République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

BERKI Chaima

Intitulé

Résolution analytique des équations aux dérivées partielles linéaire et d'ordre fractionnaire utilisant la transformée de Fourier fractionnaire

Dirigé par : Dr. DEBBAR Rabah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. A. FRIOUI	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. R. DEBBAR	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. N. BEN DJAZIA	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Remerciments

J'aimerais exprimerma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadreurMr. Debbar pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils, grâce auxquels ce modeste travail a été accompli.

Merci aux nombres des jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant dévaluer et examiner notre travail

Je remercie aussi le chef de département Dr CHIHEB, ainsi que tout les enseignants.

RÉSUMÉ

Ce mémoire traite des solutions analytiques des équations aux dérivées partielles fractionnaires utilisant la transformation de Fourier fractionnaire (FrFT) pour résoudre les équations de diffusion de chaleur fractionnaire, d'onde fractionnaire, de télégraphe fractionnaire et de cinétique fractionnaire.

Mots clés : Transformée de Fourier fractionnaire, Equation aux dérivées partielles fractionnaires, Fonction de Mittag-Leffler, Dérivée fractionnaire, Intégrale fractionnaire.

ABSTRACT

This memoire discusses the analytical solutions of fractional partial differential equations using Fractional Fourier transform (FrFT) is applied to solve fractional heat diffusion, fractional wave, fractional telegraph and fractional kinetic equations.

Keywords : Fractional Fourier transform, Fractional partial differential equation, Mittag-Leffler function, Fractional derivative, Fractional integral.

ملخص

تناقش هذه المذكرة الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الجزئية الجزئية باستخدام تحويل فورييه الكسري الذي يتم تطبيقه لحل المعادلات الحرارية الجزئية ، والموجة الكسرية ، والتلغراف الكسري ، والمعادلات الحركية الجزئي

الكلمات الدالة :

تحويل فورييه الجزئي ، معادلة تفاضلية جزئية جزئية ، دالة ميتاج-ليفلر ، مشتق كسري ، تكامل كسري

Table des matières

Introduction

Les transformations intégrales ont été considérées comme l'un des principaux outils mathématiques pour résoudre les différences et les équations aux dérivées partielles et appliquées dans presque tous les domaines de la science et de l'ingénierie depuis longtemp

Les applications des transformations intégrales fractionnaires sont un domaine d'investigation pionnier et de nombreuses transformations intégrales, telles que comme Fourier fractionnaire, Hankel fractionnaire, Laplace fractionnaire, Sumudu fractionnaire, Wavelet fractionnaire et Mellin fractionnaire des transformations sont utilisées pour résoudre des équations différentielles fractionnaires[1]-[6]

La transformée de Fourier est l'une des transformées intégrales les plus largement utilisées car elle a de multiples applications dans les diverses disciplines[7]-[9]La transformée de Fourier de la fonction $\varphi(\pi)$ est notée $\hat{\varphi}(\pi)$ et est définie comme :

$$\hat{\phi}(\varpi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\ \varpi x} \phi(x)\, dx,\ \ \varpi \geq 0,$$

Et sa formule d'inversion est données par :

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\ \varpi x} \hat{\phi}(\varpi)\, d\varpi,\ \ \varpi \geq 0,$$

A condition que les intégrale ci-dessus convergent.

La transformée de Fourier d'ordre fractionnaire a été énormément utilisée après 1980, lorsque la définition a été consolidé par Namias[1]. Il l'a appliqué pour résoudre certaines équations différentielles dans le domaine de la mécanique quantique. Crédit pour sa première application va à Wiener[10] en 1929. En tant que généralisation de la transformée de Fourier, FrFT a un degré supplémentaire de liberté et est devenu un outil plus efficace que la transformée de Fourier classique en raison de sa plus large gamme d'applications dans les différents secteurs

des mathématiques appliquées, de l'électrotechnique, de l'optique, du traitement du signal, de l'analyse du signal, de l'optique communication, mécanique quantique, conception de filtres, estimation et récupération de signal [11]-[17].
Plusieurs définitions de FrFt ont été expérimentées en utilisant diffrents aspects mathématiques[16].En 2003 bolangna et l'Ouest a présenté une nouvelle définition de la FrFT utilisant des concepts de calcul fractionnaire, mais elle n'a pas plus pu attier beaucoup d'attention de enqueteurs . En 2008, Y.F.Luchko, H.Martinez ,J.J.Trujillo[19] etJumarie[20] ont également utilisé des concept de calcul fractionnaire et introduit de nouvelles définitions de FrFT d'orde réel a. Dans le présent travail,nous avons appliqué FrFt pour obtenir des solutions analytiques d'équation différentielles partielles fractionnaires.
Dans ce contexte, la transformée de Fourier fractionnaire a été utilisée pour obtenir des solutions analytiques de chaleur fractionnelle diffusion, onde fractionnaire, télégraphe fractionnaire et équations cinétiques fractionnaires. Dans cette étude, la méthode proposée donne les solutions exactes des équations de diffusion de chaleur fractionnaire et d'onde fractionnaire en termes de fonction de Mittag-Leffler et fonction delta de Dirac fractionnaire respectivement. La solution de l'équation télégraphique fractionnaire a été dérivée en intégrale forme, et la solution de l'équation cinétique fractionnaire est obtenue sous forme de série.

Chapitre 1

Preliminaries

Dans cette partie, nous présetons les fonctions Gamma, Beta et L'expontielle de MMittag-Leffler. Ces fonctions jouent un role trés important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est considéré comme étant l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire

Définition 1.1.1 *[21]Pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'integrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z < 1$.
Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ *est la relation de récurrence suivante*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{1.2}$$

qu'on peut démontre par une intégration par partie

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{+\infty}\exp(-t)\,t^z dt=\left[-\exp(-t)\,t^z\ \right]_0^{+\infty}+z\int_0^{+\infty}\exp(-t)\,t^{z-1}dt=z\Gamma(z)\ .$$

la fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1)=n!,\forall n\in\mathbb{N}$, *en effet* $\Gamma(1)=1$ *et en utilisant la relation* (1.2) *nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1)=1!,\\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2)=2.1!=2!\\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3)=3.2!=3!\\
&.\\
&.\\
&.\\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!.
\end{aligned}$$

1.1.2 La fonction Beta

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.1.2 *[21] La fonction Beta est un type d'integration d'Euler définie pour des nombres* z *et* w *par*

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(t-1)^{w-1}\,dt,\quad \operatorname{Re}(z)\ >0,\operatorname{Re}(w)\ >0. \tag{1.3}$$

La fonction Beta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},\ \ \operatorname{Re}(z)>0,\ \ \operatorname{Re}(w)>0. \tag{1.4}$$

il s'ensuit de (1.4) que

$$B(z,w) = B(w,z), \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \quad \mathrm{Re}(w) > 0.$$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag -Leffler joue un role très important dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Définition 1.1.3 *pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0. \tag{1.5}$$

En partuclier :

$$E_1(z) = e^z, \; E_2(z) = \cosh\left(\sqrt{z}\right).$$

Cette fonction peut etre généralisée pour deux paramètre pour donner :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.6}$$

1.2 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire

Le but de cette partie est d'introduire Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire au sens du Riemann-Liouville.

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens du Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}\,(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à cauchy) d'intégrale répété n-fois.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,T], T > 0$.Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'aprés le théorème de Fubini on aura :

$$I^2 f(t) = \int_0^t I^1 f(u)\, du = \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)\, d\tau \right) du = \int_0^t \left(\int_0^u du \right) f(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

En répétant n fois, on arrive à la n^{ieme} primitive de la fonction f sous la forme :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau,\ d\tau,\ t\ > 0, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7}$$

Cette formule est appelée formule de Gauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.7) paurrait avoir un sens meme quant n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante

Définition 1.2.1 *[21][22] soit $f \in L^1([0,T])$, $T > 0$, L'intégrale fractionnaire de Riemman-Liouville de la fonction f d'orde $\alpha \in \mathbb{C}\,(\operatorname{Re}(\alpha) > 0)$ notée I^α est définie par :*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, t\ > 0, \tag{1.8}$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1)

Exemple 1.2.1 *L'intégrale de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.*

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau. \tag{1.9}$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = ts,$$

où $s = 0$ quant $\tau = 0$ et $s = 1$ quant $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.9) devient

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - ts)^{\alpha-1} (ts)^{\beta} t ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t(1-s))^{\alpha-1} t^{\beta+1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la difinition de la fonction Beta (1.3) puis la relations (1.4) on arrive à :

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^{\beta}$ *est donnée par :*

$$I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \tag{1.10}$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 *[21][22] Soit* $f \in L^1([0.T]), T > 0$ *une fonction intégrable sur* $[0, T]$, *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ *notée* $D^{\alpha} f$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(t) &= D^{\alpha} I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où $n - 1 < [\mathrm{Re}(\alpha)] < n,$ *et* $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ *est la partie entière de* $\mathrm{Re}(\alpha)$.

En partuclier, si $\alpha = 0$, alors

$$\begin{aligned}
D^0 f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t f(\tau)\,d\tau = f(t). \\
\text{si } \alpha &= n \in \mathbb{N}, \text{alors :} \\
D^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\right)\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$,d'où

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\,d\tau, t > 0$$

Exemple 1.2.2 *la dérivée de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville .*
soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$,d'aprés (1.11) et la relation (1.10), (voir l'exemple1.1) ona :

$$D^\alpha t^\beta = D^n I^{n-\alpha} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n t^{\beta+n-\alpha}. \tag{1.12}$$

En tennat compte

$$\begin{aligned}
D^n t^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots.(\beta-\alpha+1)\, t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

On substitue le résultat (1.13), dans la formule (1.12), pour obtenir

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par :

$$D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \tag{1.14}$$

1.3 Contexte de la série d'ordre fractionnaire de Taylor

1.3.1 Formule de base pour les fonctions à une variable

Un dévelopement de Taylor généralisé d'ordre fractionnaire qui s'applique aux fonctions non différenciables(série F-Taylor dans la suite) se lit comme suit[26]

Proposition 1.3.1 *Supposons que la fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ *a une dérivée fractionnaire d'ordre* k *et* $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, *alors l'égalité suivante est vérifiée,*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha k}}{(\alpha k)!} f^{(\alpha k)}(x), \ 0 < \alpha \leq 1, \tag{1.15}$$

Où $f^{(\alpha k)}(x)$ *est la dérivée d'ordre* αk *de* $f(x)$, *et avec notation*

$$\Gamma(1 + \alpha k) = (\alpha k)!,$$

Proposition 1.3.2 *Où* $\Gamma(.)$ *désigne la fonction gamma d'Euler.*
Formellement, cette série peut être écrite

$$f(x+h) = E_\alpha(h^\alpha D_x^\alpha) f(x), \tag{1.16}$$

Où D_x, *est l'opérateur dérive par rapport à* x, *et* $E_\alpha(u)$, *est la fonction de Mittag -Leffler définie par l'expression*

$$E_\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(\alpha k)!}.$$

Cette série fractionnaire de Taylor ne tient pas avec la dérivée standart de Riemann-Liouville et ne s'applique qu'aux fonctions non défférenciable.

Corollaire 1.3.1 *supposons que* $m < \alpha \leq m - 1$, $m \in N - \{0\}$, *et* $f(x)$*ait des dérivées d'ordre* k*(entier),* $1 \leq k \leq m$. *Supposons en outre que* $f_m(x)$ *a une série fractionnaire de Taylor d'ordre* $\alpha - m = \beta$ *fournie par l'expression*

$$f^{(m)}(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k(\alpha-m)}}{\Gamma[1 + k(\alpha - m)]} D^{k(\alpha-m)} f^{(m)}(x), \ m < \alpha \leq m - 1, \tag{1.17}$$

Ensuite, l'integration de cette série par rappoort à h fournit

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k\beta+m)}}{\Gamma(k\beta+m+1)} f^{(k\beta+m)}(x), \ \beta = \alpha - m; \tag{1.18}$$

L'ordre de dérivation dans $f^{(k\beta+m)}(x)$ *est d'une importance promordiable et doit être compris comme* $D^{k\beta} f^{(m)}(x)$, *puisque nous commencons par la serie fractionnaire de Taylor de* $f^{(m)}(x)$.

Serie Me-Laurin d'ordre fractionnaire

En faisant la substitution $h \leftarrow x$ *et* $x \leftarrow 0$ *dans (1.15), on obtient la série Mc-Laurin fractionnaire*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha k}}{(\alpha k)!} f^{(\alpha k)}(0), \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.19}$$

1.3.2 Série de Taylor fractionnaire pour les fonctions multivariables

signalons que la série de Taylor fractionnaire ainsi obtenue peut être généralisée de manière simple à des fonctionc multiviriables pour donner, par exemple pour deux variables,

$$f(x+h, y+l) = E_\alpha (h^\alpha D_x^\alpha) E_\alpha \left(I^\eta D_y^\eta\right) f(x,y), \quad 0 < \alpha, \ \eta < 1, \tag{1.20}$$

Donc le différentiel

$$df(x,y) = (\alpha!)^{-1} f_x^{(\alpha)}(x,y)(dx)^\alpha + (\eta!)^{(-1)} f_y^{(\eta)}(x,y)(dy)^\eta, \quad 0 < \alpha, \eta < 1. \tag{1.21}$$

Pour des valeurs plus grandes de α et $\eta, 1 < \alpha, \ \eta < 2$ on aura

$$df = f_x dx + f_y dy + (\alpha!)^{(-1)} + f_x^{(\alpha)}(dx)^{(\alpha)} + (\eta!)^{(-1)} f_y^{(\eta)}(dy)^\eta$$

$$+ (\alpha!\eta!)^{-1} \partial_{xy}^{\alpha+\eta} f(x,y)(dx)^\alpha (dy)^\alpha, \quad 0 < \alpha, \eta < 2. \tag{1.22}$$

1.4 Formules de bases pour la dérivée fractionnaire et l'integrale

1.4.1 Dérivée fractionnaire de fonctions composées

L'équation (1.15) fournit la relation différentielle utile

$$d^{\alpha}f \cong \Gamma(\alpha+1)\,df, \qquad 0<\alpha<1, \tag{1.23}$$

ou en termes de différence fractionnaires , $\Delta^{\alpha}f \cong \alpha!\Delta f$.

Corollaire 1.4.1 *Les égalités suivantes sont vérifiées, qui sont*

$$D^{\alpha}x^{\gamma} = \Gamma(\gamma+1)\,\Gamma^{-1}(\gamma+1-\alpha)\,x^{\gamma-\alpha}, \qquad \gamma>0. \tag{1.24}$$

Où, quel montant pour le même nous fixons $(\alpha = n+\theta)$

$$D^{\alpha+\theta}x^{\gamma} = \Gamma(\gamma+1)\,\Gamma^{-1}(\gamma+1-n-\theta)\,x^{\gamma-n-\theta}, \quad 0<\theta<1,$$

$$(u(x)\,v(x))^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}(x)\,v(x) + u(x)\,v^{(\alpha)}(x)\,, \tag{1.25}$$

$$(f[u(x)])^{(\alpha)} = f'_u(u)\,u^{\alpha}(x)\,, \tag{1.26}$$

$$= f_u^{(\alpha)}(u)\,(u_x)^{\alpha}\,. \tag{1.27}$$

$u(x)$ *non-differentiable in (1.25) et (1.26) et différentiable en(1.27),v(x) est indifférenciable, et* $f(u)$*est différentiable en (1.26) et nan-différentiable en (1.27).*

1.4.2 Intégration par rapport à $(dx)^{\alpha}$

l'intégrale par rapport à $(dx)^{\alpha}$ est définie comme la solution de l'équation différentielle fractionnaire

$$dy = f(x)\,(dx)^{\alpha}\,, x \geqslant 0,\ y(0)=0, \quad 0<\alpha<1, \tag{1.28}$$

qui est fourni par le résultat suivant :

Lemme 1.4.1 *Soit $f(x)$ une fonction continue, alors la solution de l'équation (1.28) est défini par l'égalité [25]*

$$Y = \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi,\ 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.29}$$

Preuve. On mulptile les deux côtés de (1.23) par α, et en tenant comte de on (1.28) l'égalité

$$y^{(\alpha)}(x) = \alpha! f(x),$$

Qui fournit

$$y(x) = \alpha! D^{-\alpha} f(x) = \frac{\alpha!}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi$$

En conséquence directe de(1.29), ona l'égalité

$$\int_0^x f(\xi)(d\xi)^{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \int_0^x (x-\xi)^\beta f(\xi)(d\xi)^\alpha, 0 < \alpha+\beta < 1, \tag{1.30}$$

$$\int_a^b f(\xi)(d\xi)^\alpha = \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} \left(\frac{b-\xi}{a_j-\xi}\right)^{\alpha-1} f(\xi)(d\xi)^\alpha,\quad \alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 ... < \alpha_N. \tag{1.31}$$

La formule d'intégration fractionnaire par partie

$$\int_a^b u^{(\alpha)}(x)\, v(x)(dx)^\alpha = \alpha! \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\, v^{(\alpha)}(x)(dx)^\alpha \tag{1.32}$$

peut être obtenu facilement en combinant (1.23) avec (1.25).

Changement de variable .considérons la transformation variable $y = g(x)$ dans laquelle est une fonction différentielle non décroissante alors, selon (1.23) une égalité

$$\int f(y)(dy)^\alpha = \int (g(x)) \left(g'(x)\right)^\alpha (dx)^\alpha,\quad 0 < \alpha < 1,$$

et alors g(x) a une dérivée fractionnaire positive d'ordre β, $0 < \alpha$, $\beta < 1$.

Quelques exemples

(i) En faisant $f(x) = x^\gamma$en (1.29) on obtient

$$\int_0^x \xi^\gamma (d\xi)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.33}$$

(ii) Supposons maintenent que $f(x)$ est la fonction généralisée dirac delta alors

$$\int_0^x \delta(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.34}$$

Application à la dérivée fractionnaire de la fonction delta de Dirac

En utilisant l'équation (1.29) d'une part, et en étendant la définition bien connue d'autre part , nous définirons la dérivée fractionnaire de la fonction delta de Dirac par l'égalité

$$\int \delta^{(\alpha)}(\xi) f(\xi)(d\xi)^\alpha = -\int \delta(\xi) f^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{1.35}$$

Et l'Eq (1.29), direct donnera

$$\int \delta^{(\alpha)}(\xi) f(\xi)(d\xi)^\alpha = -\alpha x^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(0), \quad 0 < \alpha \leq 1 . \tag{1.36}$$

□

1.4.3 Dérivée fractionnaire des intégrales fractionnaires

les relations entre l'intégrales fractionnaire et les dérivés fractionnaires se lit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \Gamma(1+\alpha) f(x) = \alpha! f(x). \tag{1.37}$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \int_0^{u(x)} f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha! f(u(x))(u^{'}(x))^\alpha. \tag{1.38}$$

La preuve de (1.37) résulte de la combinaison des égalités $y^{(\alpha)}(x) = f(x)$ et $d^\alpha y = \alpha! dy$ qui donne

$$y = \frac{1}{\alpha!} \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha .$$

1.4.4 Sur les équation différentielles fractionnaires linéaires

Solution de l'équation différentielle fractionnaire $y^{(\alpha)}(x) = f(x), y(\alpha) = y_\alpha$

On a successivement

$$\int_a^x d^\alpha y = \alpha!\left(y(x) - y(a)\right) = \int_a^x f(\xi)(d\xi)^\alpha$$

Donc

$$y(x) = y_\alpha + \Gamma^{-1}(\alpha)\int_\alpha^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)(d\xi). \tag{1.39}$$

Solutions de l'équation différentielle fractionnaire $y^{(\alpha)}(x) = f(x)y + g(x), y(0) = y_0$

Cette solution peut être obtenue en dupliquant la technique dite de lagrange à variation constante comme suit :

les solutions de l'équation homogène (obtenue en faisant g(x)=0) est

$$y(x) = CE_\alpha\left\{\int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha\right\}. \tag{1.40}$$

1.4.5 Diverses formules d'ordre fractionnaire

$$\int \frac{d^\alpha x}{x} = \ln_\alpha \frac{x}{c} \qquad x = E_\alpha(\ln_\alpha x)$$

Où C désigne une constante telle que $x/c > 0$ et ou $\ln_\alpha x$ désigne la fonction inverse de la fonction Mittlag-leffler

$$\ln_\alpha(x^y) = y^\alpha \ln_\alpha x, \qquad E_\alpha(x^\alpha y^\beta) = (\,E_\alpha(y^\alpha))^x$$

$$(\ln_\alpha(uv))^{\frac{1}{\alpha}} = (\ln_\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}} + (\ln_\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\ , \qquad (dx)^\alpha = (\alpha!)^{-1} d^\alpha(x^\alpha)$$

$$E_\alpha(\lambda(x+y)^\alpha) = E_\alpha(\lambda x^\alpha) + E_\alpha(\lambda y^\alpha), \qquad (\alpha!)\ (1-\alpha)!dx = x^{1-\alpha}(dx)^\alpha$$

$$D^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha)\ , \qquad D^\alpha E_\alpha(u^\alpha(x)) = E_\alpha(u^\alpha)\left(u'(x)\right)^\alpha.$$

Chapitre 2

Solutions analytiques d'équations aux dérivées partielles linéaires

2.1 Les équations de la chaleur

Nous résoudrons le problème

$$u_t = ku_{xx} \quad \text{pour} \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Parce que x varie sur toute la ligne réelle dans ce problème, nous pouvons essayer une transformée de Fourrier en x.

Commencer par la transformée de l'équation de la chaleur

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[ku_{xx}] = k\ \mathcal{F}[u_{xx}].$$

A gauche, la transformée en a et la différenciation par rapport à t se traversent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u_t](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t).
\end{aligned}$$

Où $\hat{u}(\omega, t)$ est la transformée de $u(x, t)$ dans la variable .

$$\mathcal{F}[u_{xx}](\omega) = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

La transformée de Fourrier de l'équation de la chaleur est

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u} = -k\omega^2 \hat{u}_t$$

$$\hat{u}_t + \ k\omega^2 \hat{u} = 0.$$

Considérez cela comme une équation différentielle ordinaire dans la variable t, avec ω transporté comme paramètre. la solution est

$$\hat{u}(\omega, t) = A_\omega e^{-\omega^2 kt}.$$

dans lequel A_ω peut dépendre de ω, et doit être déterminer en fonction de la condition initiale

pour determinerA_ω, appliquer $\mathcal{F}$ à la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ pour obtenir

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = A_\omega.$$

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 kt}.$$

Nous avons obtenu la transformée de Fourrier de la solution$u(x, t)$.

$$u(x, t) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 kt}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 kt} e^{i\omega x} d\omega.$$

Nous voulons écrire cette solution de $f(x)$, et non de $\hat{f}(\omega)$pour ce faire, insérez la définition de la transformée dans cette intégrale pour $\hat{f}(\omega)$ effectuez quelques manipulations :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}d\xi\right) e^{-\omega^2 kt}e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega(\xi-x)}e^{-\omega^2 kt}d\xi d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left[\cos\omega(\xi-x) - i\sin(\omega(\xi-x))\right] e^{-\omega^2 kt}d\xi d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi-x))e^{-\omega^2 kt}d\xi d\omega \\
&\quad -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin(\omega(\xi-x))e^{-\omega^2 kt}d\xi d\omega.
\end{aligned}$$

Parce que $u(x,t)$ est une distribution de température et doit être à valeur réelle, prenez la partie réelle de cette expression pour obtenir

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi-x))e^{-\omega^2 kt}d\xi d\omega \tag{2.1}$$

On peut simplifier cette expression :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4kt} f(\xi)\, d\xi, \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.1 *pour la solution du probleme. ona k=1 et :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & pour \;\; -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & pour \;\; |x \geq \pi|. \end{cases}$$

la solution est :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(x-\xi)\frac{2}{4t}}\sin(\xi)\, d\xi.$$

2.2 L'équation des ondes

Nous utiliserons la tranformée de Fourrier pour résoudre le problème de cauchy pour l'équation d'onde :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ pour} - \infty < x < +\infty, \ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{pour} \quad -\infty < x < +\infty.$$

transformez l'équation d"onde par rapport a x . parce que t est transparent à la transformée en x, nous avons

$$\mathcal{F}[u_{tt}](\omega) = \hat{u}_{tt}(\omega, t)$$

.

Pour la transformation de u_{xx},nous devons utiliser la formule opérationnelle :

$$\mathcal{F}[u(x,t)](\omega) = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}_{xx}(\omega, t).$$

L'équation d'onde se transforme en

$$\hat{u}_{tt}(\omega, t) = -c^2\omega^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Traitez ceci comme une équation différentielle du second ordre en t. La solution générale est :

$$\hat{u}(\omega, t) = a_\omega \cos(\omega c t) + b_\omega \sin(\omega c t)$$

A présent :

$$a_\omega = \hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}[u(x,0)](\omega) = \mathcal{F}[\varphi(x)](\omega) = \hat{\varphi}(\omega)$$

et :

$$\omega c b_\omega = \hat{u}_t(\omega, 0) = \mathcal{F}[u_t(x, 0)](\omega) = \hat{\psi}(\omega) \; .$$

par conséquent :

$$b_\omega = \frac{1}{\omega c}\hat{\psi}(\omega)$$

La transformation de la solution est :

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{\varphi}(\omega)\cos(\omega c t) + \frac{1}{\omega c}\hat{\psi}(\omega, t)\;\sin(\omega c t)$$

la solution est :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[u(\omega, t)](x,t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\hat{\varphi}(\omega)\cos(\omega c t) + \frac{1}{\omega c}\hat{\psi}(\omega)\sin(\omega c t)\right]e^{i\omega x}d\omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

Exemple 2.2.1 *On va faire la solution de probleme du cauchy dans la cas ou* $c = 3$, $\psi(x) = 0$ *et*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos(x) & pour \;\; \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & pour \;\; |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La soution est

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\cos(3\omega t)\, e^{i\;\omega x}d\omega.$$

On trouve que

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{2\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}.$$

Par conséquance la solution est

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos(3\omega t)\, e^{i\;\omega x}d\omega.$$

Parceque $e^{i\ \omega x} = \cos(x) + i\sin(x)$ *et la solution* $u(x,t)$ *une valeur rèelle ;*

On peut prendre la partie reélle de cette intégrale et on obtient

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos(3\omega t)\cos(\omega x)\,d\omega,$$

Chapitre 3

Solutions analytiques d'équations aux dérivées partielles fractionnaires linéaires

Définition 3.0.1 *[20]A proposé la définition suivante de la transformée fractionnaire de fourrier (FrFT) en utilisant Mittag-leffler une fonction.*
Si la fonction $\phi(x)$, $R \to C$, $x \to \phi(x)$ est contunie et par morceux αth continuellement différentiable, alors le fractionnaire de la transformée de Fourier de la fonction $\phi(x)$ est donnée par

$$F_\alpha [\phi (x)] = \hat{\phi}_\alpha (\varpi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha (i\varpi^\alpha x^\alpha) \phi (x) (dx)^\alpha , \quad pour \;\; 0 < \alpha < 1 \quad et \quad \varpi > 0 \tag{3.1}$$

Où $(dx)^{\alpha}$ désigne l'intégrale fractionnaire exprimée comme suit [20]

$$\int_0^u g (x) (dx)^\alpha = \alpha \quad \int_0^u (u - x)^{\alpha-1} g (x) dx \tag{3.2}$$

Sa formule d'inversion est donnée par

$$\phi (x) = \frac{1}{(M_\alpha)^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha (-i\varpi^\alpha x^\alpha) \hat{\phi}_\alpha (\varpi) (d\varpi)^\alpha , \; pour \quad 0 \leq \alpha \leq 1 et \; \varpi \geq 0 \tag{3.3}$$

Où M_α est la période de la fonction de Mittag-Leffler à valeurs complexes et satisfait l'égalité suivante.

$$E_\alpha \left[i \left(M_\alpha \right)^\alpha \right] = 1$$

3.1 Fonction delta de Dirac d'ordre fractionnaire

Définition 3.1.1 *On considere la fonction*

$$\delta_\alpha (x, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ x \notin [0.\varepsilon] \\ \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{2} & si\ \ 0 < x < \varepsilon \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Dans le cas limite, lorsque $\varepsilon \to 0$ on a la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\alpha (x, \varepsilon) = \delta_\alpha (x) , \tag{3.5}$$

Lemme 3.1.1 *si $\delta_\alpha (x - b)$ est une fonction de fractionnel ordre α, pour $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi (x) \delta_\alpha (x - b) (dx)^\alpha = \alpha \phi (b) \tag{3.6}$$

Preuve. On a

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \phi (x) \delta_\alpha (x - b) (dx)^\alpha = \alpha \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} (b + \varepsilon - x)^{(\alpha-1)} \phi (x) \delta_\alpha (x - b) dx \tag{3.7}$$

$$= \alpha \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \varepsilon^{\alpha-1} \phi (b) \delta_\alpha (x, \varepsilon) dx \tag{3.8}$$

en utilisant (3.4) nous obtenons le résultat souhaité.

(ii) nous pouvons facilement obtenir une transformée de fourrier fractionnaire (FrFT) dec la fonction delta de Dirac d'ordre fractionnaire en utilisant (3.6)

$$F_\alpha \delta_\alpha \left[(x-b) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha \left(i\varpi^\alpha x^\alpha \right) \delta_\alpha \left(x-b \right) (dx)^\alpha \tag{3.9}$$

$$= \alpha E_\alpha \left(i\varpi^\alpha b^\alpha \right)$$

l' équation ci- dessus peut etre écrite sous la forme suivante [20]

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha \left(i\varpi^\alpha x^\alpha \right) (d\varpi)^\alpha \, \delta_\alpha(x) \, (dx)^\alpha \tag{3.10}$$

□

3.1.1 Relations entre le delta de dirac fractionnaire et la fonction de Mittag- leffler

la relation entre $\delta_\alpha \left(x-b \right)$ et $E_\alpha \left(x^\alpha \right)$ est présenté dans le lemme suivant

Lemme 3.1.2 *le résultat suivant peut etre facilement obtenu en utilisant (3.10)*

$$\frac{\alpha}{(M_\alpha)^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha \left(-i\varpi^\alpha \left(x-b \right)^\alpha \right) (d\varpi)^\alpha = \delta_\alpha \left(x-b \right) \tag{3.11}$$

***Remarque* 3.1.1** *Eq.(3.11) peut aussi s'écrire*

$$\frac{\alpha}{(M_\alpha)^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha \left(i\varpi^\alpha (x-b)^\alpha \left(d\varpi \right)^\alpha = \delta_\alpha \left(x-b \right) \right. \tag{3.12}$$

Lemme 3.1.3 *On considère une fonction $\hat{\phi}_\alpha \left(\varpi \right) = E_\alpha \left(-kt^\alpha \varpi^{2\alpha} \right)$, ou k est un entier positif quelconque et $\varpi > 0, t > 0$. Alors la transformée de Fourrier fractionnaire inverse de cette fonction est donnée par*

$$F_\alpha^{-1} \left[E_\alpha \left(-kt^\alpha \varpi^{2\alpha} \right) \right] = \frac{2^{1-\alpha} \Gamma \left(\alpha + 1 \right) \sqrt{\pi^\alpha}}{(M_\alpha)^\alpha \sqrt{t^\alpha k}} E_\alpha \left(\frac{-x^{2\alpha}}{4^\alpha t^\alpha k} \right) \tag{3.13}$$

Preuve. En utilisant (3.3), nous avons

$$\begin{aligned} F_\alpha^{-1}\left[E_\alpha\left(-kt^\alpha\varpi^{2\alpha}\right)\right] &= \frac{1}{(M_\alpha)^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha\left(-i\varpi^\alpha x^\alpha\right)E_\alpha\left(-kt^\alpha\varpi^{2\alpha}\right)(d\varpi)^\alpha \\ &= \frac{1}{(M_\alpha)^\alpha}E_\alpha\left(\frac{-x^{2\alpha}}{4^\alpha t^\alpha k}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha\left(-kt^\alpha\left(\varpi+\frac{i^{\frac{1}{\alpha}}x}{2tk^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{2\alpha}\right)(d\varpi)^\alpha \\ &= \frac{1}{(M_\alpha)^\alpha}E_\alpha\left(\frac{-x^{2\alpha}}{4^\alpha t^\alpha k}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha\left(-kt^\alpha\varpi^{^{2\alpha}}\right)(d\varpi)^\alpha \end{aligned}$$

$$F_\alpha^{-1}\left[E_\alpha\left(-kt^\alpha\varpi^{2\alpha}\right)\right] = \frac{2^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma_\alpha\frac{1}{2}}{(M_\alpha)^\alpha\sqrt{t^\alpha k}}E_\alpha\left(\frac{-X^{2\alpha}}{4^\alpha t^\alpha k}\right) \tag{3.14}$$

□

3.2 Application de la transformée de fourrier fractionnaire aux équations aux dérivées partielles fractionnaires

Dans cette section, nous avons dérivé les solutions analytiques de certainses équations aux dérivées partielles fractionnares en utilisant la méthode de transformée de Fourrier fractionnaire

3.2.1 Equation fractionnelle de diffusion de chaleur

Nous considérons le probléme de diffusion de chaleur non homogéne unidimensionnel [23] sous la forme de

$$\frac{\partial^\alpha\phi(x,t)}{\partial t^\alpha} = k\frac{\partial^{2\alpha}\phi(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} + g(x,t), \quad \text{où} \quad x\in(-\infty,+\infty), \quad t\in(0,+\infty) \ \ et \quad 0<\alpha\le 1. \tag{3.15}$$

avec la condition initiale

$$\phi(x,0)=f(x) \tag{3.16}$$

ou $\phi(x;t)$ est la fonction de température et $k\in(0,+\infty)$ est la conductivité thermique . application de la transformée de fourrier fractionnaire de deux cotés des équations.(3.15) et (3.16) respectivement par rapport a x, on a

$$\frac{d^{\alpha}\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)}{dt^{\alpha}}=-k\varpi^{2\alpha}\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)+\hat{g}_{\alpha}(\varpi,t) \tag{3.17}$$

et

$$\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)=\hat{f}_{\alpha}(\varpi) \tag{3.18}$$

sur la simplification utilisant la méthode de variation constante de lagrange, nous avons

$$\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)=\int_{0}^{t}E_{\alpha}\left(-k\varpi^{2\alpha}t^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(K\varpi^{2\alpha}t^{\alpha}\right)\hat{g}_{\alpha}(\varpi,\tau)(d\tau)^{\alpha}+\hat{f}_{\alpha}(\varpi)E_{\alpha}\left(-K\varpi^{2\alpha}t^{\alpha}\right) \tag{3.19}$$

Application de la formule inverse de FrFT des deux cotés de l'équation.(3.19), on obtient

$$\phi(x,t)=\frac{1}{(M_{\alpha})^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha}(-i\varpi x^{\alpha})E_{\alpha}\left(k\varpi^{2\alpha}t^{\alpha}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[E_{\alpha}\left(k\varpi^{2\alpha}\tau^{\alpha}\right)\hat{g}_{\alpha}(\omega,\tau)(d\tau)^{\alpha}\right](d\varpi)^{\alpha}$$

$$+\frac{1}{(M_{\alpha})^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha}\left[(-i\varpi^{\alpha}x^{\alpha})\hat{f}_{\alpha}(\varpi)E_{\alpha}\left(-K\varpi^{2\alpha}t^{\alpha}\right)\right](d\varpi)^{\alpha} \tag{3.20}$$

qui est la solution générale de l'équation . (3.15) en terme de fonction $\phi(x;t)$.

Cas spéciaux :

Cas 1 : considérez la fonction suivante

$$g(x,t) = 1 \tag{3.21}$$

En remplaçant (3.20) par (3.21), nous avons

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha k}\int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha(-i\varpi x^\alpha)\,\varpi^{-2\alpha}\delta_\alpha(\varpi)\left[1-E_\alpha\left(-k\varpi^{2\alpha}\tau^{2\alpha}\right)\right](d\varpi)^\alpha, \\ &+\frac{1}{(M_\alpha)^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha\left[(-i\varpi^\alpha x^\alpha)\,\hat{f}_\alpha(\varpi)\,E_\alpha\left(-K\varpi^{2\alpha}t^\alpha\right)\right](d\varpi)^\alpha \end{aligned} \tag{3.22}$$

Cas 2 : Si $g(x,t) = 0$, alors l'equation (3.15) réduit è un problème de diffusion de chaleur homogène à une dimension et en choisissant le valeur initiale $f(x,t) = \delta_\alpha(x)$, alors on a

$$\phi(x,t) = \frac{2^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi^\alpha}}{(M_\alpha)\sqrt{t^\alpha k}}E_\alpha\left(\frac{-x^{2\alpha}}{4^\alpha t^\alpha k}\right), \quad x\in(-\infty,+\infty), \quad t\in(0,+\infty)\ et\ \ 0<\alpha\leq 1. \tag{3.23}$$

Qui est la solution exacte du probléme de diffusion de chaleur fractionnaire homogène unidimensionnel .Cette solution est en accord avec la solution analytique du problème de diffusion de chaleur obtenue en utilisant la transformée de fourier pour $\alpha = 1$ [27]

3.2.2 Equation d'onde fractionnaire

Considérons l'équation d'onde fractionnaire [23] sous la forme de

$$\frac{\partial^{2\alpha}\phi(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = c^{2\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}\phi(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}, \text{où } x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty), \text{et } 0 < \alpha\leq 1. \tag{3.24}$$

avec la valeur du condition initiale

$$(i)\ \ \phi(x,0) = \delta_\alpha(x) \quad \text{et} \quad (ii)\ \ \frac{\partial^\alpha\sigma(x,0)}{\partial t^\alpha} = 0 \tag{3.25}$$

Où $\phi(x,t)$ est la fonction de déplacement de la corde et $c\in(0,+\infty)$ est la diffusivité thermique des cordes.

Application de la transformée de Fourier fractionnaire des deux cotés de l'équation.(3.24) par rapport à x, on a

$$\frac{d^{2\alpha}\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)}{dt^{2\alpha}} = -c^{2\alpha}\varpi^{2\alpha}\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t) \tag{3.26}$$

Equation. (3.26) peut etre réécrit sous la forme suivante

$$\left(D_t^{\alpha}+ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}\right)\left(D_t^{\alpha}-ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}\right)\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)=0 \tag{3.27}$$

Nous supposons que $\left(D_t^{\alpha}+ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}\right)\ \phi_{\alpha}(\varpi,t) = \hat{v}_{\alpha}(\varpi,t)$,puis Eq.(3.27) peut etre exprimé comme

$$D_t^{\alpha}\hat{v}_{\alpha}\ (\varpi,t) = ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}\ \hat{v}\ _{\alpha}(\varpi,t) \tag{3.28}$$

Sur l'intégration fractionnaire dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$\hat{v}_{\alpha}\ (\varpi,t) = A_1E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}t^{\alpha}\right), \tag{3.29}$$

Où A_1 est une constante arbitraire .

par conséquent, nous avons

$$D_t^{\alpha}\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t)+ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}\ \hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t) = A_1E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}t^{\alpha}\right) \tag{3.30}$$

Multiplier les deux cotés par $E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}t^{\alpha}\right)$ dans (3.29) et en appliquant ensuite l'intégration fractionnaire des deux cotés, nous avons

$$\hat{\phi}_{\alpha}(\varpi,t) = AE_{\alpha}\left(ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}t^{\alpha}\right)+BE_{\alpha}\left(-ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}t\right), ouA=\frac{A_1}{2ic^{\alpha}\varpi^{\alpha}}$$

Utilisation des conditions de valeur initiale dans l'équation ci-dessus pour trouver les valeurs de constantes et en prenant une fraction inverse transformmée de Fourier, nous avons

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}[\delta_\alpha(x+ct) + \delta_\alpha(x-ct)] \tag{3.31}$$

qui est la solution exacte de (3.24) . pour $\alpha = 1$, (3.31) est en accord avec la solution analytique de l'équation d'onde obtenue par utilisant la transformée de Fourrier disponible dans la littérature[28].

3.2.3 Equation télégraphique fractionnaire

Considérons une équation télégraphique fractionnaire sous la forme de[29]

$$\frac{\partial^{2\alpha}\phi(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + 2b\frac{\partial^{\alpha}\phi(x;t)}{\partial t^{\alpha}} + b^2\phi(x;t) = k^{2\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}\phi(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}, \quad \text{où } x \in (-\infty,+\infty), t \in (0,+\infty), 0 < \alpha \leq 1. \tag{3.32}$$

et b est une constante arbitraire quelconque .
avec les conditions de valeur initiale

$$\phi(x,0) = \delta_\alpha(x) \tag{3.33}$$

et

$$\frac{\partial^{\alpha}\phi(x,0)}{\partial t^{\alpha}} = E_\alpha(-ic^\alpha x^\alpha) \tag{3.34}$$

En appliquant une transformée de Fourier fractionnaire des deux cotés de (3.32) par rapport à x, nous avons

$$D_t^{2\alpha}\,\hat{\phi}_\alpha(\varpi,t) + 2bD_t^{\alpha}\,\hat{\phi}_\alpha(\varpi,t) + \left(b^2 + k^{2\alpha}\varpi^{2\alpha}\right)\hat{\phi}_\alpha(\varpi,t) = 0 \tag{3.35}$$

Equation (3.35) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left(D_t^\alpha + b - ik^\alpha \varpi^\alpha\right)\left(D_t^\alpha + b + ik^\alpha \varpi^\alpha\right)\hat{\phi}_\alpha(\varpi, t) = 0$$

la solution de l'équation ci-dessus est donnée en termes de fonction de Mittag-Leffler comme suit

$$\hat{\phi}_\alpha(\varpi, t) = AE_\alpha\left(\left(ik^\alpha \varpi^\alpha - b\right)t^\alpha\right) + BE_\alpha\left(-\left(ik^\alpha \varpi^\alpha + b\right)t^\alpha\right)$$

En utilisant les conditions initiales (3.33) et (3.34) dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_\alpha(\varpi, t) = & \frac{\alpha}{2}\left[E_\alpha\left(\left(ik^\alpha \varpi^\alpha - b\right)t^\alpha\right) + E_\alpha\left(-\left(ik^\alpha \varpi^\alpha + b\right)t^\alpha\right)\right] \\
& + \frac{b\alpha}{2ik^\alpha \varpi^\alpha}\left[E_\alpha\left(\left(ik^\alpha \varpi^\alpha - b\right)t^\alpha\right) - E_\alpha\left(-\left(ik^\alpha \varpi^\alpha + b\right)t^\alpha\right)\right] \\
& + \frac{\delta_\alpha(\varpi - C)\left(M_\alpha\right)^\alpha}{2i\alpha k^\alpha \varpi^\alpha}\left[E_\alpha\left(\left(ik^\alpha \varpi^\alpha - b\right)t^\alpha\right) - E_\alpha\left(-\left(ik^\alpha \varpi^\alpha + b\right)t^\alpha\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

En appliquant la formule d'inversion de la transforée de fourier fractionnaire dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(x, t) = & \frac{E_\alpha\left(-bt^\alpha\right)}{2}\left[\delta_\alpha(x + kt) + \delta_\alpha(x - kt)\right] \\
& + \frac{b\alpha E_\alpha\left(-bt^\alpha\right)}{2ik\left(M_\alpha\right)^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[E_\alpha - \left(i\varpi_\alpha^\alpha \delta(x - kt)\right) - E_\alpha - \left(i\varpi^\alpha (x + kt)^\alpha\right)\right]\varpi^{-\alpha}(d\varpi)^\alpha \\
& + \frac{E_\alpha\left(-bt^\alpha\right)}{2ikc^\alpha}\left[E_\alpha - \left(ic^\alpha (x - kt)^\alpha\right) - E_\alpha - \left(ic^\alpha (x + kt)^\alpha\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

qui est la solution d'une équation télégraphique fractionnaire donnée.

3.2.4 Equation cinétique fractionnaire

saxena et kalla [24] ont considéré l'équation cinétique fractionnaire suivante

$$N(t) - N_0 f(t) = -c_0^v D_t^{-v} N(t), \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(v) > 0 \tag{3.38}$$

Où N(t) désigne la densité numérique d'une espèce donnée au temps $t = 0$, c'est une constante positive et ${}_0D_t^{-v}$désigne l'operateur fractionnaire de Riemann-Liouville qui est défini par

$$ {}_0D_t^{-v}N(t) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-x)^{v-1} N(x)\,dx \quad ,\text{pour } t>0 \ \operatorname{Re}(v)>0 \tag{3.39}$$

Prenant la transformée de Fourrier fractionnaire des deux cotés de l'équation.(3.38), nous avons

$$\hat{N}_v(\varpi) - N_0\hat{f}_v(\varpi) = -c^v F_v[{}_0D_t^{-v}N(t)] \tag{3.40}$$

Laisser

$$G(t) = \int_0^t N(x)(dx)^v \tag{3.41}$$

En utilisant la différenciation fractionnaire des deux cotés dans (3.41), nous avons

$$G^v(t) = (v)!N(t)$$

En prenant FrFT des deux cotés dans l'équation ci -dessus, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_v(-i\varpi^v t^v)\, G^v(t)\,(dt)^v = (v)!\hat{N}_v(\varpi) \tag{3.42}$$

En utilisant l'intégration fractionnaire et en simplifiant l'équation ci-dessus ,nous avons

$$F_v[{}_0D\,{}_t^{-v}N(t)] = i\varpi^{-v}\hat{N}_v(\varpi) \tag{3.43}$$

Par conséquent, Eq, (3.43) devient

$$\hat{N}\,{}_v(\varpi) - N_0\hat{f}\,{}_v(\varpi) = -ic^{-v}\varpi^{-v}\hat{N}\,{}_v(\varpi)$$

L'équation ci-dessus peut être écrite comme

$$\hat{N}\ _v(\varpi) = N_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-e^{\frac{in\pi}{2}} c^v}{\varpi^v} \right)^n \right] \hat{f}_v(\varpi) \text{ fourni } \left(\left| \frac{c}{\varpi} \right| < 1 \right)$$

En prenant la transformée de fourrier fractionnaire inverse sur l'équation ci-dessus, nous avons

$$N(t) = \frac{N_0}{(M_{v)^v}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{\frac{in\pi}{2}} c^v \right)^n \right] \int_{-\infty}^{+\infty} E_v\left(-i\varpi^v t^v\right) i\varpi^{-nv} \quad \hat{f}_v(\varpi)\,(d\varpi)^v \tag{3.44}$$

qui est la solution générale de l'équation (3.38) .

Cas spéciaux

Cas1 : substituer $f(t) = E_v\left(-id^v t^v\right)$ dans (3.44), la solution de l'équation devient

$$N(t) = N_0 E_v\left(-id^v t^v\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-e^{\frac{in\pi}{2}} c^v}{d^v} \right)^n \right], \text{ ou } \quad d > 0 \tag{3.45}$$

Cas2 : si nous substituons $f(t) = \delta_v(t)$ dans (3.45), alors la solution de l'équation est donnée par

$$N(t) = \frac{N_0}{(M_{v)^v}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{\frac{in\pi}{2}} c^v \right)^n \right] \int_{-\infty}^{+\infty} E_v\left(-i\varpi^v t^v\right) i\varpi^{-nv} \quad (d\varpi)^v \tag{3.46}$$

CONCLUSION

les solution analytiques de diffusion fracyionnée,d'onde fractionnaire,de télégraphe fractionnaire et d'équation cinétiques fractionnaires ont été rapporté en utilisant une transformée de fourier fractionnaire.Cette méthode donne des solutions exactes de diffusion de chaleur fractionnée et équations d'ndre fractionnaire en termes de fonction de Miyag leffler et de fonction Delta de dirac d'ordre fractionnaire respectivement.

Cependant,la solution de l'équation télégraphique fractionnaire est obtenue sous forme intégrale et la solution série de la cinétique fractionnaire l'équation est fournie.Ces solution analytiques d'équations différentielles partielles fractionnaires l'équation est fournie. ces solutions analytiques d'équatins différentielles partielles fractionnaires partielles fractionnaires peuvent donner de nombreuses applications dans divers domaines de la science et de l'ingéniere. cette méthode analytique est une nouvelle méthode qui diffère des autres méthodes. cette mméthode est également synonyme d'éfficacité et de simplicité

Bibliographie

[1] V. Namias, The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, J. Inst. Math. Appl. 25 (3) (1980) 241–265.

[2] F.H. Kerr, Fractional powers of Hankel transforms in the Zemanian space, J. Math. Anal. Appl. 166 (1992) 65–83.

[3] G. Jumarie, Laplace's transform of fractional order via the Mittag–Leffler function and modified Riemann–Liouville derivative, Appl. Math. Lett.
22 (2008) 1659–1664.

[4] V.G. Gupta, B. Sharma, A. Kilicman, A note on fractional sumudu transform, J. Appl. Math. (2008).

[5] J. Shi, N.T. Zhang, X.P. Liu, A novel fractional wavelet transform and its applications, Sci. China Inf. Sci. 55 (6) (2012) 1270–1279.

[6] M. Omran, A. Kilicman, On fractional order Mellin transform and some of its properties, Tbilisi Math. J. 10 (1) (2017) 315–324.

[7] I.N. Sneddon, Fourier Transform, Courier Corporation, 1995.

[8] J.F. James, Fourier Transform with Applications in Physics and Engineering, New York Cambridge University Press, 1995.

[9] R. Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications, third ed., McGraw-Hill, New York, 1999, pp. 74–104.

[10] N. Wiener, Hermitian polynomials and Fourier analysis, Stud. Appl. Math. 8 (1–4) (1929) 70–73.

[11] A.C. McBride, F.H. Kerr, Namias's fractional Fourier transform, IMA J. Appl. Math. 39 (2) (1987) 159–175.

[12] D.H. Bailey, P.N. Swarztrauber, The fractional Fourier transform and applications, SIAM Rev. 33 (3) (1991) 389–404.

[13] A.W. Lohmann, Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform, J. Opt. Soc. Amer. A 10 (10) (1993) 2181–2186.

[14] L.B. Almeida, The fractional Fourier transform and time frequency representation, IEEE Trans. Signal Process. 42 (11) (1994) 3084–3091.

[15] H.M. Ozaktas, O. Arikan, M.A. Kutay, G. Bozdagt, Digital computation of the fractional Fourier transform, IEEE Trans. Signal Process. 44 (9)

(1996) 2141–2150.

[16] H.M. Ozaktas, M.A. Kutay, Z. Zalevsky, The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing, New York Wiley.

2000.

[17] R. Tao, Y.L. Li, Y. Wang, Short-time fractional Fourier transform and its applications, IEEE Trans. Signal Process. 58 (5) (2010) 2568–2580,

[18] B. West, M. Bologna, P. Grigolini, Physics of Fractal Operators, International Edition Springer, 2003.

[19] Y.F. Luchko, H. Martinez, J.J. Trujillo, Fractional Fourier transform and some of its applications, Fract. Calc. Appl. Anal. 11 (4) (2008) 1–14

[20] G. Jumarie, Fourier's transform of fractional order via Mittag–Leffler function and modified Riemann–Liouville derivative, J. Appl. Inform. 26

(5–6) (2008) 1101–1121

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999 ;

K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 264 (2002) 229–248, [26].

[22] A.A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science Limited, 2006

[23] B. Gua, X. Pu, F. Haung, Fractional Partial Differential Equations and their Numerical Solutions, World Scientific, 2015.

[24] R.K. Saxena, S.L. Kalla, On the solution of certain fractional kinetic equations, Appl. Math. Comput. 199 (2) (2008) 504–511.

[25] G. Jumarie, On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to .dt/ , Appl. Math. Lett. 18 (2005) 739 748

[26] G. Jumarie, Modified Riemann Liouville derivative and fractional taylor series of non-differentiable functions further result, Comput. Math. Appl.
51 (9–10) (2006) 1367–1376.

[27] L.C. Evans, Partial differential equations and Monge Kantorovich mass transfer, Curr. Dev. Math. 1 (1997) 65–126.
A.M.

[28] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equation and Solitary Waves Theory, in : Nonlinear Physical Sciences, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, pp.
143–194.

[29] A.M. Tawfik, H Fichtner, R. Schlickeiser, A. Elhanbaly, Analytical solutions of the space time fractional telegraph equation and advection diffusion
equations, Physica A 491 (2018) 810–819.