République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : LABLAB safinaz et BOURAGHDA Khadidja

Intitulé

Contrôle sans regret d'une équation de diffusion fractionnaire à données incomplètes

Dirigé par : Dr. Berhail Amel

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BADRAOUI Saleh**	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BERHAIL Amel**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. KERBOUA Mourad**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juillet 2021

شكر و تقدير

الحمد و الشكر لله على النعم التي أنار بها درب العلم و المعرفة التي ألهمنا إياها و أعاننا على إتمام هذا البحث المتواضع سبحانه و تعالى

إلى التي كانت و مازالت و ندعو الله أن يحفظها لتبقى للدروب منيرة الأستاذة المشرفة برحايل أمال

نتوجه بجزيل الشكر أيضا إلى جميع أساتذة قسم الرياضيات وإلى كل من ساعدنا من قريب و بعيد في إنجاز هذه المذكرة

كما لا يفوتنا أن نشكر جميع الأصدقاء اللذين قدموا المساعدة بالكتب و الكلمات المتفائلة.

إهداء

قال الله تعالى "وقل أعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون"التوبة (115)

أهدي إجتهادي هذا و عملي إلى من كان حبه لي قوة في الحياة إلى بهجة قلبي و إعتزازي إلى من أثنى جسده و جبيه لأصل إلى هذا المستوى

إليك أبي الغالي أطال الله في عمرك

إلى ألمع ذرة حدقت لها العيون من أفاضت حنانها علي دون أن تبالي و سهرت الليالي إلى من علمتني أن الحياة عطاء قبل أن تكون أخذ

إليك أمي الحنونة حفظك الله من كل شر

إلى إخوتي محمد لمين و نجم الدين أنار الله دربكما و حفظكما الله سند لي

إلى أخواتي حنان و هديل و مريم لطالما كنتن واقفات بجنبي بارك الله فيكن

إلى أصدقائي و كل من دل على الوفاء نجاح موفق في مسيرة حياتكم

إلى كل من علمني حرف إلى جميع أساتذتي الكرام

وإلى كل من فرح لفرحي

أهدي إليكم ثمرة إنجازي لمذكرة تخرجي من أجل نيل شهادة الماستر

خديجة

إهداء

أهدي تخرجي و فرحي إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار إلى من علمني العطاء بدون إنتظار إلى من أحمل إسمه بكل إفتخار أرجو من الله أن يمد في عمرك

والدي الغالي

إلى ملاكي قي الحياة إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان إلى بسمة الحياة و سر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي إلى أغلى الحبايب

أمي الغالية

إلى زوجي إخوتي أصدقائي و زملائي و إلى أساتذتي من الإبتدائي إلى الجامعي

إلى كل من أعانني و ساعدني بكل ما أستطيع لإتمام مسيرتي الدراسية

صافيناز

Résumé

Dans le présent travail nous proposons une étude d'un problème de contrôle optimal d'une équation de diffusion fractionnaire au sens caputo a données manquantes.

Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité du problème.

Ainsi, on a vu qu'il était impossible de résoudre le problème de contrôle optimal associé à ces équations. Alors, on a utilisé les notions de contrôles sans regret et à moindres regrets. Nous montrons alors que ces contrôles existent où nous caractérisons chaque contrôle par un système d'optimalité.

Mots clés : Dérivéé fractionnaire de Caputo, équations de diffusion fractionnaires, contrôle sans regret, contrôle à moindres regret.

Abstract

In the present work we study the optimal control problem of a fractional diffusion equation in the caputo sense with missing data.

We start with a result of existence and uniqueness of the problem.

Thus, we saw that it was impossible to solve the optimal control problem associated with these equations. So we used the concepts of no-regret and least-regret controls. We then show that these controls exist where we characterize each control by an optimality system.

Keywords : Caputo fractional derivative, fractional di_usion equations, no regret control, least regret control.

ملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة المراقب الامثل الخاص بمعادلة الانتشار بمشتقات كسرية و بمفهوم caputo مع معطيات مجهولة.

نبدأ أولا بدراسة وجود و و حدانية الحل لمعادلة الانتشار , بعدها نلاحظ أنه من المستحيل حل مشكلة المراقب الامثل لهذه المعادلة، لذا فكرنا في استعمال مفاهيم جديدة معطاة من طرف جاك لويس ليونس و هي المراقب sans regret et à moindres regrets

نبرهن على وجود هذا النوع من المراقبين و من ثم نتعرف على خصائصهم بواسطة الانطمة المثالية.

Table des matières

Notations et Abréviations

Ω : est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions carrée mesurable.

$L^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

$H^1(\Omega)$: $\{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., n\}$ l'espace de Sobolev d'ordre 1.

$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega), v\,|_{\partial\Omega} = 0\right\}$.

$H^2(\Omega)$: $\{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, n}\}$ l'espace de Sobolev d'ordre 2.

$C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continument différentiable sur $\Omega, k \geq 0$.

$\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^t$:L'opérateur de gradient

$\triangle = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: l'opérateur de Laplace.

$L(E, F)$: l'espace des fonctions linéaire et continue définie de E dans F.

0.1 Introduction

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connait actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie est celle du Calcul Fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires ([7],[12]).

De plus, la théorie du contrôle s'intéresse au comportement de systèmes dynamiques en fonction de leurs paramètres. Elle peut être vue comme une stratégie permettant de sélectionner la bonne entrée d'un système pour que la sortie soit celle désirée. Donc, le but est d'amener le système d'un état initial donnée à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères ([1],[10]).
On rencontre dans la pratique de très nombreux problèmes de contrôle, dans toutes les disciplines : par exemple garer la voiture, piloter un avion ou un satellite vers une orbite, optimiser les flux d'information dans un réseau, contrôler une épidémie, réaliser une opération chirurgicale au laser,...

Depuis plusieurs décennies de nombreux travaux ont été menés sur les problèmes de contrôle des équations de diffusion fractionnaires ([6, 11, 13]).
L'idée du contrôle sans regret a été proposé par J.L.Lions ([8]) au sens suivant : on cherche les contrôles qui sont les meilleurs possible de ne rien faire.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion fractionnaires en temps, où les dérivées sont prises au sens de Caputo (En physique, l'équation de diffusion fractionnaire modélise le déplacement d'une concentration dans un milieu poreux). Nous obtenons ces équations à partir de l'équation de diffusion classique, en remplaçant la dérivée de premier ordre par la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$.

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires concernant le calcul fractionnaire, la transformée de Laplace et de la théorie de contrôle qui seront bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté des résultats d'existence et d'unicité de solution d'équation de diffusion fractionnaire au sens de Caputo où on a utilisé la formulation variationnele de notre problème afin d'obtenir des solutions faibles.

Le dernier chapitre a pour but d'étudier un problème de contrôle sans regret associés à des équations de diffusion fractionnaire au sens de Caputo où le terme source est inconnu.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre, est de présenter quelques notions préliminaires qui sont bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 [12] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

où l'intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.
Cette fonction est strictement décroissante pour $0 < z < 1$, de plus on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

On peut définir la fonction Gamma par la limite :

$$\Gamma(z) = lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z.(z+1)...(z+n)}.$$

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler, notée $E_{\alpha,\beta}$, tient son nom du mathématicien suédois Gosta Mittag-Leffler (1903).
Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.2 [7] La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit :

$$\mathbb{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \tag{1.3}$$

où $z \in \mathbb{C}$ et α, β sont des nombres réels positifs.

Exemple 1.1 Nous donnons quelques cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler

$$\mathbb{E}_0(z) = \frac{1}{1-z},\ |z| < 1 \qquad ,\ \mathbb{E}_1(z) = e^z,$$

$$\mathbb{E}_2(z) = \cosh(\sqrt{z}),\ z \in \mathbb{C},$$

$$\mathbb{E}_2(-z^2) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Lemme 1.1 *[2] Soit $\alpha > 0,\ \lambda > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{d}{dz}\mathbb{E}_{\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(z).$$

$$\frac{d}{dz}[z^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})] = z^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1}(z^{\alpha}).$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathbb{E}_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}) = -\lambda t^{\alpha-n}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha-n+1}(-\lambda t^{\alpha}),\ t > 0.$$

Lemme 1.2 *[4] Soient $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $|a\lambda^{-\alpha}| < 1$, alors*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(\pm a x^{\alpha})dx = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha} \mp a}.$$

1.1.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires sur les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville.

Définition 1.3 [7] Soit $\Omega = [a, b)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur Ω. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > 0 \tag{1.4}$$

quand l'intégrale existe.

Définition 1.4 [7] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par ${}^{RL}D$) d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in C^n(\Omega)$ est définie par

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \tag{1.5}$$

avec $n - 1 < \alpha < n, \quad n \in N^*$, quand l'intégrale existe.

Remarque 1.1 :
L'approche de Riemann-Liouville a des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Une certaine solution pour ce problème a été proposèe par M. Caputo.

1.1.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.5 [7] Soit f une fonction de classe $C^n([a, b])$. La dérivée de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville c'est à dire :

$$D_a^\alpha f(t) =^{RL} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]. \tag{1.6}$$

avec $n-1 < \alpha < n, \quad n \in N^*$, quand l'intégrale existe.

Définition 1.6 [7] La dérivée fractionnaire de caputo d'ordre α d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds,$$

avec $n-1 < \alpha < n, \quad n \in N^*$.

Remarque 1.2 :
Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, par contre, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est

$${}^c D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0.$$

Lemme 1.3 *Soit $f \in C^n([0, T])$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t),$$

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

1.2 Transformation de Laplace

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires. C'est une outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire où disparaissent les formes dérivées.

Définition 1.7 La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ d'un variable réel positif $t \in (0, +\infty)$ est la fonction $F(s)$ définie par

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$

Propriétés de la transformation de Laplace :
On cite ci-dessous quelques propriétés de la transformée de Laplace.
1- La transformation de Laplace est une application linéaire c'est à dire pour toutes fonctions f et g admettant des transformées de Laplace et pour tous réels $\alpha,\ \beta$:

$$\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}=\alpha\mathcal{L}\{f\}+\beta\mathcal{L}\{g\}.$$

2- Soient $F(s)$ et $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors le produit de convolution $(f*g)$ est donné par :

$$(f*g)(t)=F(s).G(s)=\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t-z)g(z)dz\Big\}.$$

Définition 1.8 [4] L'inverse de la transformation de Laplace de la fonction $g(t)$ est donnée par la formule :

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x)=\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sx}g(s)ds, \tag{1.8}$$

où γ est choisi de telle façon que l'intégrale converge.

Définition 1.9 [4]
1- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est

$$\mathcal{L}\big\{D_t^\alpha f(t);s\big\}=s^\alpha F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}D^{(k-(n-\alpha))}f(0),\quad (n-1<\alpha\leq n). \tag{1.9}$$

2- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$\mathcal{L}\big\{D_t^\alpha f(t);s\big\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\big\{D_t^\alpha f(t)\big\}dt,$$

avec

$$\mathcal{L}\big\{D_t^\alpha f(t);s\big\}=s^\alpha F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0),\quad (n-1<\alpha\leq n). \tag{1.10}$$

Remarque 1.3 : On a

$$y(s) = \frac{1}{s^\alpha - a} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(y(s);t\big) = t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha).$$

$$y(s) = \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(y(s);t\big) = \mathbb{E}_{\alpha}(-at^\alpha).$$

1.3 Contrôle Optimal

La contrôlabilité est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est-à-dire amener (en temps fini) un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle. Alors, cette propriété donne la réponse au problème suivant :
étant donnée un état initial imposé et un état final désiré, existe-il au moins une commande qui amène le système d'un état vers l'autre ?

1.3.1 Position du problème

On considère H un espace de Hilbert de dual H', $A \in L(H, H')$ un opérateur différentiel elliptique, U l'espace de Hilbert des contrôles, U_{ad} ensemble convexe, fermé et non vide de U et G un sous espace vectoriel fermé non vide de dimension infinie de l'espace de Hilbert des incertitudes, f et $\beta \in L(G, H')$.
Pour $f \in H'$, l'équation d'état relative au contrôle $v \in U_{ad}$ (s'appelle ensemble des contrôles admissible) et à l'incertitude $g \in G$ est donnée par :

$$Az(v, g) = f + v + \beta\ g. \tag{1.11}$$

En supposant que A est un isomorphisme de H dans H', le problème (1.11) est bien posé dans H, il admet alors une unique solution notée $z(v, g)$.
Pour chaque $g \in G$, on introduit une fonction coût donnée comme suit

$$J(v, g) = \|z(v, g) - z_d\|_H^2 + N\|v\|_U^2, \tag{1.12}$$

où $z_d \in H$ est un état désiré fixé et $N > 0$. La variable g peut être considérée comme une "perturbation" ou une "pollution".

L'objectif consiste alors à résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_{v \in Uad} J(v,g), \forall g \in G.$$

Si $G = \{0\}$, alors

$$\inf_{v \in Uad} J(v,0),$$

est un problème classique de contrôle du système (1.11).
Si $G \neq \{0\}$, le problème

$$\inf_{v \in Uad} J(v,g); \forall g \in G \quad n'a\ pas\ de\ sens.$$

J.L. Lions propose alors une notion pour donner un sens au contrôle de (1.11)-(1.12) c'est le contrôle sans regret.
Elle consiste à diminuer les effets de la pollution à l'aide d'un contrôle, dans des situations données plutôt que de laisser ces dernières à l'abandon, autrment dit on adopte une démarche avec le moins de regret possible, d'où le nom de la méthode.
On va donc se borner aux contrôles v, s'il en existe, tels que

$$J(v,g) \leq J(0,g),$$

où $v = 0$ correspond au cas où l'on n'exerce aucun contrôle, on ne considère ainsi que des contrôles qui, au moins, ne rendent pas la situation pire.

1.3.2 Contrôle sans regret

Définition 1.10 (Le contrôle sans regret) On dit que $u \in U_{ad}$ est un contrôle sans regret pour (1.11)-(1.12) si u est solution du problème

$$\inf_{u \in U} \left(\sup_{g \in G} (J(v,g) - J(0,g)) \right). \tag{1.13}$$

Remarque 1.4 Pour tout $(v,g) \in U_{ad} \times G$

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\langle \psi(v,0), g \rangle,$$

avec ψ est la solution du problème adjoint de (1.11), tel que a partir de $\psi(v) \in H$ on défini l'opérateur adjoint A^* par

$$A^*\psi(v) = z(v,0) - z(0,0);$$

Le problème (1.13) devient :

$$\inf_{u\in U}\left(\sup_{g\in G}\big(J(v,0) + 2\langle\psi(v,0), g\rangle\big)\right). \tag{1.14}$$

Le contrôle sans regret est difficile à caractériser, donc on va définit le contrôle à moindres regrets.

1.3.3 Contrôle à moindres regrets

Le contrôle à moindres regrets s'interprète comme une approximation du contrôle sans regret.

Définition 1.11 On relaxe le problème (1.13), en introduisant le problème

$$\inf_{u\in U}\left(\sup_{g\in G}\big(J(u,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|_G^2\big)\right).$$

où γ un paramètre strictement positif. La solution de ce problème, si elle existe, sera dite le contrôle à moindre regret.

Le problème perturbé peut s'écrire sous la forme d'un problème de contrôle classique suivant :

$$\inf_{u\in U}\left(\ \mathcal{J}^\gamma(u)\right),$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(u) = J(u,0) + \frac{1}{\gamma} \parallel \psi(u,0) \parallel^2 .$$

Remarque 1.5 :
Avec le "contrôle à moindres regrets", nous faisons un choix de contrôles v qui font "au moins aussi bien que 0" c'est à dire mieux que rien faire avec une marge d'erreur ne dépassants pas $\gamma\|g\|_G^2$.

Théorème 1.1 *[1] Le contrôle à moindres regrets converge faiblement dans U_{ad} vers l'unique contrôle sans regret.*

Chapitre 2

Equation de diffusion fractionnaire au sens de Caputo

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence et l'unicité de solution faible d'une équation de diffusion fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère l'équation de diffusion fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha z(x,t) - \Delta z(x,t) = f(x,t) \; dans \; Q, \\ \\ z(\xi, t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sur \; \Sigma, \\ \\ z(x,0) = z^0 \qquad\qquad\qquad\quad dans \; \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

où D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, $f \in L^2(Q)$ et $z^0 \in H_0^1(\Omega)$. Ce problème s'appelle **problème fractionnaire de diffusion.**

2.2 Formulation variationnelle

Soit z la solution du problème (2.1). Multiplions la première équation par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par parties sur Ω, on a :

$$\int_\Omega D^\alpha z\,(x,t)\,v\,(x)\,dx - \int_\Omega \Delta z\,(x,t)\,v\,(x)\,dx = \int_\Omega f\,(x,t)\,v\,(x)\,dx,$$

par l'utilisation de la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega D^\alpha z\,(x,t)\,v\,(x)\,dx + \int_\Omega \nabla z(x,t)\ \nabla v(x)dx = \int_\Omega f\,(x,t)\,v\,(x)\,dx. \tag{2.2}$$

On pose

$$a(z(t),v) = \int_\Omega \nabla z(x,t)\ \nabla v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

où $a(.,.)$ est le produit scalaire sur $H_0^1\,(\Omega)$ avec la norme associée est :

$$\|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} = a\,(z,z)\,.$$

On sait que $(-\Delta)$ est une forme elliptique uniforme et symétrique, d'où il existe une suite de valeurs propres réelles, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ avec

$$\lambda_k \to \infty\ si\ k \to \infty,$$

et il existe une base hilbertienne orthonormale $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2\,(\Omega)\,,$ où $\omega_k \in H_0^1\,(\Omega)$ est le vecteur propre associé a λ_k, alors

$$-\Delta\omega_k = \lambda_k\omega_k,$$

avec

$$a\,(\omega_k,q)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k(\omega_k,q)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall q \in H_0^1\,(\Omega)\,, \tag{2.3}$$

de plus, $\left\{\frac{\omega_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k-1}^\infty$ est une base hilbertienne orthonormale de $H_0^1\,(\Omega)$ pour le produit scalaire $a\,(.,.)\,,$ d'où

$$\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\,(\varphi,\omega_i)^2_{L^2(\Omega)}\,, \qquad\qquad \forall\varphi \in H_0^1\,(\Omega)$$

Donc, l'équation (2.2) s'écrit

$$(D^\alpha z\,(t)\,,v)_{L^2(\Omega)} + a\,(z\,(t)\,,v) = (f\,(t)\,,v)_{L^2(\Omega)}\,,$$

et on a

$$(D^{\alpha} z\,(t)\,, v) = D^{\alpha}\,(z\,(t)\,, v)\,.$$

Alors, le problème (2.1) s'écrit pour tout t$\in (0,T)\,,\ \forall v \in H_0^1\,(\Omega)$:

$$\begin{cases} D^{\alpha}(z(t),v)_{L^2(\Omega} + a(z(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} & dans\ \Omega, \\ z(t) = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ z(0) = z^0 & dans\ \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Passons nous maintenant aux résultats d'existence et d'unicité de notre problème (2.4).

2.3 Existence et unicité du problème

Définition 2.1 : On dit que z est une solution faible du problème (2.4) s'il l'équaion vérifie dans $L^2(Q)$ et $z(.,t) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t \in (0,T)$ et

$$z \in C([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

Théorème 2.1 *:*

Soit $f \in L^2(Q)$ et $z^0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors le problème (2.4) admet une unique solution $z \in L^2((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ telle que $\dfrac{\partial z}{\partial t} \in L^2(Q)$. De plus, il existe un $C > 0$ telle que

$$\|z\|_{L^2((0,T),H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} + \|\frac{\partial z}{\partial t}\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(Q)} + \|z^0\|_{H_0^1(\Omega)}),$$

et on a

$$z\,(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\,(-\lambda_i t^{\alpha})\, z_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, E_{\alpha,\alpha}\,(-\lambda_i\,(t-s)^{\alpha})\, f_i\,(s)\, ds\} w_i. \tag{2.5}$$

où $z_i^0 = (z^0, w_i)_{L^2(\Omega)}$ et $f_i(t) = (f(t), w_i)_{L^2(\Omega)}$ sont respectivement la i-ème composante de z^0 et $f(t)$ dans la base orthonormale $(wi)_{i=1,n}$ de $L^2(\Omega)$.

Preuve.

On suppose que la solution existe et on cherche sa forme explicite. En remplaçant v par ω_i dans (2.4)

$$D^{\alpha}(z(t),\omega_i)_{L^2(\Omega)} + a(z(t),\omega_i) = (f(t),\omega_i)_{L^2(\Omega)}$$

et d'après (2.3), on a

$$a\left(z\left(t\right),\omega_i\right)=\lambda_i\left(z\left(t\right),\omega_i\right)_{L^2(\Omega)}=\lambda_i z_i, \tag{2.6}$$

en déduit que z_i est solution de EDO suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha z_i(t)+\lambda_i z_i\left(t\right)=f_i\left(t\right), t\in(0,T) \\ z_i(0)=z_i^0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Puis, utilisons la transformée de Laplace, on arrive à

$$\mathcal{L}(D^\alpha z_i(t))(s)+\lambda_i\mathcal{L}(z_i(t))(s)=\mathcal{L}(f_i(t))(s) \tag{2.8}$$

Utilisant (1.10), on obtient

$$\mathcal{L}(D^\alpha z_i)(s)=-z(0)+s^\alpha\mathcal{L}(z_i)(s).$$

D'après (2.8), on a

$$-z_i(0)+s^\alpha\mathcal{L}(z_i)(s)+\lambda_i\mathcal{L}(z_i)(s))=\mathcal{L}(f_i(s)),$$

ce qui implique que

$$\mathcal{L}(z_i(t))(s)=\frac{z_i^0}{s^\alpha+\lambda_i}+\frac{\mathcal{L}(f_i(t))(s)}{s^\alpha+\lambda_i}.$$

Utilisant la remarque (1.3), on arrive a

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha+\lambda_i};t\right)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i t^\alpha\right),$$

donc

$$z\left(t\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}z_i\left(t\right)w_i,$$

où

$$z_i\left(t\right)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i t^\alpha\right)z_i^0+\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i\left(t-s\right)^\alpha\right)f_i\left(s\right)ds.$$

Pour prouver l'existence, nous procédons en trois étapes :

Etape 1 : Existence de la solution du problème approché.

Soit V_m un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ engendré par les vecteurs $(w_1, w_2, ..., w_m)$. On considère le problème approché associé au problème (2.4) :

Trouver $z_m : t \in (0,T] \to z_m(t) \in V_m$ solution de

$$\begin{cases} D^\alpha (z_m(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(z_m(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in V_m, \\ z_m(0) = z_m^0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Comme $z_m(t) \in V_m$, on a

$$z_m(t) = \sum_{i=1}^{m} (z(t), w_i)_{L^2(\Omega)} w_i = \sum_{i=1}^{m} z_i(t) w_i.$$

Utilisant la transformation de Laplace puis l'inverse pour montrer que la fonction z_m est solution du problème (2.9) et est donné par

$$z_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha) z_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s)\, ds\} w_i.$$

Etape 2 : Montrons que la suite (z_m) est de Cauchy dans $L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$.

Soient m et p deux entiers tels que $p > m \geq 1$. On a alors

$$z_p(t) - z_m(t) = \sum_{i=m+1}^{p} z_i(t) w_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} a(z_p(t) - z_m(t), z_p(t) - z_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i [z_i(t)]^2 \\ &\leq 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i t^{2\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}^2(-\lambda_i t^\alpha) \left|z_i^0\right|^2 + 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \\ &\quad \left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s)\, ds\right\}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|z_p - z_m\|^2_{L^2\left((0,T);H_0^1(\Omega)\right)} &= \int_0^T a(z_p(t) - z_m(t), z_p(t) - z_m(t))\, dt \\ &\leq A_1 + A_2, \end{aligned}$$

avec

$$A_1 = 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left|z_i^0\right|^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}^2\left(-\lambda_i t^\alpha\right) dt,$$

$$A_2 = 2\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \lambda_i \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i (t-s)^\alpha\right) f_i(s)\, ds \right\}^2 dt.$$

Pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left|z_i^0\right|^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}^2\left(-\lambda_i t^\alpha\right) dt \\ &\leqslant 2C^2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left|z_i^0\right|^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} dt \\ &= \frac{2C^2 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left|z_i^0\right|^2. \end{aligned}$$

De plus,

$$A_2 = 2\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \lambda_i \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i (t-s)^\alpha\right) f_i(s)\, ds \right\}^2 dt.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$A_2 \leq 2\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \lambda_i \left\{ \left(\int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i (t-s)^\alpha\right)\right]^2 ds \right) \left(\int_0^t \left|f_i(s)\right|^2 ds \right) \right\} dt.$$

Pour $z = t - s$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i (t-s)^\alpha\right)\right]^2 ds &= \int_0^t \left[z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i z^\alpha\right)\right]^2 ds \\ &= \int_0^t \left[-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d}{dz} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i z^\alpha\right)\right]^2 ds \\ &= \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^t \left[\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dz} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i z^\alpha\right)\right]^2 ds \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \lambda_i^2} \int_0^t E_{\alpha,\alpha}^2\left(-\lambda_i z^\alpha\right) ds. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$A_2 \leq 2 \sum_{i=m+1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 \alpha^2} \int_0^T \left\{ \left(\int_0^t E_{\alpha,\alpha}^2 \left(-\lambda_i z^\alpha \right) dz \right) \left(\int_0^T \left| f_i \left(s \right) \right|^2 ds \right) \right\}$$
$$\leq \frac{2C^2 T}{\lambda_1 \alpha^2} \sum_{i=m+1}^{p} \left(\int_0^T \left| f_i \left(s \right) \right|^2 ds \right).$$

Ainsi

$$\left\| z_p \left(t \right) - z_m \left(t \right) \right\|_{L^2\left((0,T); H_0^1(\Omega) \right)}^2 \leq \frac{2C^2 T^{2\alpha-1}}{(2\alpha - 1)} \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left| z_i^0 \right|^2$$
$$+ \frac{2C^2 T}{\lambda_1 \alpha^2} \sum_{i=m+1}^{p} \left(\int_0^T \left| f_i \left(s \right) \right|^2 ds \right),$$

et on a

$$\begin{aligned} \left\| z_p \left(t \right) - z_m \left(t \right) \right\|_{L^2\left((0,T); H_0^1(\Omega) \right)} \leq\ & C \sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha - 1)}} \left(\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left| z_i^0 \right|^2 \right)^{1/2} \\ & + \frac{C}{\alpha} \sqrt{\frac{2T}{\lambda_1}} \left(\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \left| f_i \left(s \right) \right|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On a $z^0 \in H_0^1 \left(\Omega \right)$ et $f \in L^2 \left(Q \right)$, donc

$$\lim_{m.p \to \infty} \left(\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \left| f_i \left(s \right) \right|^2 ds \right)^{1/2} = 0,$$

$$\lim_{m.p \to \infty} \left(\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left| z_i^0 \right|^2 \right)^{1/2} = 0.$$

D'où

$$\lim_{m.p \to \infty} \int_0^T \left\| \left(z_p \left(t \right) - z_m \left(t \right) \right) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = 0.$$

Ce qui implique que la suite (z_m) est de Cauchy dans $L^2 \left((0,T) ; H_0^1 \left(\Omega \right) \right)$. D'où

$$z_m \to z \quad dans \quad L^2 \left((0,T) ; H_0^1 \left(\Omega \right) \right), \tag{2.11}$$

donc la fonction z étant dans $L^2 \left((0,T) ; H_0^1 \left(\Omega \right) \right)$.

Etape 3 : Montrons que z est solution du problème variationnelle.

Soient $\mathcal{D}(0,T)$ l'espace des fonction tests, $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ et $\theta \geqslant 1$ un entier. Pour tout $m \geqslant \theta$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt &= \int_0^T D^\alpha (z_m(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(T)\, dt \\ &+ \int_0^T a(z_m(t), v) \varphi(t)\, dt, \forall v \in V_\theta.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt &= -\int_0^T (z_m(t), v)_{L^2(\Omega)} D^\alpha \varphi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T a(z_m(t), v) \varphi(t)\, dt, \quad \forall v \in V_\theta\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite et avec la relation (2.9), nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt &= -\int_0^T (z(t), v)_{L^2(\Omega)} D^\alpha \varphi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T a(z(t), v) \varphi(t)\, dt, \qquad \forall v \in V_\theta\end{aligned}$$

L'espace $(\underset{\theta \geq 1}{\cup} V_\theta)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ car (w_i) est une base de $H_0^1(\Omega)$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt &= -\int_0^T (z(t), v)_{L^2(\Omega)} D^\alpha \varphi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T a(z(t), v) \varphi(t)\, dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt &= \int_0^T D^\alpha (z(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T a(z(t), v) \varphi(t)\, dt, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

Alors, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) = D^\alpha (z(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) + a(z(t), v) \varphi(t), \quad \forall t \in (0,T).$$

D'après (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} z_m(0) &\rightarrow z(0) \quad dans\ H_0^1(\Omega) \\ z_m(0) &= \sum_{i=1}^{m} z_i^0 w_i \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} z_i^0 w_i = z^0. \end{aligned}$$

Donc : $\qquad z(0) = z^0.$ ■

Dans le cas général, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2 *[13] :*

i) Soient $0 < \alpha < 1$ et $f = 0$:

▶ *Soit $z^0 \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution faible unique*

$$z \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

et $\partial_t^\alpha z \in C((0,T]; L^2(\Omega))$. En outre il existe constante $C_1 > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|z\|_{C([0,T],L^2(\Omega))} \leq C_1 \|z^0\|_{L^2(\Omega)} \\ \|z(.,t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\partial_t^\alpha z(.,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 t^{-\alpha} \|z^0\|_{L^2(\Omega),} \end{cases}$$

Avec

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(z^0, w_i\right) E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha) w_i(x).$$

▶ *Soit $z^0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une solution faible*

$$z \in L^2\left(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \partial_t^\alpha z \in L^2(\Omega \times (0,T))$$

et il existe constante $C_2 \succ 0$:

$$\|z\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\partial_t^\alpha z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq C_2 \left\|z^0\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

▶ *Soit $z^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,alors il existe une solution faible unique*

$$z \in \left([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \partial_t^\alpha z \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right),$$

il existe constante $C_3 > 0$ tel que :

$$\|z\|_{c([0,T];H^2(\Omega))} + \|\partial_t^\alpha z\|_{c([0,T];L^2(\Omega))} \leq C_3 \left\|z^0\right\|_{H^2(\Omega)}$$

ii) Soit $0 < \alpha < 1$, $z^0 = 0$ *et* $f \in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$. *Alors, il existe une solution faible unique* $z \in L^2\left(\left[0,T\right];H^2\left(\Omega\right)\cap H_0^1\left(\Omega\right)\right)$ *et* $\partial_t^\alpha z \in L^2\left(Q\right)$ *et il existe une constante* $C_4 > 0$:

$$\left\|z\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)} + \left\|\partial_t^\alpha z\right\|_{L^2(Q)} \leq C_4\left\|f\right\|_{L^2(Q)}.$$

D'où

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^t \left(f\left(.,\tau\right),w_i\right)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_i\left(t-\tau\right)^\alpha d\tau\right)w_i\left(x\right).$$

2.3. Existence et unicité du problème

Chapitre 3

Contrôle sans regret d'une EDF

Dans ce chapitre, on va résoudre un problème de contrôle optimal d'une équation de diffusion fractionnaire à données manquantes où les dérivées sont les dérivées fractionnaires de Caputo. En utilisant les notions du contrôle sans regret et à moindres regret de J.L.Lions [8].

3.1 Position du problème

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. Pour $T > 0$, nous posons $Q = \Omega \times \left]0, T\right[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times \left]0, T\right[$.
On considère l'équation suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha} z\left(x,t\right) - \Delta z\left(x,t\right) = g\left(x,t\right) & dans\ Q, \\ z\left(\zeta,t\right) = v & sur\ \Sigma, \\ z\left(x,0\right) = z^0 & dans\ \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où $z^0 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ et $v \in L^2\left(\Sigma\right)$. La fonction $g \in L^2\left(Q\right)$ est inconnue, D^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de caputo, $0 < \alpha < 1$,.

Théorème 3.1 *[6] Soit* $(g, v, z^0) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times H_0^1(\Omega)$. *Alors le problème (3.1) admet une unique solution* $z(v,g) = z(x,t;v,g) \in L^2(Q)$ *telle que*

$$\int_0^T \int_\Omega z(x,t;v,g)(-D^\alpha \phi(x,t) - \Delta\phi(x,t))dxdt =$$

$$\int_0^T \int_\Omega g(x,t)\,\phi(x,t)\,dxdt + \int_\Omega z^0(x)\,\phi(x,0)\,dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} z(\zeta,t)\,\frac{\partial\phi}{\partial v}(\zeta,t)\,d\zeta dt,$$

où $\phi \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ *est la solution du problème adjoint suivant*

$$\begin{cases} -D^\alpha \phi(x,t) - \Delta\phi(x,t) = 0 & \textit{dans } Q, \\ \phi(\zeta,t) = 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \phi(x,T) = 0 & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|z(v,g)\|_{L^2(Q)} \leq C\left(\|g\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} + \left\|z^0\right\|_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{3.3}$$

Passerons nous maintenant à notre problème de contrôle optimal.

3.2 Problème du contrôle optimal

Soit $z(v,g) \in L^2(Q)$ solution de l'équation (3.1). On introduit une fonction $\mathcal{J}$ donnée comme suit :

$$\mathcal{J}(v,g) = \|z(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}, \tag{3.4}$$

où z_d est un état désiré donné dans $L^2(Q)$ et $N > 0$.
Notre objective est de résoudre le problème de contrôle optimal suivant.

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \mathcal{J}(v,g). \tag{3.5}$$

Remarque 3.1 :
1- Si $G = \{0\}$, on obtient le problème de contrôle optimal classique

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \mathcal{J}(v).$$

2- Si $g \in L^2(Q)$ donc le problème (3.5) n'a pas de sens, car $L^2(Q)$ étant un espace de dimension infinie.

J.L. Lions propose alors une notion pour donner un sens a ce contrôle c'est le contrôle sans regret (définition (1.10)).
Elle consiste à diminuer les effets de la pollution à l'aide d'un contrôle, plutôt que de laisser ces dernières à l'abandon, autrement dit on adopte une démarche avec le moins de regret possible, d'où le nom de la méthode.
On va donc se borner aux contrôles v, s'il en existe, tels que :

$$\mathcal{J}(v,g) \leqslant \mathcal{J}(0,g), \forall g \in L^2(Q)$$

La fonction $g \to \mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g)$ est donc majorée et admet une borne supérieure, donc, on cherche le contrôle optimal v, s'il existe, solution du problème

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \left(\sup_{g\in L^2(Q)} \left(\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g)\right) \right).$$

Soient

$$\begin{aligned} z\left(v,0\right) &= z\left(x,t;v,0\right), \\ z\left(0,g\right) &= z\left(x,t;0,g\right), \\ z\left(0,0\right) &= z\left(x,t;0,0\right), \end{aligned}$$

solutions respectivement de

$$\begin{cases} D^{\alpha}z\left(v,0\right) - \Delta z\left(v,0\right) = 0 & dans \quad Q, \\ z\left(v,0\right) = v & sur \ \Sigma, \\ z\left(v,0\right) = z^0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}z\left(0,g\right) - \Delta z\left(0,g\right) = g & dans \quad Q, \\ z\left(0,g\right) = 0 & sur \quad \Sigma, \\ z\left(0,g\right) = z^0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{cases} D^{\alpha}z\left(0,0\right) - \Delta z\left(0,0\right) = 0 & dans \quad Q, \\ z\left(0,0\right) = 0 & sur \quad \Sigma, \\ z\left(0,0\right) = z^0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

On a $g \in L^2\left(Q\right), v \in L^2\left(\Sigma\right)$ et $z^0 \in H_0^1\left(\Omega\right)$, d'après le théorème (2.1) $z\left(0,g\right) \in L^2\left(Q\right)$, $z\left(v,0\right)$ et $z\left(0,0\right)$ appartiennent à $L^2\left(\left(0,T\right); H_0^1\left(\Omega\right)\right)$.

Proposition 3.1 *: Soient $v \in L^2(\Sigma)$ et $g \in L^2(Q)$, on a*

$$\mathcal{J}(v,g)-\mathcal{J}(0,g) = \mathcal{J}(v,0)-\mathcal{J}(0,0)+2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0)-z(0,0)][z(0,g)-z(0,0)]\,dtdx, \tag{3.9}$$

où la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est donnée par (3.4) *.*

Preuve. On a

$$\mathcal{J}(v,0) = \int_\Omega\int_0^T [z(v,0)-z_d][z(v,0)-z_d]\,dtdx + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{J}(0,g) = \int_\Omega\int_0^T [z(0,g)-z_d][z(0,g)-z_d]\,dtdx, \tag{3.11}$$

$$\mathcal{J}(0,0) = \int_\Omega\int_0^T [z(0,0)-z_d][z(0,0)-z_d]\,dtdx. \tag{3.12}$$

De plus,

$$z(v,g) = z(v,0)+z(0,g)-z(0,0),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v,g) &= \|z(v,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} \qquad (3.13)\\
&= \|z(v,0)+z(0,g)-z(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}\\
&= \|z(v,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|z(0,g)-z(0,0)\|^2_{L^2(Q)}\\
&\quad +2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0)-z_d][z(0,g)-z(0,0)]\,dtdx. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

D'après (3.10) et (3.13), on arrive a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v,g) &= \mathcal{J}(v,0) + \|z(0,g)-z(0,0)\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ 2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0)-z_d][z(0,g)-z(0,0)]\,dtdx.
\end{aligned}$$

On note

$$I_1 = 2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0)-z_d][z(0,g)-z(0,0)]\,dtdx.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(v,0)-z(0,0)+z(0,0)-z_d\right]\left[z(0,g)-z(0,0)\right]dtdx \\
&= 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(v,0)-z(0,0)\right]\left[z(0,g)-z(0,0)\right]dtdx \\
&+ 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,0)-z_d\right]\left[z(0,g)-z(0,0)\right]dtdx.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(v,g) &= \mathcal{J}(v,0)+2\int_\Omega\int_0^T \left[z(v,0)-z(0,0)\right]\left[z(0,g)-z(0,0)\right]dtdx \\
&\quad +\left\|z(0,g)-z(0,0)\right\|^2_{L^2(Q)} \\
&\quad + 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,0)-z_d\right]\left[z(0,g)-z(0,0)\right]dtdx. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

On note

$$I_2=\left\|z(0,g)-z(0,0)\right\|^2_{L^2(Q)}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Omega\int_0^T \left[(z(0,g)-z_d)-(z(0,0)-z_d)\right]\left[(z(0,g)-z_d)-(z(0,0)-z_d)\right]dtdx \\
&= \left\|z(0,g)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z(0,0)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)} \\
&- 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,g)-z_d\right]\left[z(0,0)-z_d\right]dtdx,
\end{aligned}
$$

il vient que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left\|z(0,g)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z(0,0)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)} \\
&- 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,g)-z(0,0)+z(0,0)-z_d\right]\left[z(0,0)-z_d\right]dtdx \\
&= \left\|z(0,g)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|z(0,0)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)} \\
&- 2\left\|z(0,0)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)}-2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,g)-z(0,0)\right]\left[z(0,0)-z_d\right]dtdx \\
&= \left\|z(0,g)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)}-\left\|z(0,0)-z_d\right\|^2_{L^2(Q)} \\
&- 2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,g)-z(0,0)\right]\left[z(0,0)-z_d\right]dtdx \\
&= J(0,g)-J(0,0)-2\int_\Omega\int_0^T \left[z(0,g)-z(0,0)\right]\left[z(0,0)-z_d\right]dtdx.
\end{aligned}
$$

3.2. Problème du contrôle optimal

On remplace I_2 dans (3.14) , on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(v,g) &= \mathcal{J}(v,0) + 2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0) - z(0,0)]\,[z(0,g) - z(0,0)]\,dtdx \\
&+ \mathcal{J}(0,g) - \mathcal{J}(0,0) - 2\int_\Omega\int_0^T [z(0,g) - z(0,0)]\,[z(0,0) - z_d]\,dtdx \\
&+ 2\int_\Omega\int_0^T [z(0,0) - z_d]\,[z(0,g) - z(0,0)]\,dtdx \\
&= \mathcal{J}(v,0) + \mathcal{J}(0,g) - \mathcal{J}(0,0) \\
&+ 2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0) - z(0,0)]\,[z(0,g) - z(0,0)]\,dtdx.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g) = \mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + 2\int_\Omega\int_0^T [z(v,0) - z(0,0)]\,[z(0,g) - z(0,0)]\,dtdx.
$$

■

Corollaire 3.1 *: Soient $v \in L^2(\Sigma)$ et $g \in L^2(Q)$, alors*

$$
\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g) = \mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + 2\int_\Omega\int_0^T g(x,t)\,\psi(x,t;v)\,dxdt, \quad (3.16)
$$

où $\psi(v) \in L^2((0,T);H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ est solution de

$$
\begin{cases}
-D^\alpha \psi(v) - \Delta\psi(v) = z(v,0) - z(0,0) & sur \quad Q, \\
\psi(v) = 0 & sur \ \sum, \\
\psi(T,v) = 0 & dans \ \Omega,
\end{cases}
\quad (3.17)
$$

Preuve. On a $z(v,0) - z(0,0) \in L^2(Q)$, donc le problème (3.17) admet une unique solution $\psi := \psi(v) \in L^2((0,T);H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$
\|\psi(v)\|_{L^2\left((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\,\|z(v,0) - z(0,0)\|_{L^2(Q)}\,. \quad (3.18)
$$

On pose $\omega = z(v,0) - z(0,0)$, alors ω est solution de

$$
\begin{cases}
D^\alpha \omega(x,t) - \Delta\omega(x,t) = g(x,t) & dans \quad Q, \\
\omega(x,t) = 0 & sur \quad \Sigma, \\
\omega(x,0) = 0 & dans \quad \Omega,
\end{cases}
\quad (3.19)
$$

En multipliant (3.17) par ω est en intégrant sur Q, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \omega(x,t)\left(-D^\alpha \psi(x,t;v) - \Delta\psi(x,t;v)\right) dxdt$$

$$\begin{aligned} &= -\int_\Omega \psi(x,T;v)\,\omega(x,T)\,dx + \int_\Omega \psi(x,0;v)\,\omega(x,0)\,dx \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega \left(D^\alpha \omega(x,t) - \Delta\omega(x,t)\right)\psi(x,t;v)\,dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (z(x,t;v,0) - z(x,t;0,0))\,\omega(x,t)\,dxdt. \end{aligned}$$

Utilisant (3.17) et (3.19) , on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \left(z(x,t;v,0) - z(x,t;0,0)\right)\left(z(x,t;v,0) - z(x,t;0,0)\right) dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega g(x,t)\,\psi(x,t;v)\,dxdt,$$

en remplaçant dans (3.8), on arrive à

$$\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g) = \mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + 2\int_\Omega \int_0^T g(x,t)\,\psi(x,t;v)\,dxdt. \quad (3.20)$$

■

On s'intéresse Maintenant à l'existence de contrôle sans regret, solution du problème suivant :

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \left(\sup_{g\in L^2(Q)} \mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g) \right). \quad (3.21)$$

D'après (3.16), on arrive à :

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \left(\sup_{g\in L^2(Q)} \left[\mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + 2\int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\,g(x,t)\,dtdx \right] \right). \quad (3.22)$$

L'espace $L^2(Q)$ étant un espace vectoriel, nous avons les deux possibilités :

$$\sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\,g(x,t)\,dtdx \right) = +\infty, \quad (3.23)$$

or

$$\sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\,g(x,t)\,dtdx \right) = 0. \quad (3.24)$$

Remarque 3.2 : dans le cas (3.24) Le contrôle sans regret existe dans l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{ v \in L^2(\Sigma) \text{ telle que } \quad \int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\, g(x,t)\, dtdx = 0, \quad \forall g \in L^2(Q) \right\}.$$

Le contrôle sans regret étant difficile à caractériser, pour cela on s'intéresse la forme pénalisée du problème

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \left(\sup_{g \in L^2(Q)} (\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g)) \right),$$

on définit le problème à moindres regret :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \left(\sup_{g \in L^2(Q)} \left(\mathcal{J}(v,g) - \mathcal{J}(0,g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(Q)} \right) \right), \forall \gamma > 0, \tag{3.25}$$

qui est équivalent à :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \left[\mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\, g(x,t)\, dtdx - \frac{\gamma}{2} \|g\|^2_{L^2(Q)} \right) \right].$$

On obtient

$$\gamma \sup_{g \in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \psi(x,t;v)\, g(x,t)\, dtdx - \frac{\gamma}{2} \|g\|^2_{L^2(Q)} \right) = \frac{1}{\gamma} \|\psi(v)\|^2_{L^2(Q)},$$

Le problème (3.25) devient :
Pour chaque $\gamma > 0$, trouver $u^\gamma \in L^2(\Sigma)$ tel que :

$$\mathbf{J}_\gamma(u^\gamma) = \inf_{v \in L^2(\Sigma)} \mathbf{J}_\gamma(v), \tag{3.26}$$

où

$$\mathbf{J}_\gamma(v) = \mathcal{J}(v,0) - \mathcal{J}(0,0) + \frac{1}{\gamma} \|\psi(v)\|^2_{L^2(Q)}. \tag{3.27}$$

3.3 Existence du contrôle à moindres regret

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution du problème de contrôle moindres regret.

Proposition 3.2 *Soit $\gamma > 0$. Alors il existe un unique contrôle à moindres regrets u^γ qui vérifier (3.26).*

Théorème 3.2 *: Soit u^γ le contrôle à moindres regrets, alors il existe $\rho^\gamma \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ et $\zeta^\gamma \in L^2((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ telles que $(u^\gamma, z^\gamma = z(u^\gamma, 0), \rho^\gamma, \zeta^\gamma)$ satisfait le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha z^\gamma - \Delta z^\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ z^\gamma = u^\gamma & \text{sur } \Sigma, \\ z^\gamma(0,t) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} D^\alpha \rho^\gamma - \Delta \rho^\gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \psi(u^\gamma) & \text{dans } Q, \\ \rho^\gamma = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \rho^\gamma(0,t) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} D^\alpha \zeta^\gamma - \Delta \zeta^\gamma = z^\gamma - z_d + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \rho^\gamma & \text{dans } Q, \\ \zeta^\gamma = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \zeta^\gamma(0,t) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.30}$$

et

$$N u^\gamma - \frac{\partial \zeta^\gamma}{\partial \nu} = 0 \quad \text{dans } \Sigma.$$

Pour la démonstration voir [6].

3.4 Résolution du problème de contrôle sans regret

Dans cette section, on va montrer que le contrôle à moindres regrets converge vers le contrôle sans regret puis on s'intéresse à sa caractérisation par un système d'optimalité.

Théorème 3.3 *: Le contrôle à moindres regrets u^γ converge vers le contrôle sans regret u solution de* (3.21).

Preuve. Soit u^γ la solution de (3.26) , donc

$$\mathbf{J}_\gamma (u^\gamma) \leq \mathbf{J}_\gamma (0) = 0,$$

car $\psi(0) = 0$ dans Q d'après (3.17) , et d'après la définition de $\mathbf{J}_\gamma$ on peut écrire que

$$\|z(u^\gamma, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N \|u^\gamma\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\gamma} \|\psi(v)\|^2_{L^2(Q)} \leq \mathcal{J}(0,0) = \|z(0,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)}.$$

d'où

$$\left\| z\left(u^{\gamma},0\right)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}^{2}\leq\left\| z\left(0,0\right)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}^{2}, \tag{3.31}$$

$$\left\| u^{\gamma}\right\|_{L^{2}(\Sigma)}^{2}\leq\frac{1}{N}\left\| z\left(0,0\right)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}^{2}, \tag{3.32}$$

$$\left\| \psi\left(u^{\gamma}\right)\right\|_{L^{2}(Q)}\leq\sqrt{\gamma}\left\| z(0,0)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}, \tag{3.33}$$

utilisant (3.31) et (3.27), nous avons

$$\left\| D^{\alpha}z\left(u^{\gamma},0\right)-\Delta z\left(u^{\gamma},0\right)\right\|_{L^{2}(Q)}\leq\frac{1}{N}\left\| z\left(0,0\right)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}. \tag{3.34}$$

On a $z\left(u^{\gamma},0\right)$ est solution de (3.27), d'après le théorème (3.1) il existe une constante C indépendante de γ telle que

$$\left\| z\left(u^{\gamma},0\right)\right\|_{L^{2}\left((0,T),H_{0}^{1}(\Omega)\right)}\leq\frac{C}{N}\left\| z\left(0,0\right)-z_{d}\right\|_{L^{2}(Q)}.$$

D'où ils existent $u\in L^{2}\left(\Sigma\right),z\in L^{2}\left(Q\right),\sigma\in L^{2}\left(Q\right)$ et des sous-suites extraites de (u^{γ}) and (z^{γ})(encore noté $(u^{\gamma}),(z^{\gamma})$) telles que

$$u^{\gamma}\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^{2}\left(\Sigma\right) \tag{3.35}$$

$$z^{\gamma}\rightharpoonup z \text{ faiblement dans } L^{2}\left(Q\right) \tag{3.36}$$

$$\left(D^{\alpha}z^{\gamma}-\Delta z^{\gamma}\right)\rightharpoonup\sigma \text{ faiblement dans } L^{2}\left(Q\right) \tag{3.37}$$

En utilisant (3.34)-(3.35), nous montrons que $z=z\left(x,t;u,0\right)$ est solution de

$$\begin{cases} D^{\alpha}z-\Delta z=0 & \text{dans Q,}\\ z=u & \text{sur }\Sigma\ ,\\ z\left(0,0\right)=z^{0} & \text{dans }\Omega. \end{cases} \tag{3.38}$$

De plus, $\psi=\psi\left(x,t;u\right)\in L^{2}\left(\left(0,T\right),H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\cap H^{2}\left(\Omega\right)\right)$ est solution de

$$\begin{cases} D^{\alpha}\psi-\Delta\psi=\ z\left(u,0\right)-z\left(0,0\right) & dans\ Q,\\ \psi=0 & sur\Sigma\ ,\\ \psi\left(T\right)=0 & dans\ \Omega. \end{cases} \tag{3.39}$$

et d'après (3.33) on a

$$\psi\left(u^{\gamma}\right)\rightarrow\psi\left(u\right)=0\ dans\ L^{2}\left(Q\right),$$

d'où,

$$\int_{0}^{T}\int_{\Omega}g\left(x,t\right)\psi\left(x,t\right)dxdt=0.$$

Donc le résultat. ■

3.4. Résolution du problème de contrôle sans regret

Théorème 3.4 *: Soit* $u = \lim\limits_{\gamma\to 0} u^{\gamma}$ *le contrôle sans regret associé à l'état* $z(u,0)$. *Alors ils existent* $\rho \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ *et* $\zeta \in L^2((0,T), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ *telle que* $(u, z = z(u,0), \rho, \zeta)$ *satisfait le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}z - \Delta z = 0 & dans \quad Q, \\ z \qquad = u & sur \quad \Sigma, \\ z(0,t) = z^0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}\rho - \Delta \rho = \tau_1 & dans \quad Q, \\ \rho \qquad = 0 & sur \quad \Sigma, \\ \rho(0,t) = 0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} -D^{\alpha}\zeta - \Delta \zeta = z - z_d + \tau_2 & dans \quad Q, \\ \zeta \qquad = 0 & sur \quad \Sigma, \\ \zeta(0,t) = 0 & dans \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.42}$$

et

$$Nu - \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0 \qquad dans\ \Sigma. \tag{*}$$

Preuve. Utilisant (3.38), on obtient (3.40), et d'après (3.33), nous savons que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(u^{\gamma}) \right\|_{L^2(Q)} \leq \|z(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)},$$

d'où en utilisant

$$\|\rho^{\gamma}\|_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} \leq \frac{C}{\sqrt{\gamma}} \|\xi(u^{\gamma})\|_{L^2(Q)}, \tag{3.43}$$

nous obtenons

$$\|\rho^{\gamma}\|_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\|z(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{3.44}$$

Par conséquent, il existe $\tau_1 \in L^2(Q)$ et $\rho \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(u^{\gamma}) \rightharpoonup \tau_1 \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{3.45}$$

$$\rho^{\gamma} \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right), \tag{3.46}$$

On a ρ^γ solution de (3.29), utilisant le théorème (3.2) on arrive à

$$\|\rho^\gamma\|_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} \leq C \|\xi(u^\gamma)\|_{L^2(Q)}.$$

D'où

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\rho^\gamma\right\|_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} \leq C \|z(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}.$$

Alors, il existe $\tau_2 \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ telle que,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\rho^\gamma \to \tau_2 \text{ faiblement dans } L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.47}$$

Comme ζ^γ solution de (3.30), il existe $C > 0$ telle que

$$\|\zeta^\gamma\|_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} \leq C.$$

De plus, il existe $\zeta \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ telle que

$$\zeta^\gamma \rightharpoonup \zeta \; dans \; L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right).$$

Par passage à la limite dans (3.30), on arrive à ζ vérifie (3.42). Utilisant (3.33) et (3.31), on obtient

$$\left\|\frac{\partial\zeta^\gamma}{\partial v}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|z(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)},$$

alors, on sait qu'il existe $\sigma \in L^2(\Sigma)$ telle que

$$\frac{\partial\zeta^\gamma}{\partial v} \to \sigma \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma).$$

De plus, $\zeta^\gamma \rightharpoonup \zeta \; dans \; L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$, on arrive à

$$\frac{\partial\zeta^\gamma}{\partial v} \to \frac{\partial\zeta}{\partial v} \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma). \tag{3.48}$$

utilisant (3.35) et (3.49), on obtient

$$Nu - \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{dans } Q.$$

■

3.4. Résolution du problème de contrôle sans regret

3.5 Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse a la résolution d'un problème de contrôle optimal associés à des équations de diffusion fractionnaires en temps à données incomplètes où les dérivées sont prises au sens de Caputo.
Nous commençons par l'étude d'existence et d'unicité de solution d'équations de diffusion fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$.

Puis, nous proposons de résoudre un problème de contrôle optimal associé à une équation de diffusion fractionnaire en temps à données incomplètes où nous cherchons à approcher l'état par un état désiré.

Le problème de contrôle optimal est impossible à résoudre, ainsi nous faisons le choix d'utiliser les notions de contrôles sans regret et à moindres regrets de J.L.Lions. Nous verrons que le problème de contrôle sans regret étant difficile à résoudre directement,alors, nous allons passer à la résolution du problème de contrôle à moindres regrets, puis nous allons montrer que le contrôle à moindres regrets converge vers le contrôle sans regret.

Enfin, nous caractérisons chaque contrôle par un système d'optimalité.

Bibliographie

[1] Dorville, R. : Sur le contrôle de quelques problèmes singuliers associés a l'équation de la chaleur. Thèse Doctorat. Université des Antilles et de la Guyane, 2004.

[2] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S.V. : Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 2014.

[3] Gorenflo, R., Loutchko, J., Luchko, Y. : Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative. Fract. Calc. Appl. Anal. 2002.

[4] Haubold, H.J., Mathai, A.M., Saxena, R.K. : Mittag-Leffler functions and their applications. J. Appl. Math. 2011.

[5] Hea B.B, Cheng Zhoub B, HaiKouc C : The controllability of fractional damped dynamical systems with control delay, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 32, 190-198, 2016.

[6] Joseph, C. : Sur le contrôle des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes. Thèse de doctorat, Université des Antilles, 2017.

[7] Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[8] Lions, J.L. : No regret and low regret control. Environment,Economics and Their Mathematical Models, Masson, Paris, 1994.

[9] Lobry, C., Sari,T. : Introduction à la théorie du contrôle, école du CIMPA Tlemsen, 2003.

[10] Marir, S. :Problèmes de contrôlabilité des systèmes différentiels fractionnaires, Mémoire magistère, 2012.

[11] Mouphou, G.A. : Optimal control of fractional diffusion equation. Computers and Mathematics with Applications, 61, 68-78, 2011.

[12] Podlubny, I. : Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering, 1999.

[13] Sakamoto. K, Yamamoto. M, : Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. J. Math. Anal. Appl. 382, 426-447, 2011

[14] Trelat, E. : Contrôle optimal : Théorie et applications, Note de Cours, Université de Paris-sud, 2000.