

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la
Matière

Département de Mathématiques

Mémoire de Master Académique en Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Présenté par :
BOUKHEDIR Lamia
KABADJI Feriel

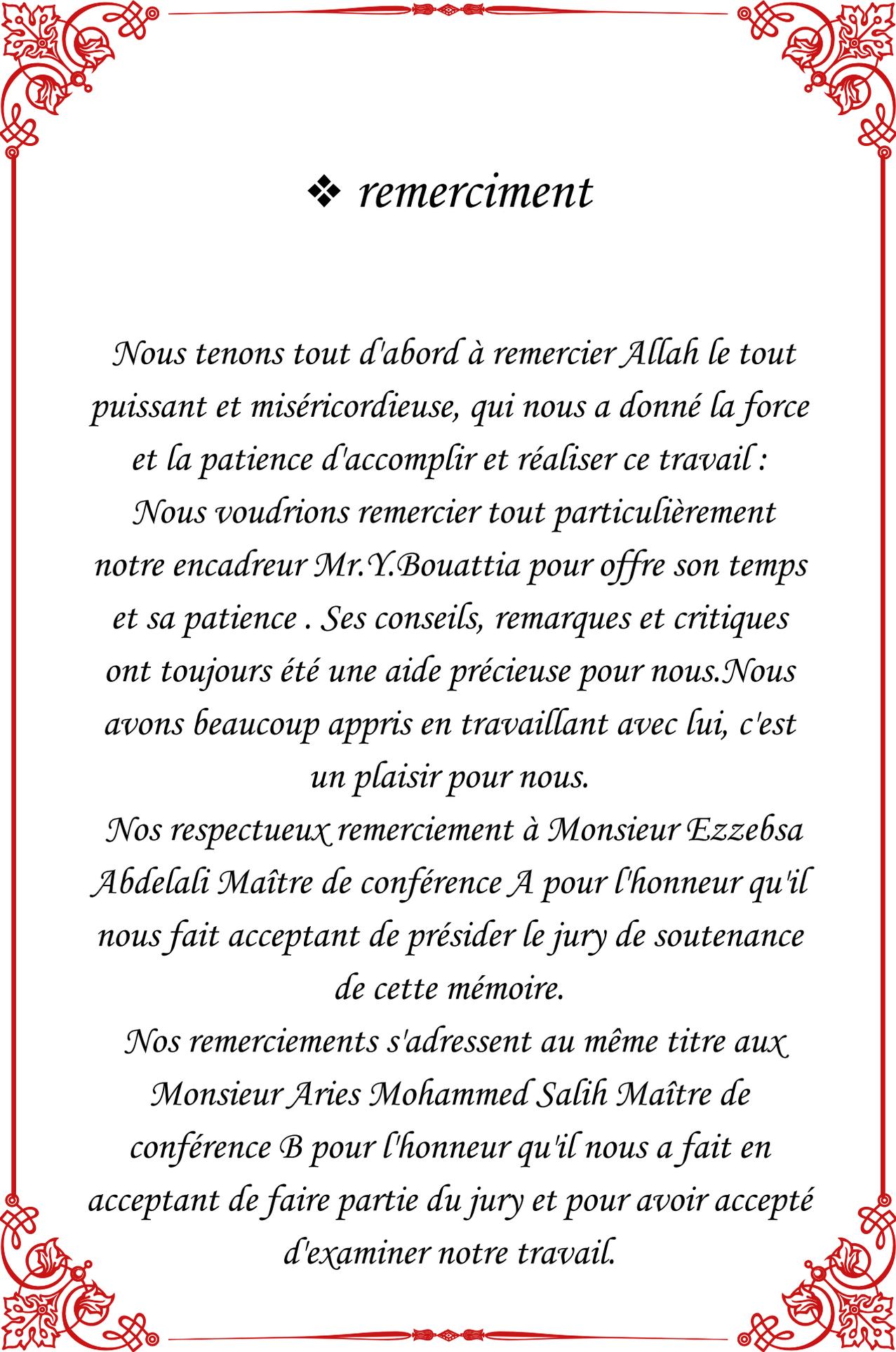
Intitulé

**Sur la moyennisation dans les équations différentielles
ordinaires**

Dirigé par : **BOUATTIA Yassine**
Devant le Jury

EZZEBSA Abdelali	MCA	Univ. Guelma	Président
BOUATTIA Yassine	MCB	Univ. Guelma	Encadreur
ARIES Med Salah	MCB	Univ. Guelma	Examineur

Session Juillet 2021



❖ remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieuse, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir et réaliser ce travail :

Nous voudrions remercier tout particulièrement notre encadreur Mr. Y. Bouattia pour offre son temps et sa patience . Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour nous. Nous avons beaucoup appris en travaillant avec lui, c'est un plaisir pour nous.

Nos respectueux remerciement à Monsieur Ezzesba Abdelali Maître de conférence A pour l'honneur qu'il nous fait acceptant de présider le jury de soutenance de cette mémoire.

Nos remerciements s'adressent au même titre aux Monsieur Aries Mohammed Salih Maître de conférence B pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de faire partie du jury et pour avoir accepté d'examiner notre travail.

❖ Dédicace

Je dédie ce travail

A ma chère mère et mon chère père

Quoi que fasse ou que je dise, je ne saurais point vous remercier comme il se doit. Votre affection me couvre, votre bienveillances me guide et votre présences à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mes frères pour leur présence quotidienne.

A mon soutien dans ma vie Amine qui m'a encouragé, m'a dirigé vers la gloire , merci énormément pour ton conseils plus que précieux,

A ma chère binôme, Ferial pour tout ce qu'elle a fait pour la réussite de ce travail,.

A mes chère amies Achoura Hamida Leila, Eladassi Imene, Rabahi zina qui m'ont jamais cessées de me soutenir, encourager et aider dans les moments difficiles.

Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

❖ Dédicace

*Grâce à Dieu Le Tout-Puissant qui m'a donné la force et la patience et qui m'a aidé à surmonter les obstacles de ce parcours que j'ai pu atteindre ce succès, pour commencer je dédit cette réussite :
À celle qui est toujours là à mes côtés pour me soutenir, et qui me donne assez de force et de courage pour que je puisse avancer, ma chère maman*

« B.ḵhadidja ».

À celui qui sacrifie sa vie pour mon confort et mon bonheur, à mon seul soutien de qui je n'ai pas peur qu'il va me laisser tomber un jour, cher père

« Bachir » .

À celui qui me laisse pas seule face aux trahisons de la vie, à mon second âme, cher frère 'wahid'

À ma chère binôme Lamia pour tout ce qu'elle a fait pour la réussite de ce travail

À tous ceux qui m'ont aidé tout au long de mon parcours, je vous remercie infiniment

❖ *kabadji feriel*

Table des matières

Résumé	5
Abstract	5
Table des notations	5
Introduction	6
1 Notions préliminaires	10
1.1 système dynamique	10
1.2 point d'équilibre	11
1.3 linéarisation	11
1.4 Nature des points d'équilibres	11
1.5 plan et portrait de phase	15
1.6 Orbite périodique	15
1.7 Cycle limite	15
1.7.1 stabilité des cycles limites	16
1.8 stabilité des points d'équilibres	17
2 Méthode moyennisation du premier ordre	19
2.1 Introduction	19
2.2 Résultats auxiliaires	19
2.2.1 Proposition (Formulation du binome)	20
2.2.2 Application : linéarisation	20
2.2.3 Lemme	21
2.3 Les intégrales triangulaires	22
2.3.1 Théorème de moyennisation du premier ordre :	26
3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre	34
3.0.1 Théorème :	34
3.0.2 Corollaire :	35
conclusion	40
bibliographie	41

Abstract

The objectif of this memory is to study the limit cycles of the différentiel, using the first and the second ordre of overaging method for periodic orbits.

Our work is rich by giving a lot of exemples.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les cycles limites des équations différentielles en utilisant la méthode de la moyennisation du premier et du deuxième ordre et nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de ces solutions périodiques.

Notre travail est enrichi par plusieurs exemples

mots clé

mots clé : cycle limite, méthode de la moyennisation, système différentiel, solution périodique.

Introduction

Depuis Isaac Newton, les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation des systèmes physiques, mécaniques et chimiques...ect et une part prépondérante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles.

Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équation différentielle ordinaire.

Nous allons étudier dans ces chapitres des équations différentielles du deuxième ordre :

$$y'' = F(y', y) \quad (0.1)$$

où $y = y(x)$ et $' \equiv \frac{d}{dx}$

ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre. L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système est :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (0.2)$$

Un des objectifs des chercheurs dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires est l'existence des cycles limites. Ces derniers sont apparus en 1881, dans le mémoire écrit par "Poincaré" sur les courbes définies par une équation différentielle . Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. Le premier modèle physique publié dans la littérature qui transformé en un système du type (0.2), admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon \left(\frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \frac{dy}{dt} \right) + y = 0. \quad (0.3)$$

Etablie par Rayleigh (1945) et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

Dans les années vingt, Balthasar van der Paul, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques dans les tubes à néon(van der Pol,1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation

qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (0.4)$$

On voit que si on dérive l'équation (0.3) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (0.4) ces deux équations son donc équivalentes.

Quelques années plus tard Van Der Pol (1927) étudiait le même circuit électrique mais en régime sinusoïdal forcé. Lorsqu'il variait la fréquence du courant, il entendait dans son combiné la tonalité changer (le circuit se stabilisait donc sur la fréquence externe). Mais de temps à autre il remarquait quelque chose d'étrange, un comportement inexplicablement irrégulier : "on entend souvent au téléphone un bruit irrégulier avant que la fréquence ne saute à la valeur immédiatement inférieure (Van Der Pol, 1927). Son tube à vide devait vrai semblablement traverser une période de chaos transitoire avant de se synchroniser sur la fréquence externe.

Plus tard, en Angleterre, Mary Lucy Cartwright et John E. Littlewood poursuivront les travaux de Van Der Pol sur les oscillateurs forcés.

Liénard un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équation dont fait partie l'équation (0.4) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (0.5)$$

Levinson et Smith (1942) ont suggéré de généraliser l'équation (0.5) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + G(x) = 0. \quad (0.6)$$

et qui est connu sous le nom d'équation de Liénard généralisé.

Une méthode classique pour produire des cycles limites est de perturber un système qui a un centre. La notion d'un centre a été définie par Poincaré comme étant un point isolé singulier entouré par des orbites périodique. Les chercheurs ont donnés cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodique ayant un centre :

- La première méthode est basée sur l'application de retour de Poincaré.
- La deuxième est basée sur l'intégrale de Poincaré Melnikov.
- La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.
- La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.
- La quatrième est la méthode du facteur intégrant inverse.
- La cinquième est la méthode de moyennisation.

La dernière méthode est la base de notre travail. Au début du vingtième siècle les physiciens russes Krylov et Bogolyubov développèrent cette méthode qui permet de résoudre des problèmes

non linéaires grâce à l'hypothèse de la périodicité. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un certain système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome.

Les chercheurs ont étudié plusieurs équations différentielles planaires en utilisant les méthodes précédentes pour la détermination des cycles limites.

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire est présenté en trois chapitres :

- Le premier chapitre : "Notion préliminaire".

Ce chapitre est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de ce mémoire. On représentera alors quelques rappels, et notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires.

On introduira dans ce rappel des définitions concernant le système dynamique, le point singulier, la linéarisation au voisinage d'un point singulier, l'orbite périodique et le cycle limite. On donnera la nature et la stabilité d'un point singulier.

- Le deuxième chapitre : "Théorie de la moyennisation du premier ordre".

Dans ce chapitre, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher les cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré le théorème par plusieurs exemples.

- Le troisième chapitre : "Théorie de la moyennisation du deuxième ordre".

Ce chapitre portera sur la théorie de la moyennisation du second ordre pour étudier le nombre des cycles limites d'un système différentiel planaire. On y trouvera quelques exemples de cette méthode.

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire.

1.1 système dynamique

Un système dynamique est un modèle permettant l'évolution au cours temps d'un ensemble des objets en interaction il est défini par un triplet (D, I, φ) constitué de l'espace d'états D , du domaine temporel I , et d'une application de transition d'état $\varphi : I \times D \rightarrow D$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à tout instant.

Définition 1.1.1 [5]

Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $\varphi(\cdot, X) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $\varphi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $\varphi(0, X) = X$.
- $\varphi(t + s, X) = \varphi(t, \varphi(s, X))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, X \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1

soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, X_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

où A est une matrice $n \times n$, et $X \in \mathbb{R}^n$. Le système (1.1) engendre un système dynamique donné par :

$$U(t, X) = e^{At} X.$$

1.2 point d'équilibre

Définition 1.2.1

Soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.2)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0.$$

1.3 linéarisation

Considérons le système (1.2)

le système :

$$\dot{x} = Ax \quad (1.3)$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

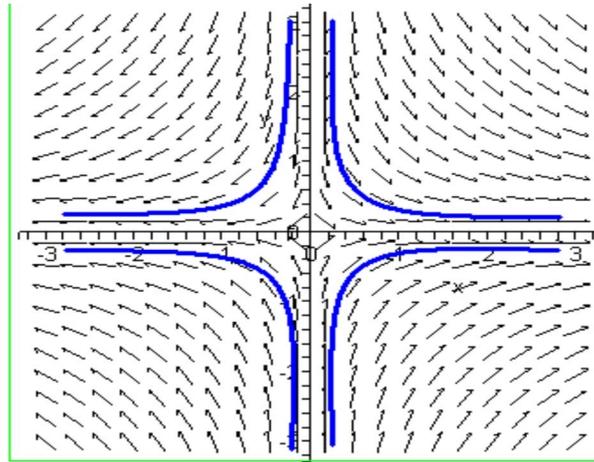
$$f(x_0) = 0,$$

est appelé linéarisation de (1.2) en x_0 .

1.4 Nature des points d'équilibres

Soit le système différentiel linéaire (1.3) où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable.


 FIGURE 1.1 – point selle ($n \in \mathbb{N}$)

Exemple 1.4.1 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{cases} f(x, y) = x - y \\ g(x, y) = -2x, \end{cases}$$

le point équilibre est donné par : $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0 \Rightarrow (0, 0)$.

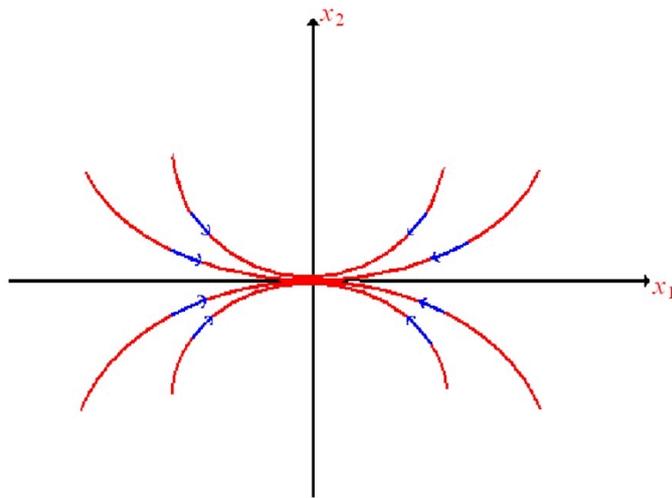
La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

donc $\det(J) = -2 < 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est un point selle.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; le point critique $x = x_0$ est un noeud stable .
- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; le point critique $x = x_0$ est un noeud instable .
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.


 FIGURE 1.2 – Noeud stable ($n = 2$)

Exemple 1.4.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -5y - x. \end{cases}$$

Le point équilibre est : $(0; 0)$

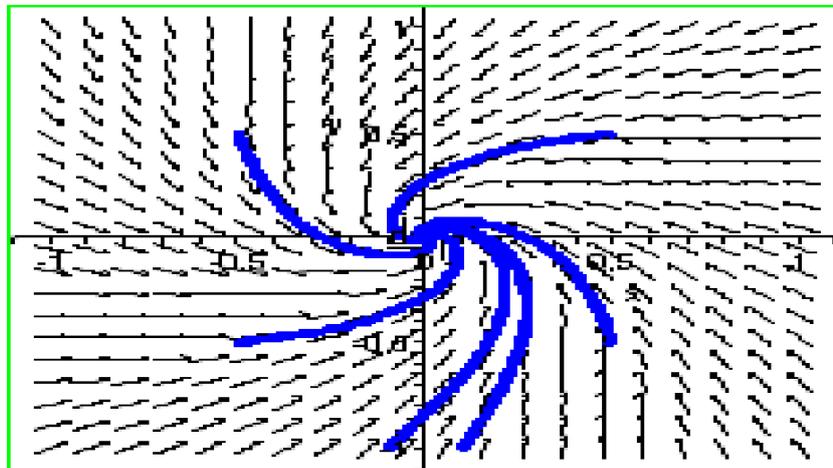
La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

on a donc $\text{tr}(J) = -5, \det(J) = 1$.

$0 < 1 < \frac{25}{4} \Rightarrow$ le point d'équilibre est un noeud attractif.

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.


 FIGURE 1.3 – Foyer stable ($n = 2$)

Exemple 1.4.3

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x - 2y \\ g(x, y) = x + 2y \end{cases}$$

Le point équilibre est $(0,0)$.

La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

alors, $\text{tr}(J) = 4$, $\det(J) = 6 > \frac{(\text{tr}(J))^2}{4} = 4 \Rightarrow$ le point d'équilibre est un foyer attractif.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable .

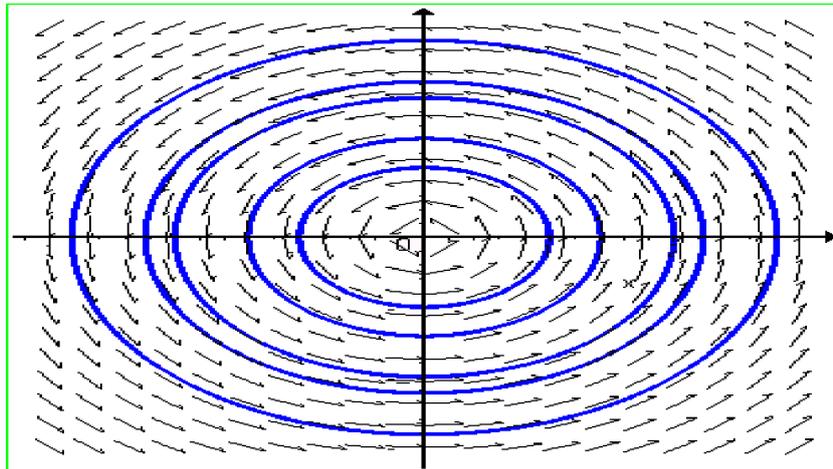


FIGURE 1.4 – centre ($n = 2$)

Exemple 1.4.4

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x. \end{cases}$$

Alors

$$f(x, y) = y$$

$$g(x, y) = -4x.$$

Le point équilibre est $(0,0)$.

La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{tr}(J) = 0, \det(J) = 4 > 0 \Rightarrow$ le point d'équilibre est un centre.

1.5 plan et portrait de phase

Théorème 1.5.1

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y .

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1,4) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) qui est le plan de phase.

1.6 Orbite périodique

Définition 1.6.1

On appelle orbite périodique toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (1,4) tel qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x). \quad (1.5)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1,5) est appelé période.

1.7 Cycle limite

Définition 1.7.1 [8]

On appelle cycle limite $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$ du système (1,5), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solution périodiques de ce système, C'est-à-dire qu'il existe un voisinage de Γ dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

exemple classique

L'exemple repris par beaucoup d'auteurs est le suivant :

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

Après passage en coordonnées polaires (r, θ) , ce système se découple en

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

ce qui donne visiblement une seule solution périodique $r(t) = 1$, $\theta(t) = \theta_0 + t$. Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et c'est un cycle limite unique. Les autres solutions s'obtiennent par intégration du système. Lorsque $t \rightarrow \infty$; toutes ces solutions s'approchent du cycle limite.

Quoique trivial, cet exemple montre que l'intégrabilité n'est pas une obstruction à l'existence de cycles limites

1.7.1 stabilité des cycles limites

Considérons $\gamma(t)$ est un cycle limite de période T pour le système (1, 4).

Définition 1.7.2

Si la quantité $\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) (\gamma(t)) dt$ est différente de zéro on dit que le cycle limite est hyperbolique.

Théorème 1.7.1

Γ étant le cycle limite du système (1, 4), toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de Γ sont telles que elles s'enroulent toutes en spirales autour de Γ pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de Γ , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.
2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, en spirale autour de Γ pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.

Exemple 1.7.1

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

ce système a deux états d'équilibres $r = 0$ et $r = 1$. La solution générale distincte de zéro est donnée par :

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-2t}}, \theta = t - t_0.$$

Ainsi, en utilisant l'espace des phases (x, y) , toutes les trajectoires excepté l'équilibre $r = 0$, tendent vers le cycle $r = 1$ (s'enroulent en spirales autour du cercle).

Remarque 1.7.1

Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires. Il ne peuvent apparaître dans des systèmes linéaires, ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.

1.8 stabilité des points d'équilibres

Définition 1.8.1

Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.6). On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Théorème 1.8.1

Soit le système linéaire (1,3) Le point $x = x_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelles strictement négatives. Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point $x = x_0$ est instable.

Définition 1.8.2

On dit qu'un point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout x dans ce voisinage, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0$

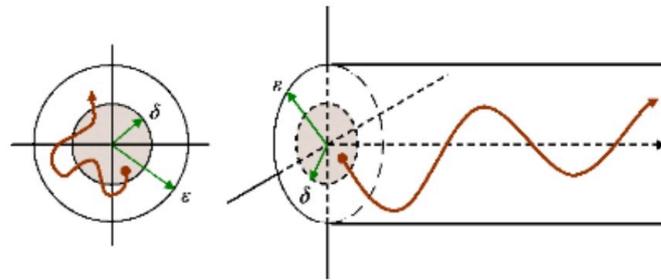


FIGURE 1.5 – stabilité d'un point d'équilibre

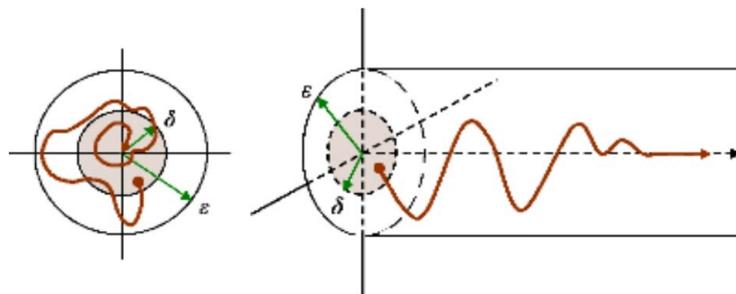


FIGURE 1.6 – stabilité asymptotique

Méthode moyennisation du premier ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de la moyennisation. La méthode de la moyennisation est une technique de calcul utile, l'une des plus importantes méthode perturbative utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des système dynamiques. L'idée de cette méthode a été commencé avec les travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode (Lagrange a formulé le problème des trois corps gravitationnels comme une perturbation du problème à deux corps). Aucune preuve rigoureux de sa validité a été donnée, jusqu'à ce que Fatou a donné la preuve de la validité asymptotique de la méthode en 1928. Les importantes contributions pratiques et théoriques de la moyennisation ont été faites en 1930 par Bogoliobov et krylov, en 1945 par Bogliobov et en 1961 par Bogoliobov et Mitropolsky. Elle a été ensuite développée par Verhulst, Sanders et verhulst, Malkin (1956) et Roseau (1966). Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode moyennisation du premier ordre.

2.2 Résultats auxiliaires

On a :

$$\begin{cases} z = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \\ \frac{1}{z} = \bar{z} = \exp(-i\theta) = \cos -i \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^n = \exp(in\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta \\ \frac{1}{z^n} = \exp(-in\theta) = \cos n\theta - i \sin n\theta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \\ z - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n}) \\ \sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - \frac{1}{z^n}) \end{cases}$$

2.2.1 Proposition (Formulation du binome)

pour tous complexes (réels) a et b et tout entier n : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

pour tous $0 \leq k \leq n$, on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont encore appelés coefficients binomiaux.

Exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 = \sum_{k=0}^2 C_2^k a^{2-k} b^k = \frac{1}{4} (C_2^0 z^2 + C_2^1 z \frac{1}{z} + C_2^2 \frac{1}{z^2}) = \frac{1}{4} (z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}) \\ \sin^2 \theta &= -\frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 = \sum_{k=0}^2 C_2^k a^{2-k} b^k = -\frac{1}{4} (C_2^0 z^2 - C_2^1 z \frac{1}{z} + C_2^2 \frac{1}{z^2}) = -\frac{1}{4} (z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}) \end{aligned}$$

2.2.2 Application : linéarisation

A l'aide du binome de Newton et de la formule d'Euler, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en somme de termes de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.2.1

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{16} \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^4 C_4^k a^{4-k} b^k \\ &= \frac{1}{16} (C_4^0 z^4 + C_4^1 z^3 \frac{1}{z} + C_4^2 z^2 \frac{1}{z^2} + C_4^3 z \frac{1}{z^3} + C_4^4 \frac{1}{z^4}) \\ &= \frac{1}{16} (z^4 + 4z^2 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}) \\ &= \frac{1}{16} (z^4 + \frac{1}{z^4}) + \frac{1}{4} (z^2 + \frac{1}{z^2}) + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \\ \cos^4 \theta &= \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2

$$\begin{aligned}
 \sin^4 \theta &= \frac{1}{16} \left(z - \frac{1}{z} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{16} \left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) \\
 &= \frac{1}{16} z^4 - \frac{1}{4} z^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^4} \\
 &= \frac{1}{16} \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) - \frac{1}{4} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{3}{8} \\
 \sin^4 \theta &= \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

Il y a une autre méthode pour la linéarisation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ on va l'aborder en ce qui suit.

2.2.3 Lemme

pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\begin{aligned}
 \cos^n \theta &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta) \\
 \sin^n \theta &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta)
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3

$$\begin{aligned}
 \cos^6 \theta &= \frac{1}{64} C_6^3 + \frac{2}{64} \sum_{k=0}^2 C_6^k \cos((6-2k)\theta) \\
 &= \frac{20}{64} + \frac{2}{64} (\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta) \\
 \cos^6 \theta &= \frac{5}{16} + \frac{1}{32} \cos 6\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta + \frac{15}{32} \cos 2\theta.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.4

$$\begin{aligned}
 \cos^8 \theta &= \frac{1}{2^8} C_8^4 + \frac{2}{2^8} \sum_{k=0}^3 C_8^k \cos((8-2k)\theta) \\
 &= \frac{70}{256} + \frac{2}{256} (\cos 8\theta + 8 \cos 6\theta + 28 \cos 4\theta + 56 \cos 2\theta). \\
 \cos^8 \theta &= \frac{35}{128} + \frac{1}{128} \cos 8\theta + \frac{1}{16} \cos 6\theta + \frac{7}{32} \cos 4\theta + \frac{7}{16} \cos 2\theta.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.5

$$\begin{aligned}
 \sin^6 \theta &= \frac{1}{2^6} C_6^3 + \frac{2}{2^6} \sum_{k=0}^2 (-1)^{3-k} C_6^k \cos((6-2k)\theta) \\
 &= \frac{1}{64} \frac{6}{3!(6-3)!} + \frac{2}{64} (\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta - 15 \cos 2\theta) \\
 \sin^6 \theta &= \frac{20}{64} - \frac{1}{32} \cos 6\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta - \frac{15}{32} \cos 2\theta.
 \end{aligned}$$

2.3 Les intégrales triangulaires

Lemme

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta,$$

alors :

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

et

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Corollaire

— Si m et n sont pairs $I_{m,n} = \text{coeff}(m, n) \times I_{0,0} = \text{coeff}(m, n) \times 2\pi$ (on abaissant m et n , de 2 en 2, jusqu'à arriver à 0 et 0).

— Sinon $I_{m,n} = \text{coeff}(m, n) \times I_{1,0}$ ou bien $I_{0,1} = 0$ à chaque fois.

Donc $I_{m,n} \neq 0$ si et seulement si m et n sont pairs tous les deux.

Preuve

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos^{m-1} \theta \sin^n \theta d\theta \\ &= [\sin \theta \cos^{m-1} \theta \sin^n \theta]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \theta [(m-1)(-\sin \theta) \cos^{m-2} \theta \sin^n \theta + n \cos \theta \cos^{m-1} \theta \sin^{n-1} \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(m-1) \cos^{m-2} \theta \sin^{n+2} \theta - n \cos^m \theta \sin^n \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(m-1) \cos^{m-2} \theta \sin^n \theta (1 - \cos^2 \theta) - n \cos^m \theta \sin^n \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(m-1) (\cos^{m-2} \theta \sin^n \theta - \cos^m \theta \sin^n \theta) - n \cos^m \theta \sin^n \theta] d\theta \\ &= (m-1) \int_0^{2\pi} \cos^{m-2} \theta \sin^n \theta d\theta - (m+n-1) \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta \\ &= (m-1) I_{m-2,n} - (m+n-1) I_{m,n} \end{aligned}$$

$$\implies I_{m,n} + (m+n-1) I_{m,n} = (m-1) I_{m-2,n}$$

$$\implies I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

$$\begin{aligned}
 I_{m,n} &= \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} = \frac{m-1}{m+n} \frac{m-2-1}{m-2+n} \\
 I_{m-4,n} &= \frac{m-1}{m+n} \frac{m-3}{m-2+n} \frac{m-5}{m-4+n} I_{m-6,n} \\
 &= \frac{m-1}{m+n} \frac{m-3}{m-2+n} \frac{m-5}{m-4+n} \frac{m-7}{m-6+n} I_{m-8,n} \\
 &= \dots = \frac{m-1}{m+n} \frac{m-3}{m-2+n} \frac{m-5}{m-4+n} \frac{m-7}{m-6+n} \dots \frac{1}{2+n} I_{0,n}
 \end{aligned}$$

Application

Dans cette partie, on va proposer une serie d'exemple, qui va nous aider plus tard afin de résoudre les systèmes différentiels avec une méthode technique du moyennisation.

exemples :

$$\begin{aligned}
 1. \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} (2\pi - 0) + \frac{1}{4} \sin(4\pi - 0),
 \end{aligned}$$

$$\text{alors } \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{8} \theta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{3}{8} \times 2\pi \\
 &= \frac{2\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \cos^4\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta \\
 &= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} 2\pi \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{4}\pi$$

$$6. \int_0^{2\pi} \cos^6\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{16} d\theta + \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \cos 6\theta + \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta + \frac{15}{32} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{5}{16} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{6} \sin 6\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{5}{8}\pi$$

$$7. \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^4\theta (1 - \cos^2\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^6\theta d\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{5}{8}\pi$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$8. \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^4\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (\sin^2\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (1 + \cos^4\theta - 2\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^6\theta d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta$$

$$= \pi + \frac{5\pi}{8} - \frac{3\pi}{2} = \frac{8\pi+5\pi-12\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}
 9. \int_0^{2\pi} \sin^6 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{16} - \frac{1}{32} \cos 6\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta - \frac{15}{32} \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{5}{16} d\theta - \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \cos 6\theta d\theta + \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta - \frac{15}{32} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \\
 &= \frac{5}{16} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{32} \left[\frac{1}{6} \sin 6\theta \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{16} \left[\frac{1}{4} \cos 4\theta \right]_0^{2\pi} - \frac{15}{32} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{5}{8} \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \int_0^{2\pi} \cos^8 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{35}{128} + \frac{1}{128} \cos 8\theta + \frac{1}{16} \cos 6\theta + \frac{7}{32} \cos 4\theta + \frac{7}{16} \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{35}{128} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{128} \left[\frac{1}{8} \sin 8\theta \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{16} \left[\frac{1}{6} \sin 6\theta \right]_0^{2\pi} + \frac{7}{32} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{2\pi} + \frac{7}{16} \left[\frac{1}{2} \sin \theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{35\pi}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \sin^2 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^6 (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^8 \theta d\theta = \frac{5\pi}{8} - \frac{35\pi}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{64} \pi \\
 12. \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^4 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta (1 + \cos^4 \theta - 2\cos^2 \theta)^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta (1 + \cos^8 \theta + 2\cos^4 \theta + 4\cos^4 \theta - 4\cos^2 \theta - 4\cos^6 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta (\cos^8 \theta - 4\cos^6 \theta + 6\cos^4 \theta - 4\cos^2 \theta + 1) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^{12} \theta - 4\cos^{10} \theta + 6\cos^8 \theta - 4\cos^6 \theta + \cos^4 \theta) d\theta \\
 &= \frac{7\pi}{512}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) \sin^6 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin^6 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \sin^8 \theta d\theta \\
 &= \frac{5\pi}{8} - \int_0^{2\pi} \left(\frac{35}{128} + \frac{1}{128} \cos 8\theta - \frac{1}{16} \cos 6\theta + \frac{7}{32} \cos 4\theta - \frac{7}{16} \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{5\pi}{8} - \frac{35}{128} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{128} \left(\frac{1}{8} \sin 8\theta \Big|_0^{2\pi} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{6} \sin 6\theta \Big|_0^{2\pi} \right) + \frac{7}{32} \left(\frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \\
 &\quad + \frac{7}{16} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{5\pi}{8} - \frac{35\pi}{64} = \frac{5\pi}{64} \\
 14. \int_0^{2\pi} \sin^8 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{35}{128} + \frac{1}{128} \cos 8\theta - \frac{1}{16} \cos 6\theta + \frac{7}{32} \cos 4\theta - \frac{7}{16} \cos 2\theta \right] d\theta \\
 &= \frac{35}{128} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{128} \left(\frac{1}{8} \sin 8\theta \Big|_0^{2\pi} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{6} \sin 6\theta \Big|_0^{2\pi} \right) + \frac{7}{32} \left(\frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi} \right) - \frac{7}{16} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{35\pi}{64}
 \end{aligned}$$

2.3.1 Théorème de moyennisation du premier ordre :

Considérons le problème de Cauchy à valeur initiale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in D \subset R^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $f(t, x)$ et $g(t, x, \varepsilon)$ sont T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.1) est :

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), y(0) = x_0 \quad (2.2)$$

ou :

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 2.3.1 [7]

Considérons le système (2.1), et supposons que :

1. f , g , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont définies, continues et bornées par une constante M indépendante de ε dans $[0, +\infty[\times D$ avec $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.

2. T indépendant de ε

3. La solution $y(t)$ appartient à D pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

a. Pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ on a que :

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon) \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

b. Si $P \in D$ est un point d'équilibre du système moyenné (2.2) telle que :

$$\det \left(\frac{\partial f^0}{\partial y} \right) \Big|_{y=P} \neq 0, \quad (2.4)$$

alors, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.1) telle que $x_\varepsilon \longrightarrow P$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

c. Si (2.4) est négative, alors la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.1) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.4) est positive, alors elle est instable.

Maintenant, nous sommes entrain de donner un résultat important pour pouvoir démontrer le théorème(2.3.1).

Lemme (Gronwall)[7]

supposons que pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_3,$$

où $\phi(t)$ est une fonction continue, $\phi(t) \geq 0$, $\forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$, δ_1, δ_2 et δ_3 sont des constantes avec $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0$ et $\delta_3 \geq 0$. Alors

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \exp \delta_1(t - t_0) - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

pour : $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Preuve :

les hypothèses (1) et (2) nous assurent l'existence de l'unicité de la solution des problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$. Définissons :

$$U(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f^0(y)) ds$$

On a :

$$\|U(t, y)\| \leq 2Mt \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad \text{et } y \in D.$$

Maintenant, nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon \mu(t, y(t))$$

Comme $y(t) \subset D, \forall t \geq t_0$, on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT \end{aligned}$$

Notons que :

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds$$

Calculons

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)).$$

Remplaçons $\frac{dy}{dt}$ par $\varepsilon f^0(y)$, on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, \partial(t)) + \mathbb{R}$$

où

$$\mathbb{R} = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t))$$

On a :

$$\|f^0(y)\| \leq M \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT$$

Grâce à la continuité lipschitzienne de f nous avons :

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \varepsilon L \|u(t, y(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon LMT; \end{aligned}$$

Donc il existe une constante K telle que $\|\mathbb{R}\| \leq K\varepsilon^2$

C'est clair que

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + K\varepsilon\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t))\| ds + K\varepsilon^2(t - t_0) \\ &\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + K\varepsilon^2(t - t_0) \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{K}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{K}{L}.$$

pour conséquent

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left(\frac{K}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{K}{L} + 2MT \right)$$

Si $\varepsilon L(t - t_0)$ est borné par une constante indépendante de ε , On aura l'approximation $x(t) = y(t) + O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 01 :

Soit l'équation.

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(4x^2 - 3)\dot{x}$$

cette équation est équivalente au système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(4x^2 - 3)x \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

En posant : $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= \cos \theta (r \sin \theta + r \cos \theta \varepsilon (4r^2 \cos^2 \theta - 3)) + \sin \theta (-r \cos \theta) \\ &= r \cos \theta \sin \theta - r \cos^2 \theta \varepsilon (4r^2 \cos^2 \theta - 3) - r \sin \theta \cos \theta \\ \dot{r} &= -r \varepsilon \cos^2 \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r} (\cos \theta (-r \cos \theta) - \sin \theta (r \sin \theta - \varepsilon (4r^2 \cos^2 \theta - 3) r \cos \theta)) \\ &= -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3)$$

donc :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{-r \varepsilon \cos^2 \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3)}{-1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3)}$$

prenons θ comme une variable indépendante de temps, on obtient l'équation suivante :

$\dot{r} = \varepsilon f(\theta, r) + O(\varepsilon^2)$ où $f(\theta, r)$ est donnée par :

$$f(\theta, r) = r \cos^2 \theta (4r^2 \cos^2 \theta - 3)$$

d'après (2.3), nous obtenons : $f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta$

$$\begin{aligned}
 f^0(r) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta(4r^2\cos^2\theta - 3)d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} [4r^2\cos^4\theta - 3\cos^2\theta]d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} [4\frac{3\pi}{4}r^2 - 3\pi] = \frac{3r}{2}[r^2 - 1]
 \end{aligned}$$

cherchons les racines positives de $f^0(r)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 f^0(r) = 0 &\Rightarrow \frac{3r}{2}(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \\
 &\Rightarrow r^2 = 1
 \end{aligned}$$

donc il y a une seule racine positive donnée par $r = 1$

Alors, d'après le théorème (2.3.1) le système possède un seul cycle limite d'amplitude 1.

Exemple 02 :

soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(2x^4 - 13x^2 + 9)y \end{cases}$$

en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \dot{r} &= (r\sin\theta)\cos\theta + (-r\cos\theta - \varepsilon(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)) \\
 &= r\sin\theta\cos\theta - r\cos\theta\sin\theta - \varepsilon r\sin^2\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)
 \end{aligned}$$

$$\dot{r} = -\varepsilon r\sin^2\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{r}(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}) \\
 &= \frac{1}{r}(\cos\theta(-r\cos\theta - \varepsilon(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9))r\sin\theta - \sin\theta(r\sin\theta)) \\
 &= \frac{1}{r}(-r\cos^2\theta - \varepsilon r\cos\theta\sin\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9) - r\sin^2\theta)
 \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -\cos^2\theta - \varepsilon\cos\theta\sin\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9) - \sin^2\theta$$

$$\dot{\theta} = -1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon r \sin^2\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)}{-1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta)$$

ou :

$$F(r; \theta) = r \sin^2\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9)$$

D'ou :

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta$$

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2\theta(2r^4\cos^4\theta - 13r^2\cos^2\theta + 9) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2r^4\sin^2\theta\cos^4\theta - 13r^2\sin^2\theta\cos^2\theta + 9\sin^2\theta] d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \left[2r^4 \times \frac{\pi}{8} - 13r^2 \frac{\pi}{4} + 9\pi \right] \\ &= \frac{r}{8} (r^4 - 13r^2 + 36) \\ &= \frac{r}{8} (r^2 - 4)(r^2 - 9) \end{aligned}$$

Alors :

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow \frac{r}{8}(r^2 - 4)(r^2 - 9) = 0 \Rightarrow r_1 = 2; r_2 = 3$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitude 2 et 3.

On a :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r} \right]_{r=2} = \frac{1}{8} [5r^4 - 39r^2 + 36]_{r=2} = -5 < 0,$$

donc le cycle limite d'amplitude 2 est stable

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r} \right]_{r=3} = \frac{1}{8} [5r^4 - 39r^2 + 36]_{r=3} = \frac{45}{4} > 0$$

donc le cycle limite d'amplitude 3 est instable.

Exemple 03 :

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(16x^7 - \frac{483}{2}x^5 + \frac{945}{4}x^3 - 35x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$\dot{r} = \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y}$$

$$= \cos\theta \left[r\sin\theta - \varepsilon(16r^7\cos^7\theta - \frac{483}{2}r^5\cos^5\theta + \frac{945}{4}r^3\cos^3\theta - 35r\cos\theta) \right] + (-r\cos\theta)\sin\theta$$

$$= r\cos\theta\sin\theta - \varepsilon\cos\theta(16r^7\cos^7\theta - \frac{483}{2}r^5\cos^5\theta + \frac{945}{4}r^3\cos^3\theta - 35r\cos\theta) - r\cos\theta\sin\theta$$

$$= -\varepsilon\cos\theta(16r^7\cos^7\theta - \frac{483}{2}r^5\cos^5\theta + \frac{945}{4}r^3\cos^3\theta - 35r\cos\theta)$$

$$\dot{r} = -r\varepsilon\cos^2\theta(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)$$

et

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x})$$

$$= \frac{1}{r} \left[\cos\theta(-r\cos\theta) - \sin\theta(r\sin\theta) - \varepsilon(16r^7\cos^7\theta - \frac{483}{2}r^5\cos^5\theta + \frac{945}{4}r^3\cos^3\theta - 35r\cos\theta) \right]$$

$$= \frac{1}{r}(-r\cos^2\theta - r^2\sin\theta + \sin\theta\varepsilon(16r^7\cos^7\theta - \frac{483}{2}r^3\cos^3\theta - 35r\cos\theta))$$

$$= -\cos^2\theta - \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta\varepsilon(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)$$

$$\dot{\theta} = -1 + \sin\theta\cos\theta\varepsilon(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{-r\varepsilon\cos^2\theta(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)}{-1 + \sin\theta\cos\theta(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)} \\ &= \underbrace{\varepsilon r(16r^6\cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4\cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2\cos^2\theta - 35)}_{F(r,\theta)} + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta) \end{aligned}$$

d'où :

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (16r^6 \cos^6\theta - \frac{483}{2}r^4 \cos^4\theta + \frac{945}{4}r^2 \cos^2\theta - 35) d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (16r^6 \cos^8\theta - \frac{483}{2}r^4 \cos^6\theta + \frac{945}{4}r^2 \cos^4\theta - 35 \cos^2\theta) d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} (16r^6 \times \frac{35}{64}\pi - \frac{483}{2}r^4 \times \frac{5}{8}\pi + \frac{945}{4}r^2 \times \frac{3\pi}{4} - 35 \times \pi) \\
 &= \frac{35}{8}r(r^2 - \frac{69}{4}r^4 + \frac{81}{4}r^2 - 4) \\
 &= \frac{35r}{8}(r^2 - \frac{1}{4})(r^2 - 1)(r^2 - 4)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow \frac{35}{8}r(r^2 - \frac{1}{4})(r^2 - 1)(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}; r = 1; r = 4$$

Donc le système admet trois cycles limite d'amplitude : $\frac{1}{2}; 1; 4$

On a :

$$\left[\frac{\partial f^0(r)}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{35}{8} \left(7r^6 - \frac{345}{4}r^4 + \frac{243}{4}r^2 - 4 \right)_{r=\frac{1}{2}} = \frac{6615}{256} > 0$$

\Rightarrow le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est instable.

$$\left[\frac{\partial f^0(r)}{\partial r} \right]_{r=1} = \frac{35}{8} \left(7r^6 - \frac{345}{4}r^4 + \frac{243}{4}r^2 - 4 \right)_{r=1} = \frac{-1575}{16} < 0$$

\Rightarrow le cycle limite d'amplitude 1 est stable.

$$\left[\frac{\partial f^0(r)}{\partial r} \right]_{r=4} = \frac{35}{8} \left(7r^6 - \frac{345}{4}r^4 + \frac{243}{4}r^2 - 4 \right)_{r=4} = 33075 > 0$$

donc le cycle limite d'amplitude 4 est instable.

Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions d'un système différentiel périodique.

considérons les deux problèmes aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où F_1 et $F_2 : [0, +\infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}^k$, $F_3 : [0, \infty[\times D \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^k$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t et D est un ouvert de \mathbb{R}^n .

et

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où f^0 , f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées (T -périodique) de F_1 , f^1 et F_2 respectivement, définies comme :

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

3.0.1 Théorème :

[1] soit :

$$f^1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x)$$

ou :

$$y^1(t, x) = \int_0^1 [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x)$$

avec $z(x)$ est une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est nulle. Supposons que :

1. $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, F_2 et F_3 sont continues sur leurs domaines de définitions et lipchitziennes en x .
2. $F_3(t, x, \varepsilon)$ est uniformément borné par une constante M dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}[\times D \times (0, \varepsilon]$
3. T est indépendant de ε .

4. $y(t) \in D$ sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors :

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

3.0.2 Corollaire :

Si les hypothèses du théorème (3.0.1) sont satisfaites et de plus $f^0(y) = 0$, Alors :

1. Si P est le point d'équilibre du système moyenné(3.2) telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y)) \Big|_{y=p} \neq 0,$$

alors il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (3.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ que $\varepsilon \rightarrow 0$

2. Si P est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (3.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Remarque

Si $f^0(y) = 0$, alors en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$

on obtient que $f^0(r) = 0$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta = 0$$

Calculons f^{10} , on trouve :

$$\begin{aligned} f^{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) ds \right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, s) z(r) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) d\theta \right) ds + \frac{z(r)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, s) ds \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$f^{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) ds \right) d\theta$$

.

2. pour $f^0(y) = 0$, on note la fonction de seconde ordre par :

$$A(r) = f^{10}(r) + g^0(r).$$

Exemple 3.0.1

soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (y^2 - 2x^2 + 8xy) + a\varepsilon^2 x \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay \end{cases} \quad (3.3)$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

le système (3.3), s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a) \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta \\ & + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (3.1) avec

$$F_1(\theta, r) = -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5)$$

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r) = & r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \end{aligned}$$

$$F_3(\theta, r, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$$

Donc nous allons appliquer le Théorème(3.0.1) :

$$f^\circ(r) = \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \\ \int_0^\theta F_1(s, r) ds &= \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta - 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

L'équation $f^{10}(r) = 0$ a une seule racine positive $r = +\sqrt{a}$ et on a $\frac{d}{dr} f^{10}(r) = a - 3r^2$.

1. Si $a > 0$, alors le système différentiel (3.3) a un cycle limite stable d'amplitude $r = \sqrt{a}$ car $\frac{d}{dr}f^{10}(\sqrt{a}) = -2a < 0$ (voir FIGURE 3.1; FIGURE 3.2 et FIGURE 3.3).
2. Si $a \leq 0$, alors l'équation $f^{10}(r) = 0$ n'a pas de racine simple positive. Donc le système différentiel (3.3) n'a pas de cycle limite.

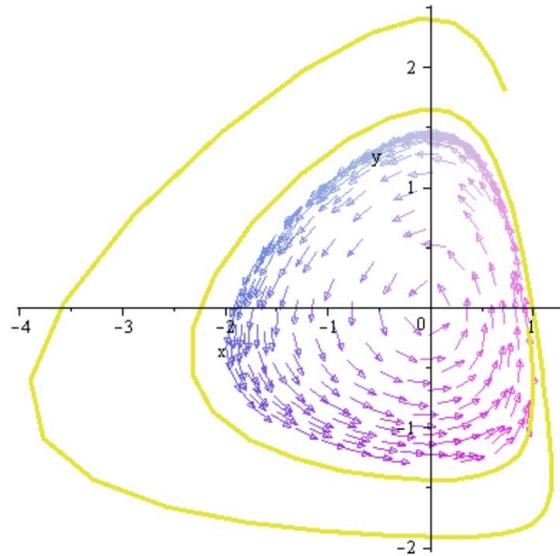


FIGURE 3.1 – portrait de phase du système (3.3) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.1$

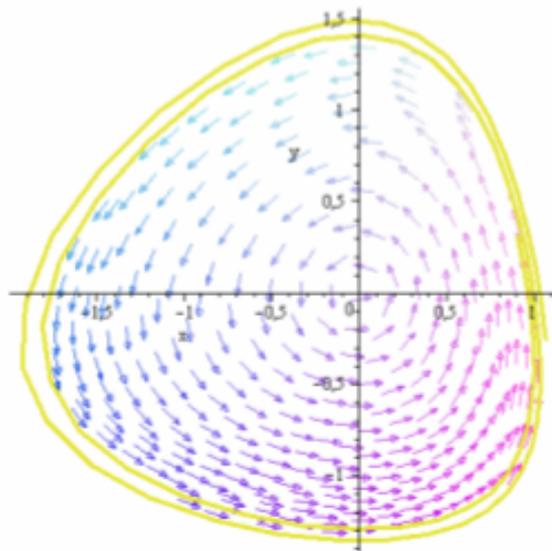
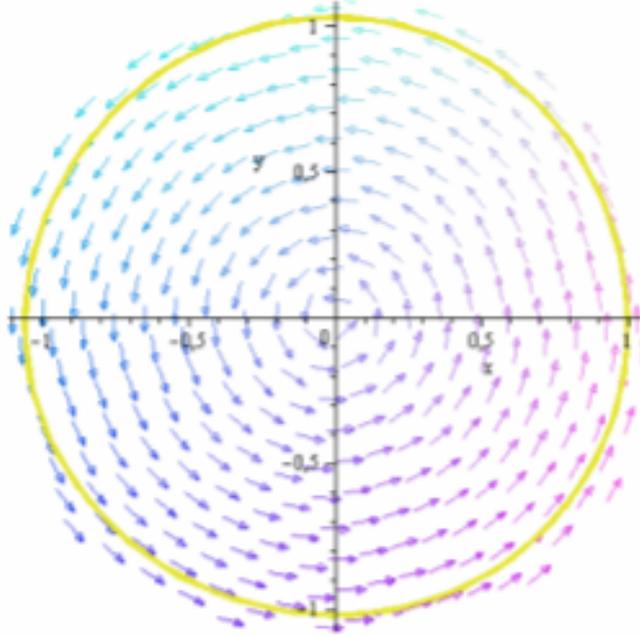


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du système (3.3) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.8$


 FIGURE 3.3 – portrait de phase du système (3.3) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.01$

Exemple 3.0.2

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \left(\frac{1}{2}x^2 + 8xy \right) + 6\varepsilon^2 x \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (3.4)$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Le système (3.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{1}{2}r\varepsilon\cos^2\theta (r \cos \theta + 16r \sin \theta - 12\varepsilon) \\ \dot{\theta} = -1 + \frac{1}{2}\varepsilon r \sin \theta \cos^2\theta - 6\varepsilon^2 \sin \theta \cos \theta - 8\varepsilon r \cos^3\theta + 8\varepsilon r \cos \theta \end{cases}$$

Qui est équivalent à l'équation

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2\cos^2\theta (\cos \theta + 16 \sin \theta) \varepsilon - \frac{1}{4}r\cos^2\theta (32\cos^4\theta r^2 + \\ 255r^2\cos^3\theta \sin \theta + 24 - 32r^2\cos^2\theta - 256r^2 \sin \theta \cos \theta) \varepsilon^2 \\ + O(\varepsilon^3) \end{cases}$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f(r, \theta) + \varepsilon^2 g(r, \theta) + O(\varepsilon^3)$$

Où

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2 \cos^2 \theta (\cos \theta + 16 \sin \theta).$$

Et

$$g(r, \theta) = -\frac{1}{4}r \cos^2 \theta (32r^2 \cos^4 \theta + 255r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 24 - 32r^2 \cos^2 \theta - 256r^2 \sin \theta \cos \theta).$$

Calculons $f^0(r)$, $g^0(r)$ et $f^{10}(r)$, on obtient :

$$\begin{cases} f^0(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta = 0, \\ g^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2}r(r^2 - 6) \end{cases}$$

Et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \left(\int_0^s f(r, \theta) ds \right) d\theta = 0.$$

Avec

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) = -\cos^2(s) r (\cos(s) + 16 \sin(s)),$$

et

$$\int_0^s f(r, \theta) d\theta = -\frac{8}{3}r^2 - \frac{1}{6}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{1}{3}r^2 \sin(\theta) + \frac{8}{3}r^2 \cos^3(\theta).$$

Par conséquent, la fonction moyennée $A(r)$ devient :

$$A(r) = f^{10} + g^0(r) = \frac{1}{2}r(r^2 - 6).$$

Il existe une seule racine positive de $A(r)$ donnée par $r = \sqrt{6}$ avec $\frac{d}{dr}(A(\sqrt{6})) = 6 > 0$ Alors d'après le théorème (3.0.1) le système (3.3) admet un cycle limite de rayon $r = \sqrt{6}$ qui est instable.

conclusion

Nous espérons avoir pu aboutir au joyau attendu par ce modeste travail, dans lequel nous avons étudié ou analysé la méthode moyennisation du premier et du deuxième ordre avec des exemples clairs.

Ce qu'on peut dire au final est que nous souhaitons avoir pu, ne serait-ce qu'un peu à laisser une empreinte lumineuse dans les ouvrages et la quête scientifique, cette dernière sera la preuve qui va démontrer qu'à une époque j'étais étudiante, passionnée par les mathématiques, l'ayant choisi comme profession et science par amour...

Bibliographie

- [1] A. Buica and J. Llibre. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, *Bull. Sci. Math.* 128 (2004)7 - 22
- [2] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles*, *Elect. J. of Diff. Equ.*, no15 (2011), 1-12.
- [3] Berbache. Aziza. thèse de doctorat. "*Etude qualitative de quelques classes de systèmes différentiels planaires*". Université Ferhat Abbas Sétif 1.(2017).
- [4] Bouattia. Yassine. Mémoire de magister. "*Cycles limites de l'équation de Liénard dans les régimes fort et faible*". Université de Annaba.(2006).
- [5] F.Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*,Berlin : Springer-Verlag,secondedition(1927).
- [6] Hamamda. Meriem. thèse de doctorat. "*Cycles limites d'une classe des équations différentielles du troisième ordre*". Université de Annaba.(2016).
- [7] J. A. Sanders, F. Verhulst. *Averaging Method in Nonlinear Dynamical Systems*. *Applied Mathematical Sciences* 59, Springer, 1985.
- [8] L Perko : "*Differential equations and dynamical systems*", *Texts in Applied Mathematics*, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).
- [9] Stephen, L. *Dynamical Systems with Application using Mathematica*. Birkhauser Boston, c/o Springer Science+Business Media LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA (2007).
- [10] Touati. Fatima. thèse de doctorat. "*Cycles limites d'une classe des equations differentielles du second ordre et de l'equation de duffing*". Université de Annaba.(2015).