposons que l'opérateur linéaire $\Theta : L^1(V,X) \to C(V,X)$ est continu,

$$(\Theta f)(t) = \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)$$
$$\times\left(\int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\tau)h(\tau)d\tau\right)(s)ds.\,, t \in V.$$

Ainsi, d'aprés le lemme (4.2.5), $\Theta \circ S_F$ est un opérateur à graphe fermé. De plus, à partir de Θ, on peut obtenir que

$$\bar{x_n}(t) - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c) \times [x_c$$
$$-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)](s)ds \in \Theta(S_{F,y_n}).$$

Car $y_n \to y_*, y_* \in S_{F,y_*}$, de lemme (4.2.5) ,

$$\bar{x_*}(t) - S_{\alpha,L}(c)L\psi(0) - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c) \times [x_c$$
$$-S_{\alpha,L}(c)L\psi(0)](s)ds = \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)\Bigg[h_*(s)$$
$$+BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c)\left(\int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\tau)h_*(\tau)d\tau\right)\Bigg](s)ds,$$

pour certains $h_* \in (S_{F,y_*})$. Ainsi, Π a un graphe fermé.

D'après ***l'étape 1-5*** *en même temps que le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que Π est une carte multivaluée compacte, semi-continue supérieure à valeurs convexes fermées. D'après lemme (4.2.5), on peut supposer que Π a un point fixe x et qui est une solution mild de (4.1) - (4.2).* $\square$

Définition 4.3.2 *Le système diéfférentiel (4.1) - (4.2) est appelé approximativement contrôlable sur V, à condition que $\overline{R(c, x_0)} = X$, où $R(c, x_0) = \{x_c(x_0, u) : u(.) \in L^2(V; U)\}$ est une solution mild de (4.1) - (4.2).*

Théorème 4.3.2 *Supposons que ($\boldsymbol{H}_0$ - $\boldsymbol{H}_5$) et $\boldsymbol{H}_7$ sont satisfaites. De plus, $N \in L^1(J, [0, \infty))$ tel que $Sup_{u \in p_g} ||F(t, x)|| \leq N(t)$ pour a.e.t $\in V$, alors (4.1) - (4.2) est approximativement contrôlable sur V.*

Preuve : Supposons que $\hat{x}^\beta(.)$ soit un point fixe de Γ sur B_p. Étant donné le théorème (4.3.1), tout point fixe de ψ^ϱ est une solution mild de (4.1) - (4.2) sous

$$\hat{u}^\beta(t) = B^* \mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c - t) R(\beta, \Gamma_0^c) p(\hat{x}^\beta),$$

$$p(\hat{x}^\beta) = x_c - S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - \eta) h(\eta) d\eta,$$

et réalise

$$\begin{aligned}
&\hat{x}^\beta(c) = S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - s) h(s, \hat{x}^\beta) ds + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - s) B B^* \\
&\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c - s) R(\beta, \Gamma_0^c) \times \left[x_c - S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - \eta) h(\eta, \hat{x}^\beta) d\eta \right] ds \\
&\qquad = S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - s) h(s, \hat{x}^\beta) ds + \Gamma_0^c R(\beta, \Gamma_0^c) p(\hat{x}^\beta) \\
&\qquad = S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - s) h(s, \hat{x}^\beta) ds + p(\hat{x}^\beta) - \beta R(\beta, \Gamma_0^c) p(\hat{x}^\beta) \\
&\qquad = x_c - \beta R(\beta, \Gamma_0^c) p(\hat{x}^\beta).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En outre, compte tenu de l'hypothèse sur F et du théorème de Dunford-Pettis, on peut obtenir $\{h^\beta(s)\}$ est faiblement compact dans $L^1(V, X)$, il existe donc une sous-séquence $\{h^\beta(s)\}$, qui converge faiblement vers $h(s)$ dans $L^1(V, X)$. Caractérisons

$$w = x_c - S_{\alpha,L}(c) L\psi(0) - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c - s) h(s) ds.$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned} ||p(\hat{x}^{\beta}) - w|| &= \| \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)[h(s,\hat{x}^{\beta}) - h(s)]ds \| \\ &\leq \sup_{t\in V} \| \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)[h(s,\hat{x}^{\beta}) - h(s)]ds \| . \end{aligned} \tag{4.16}$$

A partir du théorème d'Ascoli-Arzela de la dimension infinie, nous démontrons $l(.) \to \int_0^{\cdot} \mathcal{T}_{\alpha,L}(. - s)l(s)ds : L^1(V,X) \to C(V,X)$ *est compact. Par conséquent,* $||p(\hat{x}^{\beta}) - w|| \to 0$ *sur* $\beta \to 0^+$.

$$\begin{aligned} ||\hat{x}^{\beta}(c) - x_c|| &\leq ||\beta R(\beta, \Gamma_0^c)(w)|| + ||\beta R(\beta, \Gamma_0^c)||||p(\hat{x}^{\beta}) - w|| \\ &\leq ||\beta R(\beta, \Gamma_0^c)(w)|| + ||p(\hat{x}^{\beta}) - w|| \end{aligned}$$

$||\hat{x}^{\beta}(c) - x_c|| \to 0$ *sur* $\beta \to 0^+$ *et qui montre la contrôlabilité approchée de* (4.1)-(4.2) .□

Nous étudions la contrôlabilité approchée du système (4.1)-(4.2) *avec des conditions non locales de la forme*

$$D_t^{\alpha}[Lx(t)] \in M\left[x(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds\right] + F(t,x_t) + Bu(t), t \in V = [0,c], \tag{4.17}$$

$$x(t) = \psi(t) + q(x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \ldots, x_{t_n}) \in P_g, \ \alpha \in (-\infty, 0] \tag{4.18}$$

avec $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \therefore < t_n \leq c$, $q : P_g^n \to p_g$ *et qui satisfait :*

$\boldsymbol{H}_6$ $q : P^n \to P$ *est continu et* $L_i(q) > 0$ *de telle sorte que*

$$||q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - q(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)|| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i(q)||x - y||_B,$$

pour tout $x, y \in P_g$ *et* $N_q = sup\left\{||q(x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \ldots, x_{t_n})|| : x \in P_g\right\}$.

Définition 4.3.3 *La fonction* $x : (-\infty, c] \to X$ *est une solution mild de*

(4.17)-(4.18) *si* $x_0 = \psi \in P_g$ *sur* $(-\infty, 0]$ *et*

$$x(t) = S_{\alpha,L}(t)L[\psi(0) + q(x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \dots, x_{t_n})(0)] + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \ t \in V,$$

est satisfait.

Théorème 4.3.3 *Si* $\boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H}_6$ *sont satisfaits, alors* (4.17)-(4.18) *est approximativement contrôlable sur* V *si*

$$\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\|B\|^2c\right)\gamma j < 1.$$

4.4 Systèmes neutres

Cette section se concentre principalement sur la contrôlabilité approchée de (4.3)-(4.4). *Dans un premier temps, nous caractérisons la solution mild de* (4.3)-(4.4).

Définition 4.4.1 *La fonction* $x : (-\infty, c] \to X$ *est appelé une solution mild de* (4.3)-(4.4) *à condition que que* $x_0 = \psi \in P_g$ *sur* $(-\infty, 0]$ *et*

$$\begin{aligned} x(t) = {} & S_{\alpha,L}(t)[L\psi(0) - H(0,\psi)] + L^{-1}H(t,x_t) \\ & + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,x_s)ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,x_\tau)d\tau ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \ t \in V \end{aligned}$$

est satisfaite.

H$_7$ *$H : V \times \mathcal{P}_g$ est continu et,*

(i) $\exists N_g > 0, \tilde{N}_g > 0$ pour $t \in V$ et $y,\ x \in \mathcal{P}_g$ tel que $AL^{-1}H$ satisfait

$$\|AL^{-1}H(t,\ y) - AL^{-1}H(t,\ x)\| \leq \tilde{N}_g \|y - x\|_{P_g},\ y,\ x \in \mathcal{P}_g,$$

et $N_g = \sup\limits_{t \in V} \|AL^{-1}H(\alpha,\ 0)\|.$

(ii) $\exists n_g > 0, \tilde{n_g} > 0$ tel que

$$\|H(t,\ y) - H(t,\ x)\| \leq \tilde{n_g} \|y - x\|_{P_g},\ y,\ x \in \mathcal{P}_g,$$

et $n_g = \sup\limits_{t \in V} \|H(t,\ 0)\|.$
Pour montrer que (4.3)-(4.4) est approximativement contrôlable, à condition que $\forall \beta > 0$, il existe $u(\cdot)$ tel que

$$\begin{aligned} x(t) = {} & S_{\alpha,L}(t)[L\psi(0) - H(0,\psi)] + L^{-1}H(t,x_t) \\ & + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,x_s)ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,x_\tau)d\tau ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds,\ t \in S_{F,x} \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$u(t) = B^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c)p(x(.)), \tag{4.20}$$

avec

$$\begin{aligned} p(x(\cdot)) = {} & x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,x_c) \\ & - \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,x_s)ds \\ & - \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,x_\tau)d\tau ds \\ & - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Théorème 4.4.1 *Si* $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_5$ *sont satisfaites, alors* (4.3)-(4.4) *admet une solution mild sur* V*, si*

$$\tilde{l}\left(1+\frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}\|B\|^2c\right)\left[j\left(\frac{mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{N}_g(1+k)+\tilde{n}_g\right)\right]<1. \tag{4.21}$$

tel que $P_B = \|B\|$.

Preuve. Pour chaque $\varepsilon > 0$, $\psi^\varepsilon : \mathcal{P}'_g \to 2^{P'_g}$ *défini par* $\psi^\varepsilon u$*, l'ensemble de* $x \in \mathcal{P}'_g$ *tel que*

$$x(t)=\begin{cases}\psi(\alpha),\ \alpha\in(-\infty,\ 0],\\ S_{\alpha,L}(t)[L\psi(0)-H(0,\psi)]+L^{-1}H(t,x_t)+\displaystyle\int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,x_s)ds\\ +\displaystyle\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,x_\tau)d\tau ds\\ +\displaystyle\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds+\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds,\ t\in V\end{cases}$$

avec $h \in S_{F,x}$.

Nous montrons que Ψ^ϱ *a un point fixe et nous concluons que c'est la solution de* (4.3)-(4.4).

On a, $x_1 = x(c) \in (\Psi^\varrho x)(c)$*, ce qui signifie que* $u_\varrho(x,t)$ *entraîne* (4.3)-(4.4) *à partir de* $x_0 \to x_c$ *dans un temps fini* c.

Pour $\psi \in \mathcal{P}_g$*, nous caractérisons maintenant* $\hat{\psi}$ *par*

$$\hat{\psi}(t)=\begin{cases}\psi(t),\ t\in(-\infty,\ 0],\\ S_{\alpha,L}(t)L\psi(0)\alpha\in V,\end{cases}$$

alors $\hat{\psi} \in \mathcal{P}'_g$*. Soit* $x(t) = y(t) + \hat{\psi}(t)$, $-\infty < t \le c$*. Nous concluons que* y

satisfait $y_0 = 0$ *et*

$$\begin{aligned}
y(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c) \\
&\quad \Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\
&\quad - \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&\quad - \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&\quad - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\Big](s)ds,\ t \in V,
\end{aligned}$$

si x *satisfait à*

$$\begin{aligned}
x(t) &= S_{\alpha,L}(t)[L\psi(0) + H(0,\psi)] + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) \\
&\quad + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c) \\
&\quad \Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\
&\quad - \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&\quad - \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&\quad - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\Big](s)ds,\ t \in V,
\end{aligned}$$

et $x(t) = \psi(t),\ t \in (-\infty,\ 0]$.

Définissons $\Psi : \mathcal{P}''_g \to \mathcal{P}''_g$ *fourni par* Ψy *l'ensemble des* $\overline{x} \in \mathcal{P}''_g$ *tel que*

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} 0, \ t \in (-\infty, \ 0], \\ -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\ + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\ + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c) \\ \Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\ - \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds - \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau \\ + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds - \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\Big](s)ds, \ t \in V. \end{cases}$$

Alors, un point fixe de Ψ^{o} *existe si un point fixe de* Π *existe. Donc, notre but est de prouver qu'un point fixe de* Π *existe. Nous divisons maintenant notre preuve en plusieurs étapes.*

Etape 1. Ψ *est convexe* $\forall x \in B_p$. *En fait, si* $\phi_1, \ \phi_2$ *alors* $\exists h_1, \ h_2 \in S_{F,x}$ *tel que* $\forall t \in V$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_i(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c) \\
&\Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_i(\eta)d\eta\Big](s)ds \, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

On peut facilement prouver que $S_{F,x}$ est convexe car K a des valeurs convexes. Par conséquent, $\gamma h_1 + (1-\gamma)h_2 \in S_{F,x}$. D'où,

$$\gamma\psi_1 + (1-\gamma)\psi_2 \in \Pi(x).$$

$$\begin{aligned}
(\delta\phi_1 + (1-\delta)\phi_2)(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) \\
&+ \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)[\delta h_1(s) + (1-\delta)h_2(s)]ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta, \Gamma_0^c) \\
&\Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)[\delta h_1(\eta) + (1-\delta)h_2(\eta)]d\eta\Bigg](s)ds.
\end{aligned}$$

Etape 2. *Pour prouver* $p > 0$ *tel que* $\Pi(B_p) \subseteq B_p$. *Sinon,* $\exists \epsilon > 0 \ni \forall p > 0$ *et* $t \in V$, $\exists y_p \in B_p$, *mais* $\Pi(y_p) \notin B_p$, *c'est-à-dire,* $|\Pi(y_p)(t)| > p$ *pour certains*

$t \in V$. *Pour ces* $\varrho > 0$,

$$
\begin{aligned}
r \le |(\Psi y^p)(t)| \quad &\le \quad \left|S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi)\right| + \left|L^{-1}H(t,y_t+\hat{\psi}_t)\right| \\
&+ \quad \left|\int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,y_s+\hat{\psi}_s)ds\right| \\
&+ \quad \left|\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,y_\tau+\hat{\psi}_\tau)d\tau ds\right| \\
&+ \quad \left|\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds\right| + \left|\int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s,y_s+\hat{\psi}_s)ds\right| \\
&\le \quad m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\| + \tilde{l}(\tilde{n}_g\|y_t^p+\hat{\psi}_t\|_{P_g}+n_g) \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [\tilde{N}_g(\|y_s^p+\hat{\psi}_s\|_{P_g})+N_g]ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s [\tilde{N}_g(\|y_s^p+\hat{\psi}_s\|_{P_g})+N_g]d\tau ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds \\
&+ \quad \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}\|B\|^2c\Big[m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|\psi(0)\| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\| \\
&+ \quad \tilde{l}(\tilde{n}_g\|y_c^p+\hat{\psi}_c\|_{P_g}+n_g) \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [\tilde{N}_g(\|y_s^p+\hat{\psi}_s\|_{P_g})+N_g]ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s [\tilde{N}_g(\|y_s^p+\hat{\psi}_s\|_{P_g})+N_g]d\tau ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\| + \tilde{l}(\tilde{n}_g p^{'} + n_g) + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [\tilde{N}_g p^{'} + N_g]ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s [\tilde{N}_g p^{'} + N_g]d\tau ds + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds \\
&+ \quad \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}\|B\|^2 c\Big[m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|\psi(0)\| + m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\| + \tilde{l}(\tilde{n}_g p^{'} + n_g) \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [\tilde{N}_g p^{'} + N_g]ds + \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s [\tilde{N}_g p^{'} + N_g]d\tau ds \\
&+ \quad \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \beta_{p'}(s)ds\Big] \\
&\leq \quad \tilde{l}\bigg(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}\|B\|^2 c\bigg)\bigg[p^{'}\bigg(\frac{mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{N}_g(1+k) + \tilde{n}_g\bigg) + \int_0^t \beta_{p'}(s)ds\bigg] + \hat{P}_c,
\end{aligned}
$$

où $\hat{P}_c$ est indépendant de p. En séparant par p les deux côtés de l'inégalité précédemment mentionnée et en percevant que $p' = j(p + P_1|\psi(0)|) + \|\psi\|_{P_g}$ si $p \to \infty$, nous acquérons que

$$
\lim\inf_{p\to+\infty}\frac{\int_0^\alpha \beta_{p'}(\xi)d\xi}{p} = \lim\inf_{p\to+\infty}\Big(\frac{\int_0^\alpha \beta_{p'}(\xi)d\xi}{p'}\cdot\frac{p'}{p}\Big) = \gamma j.
$$

Ainsi, nous avons

$$
\tilde{l}\bigg(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{l}^2t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}\|B\|^2 c\bigg)\bigg[j\bigg(\frac{mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{N}_g(1+k) + \tilde{n}_g\bigg)\bigg] \geq 1,
$$

et est en contradiction avec (4.21). Donc, $p > 0$ et une certaine $h \in S_{F,x}$, $\Pi(B_p) \subseteq B_p$.

Etape 3. *$\Pi(B_p)$ est équicontinue. En fait, supposons $\varrho > 0$ est petit,*

$0 < t_1 < t_2 \leq c$. *Pour tout* $y \in B_p$ *et* $\overline{x} \in \Pi_1 y$, $\exists h \in S_{F,x} \ni \forall t \in V$, *alors*

$$
\begin{aligned}
|\overline{x}(t_2) - \overline{x}(t_1)| &= |S_{\alpha,L}(t_2) - S_{\alpha,L}(t_1)||H(0,\psi)| \\
&+ |L^{-1}H(t_2, y_{t_2} + \hat{\psi}_{t_2}) - L^{-1}H(t_1, y_{t_1} + \hat{\psi}_{t_1})| \\
&+ |\int_{t_1}^{t_2} L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds| \\
&+ |\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} L^{-1}A[\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds| \\
&+ |\int_{0}^{t_1-\varepsilon} L^{-1}A[\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds| \\
&+ |\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds| \\
&+ |\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]AL^{-1} \\
&\quad \int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds| \\
&+ |\int_{0}^{t_1-\varepsilon} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]AL^{-1} \\
&\quad \int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds| \\
&+ |\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s)h(s)ds| \\
&+ |\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]h(s)ds| \\
&+ |\int_{0}^{t_1-\varepsilon} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]h(s)ds| \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s)Bu_\beta^p(\eta)d\eta \\
&+ \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]Bu_\beta^p(\eta)d\eta \\
&+ \int_{0}^{t_1-\varepsilon} [\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2 - s) - \mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1 - s)]Bu_\beta^p(\eta)d\eta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\quad & |S_{\alpha,L}(t_2)-S_{\alpha,L}(t_1)||H(0,\psi)| \\
+\quad & \tilde{l}|H(t_2,y_{t_2}+\hat{\psi}_{t_2})-H(t_1,y_{t_1}+\hat{\psi}_{t_1})| \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[\tilde{N}_g p'+N_g]ds \\
+\quad & \tilde{l}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|[\tilde{N}_g p'+N_g]ds \\
+\quad & \tilde{l}\int_{0}^{t_1-\varepsilon}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|[\tilde{N}_g p'+N_g]ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}P_K\int_0^s[\tilde{N}_g p'+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \tilde{l}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|k\int_0^s[\tilde{N}_g p'+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \tilde{l}\int_{0}^{t_1-\varepsilon}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|k\int_0^s[\tilde{N}_g p'+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\beta_{p'}(s)ds \\
+\quad & \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|\beta_{p'}(s)ds \\
+\quad & \int_{0}^{t_1-\varepsilon}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)|\beta_{p'}(s)ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|B\|\int_{t_1}^{t_2}\Big[m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|\psi(0)\|+m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\|+\tilde{l}(\tilde{n}_g p^{'}+n_g) \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]ds+\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\beta_{p'}(s)ds\Big](s)ds \\
+\quad & \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)| \\
& \Big[m\tilde{p}_L t^{\alpha-1}\|\psi(0)\|+m\tilde{p}_L t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\|+\tilde{l}(\tilde{n}_g p^{'}+n_g) \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]ds+\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\beta_{p'}(s)ds\Big](s)ds \\
+\quad & \int_{0}^{t_1-\varepsilon}|\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_2-s)-\mathcal{T}_{\alpha,L}(t_1-s)| \\
& \Big[m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|\psi(0)\|+m\tilde{l}t^{\alpha-1}\|H(0,\psi)\|+\tilde{l}(\tilde{n}_g p^{'}+n_g) \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]ds+\frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t k\int_0^s[\tilde{N}_g p^{'}+N_g]d\tau ds \\
+\quad & \frac{m\tilde{l}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\beta_{p'}(s)ds\Big](s)ds
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour $\varrho > 0$, on peut confirmer que $|\overline{x}(t_2) - \overline{x}(t_1)|$ tend vers zéro comme $t_2 \to t_1$. De nouveau, la compacité de $\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)$ pour $t > 0$ donne une continuité dans la topologie uniforme. Par conséquent, Π transforme B_p en une famille de fonctions équicontinue.

Etape 4. $\Pi(t) = \{\phi(t) : \phi \in \Psi(B_p)\}$ *est relativement compact dans X.*

Supposons que $t \in (0,\ c]$, $\varrho > 0, 0 < \varrho < t$. Maintenant $x \in B_p$, nous proposons

$$\begin{aligned}
\phi_\varrho(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t, y_t + \hat{\psi}_t) \\
&+ \int_0^{t-\varrho} L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&+ \int_0^{t-\varrho} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&+ \int_0^{t-\varrho} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^{t-\varrho} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c) \\
&\Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s, y_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\Bigg](s)ds.
\end{aligned}$$

Car $\mathcal{T}_{\alpha,L}(t)$ est compact, $\Lambda_\varrho(t) = \{\psi_\varrho(t) : \psi_\varrho \in \Pi(B_p)\}$ est relativement *compact sur* $X \forall \varrho$, $0 < \varrho < t$. *Par ailleurs,* $\forall 0 < \varrho < t$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
|\phi(\alpha) - \phi_\varrho(t)| \leq & \left| \int_{t-\varrho}^{t} L^{-1} A \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s) H(s, y_s + \hat{\psi}_s) ds \right| \\
+ & \left| \int_{t-\varrho}^{t} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s) A L^{-1} \int_0^s K(s-\tau) H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau) d\tau ds \right| \\
+ & \left| \int_{t-\varrho}^{t} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s) h(s) ds \right| \\
+ & \left| \int_{t-\varrho}^{t} \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s) B B^* \mathcal{T}_{\alpha,L}^*(c-t) R(\beta, \Gamma_0^c) \right. \\
& \left[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1} H(c, y_c + \hat{\psi}_c) \right. \\
- & \int_0^c L^{-1} A \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s) H(s, y_s + \hat{\psi}_s) ds \\
- & \int_0^c A \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s) \int_0^s K(s-\tau) H(\tau, y_\tau + \hat{\psi}_\tau) d\tau ds \\
- & \left. \left. \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta) h(\eta) d\eta \right] (s) ds \right|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$|\psi(t) - \psi_\varrho(t)| \to 0$ *si* $\varrho \to 0^+$.

Ainsi, il existe des ensembles relativement compacts et arbitrairement fermés. $\Lambda(t) = \{\psi(\alpha) : \psi \in \Pi(B_p)\}$, $\tilde{\Lambda}(t)$ *est relativement compact dans* $X, \forall t \in [0,\ c]$. *Parce que la compacité à* $t = 0$, *donc* $\Lambda(t)$ *est relativement compact dans* $X, \forall t \in [0,\ c]$.

Etape 5. Ψ *a un graphe fermé.*

Supposons que $y_n \to y_*$ *lorsque* $n \to \infty$, $\overline{x}_n \in \Pi y_n, \forall y_n \in B_p$, *et* $\overline{x}_n \to \overline{x}_*$ *lorsque* $n \to \infty$. *Maintenant, nous démontrons* $\overline{x}_* \in \Pi y_*$. *Car* $\overline{x}_n \in$

$\Pi y_n,\ \exists h_n \in S_{F,y_n} \ni$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_n(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t,(y_n)_t + \hat{\psi}_t) \\
&+ \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_n(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c) \\
& \Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,(y_n)_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_n(\eta)d\eta\Bigg](s)ds\, t \in V.
\end{aligned}$$

Nous devons démontrer que $\exists h_* \in S_{F,y_*} \ni$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_*(t) &= -S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) + L^{-1}H(t,(y_*)_t + \hat{\psi}_t) \\
&+ \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&+ \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_*(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c) \\
& \Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,(y_*)_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_*(\eta)d\eta\Bigg](s)ds\, t \in V.
\end{aligned}$$

Maintenant, $\forall t \in V$*, puisque* H *est continue, on obtient*

$$\Bigg\|\Bigg(\overline{x}_n(t) + S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) - L^{-1}H(t,(y_n)_t + \hat{\psi}_t)$$
$$- \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds$$
$$- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}$$
$$\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds$$
$$- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_n(s)ds$$
$$- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c)$$
$$\Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,(y_n)_c + \hat{\psi}_c)$$
$$- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds$$
$$- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds$$
$$- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_n(\eta)d\eta\Bigg](s)ds\Bigg)$$
$$-\Bigg(\overline{x}_*(t) + S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) - L^{-1}H(t,(y_*)_t + \hat{\psi}_t)$$
$$- \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds$$
$$- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds$$
$$- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_*(s)ds - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c)$$
$$\Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,(y_*)_c + \hat{\psi}_c)$$
$$- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds$$
$$- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds$$
$$- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_*(\eta)d\eta\Bigg](s)ds\Bigg)\Bigg\| \to 0\, as\, n \to \infty.$$

Supposons que l'opérateur linéaire $\Theta : L^1(V,\ X) \to C(V,\ X)$ *est continu,*

$$\begin{aligned}(\Theta f)(t) &= \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds \\ &- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c) \\ &\quad (\times)\left(\int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta\right)ds\end{aligned}$$

Maintenant, pour $t \in V$*, car* H *est continue et de* $x^{\text{º}}$*, on peut obtenir*

$$\begin{aligned}&\Bigg(\overline{x}_n(t) + S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) - L^{-1}H(t,(y_n)_t + \hat{\psi}_t) \\ &- \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1} \\ &\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds - \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_n(s)ds \\ &- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c)\Bigg[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] \\ &-L^{-1}H(c,(y_n)_c + \hat{\psi}_c) - \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_n)_s + \hat{\psi}_s)ds \\ &- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_n)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\ &- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_n(\eta)d\eta\Bigg](s)ds\Bigg) \in \Theta(S_{F,y_n}),\end{aligned}$$

donc, d'après le lemme (4.2.5), $\Theta \circ S_F$ *est un opérateur à graphe fermé. De* *plus, d'après Θ, on peut obtenir que*

$$\begin{aligned}
\Big(&\overline{x}_*(t) + S_{\alpha,L}(t)H(0,\psi) - L^{-1}H(t,(y_*)_t + \hat{\psi}_t) \\
&- \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h_*(s)ds \\
&- \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma_0^c) \\
&\Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,(y_*)_c + \hat{\psi}_c) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,(y_*)_s + \hat{\psi}_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,(y_*)_\tau + \hat{\psi}_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h_*(\eta)d\eta\Big](s)ds\Big) \in \Theta(S_{F,y_*}).
\end{aligned}$$

pour certains $h_* \in (S_{F,y_*})$. Ainsi, Π a un graphe fermé.
D'après ***l'étape 1-5*** *en conjonction avec le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que Π est une carte multivaluée compacte, semi-continue supérieure à valeurs convexes fermées. D'après le lemme (4.2.5), on peut supposer que Π a un point fixe x et qui est une solution mild de (4.3)-(4.4).* $\square$

Définition 4.4.2 *Le système fractionnaire (4.3) - (4.4) est dit approximativement contrôlable sur V . à condition que $\overline{R(c,x_0)} = X$, où $R(c,x_0) = \{x_c(x_0,u) : u(.) \in L^2(V;U)\}$ est une solution mild de (4.3) - (4.4).*

Théorème 4.4.2 *Supposons que l'hypothèses ($\boldsymbol{H}_0$ - $\boldsymbol{H}_5$) et $\boldsymbol{H}_7$ soient vrais. et de plus*

(a) *$F:[0,\ c]\times X\rightarrow X$ et $F(t,\ \cdot)$ est continue à partir de la topologie faible de X à la topologie forte de X.*

(b) *$\exists M\in L^1(V,\ [0,\ \infty))\ni$*

$$\sup_{x\in P_g}\|H(t,\ x)\|+\sup_{y\in P_g}\|AH(t,\ y)\|\leq M(t),$$

a.e. $t\in V$.

Alors (4.3) - (4.4) est approximativement contrôlable sur V.

Preuve : Soit $\hat{x}^\beta(.)$ un point fixe de Γ sur B_p. Du théorème (4.3.1), tout point fixe de ψ^{ϱ} est une solution mild de (4.3) - (4.4) sous la forme de

$$\hat{u}^\beta(t)=B^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-t)R(\beta,\Gamma^c_0)p(\hat{x}^\beta),$$

$$\begin{aligned}p(\hat{x}^\beta)=x_c&-S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0)-H(0,\psi)]-L^{-1}H(c,\hat{x}^\beta)\\&-\int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,\hat{x}^\beta)ds\\&-\int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,\hat{x}^\beta)d\tau ds\\&-\int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s,\hat{x}^\beta)ds,\end{aligned}$$

et satisfait

$$\begin{aligned}
\hat{x}^\beta(c) &= S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] + L^{-1}H(c,\hat{x}^\beta) \\
&+ \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,\hat{x}^\beta)ds \\
&+ \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,\hat{x}^\beta)d\tau ds \\
&+ \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s)ds + \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)BB^*\mathcal{T}^*_{\alpha,L}(c-s)R(\beta,\Gamma_0^c) \\
&\times \Big[x_c - S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,\hat{x}^\beta) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,\hat{x}^\beta)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,\hat{x}^\beta)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-\eta)h(\eta)d\eta \Big] ds \\
&= S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] + L^{-1}H(c,\hat{x}^\beta) \\
&+ \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,\hat{x}^\beta)ds \\
&+ \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,\hat{x}^\beta)d\tau ds \\
&+ \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s)ds + \Gamma_0^c R(\beta,\Gamma_0^c)p(\hat{x}^\beta) \\
&= x_c - \beta R(\beta,\Gamma_0^c)p(\hat{x}^\beta).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

À partir de l'hypothèse sur F et du théorème de Dunford-Pettis, on peut obtenir que $\left\{h^\beta(s)\right\}$ est faiblement compact dans $L^1(V,X)$, il existe donc une sous-suite $\left\{h^\beta(s)\right\}$, qui converge faiblement vers $h(s)$ dans $L^1(V,X)$. Caractérisons

$$\begin{aligned}
w = x_c &- S_{\alpha,L}(c)[L\psi(0) - H(0,\psi)] - L^{-1}H(c,x) \\
&- \int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)H(s,x_s)ds \\
&- \int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)H(\tau,x_\tau)d\tau ds \\
&- \int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}||p(\hat{x}^\beta) - w|| = &\|L^{-1}[H(c,\hat{x}^\beta) - H(c,x)]\| \\ &+\|\int_0^c L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)[H(c,\hat{x}^\beta) - H(c,x)]ds\| \\ &+\|\int_0^c A\mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)\int_0^s K(s-\tau)[H(\tau,\hat{x}^\beta) - H(\tau,x_\tau)]d\tau ds\| \\ &+\|\int_0^c \mathcal{T}_{\alpha,L}(c-s)[h(s,\hat{x}^\beta) - h(s)]ds\|\end{aligned} \tag{4.23}$$

A partir du théorème d'Ascoli-Arzela , nous démontrons $l(.) \to \int_0^{\cdot} \mathcal{T}_{\alpha,L}(.-s)l(s)ds : L^1(V,X) \to C(V,X)$ *est compact. Par conséquent,* $||p(\hat{x}^\beta) - w|| \to 0$ *lorsque* $\beta \to 0^+$.

$$\begin{aligned}||\hat{x}^\beta(c) - x_c|| &\leq ||\beta R(\beta,\Gamma_0^c)(w)|| + ||\beta R(\beta,\Gamma_0^c)||||p(\hat{x}^\beta) - w|| \\ &\leq ||\beta R(\beta,\Gamma_0^c)(w)|| + ||p(\hat{x}^\beta) - w||\end{aligned}$$

$||\hat{x}^\beta(c) - x_c|| \to 0$ *sur* $\beta \to 0^+$ *et qui montre la contrôlabilité approchée de la* (4.3)-(4.4). □

Nous étudions la contrôlabilité approchée du système (4.3)-(4.4) *avec des conditions non locales de la forme*

$$D_t^\alpha[Lx(t) - H(t,x_t)] \in M\left[x(t) + \int_0^t K(t-s)x(s)ds\right] + F(t,x_t) + Bu(t) \\ ,t \in V = [0,c], \tag{4.24}$$

$$x(t) = \psi(t) + q(x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \ldots, x_{t_n}) \in P_g, \qquad \alpha \in (-\infty, 0] \tag{4.25}$$

avec $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \therefore < t_n \leq c$, $q : P_g^n \to p_g$ *est une fonction donnée.*

Définition 4.4.3 *La fonction* $x : (-\infty, c] \to X$ *est appelée une solution* *mild de* (4.24)-(4.25) *si* $x_0 = \psi \in P_g$ *sur* $(-\infty, 0]$ *et*

$$\begin{aligned} x(t) = & S_{\alpha,L}(t)[L(\psi(0) + q(x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3}, \ldots, x_{t_n})(0)) - H(0,\psi)] + L^{-1}H(t, x_t) \\ & + \int_0^t L^{-1}A\mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)H(s, x_s)ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)AL^{-1}\int_0^s K(s-\tau)H(\tau, x_\tau)d\tau ds \\ & + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)h(s)ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\alpha,L}(t-s)Bu(s)ds, \ t \in V, \end{aligned}$$

est satisfait.

Théorème 4.4.3 *Si l'hypothèses* ($\boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H}_6$) *sont satisfaites, alors* (4.24)-(4.25) *est approximativement contrôlable sur* V *si*

$$\tilde{p}_L\left(1 + \frac{1}{\alpha}\frac{m^2\tilde{p}_L^2 t^{2(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)^2}p_B^2 c\right)\left[j\left(\frac{mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{N}_g(1+P_K) + \tilde{n}_g\right)\right] < 1.$$

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Nos principales contributions scientifiques dans cette thèse de doctorat ont porté sur l'existence et l'unicité de solution, la contrôlabilité approchée, ainsi que le contrôle optimal, pour différentes classes de systèmes de contrôle dynamiques non linéaires fractionnaires. Nous avons montré l'intérêt de la théorie de contrôle, pour différentes classes de systèmes de contrôle dynamiques non linéaires fractionnaires dans l'étude de plusieurs phénomènes complexes, pour lesquels, il peut être utilisé pour discuter l'existence de contrôle optimal et la contrôlabilité approchée.

D'abord, nous avons utilisé les opérateurs fractionnaires généraux, pour définir et développer une classe de système de contrôle dynamique impulsif non local et non linéaire d'ordre fractionnaire, nous avons démontré l'existence de la solution en utilisant la technique du point fixe, cela veut dire que le problème proposé est transformé en un problème du point fixe. Nous avons prouvé des propriétés qualitatives correspondantes aux contrôlabilités approchées et à l'optimalité en utilisant la théorie de contrôle, ce résultat a été publié dans une revue.

Par ailleurs, nous avons présenté un résultat concernant le contrôle optimal

d'équations semi-linéaires fractionnaires de φ-Hilfer impliquant des conditions impulsives non locales. Aussi les résultats de ce chapitre ont été publiés dans une revue.
Enfin, l'étude de la contrôlabilité approchée d'inclusions intégro-différentielles fractionnaires du type Sobolev.
L'étude de systèmes de contrôle dynamiques fractionnaires en utilisant les dérivées fractionnaires d'ordres variables sera l'objectif de nos perspectives.

Bibliographie

[1] *Agrawal, O. P. (2002). Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 272(1), 368-379.*

[2] *Agrawal, O. P., and Baleanu, D. (2007). A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. Journal of Vibration and Control, 13(9-10), 1269-1281.*

[3] *Ahmed, H. M., El-Borai, M. M., El-Owaidy, H. M., and Ghanem, A. S. (2018). Impulsive Hilfer fractional differential equations. Advances in Difference Equations, 2018(1), 1-20.*

[4] *Aimene, D., Baleanu, D., and Seba, D. (2019). Controllability of semi-linear impulsive Atangana-Baleanu fractional differential equations with delay. Chaos, Solitons and Fractals, 128, 51-57.*

[5] *Almeida, R., Malinowska, A. B. and Torres, D. F. M.(2010). A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string, J. Math. Phys. 51 ,no. 3, 033503, 12pp.*

[6] *Almeida, R., and Torres, D. F. (2010). Leitmann's direct method for fractional optimization problems. Applied mathematics and computation, 217(3), 956-962.*

[7] *Balasubramaniam, P., and Tamilalagan, P. (2017). The solvability and optimal controls for impulsive fractional stochastic integro-differential equations via resolvent operators. Journal of Optimization Theory and Applications, 174(1), 139-155.*

[8] *Bourdin, L. (2012). A class of fractional optimal control problems and fractional Pontryagin's systems. Existence of a fractional Noether's theorem. arXiv preprint arXiv :1203.1422.*

[9] *Bragdi, M., and Debbouche, A. (2013). Controllability of fractional nonlocal quasilinear evolution inclusions with resolvent families. International Journal of Difference Equations, 8(1), 15-25.*

[10] *Bourdin, L., Odzijewicz, T., and Torres, D. F. (2012). Existence of minimizers for fractional variational problems containing Caputo derivatives. arXiv preprint arXiv :1208.2363.*

[11] *Chen, Q., Debbouche, A., Luo, Z., and Wang, J. (2017). Impulsive fractional differential equations with Riemann-Liouville derivative and iterative learning control. Chaos, Solitons and Fractals, 102, 111-118.*

[12] *Cong, N. D., and Tuan, H. T. (2017). Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations. Journal of Integral Equations and Applications, 29(4), 585-608.*

[13] *Coimbra, C. F. (2003). Mechanics with variable order differential operators. Annalen der Physik, 12(11-12), 692-703.*

[14] Debbouche, A., and Antonov, V. (2017). Approximate controllability of semilinear Hilfer fractional differential inclusions with impulsive control inclusion conditions in Banach spaces. Chaos, Solitons and Fractals, 102, 140-148.

[15] Debbouche, A., and Nieto, J. J. (2014). Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls. Applied Mathematics and Computation, 245, 74-85.

[16] Debbouche, A., Nieto, J. J., and Torres, D. F. (2017). Optimal solutions to relaxation in multiple control problems of Sobolev type with nonlocal nonlinear fractional differential equations. Journal of Optimization Theory and Applications, 174(1), 7-31.

[17] Debbouche, A., and Torres, D. F. (2014). Approximate controllability of fractional delay dynamic inclusions with nonlocal control conditions. Applied Mathematics and Computation, 243, 161-175.

[18] Debbouche, A., and Torres, D. F. (2015). Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions. Fractional Calculus and Applied Analysis, 18(1), 95-121.

[19] Debbouche, A., and Baleanu, D. (2012). Exact null controllability for fractional nonlocal integrodifferential equations via implicit evolution system. Journal of Applied Mathematics, 2012.

[20] Debbouche, A., and Torres, D. F. (2013). Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces. International Journal of Control, 86(9), 1577-1585.

[21] *Dhayal, R., Malik, M., and Abbas, S. (2021). Solvability and optimal controls of non-instantaneous impulsive stochastic fractional differential equation of order q ?(1, 2). Stochastics, 93(5), 780-802.*

[22] *Dhayal, R., Malik, M., and Abbas, S. (2021). Existence, stability and controllability results of stochastic differential equations with non-instantaneous impulses. International Journal of Control, 1-12.*

[23] *Dhayal, R., Malik, M., Abbas, S., and Debbouche, A. (2020). Optimal controls for second-order stochastic differential equations driven by mixed-fractional Brownian motion with impulses. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43(7), 4107-4124.*

[24] *Diaz, G., and Coimbra, C. F. M. (2009). Nonlinear dynamics and control of a variable order oscillator with application to the van der Pol equation. Nonlinear Dynamics, 56(1), 145-157.*

[25] *Duch, P., Laski, M., Blaszczyk, S., and Ostalczyk, P. (2013). Variable-, Fractional-Order Dead-Beat Control of a Robot Arm. In Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems (pp. 313-323). Springer, Heidelberg.*

[26] *El-Nabulsi, R. A., and Torres, D. F. (2007). Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with Riemann-Liouville derivatives of order (a, ß). Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30(15), 1931-1939.*

[27] *Frederico, G. S., and Torres, D. F. (2007). Necessary optimality conditions for fractional action-like problems with intrinsic and observer times. arXiv preprint arXiv :0712.0152.*

[28] *Frederico, G. S., and Torres, D. F. (2008). Fractional conservation laws in optimal control theory. Nonlinear Dynamics, 53(3), 215-222.*

[29] *Gou, H., and Li, B. (2017). Local and global existence of mild solution to impulsive fractional semilinear integro-differential equation with noncompact semigroup. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 42, 204-214.*

[30] *Guo, T. L. (2013). The necessary conditions of fractional optimal control in the sense of Caputo. Journal of Optimization Theory and Applications, 156(1), 115-126.*

[31] *Harrat, A., Nieto, J. J., and Debbouche, A. (2018). Solvability and optimal controls of impulsive Hilfer fractional delay evolution inclusions with Clarke subdifferential. Journal of Computational and Applied Mathematics, 344, 725-737.*

[32] *Hilfer, R. (Ed.). (2000). Applications of fractional calculus in physics. World scientific.*

[33] *Karthikeyan, K., Debbouche, A., and Torres, D. F. (2021). Analysis of Hilfer fractional integro-differential equations with almost sectorial operators. Fractal and Fractional, 5(1), 22.*

[34] *Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.*

[35] *Kerboua, M., Debbouche, A., and Baleanu, D. (2013, January). Approximate controllability of Sobolev type nonlocal fractional stochastic dynamic systems in Hilbert spaces. In Abstract and applied analysis (Vol. 2013). Hindawi.*

[36] Kucche, K. D., Kharade, J. P., and Sousa, J. V. D. C. (2019). On the Nonlinear Impulsive Ψ-Hilfer Fractional Differential Equations. arXiv preprint arXiv :1901.01814.

[37] Kucche, K. D., and Kharade, J. P. (2020). Analysis of impulsive ψ-Hilfer fractional differential equations, Mediterr. J. Math, 17, 163.

[38] Lightbourne III, J. H., and Rankin III, S. M. (1983). A partial functional differential equation of Sobolev type. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 93(2), 328-337.

[39] Liu, S., Debbouche, A., and Wang, J. (2017). On the iterative learning control for stochastic impulsive differential equations with randomly varying trial lengths. Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 47-57.

[40] Liu, S., Wang, J., and Zhou, Y. (2017). Optimal control of noninstantaneous impulsive differential equations. Journal of the Franklin Institute, 354(17), 7668-7698.

[41] Lorenzo, C. F., and Hartley, T. T. (2002). Variable order and distributed order fractional operators. Nonlinear dynamics, 29(1), 57-98.

[42] Miller, K. S., and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley.

[43] Malinowska, A. B., and Torres, D. F. (2010). Generalized natural boundary conditions for fractional variational problems in terms of the Caputo derivative. Computers and Mathematics with Applications, 59(9), 3110-3116.

[44] Torres, D. F., and Malinowska, A. B. (2012). Introduction to the fractional calculus of variations. World Scientific Publishing Company.

[45] Odzijewicz, T. (2014). Generalized Fractional Calculus of Variations. arXiv preprint arXiv :1403.4379.

[46] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. (2012, December). Variable order fractional variational calculus for double integrals. In 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (pp. 6873-6878). IEEE.

[47] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. (2013). Fractional variational calculus of variable order. In Advances in harmonic analysis and operator theory (pp. 291-301). Birkhäuser, Basel.01.

[48] Odzijewicz, T., Malinowska, A., and Torres, D. (2013). Noether's theorem for fractional variational problems of variable order. Open Physics, 11(6), 691-701.

[49] Odzijewicz, T., Malinowska, A., and Torres, D. (2013). Green's theorem for generalized fractional derivatives. Fractional Calculus and Applied Analysis, 16(1), 64-75.

[50] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. (2013). Fractional calculus of variations of several independent variables. The European Physical Journal Special Topics, 222(8), 1813-1826.

[51] Pazy, A. (2012). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations (Vol. 44). Springer Science and Business Media.

[52] *Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, mathematics in science and engineering.*

[53] *Qin, H., Zuo, X., Liu, J., and Liu, L. (2015). Approximate controllability and optimal controls of fractional dynamical systems of order 1< q< 2* $1 < q < 2$ *in Banach spaces. Advances in Difference Equations, 2015(1), 1-17.*

[54] *Radhakrishnan, B., and Balachandran, K. (2012). Controllability of neutral evolution integrodifferential systems with state dependent delay. Journal of Optimization Theory and Applications, 153(1), 85-97.*

[55] *Riewe, F. (1997). Mechanics with fractional derivatives. Physical Review E, 55(3), 3581.*

[56] *Ramirez, L. E., and Coimbra, C. F. (2010). On the selection and meaning of variable order operators for dynamic modeling. International Journal of Differential Equations, 2010.*

[57] *Ramirez, L. E., and Coimbra, C. F. (2011). On the variable order dynamics of the nonlinear wake caused by a sedimenting particle. Physica D : nonlinear phenomena, 240(13), 1111-1118.*

[58] *Riewe, F. (1996). Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. Physical Review E, 53(2), 1890.*

[59] *Sakthivel, R., Ganesh, R., Ren, Y., and Anthoni, S. M. (2013). Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(12), 3498-3508.*

[60] *Shu, X. B., and Wang, Q. (2012). The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order 1< a< 2. Computers and Mathematics with Applications, 64(6), 2100-2110.*

[61] *Samko, S. G. (1995). Fractional integration and differentiation of variable order. Analysis Mathematica, 21(3), 213-236.*

[62] *Samko, S. (2013). Fractional integration and differentiation of variable order : an overview. Nonlinear dynamics, 71(4), 653-662.*

[63] *Samko, S. G., and Ross, B. (1993). Integration and differentiation to a variable fractional order. Integral transforms and special functions, 1(4), 277-300.*

[64] *Sierociuk, D., Macias, M., and Malesza, W. (2013). Analog modeling of fractional switched-order derivatives : Experimental approach. In Advances in the theory and applications of non-integer order systems (pp. 271-280). Springer, Heidelberg.*

[65] *Sakthivel, R., Revathi, P., and Ren, Y. (2013). Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 81, 70-86.*

[66] *Sousa, J.V.C. and Oliveira, E.C.(2018) On the ψ-Hilfer fractional derivative. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 60, 72-91.*

[67] *Sousa, J.V.C., Kucche, K.D. and Oliveira, E.C.(2019) Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations. Applied Mathematics Letters, 88, 73-80.*

[68] Sousa, J. V. D. C., and de Oliveira, E. C. (2018). On the Ulam-Hyers-Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the ψ-Hilfer operator. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20(3), 1-21.

[69] Sousa, J. V. D. C., Rodrigues, F. G., and Capelas de Oliveira, E. (2019). Stability of the fractional Volterra integro-differential equation by means of ?-Hilfer operator. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(9), 3033-3043.

[70] Suechoei, A., and Ngiamsunthorn, P. S. (2020). Existence uniqueness and stability of mild solutions for semilinear ?-Caputo fractional evolution equations. Advances in Difference Equations, 2020(1), 1-28.

[71] Triggiani, R. (1977). A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces. SIAM Journal on Control and Optimization, 15(3), 407-411.

[72] Vadivoo, B.S., Ramachandran, R., Cao. J., Zhang, H. and Li, X.(2018). Controllability analysis of nonlinear neutral-type fractional-order differential systems with state delay and impulsive effects. International Journal of Control, Automation and Systems, 16, 659-669.

[73] Vijayakumar, V., and Udhayakumar, R. (2020). Results on approximate controllability for non-densely defined Hilfer fractional differential system with infinite delay. Chaos, Solitons and Fractals, 139, 110019.

[74] Wang, J. and Zhou, Y.,(2011). A class of fractional evolution equations and optimal controls. Nonlinear Analysis : Real World Applications, 12, no. 1, 262-272.

[75] *Wang, J. and Zhang, Y.,(2015). Nonlocal initial value problems for differential equations with Hilfer fractional derivative. Applied Mathematics and Computation, 266, 850-859.*

[76] *Yang, M., and Wang, Q. R. (2017). Approximate controllability of Hilfer fractional differential inclusions with nonlocal conditions. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(4), 1126-1138.*

[77] *Yu, X., Debbouche, A., and Wang, J. (2017). On the iterative learning control of fractional impulsive evolution equations in Banach spaces. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(17), 6061-6069.*

[78] *Yan, Z., and Jia, X. (2017). Optimal controls of fractional impulsive partial neutral stochastic integro-differential systems with infinite delay in Hilbert spaces. International Journal of Control, Automation and Systems, 15(3), 1051-1068.*

[79] *Yan, B. (2001). Boundary value problems on the half-line with impulses and infinite delay. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 259(1), 94-114.*

[80] *Zhou, Y., and Jiao, F. (2010). Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations. Computers and Mathematics with Applications, 59(3), 1063-1077.*

[81] *Zhou, Y., Wang, J., and Zhang, L. (2016). Basic theory of fractional differential equations. World scientific.*