République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**

Par:

Belaadi Imane
Benkamouche Nada

Intitulé

Etude d'un système d'équations différentielles fractionnaires généralisé de Sturm-Liouville et Langevin

Dirigé par : **Dr.Tabouche Nora**

Devant le jury

PRESIDENT	ELLAGGOUNE Fateh	PROF	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	TABOUCHE Nora	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	BOUSSETILA Nadjib	PROF	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Dédicaces

Avec l'expression de mes reconnaissances, je dédie ce travail :

♥ **À** mes **très CHERS PARENTS**

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour et le respect que j'ai pour vous, je voudrais vous remercier pour votre soutien et vos sacrifices tout au long de ces années, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de santé, je vous aime et que dieu vous garde pour moi.

♥ **À** mon frère **Wassim** et ma sœur **Rima,** Que Dieu les protège.

♥ **À** mes chères amies **Aya, Abir** et **lina** pour leur soutien moral.

♥ À ma chère binôme **nada** qui a été toujours à mes côtés tout au long de ce chemin.

♥ Je le dédie également à tous mes proches et à tous ceux que j'aime.

♥imane♥

Dédicace :

♥ Je dédie ce mémoire avec fierté, amour et une immense joie, **à mes parents**, la prunelle des mes yeux, ceux qui ont toujours été à mes côtés pour me rassurer, m'encourager, me soutenir, me gâter et surtout pour me remplir la vie de joie. Je vous dois tout dans ce monde j'espère que vous êtes fiers de moi avec ce que j'ai réussi à accomplir avec ce modeste travail.

♥ À ma chère sœur **Sara.**

♥ Mes deux frères **Abdennour** et **Anis** et mon neveu **iyed**♥

♥ Àma chère amie **Bouthaina.**

♥ À ma chère binôme **Imane** qui a été toujours à mes côtés tout au long de ce chemin.

♥***Nada***♥

Remerciements

❀ ✿ ❀

On aimerait en premier lieu remercier **ALLAH** qui nous a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Ce travail est réalisé sous la direction de M^{me} **Tabouche. Nora** qui a su nous proposer une voie de recherche très intéressante.
Son expérience, sa grande disponibilité, son appui constant, sa passion, ses qualités scientifiques et humaines ont très largement contribué à un environnement de travail très agréable.
Qu'elle soit assurée de notre profonde et sincère reconnaissance, on vous remercie du fond du cœur.

On tient à remercier **Prof.Ellaggoune Fateh** pour l'honneur qu'il nous a accordé en présidant le jury.

On remercie vivement **Prof.Boussetila Nadjib** d'avoir accepter d'examiner notre travail.

Nos sincères remerciements à nos parents, et à nos familles et nos amies.

Enfin, nous remercions tous les enseignants du département des mathématiques.

❀ ✿ ❀

الملــخــص

في بداية مذكرتنا، تطرقنا إلى تحليل و دراسة عمل أ. برحايل، ن. طابوش، م م. مطر و ج. ألزابوت التي تتناول دراسة مشكلة قيمة حدية يحددها نظام معمم من ستورم-لوفيل و لانجفين للمعادلات التفاضلية الكسرية لهادامار و هو ما تم القيام به في الفصل 2.

نستمد الإلهام من هذا العمل و نعتبر نظاما جديدا من ستورم-لوفيل و لانجفين للمعادلات التفاضلية الكسرية لهيلفر-كاتيكامبولا بشرط أولي ثابت (مشكلة لم تدرس من قبل) ندرس وجود الحل و تفرده في فضاء الدوال المستمرة مع ثقل باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشودار و مبدأ الإنكماش لباناخ.

نختم هذه الأطروحة بتقديم مثال يوضح النتائج التي تم الحصول عليها.

Abstract

In our memory, we began with a synthesis of the work of A. Berhail, N. Tabouche, M.M. Matar and J. Alzabut, paper [6] wich deals with a boundary value problem defined by system of generalized Sturm-Liouville and Langevin Hadamard fractional differential equations that was the subject of chapter 2.
Inspired by this work, we consider a new system of Sturm-Liouville and Langevin fractional differential equations of Hilfer-Katugampola with a constant initial value (problem not studied before).
We establish the existence and uniqueness of solution in the weighted space of continuous functions by using Schauder fixed point theorem and Banach contraction principale. Finally, we provide an example to illustrate our results.

Résumé

Dans notre mémoire, nous avons commencé par une synthèse du travail de A. Berhail, N. Tabouche, M.M. Matar et J. Alzabut, article [6] qui traite un problème de valeurs aux limites défini par un système généralisé de Sturm-Liouville et Langevin des équations différentielles fractionnaires d'Hadamard qui a fait l'objet du chapitre 2.
En s'inspirant de ce travail, nous considérons un nouveau système de Sturm-Liouville et Langevin des équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Katugampola d'ordre $(0 < \alpha_i, \alpha_i' < 1)$ *et* $(0 \leq \beta_i, \beta_i' \leq 1)$ *avec condition initiale constante (problème non étudié au paravant).*
On établit l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace des fonctions continues avec poids en employant le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach. Finalement, nous fournissons un exemple illustrant les résultats obtenus.

Contents

0.1 *Introduction*

La dérivée fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. L'histoire de la dérivée d'ordre non entier constitue l'une des plus belles aventures de l'esprit humain dans laquelle se sont engagées plusieurs générations de mathématiciens et de physiciens. Ses origines remontent à la fin du 17ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral.
Les spécialistes s'accordent pour faire remonter le début de cette histoire exactement à la fin de l'année 1695 quand Leibniz, dans une lettre à l'Hospital, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière d'une fonction. l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt}$ si $n = \frac{1}{2}$?. La réponse de Leibniz contenait à peu près cette phrase : "...cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles". Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.
La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837.
Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo voir [22]. A cette époque les applications pratiques de cette théorie étaient presque inexistente, et c'est pour cela qu'elle a été considérée comme abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles.
Depuis la première conférence sur ce domaine en 1974, le calcul fractionnaire a été développé et a gagné une popularité et une considération importante due principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées, de l'ingénierie, la biologie, la mécanique etc... Par exemple : les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la visco-élasticité des matières, les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégro-différentiels fractionnaires. En biologie, ils a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire, et alors est classé en groupe de modèles d'ordre non entier et en économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire. D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendent ces dernières décennies.

De nombreuses défnitions des opérateurs non entiers ont été introduites. Elles ont, pendant longtemps, semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. On cite les approches de dérivations fractionnaires suivantes : l'approche de Riemann-Liouville, de Caputo et celle de Hadamard [16, 8, 9, 10, 31], et comme nouvelle approche, on cite la dérivation de Hilfer-Katugampola. Le lecteur peut trouver une description détaillée sur les opérateurs fractionnaires Hilfer-Katugampola dans les références [17, 18, 19, 20].

L'équation de Langevin (formulée pour la première fois dans [23]) s'avère être un outil efficace pour d'écrire l'évolution des phénomènes physiques dans des environnements fluctuants. Pour une revue exhausive de nouveaux dévelopements de l'equation de Langevin voir [1, 2, 6, 7, 24, 33].

D'un autre côté, le probème de Sturm-Liouville a de nombreuses applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie voir [3, 12, 21].

La combinaison des équations fractionnaires de Sturm-Liouville et de Langevin fournirait une description adéquate des processus dynamiques définis dans un milieu fractal dans lequel les propriétés de mémoire et fractales avec noyau de mémoire dissipatif sont incorporées.
Récemment, C. Kiataramkul, S.K. Ntouyas, J. Tariboon, A. Kijjathanakorn [21] ont proposé une approche de la version fractionnaire du problème de Sturm-Liouville et de l'équation de Langevin via dérivée fractionnaire de Hadamard avec conditions aux limites périodiques.

T. Muensawat, SK. Ntouyas, J. Tariboon dans [26] ont étudié l'existence et l'unicité du système généralisé de Sturm-Liouville et Langevin avec conditions aux limites anti-periodiques.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire est composé de trois chapitres. L'étude du travail [6] se veut assez détaillée dans le chapitre 2, le chapitre 1 étant introductif. Dans le chapitre 3, on établit l'existence et l'unicité d'un système de Sturm-Liouville et Langevin via dérivée fractionnaire de Hilfer- Katugampola.

1. **Premier chapitre** : On présente des définitions et quelques résultats de base du calcul fractionnaire utiles dans la suite du travail.

2. **Deuxième chapitre** : On mène une synthèse d'un problème de valeusr aux limites défini par un système généralisé de Sturm-liouville et Langevin des équations

différenielles de Hadamard :

$$\begin{cases} D^{\alpha i}([p_i(t)D^{\beta i}+r_i(t)])u_i(t)=f_i(t,u_1(t),u_2(t)), \quad t\in[1,T], i=1,2. \\ \\ u_i(1)=0, D^{\beta i}u_i(T)+\frac{r_i(T)}{p_i(T)}=0, \end{cases}$$

où $0<\alpha_i,\ \beta_i<1$, D^v est la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $v\in\{\alpha i,\beta i\}$ et $f_i:[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues , $p_i\in C([1,T],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $r_i\in C([1,T],\mathbb{R})$ pour $i=1,2$.

3. **Troisième chapitre** : On établit l'existence et l'unicité de solution d'un problème défini par un système de Sturm-Liouville et de Langevin d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Katugampola suivante:

$$\begin{cases} {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}\left[p_i(t){}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}+r_i(t)\right]u_i(t)=f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right), \quad t\in[a,T], a>0,\ i=1,2. \\ \\ u_i(a)=0, \end{cases}$$

où, $(0<\alpha_i,\alpha_i'<1)$ et $(0<\beta_i,\beta_i'<1)$. ${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer-Katugampola d'ordre α, $(0<\alpha<1)$ et de type β, $(0\leq\beta\leq1)$. $f_i:[a,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $p_i\subset C([a,T],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $r_i\in C([a,T],\mathbb{R})$ pour $i=1,2$.

Finalement, nous illustrons nos résultats obtenus par un exemple.

Chapter 1

Préliminaires et rappels de calcul fractionnaire

Ce chapitre est introductif dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de calcul fractionnaire et de l'analyse fonctionnelle qui représentent des outils indispensables dans la suite de notre travail.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.1 Soit $(0 \leq p \leq 1)$, on appelle espace des fonctions f continues avec poids dans $[t_0, T]$ noté par $C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f \in C([t_0, T]$ défini par

$$C_p([t_0, T] = \{f \in C([t_0, T], \mathbb{R}),\ tq\ f(t)(t - t_0)^p \in C([t_0, T], \mathbb{R})\} \tag{1.1}$$

$$\|f(t)\|_{C_p} = \|(t - t_0)^p f(t)\|_C \qquad avec \quad \|f(t)\|_C = \max_{t \in [t_0, T]} \mid f(t) \mid . \tag{1.2}$$

En particulier

$$C_0([a, b]) = C([a, b]).$$

1.2 Définitions de base dans le calcul fractionnaire

1.2.1 fonctions spéciales

La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, qui permet de prolonger la fonction factorielle aux valeurs non entières, la fonction gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.2 [22, 28] La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad z > 0. \tag{1.3}$$

Propriétés de la fonction Gamma

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z > 0$.
- $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)......(z+n-1)\Gamma(z)$.
- $\Gamma(n) = (n-1)\,!$, $n \geq 1$.

quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = 1$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (l'intégrale de gauss).
- $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)\,!}{2^{2n} n\,!}\sqrt{\pi}$.

La fonction Bêta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.3 [22, 28] La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante:

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, (z > 0, w > 0). \tag{1.4}$$

Remarque: la relation entre la fonction Gamma et Bêta est donnée par

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.5}$$

la fonction Bêta est symétrique $\beta(z,w) = \beta(w,z)$.

1.2.2 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.4 [22] La fonction Mittag-Leffler d'un paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}, \; z \in \mathbb{C}, \; \alpha > 0$$

Définition 1.5 [22] La fonction Mittag-Leffler de deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}, \; z \in \mathbb{C}, \; \alpha > 0, \; \beta > 0.$$

Remarque 1.1 $E_{1,1}(z) = E_1(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k\,!} = e^z.$

1.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et intégration.

1.3.1 Intégrale fractionnaire

Définition 1.6 [22] Soit $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale fractionnaire de f est donnée par

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n = \frac{1}{(n-1)\,!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.7 [22] L' intégrale de Riemann-Liouville d'une fonction f continue d'ordre $\alpha > 0$, noté $I^\alpha f(t)$ est défini par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.6}$$

Propriétés

- Pour α, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f)$.

- Linéairité : $I_a^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda I_a^\alpha f(t)+\mu I_a^\alpha g(t)$.

- $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0} I_a^\alpha f(t)=f(t)$.

- L' intégrale fractionnaire de Reimann-Liouville d'ordre $\alpha=\dfrac{1}{2}$ de quelques fonctions $I_0^{1/2}C = 2C\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$; ($C$ constante), $I_0^{1/2}t=\dfrac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$, $I_0^{1/2}t^{3/2}=\dfrac{3\sqrt{\pi}t^2}{8}$, $I_0^{1/2}t^a=\dfrac{\Gamma(a+1)t^{a+1/2}}{\Gamma(a+3/2)}$, $a>-1$.

Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.8 [22] Soit (a,b),$(0\leq a\leq b\leq\infty)$ un intervalle fini ou infini, l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α pour une fonction g est définie par

$$I_a^\alpha g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{g(s)}{s}ds, \quad a\leq x\leq b. \tag{1.7}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires

Dérivée fractionnaire au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.9 Pour $\alpha>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n-1<\alpha<n$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α d'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est définie par

$$D_{a+}^\alpha f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds. \tag{1.8}$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de la fonction f est définie par

$$D_{b-}^\alpha f(t)=\left(\frac{-d}{dt}\right)^n I_{b-}^{n-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dt}\right)^n\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds. \tag{1.9}$$

Remarque 1.2 Dans ce qui suit, nous considérons que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

Propriétés

- **Linéarité**

$$D_{a+}^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D_{a+}^\alpha f(t)+\mu D_{a+}^\alpha g(t). \tag{1.10}$$

- En général on a

$$D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+}f)(t) \neq D^{\beta}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t) \neq D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t) \tag{1.11}$$

- La dérivée fractionnaire séquentielle de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$ d'ordre $k\alpha$, $0 < \alpha < 1$ est définie par

$$D^{k\alpha}_{a+}f(t) = D^{\alpha}_{a+}D^{(k-1)\alpha}_{a+}f(t), \qquad (k = 2, 3, 4, \cdots). \tag{1.12}$$

- Pour $\alpha > 0$ et $t > a$, on a

$$D^{\alpha}_{a+}(I^{\alpha}_{a+}f)(t) = D^{\alpha}_{a+}(D^{-\alpha}_{a+}f)(t) = f(t). \tag{1.13}$$

- Pour $n - 1 < \alpha < n$

$$I^{\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = D^{-\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n}[D^{\alpha-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \tag{1.14}$$

Cas particulier si $(0 < \alpha < 1)$, alors

$$I^{\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = f(t) - [D^{\alpha-1}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.15}$$

- Formules de composition
Soit $m - 1 \leq \alpha < m$ et $n - 1 \leq \beta < n$

$$D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+}f)(t) = D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t) - \sum_{j=1}^{n}[D^{\beta-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}. \tag{1.16}$$

$$D^{\beta}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t) - \sum_{j=1}^{m}[D^{\alpha-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}. \tag{1.17}$$

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est donnée par

$$D^{\alpha}_{a+}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \qquad t > a. \tag{1.18}$$

- La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction puissance $(t-a)^\nu$ pour $\nu > -1$

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}, \tag{1.19}$$

et

$$D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, \alpha+1. \tag{1.20}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.10 [22] Soit $(a, b), (0 \leq a \leq b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini, la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre α pour une fonction g est définie par

$$D_{a}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(t\frac{d}{dt})^{n} \int_{a}^{t} (log\frac{t}{s})^{n-\alpha-1} \frac{g(s)}{s}\, ds, \quad n = [\alpha]+1, a \leq x \leq b. \tag{1.21}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.11 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction u de classe $C^n([a, b])$ est définie par

$$^{C}D_{a}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s) ds, \quad t > a \tag{1.22}$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

Propriétés

- Linéarité $^{C}D^{q}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^{C}D^{q} f(t) + \mu {}^{C}D^{q} g(t)$.

- $^{C}D^{q}C = 0$, C constante.

- Interpolation

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n} {}^{C}D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t),$$
$$\lim_{\alpha \longrightarrow n-1} {}^{C}D^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

- Transformation de Laplace

$$L\{^{C}D^{\alpha}(f(t); s\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^(k)(0).$$

1.4 Théorèmes

Dans cette partie, nous présentons des théorèmes utiles dans la suite de notre travail.

Théorème 1.1 *[14] Si une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans C(J) est bornée et équicontinue, alors il existe une sous-suite uniformément convergente.*

1.4.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.2 *Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré (X, M, μ) qui converge simplement presque partout (pour μ). Supposons qu'il existe une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec $|f_n(x)| \leq g(x)($ p.p) pour $x \in \mathbb{R}$, alors f et f_n sont intégrables et on a*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

1.4.2 Théorème d'Arzela -Ascoli

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.3 *[14] Soit $Y = C([a, b])$ muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{t\in[a,b]} \mid u(t) \mid$$

. Si M est un sous ensemble de Y tel que

(i) M est uniformément borné, i.e $\exists r > 0, \|u\| \leq r, \forall u \in M$.

(ii) M est équicontinu c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in [a, b] \ \text{ tel que } \mid t_1 - t_2 \mid < \delta \text{ et } u \in M \Longrightarrow \mid u(t_1) - u(t_2) \mid < \varepsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

1.4.3 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.4 *[14] (Banach 1922)*
Soit $\mathcal{U} \subset E$ (fermé), où E espace de Banach et $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ un opérateur contraction. Alors, il existe un unique $u \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F}(u) = u$.

1.4.4 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.5 *[14](Schauder 1930)*
Soit C un convexe fermé d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ continue telle que $T(C) \subset E$ est relativement compact. Alors T admet au moins un point fixe dans C.

1.4.5 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Théorème 1.6 *[14] Soit X un espace de Banach et $\mathcal{T} : X \to X$ un opérateur complètement continu. Soit*

$$Y = \{x \in X : x = \zeta \mathcal{T}(x) \quad \textit{pour un certain} \quad 0 < \zeta < 1\}.$$

Alors, soit l'ensemble Y est non borné, soit $\mathcal{T}$ a au moins un point fixe.

Chapter 2

Problème de valeurs aux limites défini par un système généralisé de Sturm-liouville et Langevin des équations différenielles de Hadamard

Dans ce chapitre, on mène une synthèse du travail de A. Berhail, N. Tabouche, MM. Matar et J. Alzabut [6] sur l'étude de l'existence et l'unicité d'un Problème de valeurs aux limites défini par un système généralisé de Sturm-liouville et Langevin des équations différenielles de Hadamard .

2.1 Position du problème

On considère le problème différentiel fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha i}([p_i(t)D^{\beta i}+r_i(t)])u_i(t)=f_i(t,u_1(t),u_2(t)), \quad t\in[1,T], i=1,2. \\ u_i(1)=0, D^{\beta i}u_i(T)+\frac{r_i(T)}{p_i(T)}=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0<\alpha_i,\ \beta_i<1$, D^{ν} est la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\nu\in\{\alpha i,\beta i\}$ et $f_i:[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $p_i\in C([1,T],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $r_i\in C([1,T],\mathbb{R})$ pour $i=1,2$.

2.2 Préliminaires

Nous présentons quelques résultats de base utiles pour la suite du travail.

Lemme 2.1 *[22] Si* $\alpha,\beta > 0$*, alors*

$$(D_a^{\alpha}(log\frac{t}{a})^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(log\frac{x}{a})^{\beta-\alpha-1}.$$

et

$$(I_a^{\alpha}(log\frac{t}{a})^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(log\frac{x}{a})^{\beta+\alpha-1}.$$

où $a > 0$ *est le point de départ de l'intervalle.*

Lemme 2.2 *[22] Soit* $\alpha > 0$*, et* $u \in [1,+\infty) \bigcap L^1[1,+\infty)$*. Alors l'équation différentielle fractionnaire de Hadamard*

$$D^{\alpha}u(t) = 0,$$

a pour solution

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(logt)^{\alpha-k},$$

et de plus, on a les formules suivantes :

$$D^{\alpha}I^{p}u(t) = I^{p-\alpha}u(t), \quad p > \alpha,$$

et

$$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k(logt)^{\alpha-k},$$

telle que : $c_k \in \mathbb{R}$*,* $k = 1,2,...,n$*, et* $n-1 < \alpha < n$*.*

Dans ce qui suit, nous présentons l'équation intégrale associée au problème (2.1).

Lemme 2.3 *[6] Soit* $h_i \in C([1,T],\mathbb{R})$*,* $i = 1,2$*. Alors le système d'équations différentielles fractionnaires*

$$\begin{cases} D^{\alpha_i}([p_i(t)D^{\beta_i} + r_i(t)])u_i(t) = h_i(t), \quad t \in [1,T], i = 1,2 \\ u_i(1) = 0, D^{\beta_i}u_i(T) + \frac{r_i(T)}{p_i(T)}u_i(T) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$u_i(t) = I^{\beta_i}(\frac{1}{p_i}I^{\alpha_i}h_i)(t) - I^{\beta_i}(\frac{r_i}{p_i}u_i)(t) - \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}(logT)^{1-\alpha_i}I^{\alpha_i}h_i(T)(logt)^{\alpha_i+\beta_i-1}. \quad (2.3)$$

Preuve. En prenant l'intégrale fractionnaire de Hadamard des ordres α_i dans la première équation du système (2.2), nous obtenons

$$D^{\beta_i}u_i(t) = \frac{I^{\alpha_i}h_i(t) + c_i(logt)^{\alpha_i-1} - r_i(t)u_i(t)}{p_i(t)}, \quad (2.4)$$

où $c_i \in \mathbb{R}$. A partir des conditions aux limites de (2.2), on obtient

$$c_i = -(logT)^{1-\alpha_i}I^{\alpha_i}h_i(T).$$

En prenant l'intégrale fractionnaire de Hadamard des ordres β_i de (2.4), on obtient

$$u_i(t) = I^{\beta_i}(\frac{1}{p_i}I^{\alpha_i}h_i)(t) - I^{\beta_i}(\frac{r_i}{p_i}u_i)(t) - \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}(logT)^{1-\alpha_i}I^{\alpha_i}h_i(T)(logt)^{\alpha_i+\beta_i-1} + d_i(logt)^{\beta_i-1}, \quad (2.5)$$

où $d_i \in \mathbb{R}$. En utilisant les conditions aux limites de (2.2), on obtient

$$d_i = 0.$$

D'autre part, si nous prenons la dérivée de Hadamard de (2.3) et utilisons le lemme (2.1), on obtient facilement le problème (2.2). Ce qui achève la démonstration. ■

Considérons le système(2.1). Sur la base du lemme (2.3), notre probème(2.1) est alors équivalent à l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u_i(t) &= I^{\beta_i}(\frac{1}{p_i}I^{\alpha_i}f_i)(t, u_1(t), u_2(t)) - I^{\beta_i}(\frac{r_i}{p_i}u_i)(t) \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}(logT)^{1-\alpha_i}I^{\alpha_i}f_i(T, u_1(T), u_2(T))(logt)^{\alpha_i+\beta_i-1}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

2.3 Principaux résultats

Soit $\mathcal{C} = C([1,T], \mathbb{R})$ un espace de Banach de toutes les fonctions continues définies sur $[1,T]$, muni de la norme supremum habituelle. On définit un opérateur $\Psi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ Par

$$\Psi u = \Psi(u_1, u_2) = (\Psi_1 u_1, \Psi_2 u_2).$$

Avec

$$|||\Psi u||| = \max\{\|\Psi_1 u_1\|, \|\Psi_2 u_2\|\},$$

où,

$$\begin{aligned}\Psi_i u_i(t) =& I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i}I^{\alpha_i}f_i\right)(t,u_1(t),u_2(t)) - I^{\beta_i}\left(\frac{r_i}{p_i}u_i\right)(t) \\ &- \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}(\log T)^{1-\alpha_i}I^{\alpha_i}f_i(T,u_1(T),u_2(T))(\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1}, i=1,2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$$p_i^* = \inf_t |p_i(t)|, r_i^* = \sup_t |r_i(t)|,$$

$$\mu_i = \frac{(\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{p_i^*\Gamma(\alpha_i+\beta_i+1)} + \frac{(\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{\alpha_i\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}, v_i = \frac{r_i^*(\log T)^{\beta_i}}{p_i^*\Gamma(\beta_i+1)}.$$

De plus, nous supposons que

$$L_i = 2\mu_i M_i + v_i < 1, i=1,2. \tag{2.7}$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

(H1) Il existe une constante $M_i > 0$ telle que

$$|f_i(t,u_1,u_2) - f_i(t,v_1,v_2)| \leq M_i(\|u_1-v_1\| + \|u_2-v_2\|), \forall t\in[1,T], \forall u_i, v_i \in \mathbb{R}, i=1,2.$$

(H2) Pour tout $u=(u_1,u_2)$, il existe des constantes réelle N_i, K_i telle que

$$|f_i(t,u)| \leq N_i + K_i\|u\|, \forall u_i \in \mathbb{R}, (i=1,2)$$

et soit $a_i = \max_{1\leq t\leq T}|f_i(t,0,0)| < \infty$.

Le résultat d'unicité est prouvé à l'aide du principe de contraction de Banach .

2.3.1 Unicité

Théorème 2.1 *Supposons que les conditions (H1) et (2.7) soient vérifiées. Alors, le problème (2.1) a une solution unique dans $C\times C$.*

Preuve. Dans la première étape, nous montrons que $\Psi B \subset B$ où $B = \{u \in C\times C, \|u\| \leq w\}$ et nous choisissons w un réel positif tel que

$$w \geq \max\left\{\frac{\mu_1 a_1}{1-L_1}, \frac{\mu_2 a_2}{1-L_2}\right\}.$$

Pour tout $u\in B$, on a

$$
\begin{aligned}
|\Psi_i u_i(t)| \leq & \left| I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right)(t)\right| + \left| I^{\beta_i}\left(\frac{r_i}{p_i} u_i\right)(t)\right| \\
& + \left|\frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{1-\alpha_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)(T)(\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right| \\
\leq & I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right|\right)\Bigg)(t) + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left|u_i(s)\right|\right)(t) \\
& + \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{1-\alpha_i} \times \left(I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right|\right)(T)(\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1} \\
\leq & I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)-f_i(s,0,0)\right|\right) + \left|f_i(s,0,0)\right|\Bigg)(t) + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left|u_i(s)\right|\right)(t) \\
& + \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{\beta_i} \times \left(I^{\alpha_i} \mid f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right) - f_i(s,0,0)| + |f_i(s,0,0) \mid \Bigg)(T) \\
\leq & I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\left(M_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)+a_i\right)\right)(t) + \left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\right)\|u_i\| I^{\beta_i}(1)(t) \\
& + \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{\beta_i} \times I^{\alpha_i}\left(\left(M_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)+a_i\right)\right)(T) \\
\leq & \left(I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\right)(t) + \left(\frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta i)}(\log T)^{\beta_i} I^{\alpha_i}\right)(T)\right)\left(M_i(\|u_1\|+\|u_2\|+a_i\right) \\
& + \left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\right)\|u_i\| I^{\beta_i}(t) \\
\leq & \left(\frac{(\log t)^{\beta_i}}{\Gamma\left(\beta_i+1\right)}\left(\frac{(\log t)^{\alpha_i}}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+1\right)}\right) + \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta i)}(\log T)^{\beta_i} \frac{(\log T)^{\alpha_i}}{\Gamma\left(\alpha_i+1\right)}\right)\left(M_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)+a_i\right) \\
& + \left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\right) \frac{(\log t)^{\beta_i}}{\Gamma\left(\beta_i+1\right)}\|u_i\| \\
\leq & \left(\frac{(\log t)^{\alpha_i+\beta_i}}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i+1\right)} + \frac{(\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{\alpha_i \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}\right)\left(M_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)+a_i\right) \\
& + \left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\right) \frac{(\log t)^{\beta_i}}{\Gamma\left(\beta_i+1\right)}\|u_i\| \\
\leq & \mu_i\left(M_i\left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)+a_i\right) + v_i\|u_i\| .
\end{aligned}
$$

D'où, $\|\Psi u\| \,|\leq w$, ce qui implique que $\Psi_B \subset B$.

Ensuite, pour tout $u_i, v_i \in C$ et pour $t \in [1,T]$, nous avons

$$|\Psi_i u_i(t) - \Psi_i v_i(t)|$$

$$\leq I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i} I^{\alpha_i} \mid f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right) - f_i\left(s, v_1(s), v_2(s)\right|)\right)(t) + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i}{p_i}\left|u_i(s) - v_i(s)\right|\right)(t)$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{1-\alpha_i} \times \left(I^{\alpha_i} \mid f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right) - f_i\left(s, v_1(s), v_2(s)\right|\right)(T)(\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1}$$

$$\leq I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\left(M_i\left(\|u_1-v_1\| + \|u_2-v_2\|\right)\right)\right)(t) + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left|u_i(s) - v_i(s)\right|\right)(t)$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{\beta_i} \times \left(I^{\alpha_i}\left(M_i\left(\|u_1-v_1\| + \|u_2-v_2\|\right)\right)(T)\right.$$

$$\leq\left(\frac{(\log t)^{\alpha_i+\beta_i}}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i+1\right)} + \frac{(\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{\alpha_i \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}\right)\left(M_i\left(\|u_1-v_1\| + \|u_2-v_2\|\right)\right.$$

$$+\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\right) \frac{(\log T)^{\beta_i}}{\Gamma\left(\beta_i+1\right)}\left\|u_i-v_i\right\|$$

$$\leq\left(2 \mu_i M_i + v_i\right))\|u-v\|$$

D'où, $\||\Psi u - \Psi v\|| \leq L\|u-v\|$ où $L = \max\{L_1, L_2\}$. puisque $L < 1$, l'opérateur Ψ est une contraction. Ainsi, par le principe de contraction de Banach le problème (2.1) a une solution unique. ■

Maintenant, nous montrons l'existence de la solution du problème (2.1) en appliquant le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

2.3.2 Existence

Théorème 2.2 *Supposons que l'hypothèse (H2) soit vérifiée. Si*

$$\max\{\mu_1 K_1 + v_1, \mu_2 K_2 + v_2\} < 1,$$

alors il existe au moins une solution du problème (2.1).

Preuve. Nous montrons que l'opérateur Ψ est complètement continu. Nous établissons d'abord que l'opérateur Ψ est uniformément borné.

Soit un borné $U \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Alors, il existe une constante positive γ telle que

$$\|u\| \leq \gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$$

pour tout $u \in U$.
Aussi, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$|f_i(t,u)| \leq \delta_i \leq N_i + K_i\gamma_i, \forall (t,u) \in [1,T] \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, i = 1,2$$

Par conséquent, pour tout $u \in U$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\Psi_i u_i(t)| \leq & \left| I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right)(t)\right| + \left| I^{\beta_i}\left(\frac{r_i}{p_i} u_i\right)(t)\right| \\
& + \left| \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} (\log T)^{1-\alpha_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)(T) (\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right| \\
& \leq I^{\beta_i}\left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right|\right)\Bigg)(t) + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i}{p_i}\left|u_i(s)\right|\right)(t) \\
& + \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} (\log \quad T)^{1-\alpha_i} \times \left(I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right|\right)(T) (\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1} \\
& \leq \frac{\delta_i (\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i+1\right)} + \frac{r_i^* \gamma_i (\log T)^{\beta_i}}{p_i^* \Gamma\left(\beta_i+1\right)} + \frac{\delta_i (\log T)^{\alpha_i+\beta_i}}{\alpha_i \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} \\
& \leq \mu_i \delta_i + v_i \gamma_i .
\end{aligned}$$

Ainsi, $|||\Psi u||| \leq \max\{\mu_1\delta_1 + v_1\gamma_1, \mu_2\delta_2 + v_2\gamma_2\}$. Alors, Ψ est uniformément borné.
Maintenant, nous allons prouver que Ψ est équicontinu. pour $t_1, t_2 \in [1,T]$,
avec $t_1 < t_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mid \Psi_i u_i\left(t_2\right) - \Psi_i u_i\left(t_1\right) \mid \\
& \leq \frac{1}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} \int_1^{t_1}\left(\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right)\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{1}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} \int_{t_1}^{t_2}\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right| \frac{ds}{s} \\
& + I^{\beta_i}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left|u_i(s)\left(t_2\right) - u_i(s)\left(t_1\right)\right|\right) \\
& + \frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} (\log T)^{1-\alpha_i}\left(I^{\alpha_i}\left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)(T)\right|\left(\left(\log t_2\right)^{\alpha_i+\beta_i-1} - \left(\log t_1\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

il suit que

$$
\begin{aligned}
&\mid \Psi_i u_i\left(t_2\right)-\Psi_i u_i\left(t_1\right) \mid \\
\leq & \frac{\delta_i}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} \int_1^{t_1}\left(\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}-\left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right) \frac{d s}{s} \\
& +\frac{\delta_i}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)} \int_{t_i}^{t_2}\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i+\beta_i-1} \frac{d s}{s} \\
& +\frac{r_i^* \gamma}{p_i^* \Gamma\left(\beta_i\right)}\left(\int_1^{t_2}\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\beta_i-1} \frac{d s}{s}-\int_1^{t_1}\left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\beta_i-1} \frac{d s}{s}\right) \\
& +\frac{\delta_i \Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}(\log T)^{1-\alpha_i} \int_1^T\left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha_i-1} \frac{d s}{s}\left((\log t_2)^{\alpha_i+\beta_i-1}-(\log t_1)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right) \\
\leq & \frac{\delta_i}{p_i^* \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i+1\right)}\left((\log t_2)^{\alpha_i+\beta_i}-(\log t_1)^{\alpha_i+\beta_i}+2\left(\log \frac{t_2}{t_1}\right)^{\alpha_i+\beta_i}\right) \\
& +\frac{r_i^* \gamma}{p_i^* \Gamma\left(\beta_i+1\right)}\left((\log t_2)^{\beta_i}-(\log t_1)^{\beta_i}\right) \\
& +\frac{\delta_i(\log T)}{\alpha_i \Gamma\left(\alpha_i+\beta_i\right)}\left((\log t_2)^{\alpha_i+\beta_i-1}-(\log t_1)^{\alpha_i+\beta_i-1}\right) .
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous avons

$$\|\|\Psi u\left(t_2\right)-\Psi u\left(t_1\right)\|\| \rightarrow 0 \text{ quand } \ t_1 \rightarrow t_2 .$$

Il suit que, l'opérateur Ψ est complètement continu. Finalement, On vérifiera que l'ensemble

$$Y=\{u \in C \times C: u=\zeta \Psi(u), 0<\zeta<1\}$$

est borné.

Soit $u \in Y$. Alors, $u=\zeta \Psi(u)$. Pour tout $t \in[1, T]$, on a $u_i=\zeta \Psi_i\left(u_i\right)$:

$$
\begin{aligned}
|u_i(t)| = |\zeta \Psi_i u_i(t)| \leq |\Psi_i u_i(t)| & \\
& \leq \left| I^{\beta_i} \left(\frac{1}{p_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right) \right)(t) \right| + \left| I^{\beta_i} \left(\frac{r_i}{p_i} u_i \right)(t) \right| \\
& + \left| \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)} (\log T)^{1-\alpha_i} I^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)(T) (\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1} \right| \\
& \leq I^{\beta_i} \left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i} \left| f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right) \right| \right) \Big) (t) + I^{\beta_i} \left(\frac{r_i}{p_i} |u_i(s)| \right)(t) \\
& + \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)} (\log T)^{1-\alpha_i} \times \left(I^{\alpha_i} \left| f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right) \right| \right)(T) (\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1} \\
& \leq I^{\beta_i} \left(\frac{1}{p_i^*} I^{\alpha_i} \left(N_i + K_i \|u\| \right) \right)(t) + I^{\beta_i} \left(\frac{r_i^*}{p_i^*} |u_i(s)| \right)(t) \\
& + \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)} (\log T)^{1-\alpha_i} (\log t)^{\alpha_i+\beta_i-1} I^{\alpha_i} \left(N_i + K_i \|u\| \right)(T) \\
& \leq \frac{1}{p_i^*} \left(N_i + K_i \|u\| \right) \frac{(\log t)^{\alpha_i+\beta_i}}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i+1)} + \frac{r_i^* (\log t)^{\beta_i}}{p_i^* \Gamma(\beta_i+1)} \|u_i\| \\
& + \frac{(\log T)(\mathrm{logt})^{\alpha_i+\beta_i-1}}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i+\beta_i)} \left(N_i + K_i \|u\| \right) \\
& \leq \mu_i \left(N_i + K_i \|u\| \right) + v_i \|u_i\| \\
& \leq \mu_i N_i + \left(\mu_i K_i + v_i \right) \|u\|.
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\|u\| \leq \frac{\max\{\mu_1 N_1, \mu_2 N_2\}}{1 - \max\{\mu_1 K_1 + v_1, \mu_2 K_2 + v_2\}}.
$$

Cela prouve que Y est borné. Par le théorème du point fixe de Leary-Schauder, le problème (2.1) a au moins une solution. ■

Chapter 3

Etude d'un système généralisé de Sturm-Liouville et Langevin d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Katugampola

Dans ce chapitre, on établit l'existence et l'unicité de la solution d'un problème défini par un système généralisé de Sturm-Liouville et Langevin d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Katugampola, dans l'espace des fonctions continues avec poids, via le théorème du point fixe de Shauder et le principe de contraction de Banach.

3.1 Position du problème

On considère le problème différentiel fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}\left[p_i(t)\,{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha'_i,\beta'_i}+r_i(t)\right]u_i(t)=f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right) \quad t\in[a,T],\ a>0,\ i=1,2, \\ u_i(a)=0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où, $(0<\alpha_i,\alpha'_i<1)$ et $(0\leq\beta_i,\beta'_i\leq 1)$.

${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer-Katugampola d'ordre α, $(0<\alpha<1)$ et de type β, $(0\leq\beta\leq 1)$. $f_i:[a,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $p_i\subset C([a,T],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $r_i\in C([a,T],\mathbb{R})$ pour $i=1,2$.

3.2 Définitions et lemmes

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et lemmes utiles pour la suite du travail.

Définition 3.1 [20] Soit $\overline{J} = [a, b]$, $C(\overline{J})$ l'espace de Banach des fonctions continues de $\overline{J}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|y\|_C = \max_{t\in\overline{J}} |y(t)|$ et les paramètres $\rho > 0, 0 \leq \gamma < 1$.
1) $C_{\gamma,\rho}[a, b]$ l'espace avec poids de fonctions continues y sur $(a, b]$ est défini par

$$C_{\gamma,\rho}[a,b] = \left\{ y : (a,b] \to \mathbb{R} : \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\gamma y(t) \in C(\overline{J}) \right\},$$

muni de la norme

$$\|y\|_{C_{\gamma,p}} = \left\| \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\gamma y(t) \right\|_C = \max_{t\in\overline{J}} \left| \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\gamma y(t) \right|,$$

où, $C_{0,\rho}(\overline{J}) = C(\overline{J})$.
2) Soit $\delta_\rho = \left(t^\rho \frac{d}{dt}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $C^n_{\delta_{\rho,V}}(\overline{J})$ l'espace de Banach des fonctions y continuement différentiables sur $(\overline{J})$, avec l'opérateur δ_ρ, jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et qui a pour dérivée $\delta^n_\rho y$ d'ordre n sur $(a, b]$ telle que $\delta^n_\rho y \in C_{\gamma,\rho}(\overline{J})$, soit

$$C^n_{\delta_\rho,\gamma}(\overline{J}) = \left\{ y : (a,b] \to \mathbb{R} \, : \, \delta^k_\rho \in C(\overline{J}), \, k = 0, 1 \ldots, n-1, \, \delta^n_\rho y \in C_{\gamma,\rho}(\overline{J}) \right\},$$

où $n \in \mathbb{N}$, avec les normes

$$\|y\|_{C^n_{\delta_\rho}} = \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in\overline{J}} \left|\delta^k_\rho y(x)\right|$$

$$\|y\|_{C^n_{\delta_\rho,\gamma}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|\delta^k_\rho y\right\|_C + \left\|\delta^n_\rho y\right\|_{C_{\gamma,\rho}}.$$

Pour $n = 0$, on a $C^0_{\delta_\rho,\gamma}(\overline{J}) = C_{\gamma,\rho}(\overline{J})$.

Définition 3.2 [18, 19] L'intégrale fractionnaire gauche genéralisée ${}^\rho I^\alpha_{a^+} f(\cdot)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ est définie par

$$\left({}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} f(s) ds, \tag{3.2}$$

pour $t > a$ *et* $\rho > 0$. Similairement, l'intégrale fractionnaire droite genéralisée ${}^\rho I^\alpha_{b^-} f(\cdot)$ est définie par

$$\left({}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{b^-} f\right)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(t^\rho - s^\rho\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} f(s) ds, \tag{3.3}$$

pour $t < b$.

Définition 3.3 [18, 19] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $Re(\alpha) \geq 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $\rho > 0$. Les dérivées fractionnaires généralisées, correspondant respectivement aux intégrales fractionnaires généralisées 3.2 et 3.3, sont définis pour $0 \leq a < t < b \leq \infty$ par

$$\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(t^{\rho} - s^{\rho}\right)^{n-\alpha+1} s^{\rho-1} f(s)\, ds, \tag{3.4}$$

et

$$\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \left(t^{\rho} - s^{\rho}\right)^{n-\alpha+1} s^{\rho-1} f(s)\, ds, \tag{3.5}$$

Définition 3.4 [27] Soient α et β telles que $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. La dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola, par rapport à t, avec $\rho > 0$, de la fonction $f \in C_{1-\gamma,\rho}(\overline{J})$ est définie par

$$\begin{aligned}\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^{\pm}}^{\alpha,\beta} f\right)(t) &= \left(\pm{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^{\pm}}^{\beta(1-\alpha)} \left(t^{\rho-1}\frac{d}{dt}\right) \rho\mathcal{I}_{a^{\pm}}^{(1-\beta)(1-\alpha)}\right)(t) \\ &= \left(\pm{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^{\pm}}^{\beta(1-\alpha)} \delta_{\rho}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^{\pm}}^{(1-\beta)(1-\alpha)}\right)(t),\end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\mathcal{I}$ est l'intégrale fractionnaire genéralisée donnée par la définition 3.2.

Propriétés 1 *[18] Nous présentons quelques propriétés de* ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}$

P1) L' opérateur ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}$ *peut s'écrire comme suit*

$${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} = {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} \delta_{\rho}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{1-\gamma} = {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma},$$

où $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$.

P2) La dérivée fractionnaire ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}$ *est l'interpolateur des dérivés fractionnaires suivantes : Hilfer* $(\rho \to 1)$*, Hilfer-Hadamard* $(\rho \to 0)$*, dérivée fractionnaire généralisée* $(\beta = 0)$*, type Caputo généralisé* $(\beta = 1)$*, Riemann-Liouville* $(\beta = 0,\ \rho \to 1)$*, Hadamard* $(\beta = 0,\ \rho \to 0)$*, Caputo* $(\beta = 1,\ \rho \to 1)$*, Caputo-Hadamard* $(\beta = 1,\ \rho \to 0)$*, Liouville* $(\beta = 0,\ \rho \to 1,\ a = 0)$ *et Weyl* $(\beta = 0,\ \rho \to 1,\ a = -\infty)$.

Lemme 3.1 *[18, 30] Soit* $\alpha, \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ *et* $\rho, c \in R$*, et* $\rho \geq c$*. alors, pour* $f \in C_c^p(a,b)$*, on a*

$$\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}{}^{\rho}I_{a^+}^{\beta} f\right)(\cdot) = \left({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(\cdot),$$

$$\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\dot{\alpha}} f\right)(\cdot) = f(\cdot),$$

$$\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta} f\right)(\cdot) = \left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(\cdot).$$

Lemme 3.2 *[5] Soient* ${}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}$ *et* ${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}$*, définies respectivement par les équations (3.2) et (3.4) pour* $t > a$*. Alors, pour* $\alpha \geq 0$ *et* $\beta > 0$

$$\begin{aligned} &{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left(\tfrac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-1}(x) = \tfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\tfrac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1}, \\ &{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\tfrac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-1}(x) = 0, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$*.*

Lemme 3.3 *[27] Soit* $0 < \alpha < 1, 0 \leq \gamma < 1$*. Si* $f \in C_{\gamma}(\overline{J})$ *et* ${}^{\rho}\mathcal{I}^{1-\alpha}_{a+}f(\cdot) \in C^{1}_{\gamma}(\overline{J})$*, alors*

$${}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}(f)(x) = f(x) - \frac{\left({}^{\rho}\mathcal{I}^{1-\alpha}_{a+}f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}$$

pour tout $x \in J = (a,b)$*.*

Lemme 3.4 *[27] Soient* $0 < a < b < \infty,\ \alpha > 0,\ 0 \leq \gamma < 1$ *et* $f \in C_{\gamma,\rho}(\overline{J})$*. Si* $\alpha > \gamma$*, alors* ${}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}(f)$ *est continue sur* $\overline{J}$ *et on a*

$$\left({}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f\right)(a) = \lim_{t\to a^+}\left({}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\right)f(t) = 0.$$

Dans toute la suite, nous considérons les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ satisfaisant

$$\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 1,$$

et les espaces suivants définis dans [27] par

$$C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\rho}[a,b] = \left\{f \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b], {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a^+}f(\cdot) \in C_{\mu,\rho}[a,b]\right\}$$

et

$$C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}[a,b] = \left\{f \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b], {}^{\rho}\mathcal{D}^{\gamma}_{a^+}f(\cdot) \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b]\right\}$$

Il est évident que

$$C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}[a,b] \subset C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\rho}[a,b]$$

Lemme 3.5 *[27] Soit* $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$*. Si* $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$*, alors*

$${}^{\rho}\mathcal{I}^{\gamma}_{a^+}{}^{\rho}\mathcal{D}^{\gamma}_{a^+}f(\cdot) = {}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a^+}f(\cdot) \tag{3.7}$$

et

$${}^{\rho}\mathcal{D}^{\gamma}_{a^+}{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f(\cdot) = {}^{\rho}\mathcal{D}^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}f(\cdot) \tag{3.8}$$

Lemme 3.6 *[27] Soit $f \in L^1(a,b)$. Si ${}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f$ existe sur $L^1(a,b)$, Alors*

$$ {}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\,{}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(\cdot) = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\,{}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}f(\cdot) $$

Lemme 3.7 *[27] Soit $0<\alpha<1, 0\le\beta\le 1$ et $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$. Si $f\in C_{1-\gamma}[a,b]$ et ${}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} \in C_{1-\gamma}^1[a,b]$, alors ${}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\,{}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}$ existe sur J et*

$$ {}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\cdot{}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(\cdot) = f(\cdot) $$

3.3 Existence et unicité

Dans ce qui suit, nous présentons un lemme crucial pour établir les principaux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de notre problème (3.1) .

Lemme 3.8 *Soient $f_i : I_0\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, deux fonctions telles que*

$$ f_i(\cdot,u_1(\cdot),u_2(\cdot)) \in C_{1-\gamma_i,\rho}(I_0) \quad (I_0=[a,T]) $$

pour tout $u_i\in C_{1-\gamma_i,\rho}[a,T], i=1,2$. On se donne $u_i\in C_{1-\gamma_i,\rho}^{\gamma}[a,T]$, alors le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$ u_i(t) = {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i(t)}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right)\right) - {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)\right). \tag{3.9} $$

Preuve. On commence par montrer l'implication dans ce sens ($\Rightarrow$).
On applique ${}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}$ des deux côtés du problème (3.1) et en utilisant le lemme3.3 et le lemme3.5, on obtient :

$$ {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}\,{}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}[p_i(t){}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}+r_i(t)]u_i(t) = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t)) $$

$$ {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\gamma_i}\,{}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma_i}[p_i(t){}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i{}',\beta_i'}+r_i(t)]u_i(t) = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t)) $$

$$ [p_i(t){}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}+r_i(t)]u_i(t) - {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{1-\gamma_i}\frac{[p_i(a){}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}+r_i(a)]u_i(a)}{\Gamma(\gamma_i)}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma_i-1} = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t)) $$

$$ [p_i(t){}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}+r_i(t)]u_i(t) = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t)), $$

il vient que

$$ {}^\rho\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) = \frac{1}{p_i(t)}({}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))) - \frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t). \tag{3.10} $$

Ensuite, on applique l'intégrale ${}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}$ des deux côtés de l'équation (3.10), puis on utilise le lemme3.3 et le lemme3.5, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\,{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}[\frac{1}{p_i(t)}({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))) - \frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)]\\
{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\gamma_i'}\,{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma_i'}u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}[\frac{1}{p_i(t)}({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))) - \frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)]\\
u_i(t) - {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{1-\gamma_i'}\frac{u_i(a)}{\Gamma(\gamma_i)}(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho})^{\gamma_i'-1} &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}[\frac{1}{p_i(t)}({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))) - \frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)]\\
u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i(t)}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right)\right) - {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Maintenant, on montre l'implication dans le sens contraire ($\Leftarrow$).
On applique ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}$ des deux côtés de l'équation (3.11) et par le lemme3.7 il suit que

$$
{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) = {}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i(t)}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))\right) - {}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_{i'}}\left(\frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t)\right).
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) &= \frac{1}{p_i(t)}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right) - \frac{r_i(t)}{p_i(t)}u_i(t),\\
p_i(t){}^{\rho}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right) - r_i(t)u_i(t),\\
p_i(t){}^{\rho}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_i',\beta_i'}u_i(t) + r_i(t)u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right),\\
\left[p_i(t){}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'} + r_i(t)\right]u_i(t) &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i\left(t,u_1(t),u_2(t)\right). \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

En appliquant maintenant l'opérateur ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}$ des deux côtés de l'équation (3.12) et en utilisant le lemme (3.7) on obtient

$$
{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}\left[p_i(t){}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'} + r_i(t)\right]u_i(t) = {}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))
$$

$$
{}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i,\beta_i}\left[p_i(t){}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_i',\beta_i'} + r_i(t)\right]u_i(t) = f_i(t,u_1(t),u_2(t)).
$$

Par l'équation (3.11) on a

$$
u_i(t) = \frac{{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i(t)}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(t,u_1(t),u_2(t))\right)}{1 + {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i(t)}{p_i(t)}\right)},
$$

pour $t = a$,

$$
u_i(a) = \frac{{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i(a)}{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i(a,u_1(a),u_2(a))\right)}{1 + {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i(a)}{p_i(a)}\right)},
$$

par le lemme3.4 on obtient

$$u_i(a) = 0$$

et on obtient bien le problème(3.1), ce qui achève la démonstration. ■

Pour l'étude de l'existence et l'unicité du problème (3.1) on considère les hypothèses et les notations suivantes.

Notations

On note : $p_i^* = \inf_t |p_i(t)|$, $r_i^* = \sup_t |r_i(t)|$ et on suppose

$$`K_i = 2A_iN_i + B_i < 1, \quad i = 1, 2. \tag{3.13}$$

avec

$$A_i = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i+\alpha_i+\alpha_i'} \frac{1}{p_i^*\rho^2\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_i'+1)},$$

$$B_i = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'} \frac{r_i^*}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i'+1)}.$$

Hypothèses

$(H1)$ Il existe une constante $N_i > 0$ telle que :

$$|f_i(t, u_1, u_2) - f_i(t, v_1, v_2)| \leqslant N_i(\|u_1 - v_1\| + \|u_2 - v_2\|), \forall t \in [a, T], \forall u_i, v_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2.$$

$(H2)$ Pour tout $u = (u_1, u_2)$, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$|f_i(t, u)| \leq \delta_i, \quad \forall t \in I_0, \ (i = 1, 2).$$

Dans toute la suite, on considère l'opérateur

$$\mathcal{T} : C_{1-\gamma_1,\rho}(I_0) \times C_{1-\gamma_2,\rho}(I_0) \to C_{1-\gamma_1,\rho}(I_0) \times C_{1-\gamma_2,\rho}(I_0)$$

définit par

$$\mathcal{T}u = \mathcal{T}(u_1, u_2) = (\mathcal{T}_1u_1, \mathcal{T}_2u_2),$$

avec

$$|||\mathcal{T}u||| = \max\{\|\mathcal{T}_1u_1\|, \|\mathcal{T}_2u_2\|\},$$

où

$$\mathcal{T}_iu_i(t) = {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i}f_i\right)(t, u_1(t), u_2(t)) - {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i}{p_i}u_i\right)(t). \tag{3.14}$$

3.3.1 Existence

Maintenant, nous prouvons l'existence de la solution du problème(3.1) qui est basée sur le théorème du point fixe de Shauder.

Théorème 3.1 *Sous l'hypothèse (H2), le problème*(3.1) *admet au moins une solution.*

Preuve.
Pour prouver le résultat d'existence, nous transformons le problème(3.1) en un problème du point fixe. En effet, puisque le problème(3.1) est équivalent à l'équation intégrale(3.14), les points fixes de $\mathcal{T}$ sont solutions du problème(3.1). Nous établissons alors les hypothèses du théorèmes du point fixe de Schauder. Ceci, nécessite plusieurs étapes.

Etape 1

Nous prouvons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu. Pour tout borné $\mathcal{U} \subset C_{1-\gamma_1,\rho} \times C_{1-\gamma_2,\rho}$ il existe $w > 0$ tel que

$$\mathcal{U} = \{u \in C_{1-\gamma_1,\rho} \times C_{1-\gamma_2,\rho} : \|u\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \leq \omega\},$$

où, $\omega = \max(\omega_1, \omega_2)$ et $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$.

Soit $(u_n)n \in \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ une suite de réels tel que $\lim_{n\to\infty} \|u_{ni} - u_i\|_{C_{1-\gamma_i,\rho}} = 0$. Alors pour tout $t \in I_0$ on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{T}_i u_{ni}(t) - \mathcal{T}_i u_i(t)) \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\right| \\
&\leq \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'} \left(\frac{1}{p_i^*} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i} (|f_i\,(s, u_{n1}(s), u_{n2}(s))\,| + |f_i(s, u_1(s), u_2(s))|)\right) \\
&+ \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'} \left(\frac{r_i^*}{p_i^*}(|u_{ni}(s)| + |u_i(s)|)\right)(t) \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'} \left(\frac{2}{p_i^*} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i} \delta_i\right) + {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'} \frac{r_i^*}{p_i^*} \left(\|u_{ni}(s)\|_{C_{1-\gamma,\rho}} + \|u_i(s)\|_{C_{1-\gamma,\rho}}\right)(t) \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'} \left(\frac{2}{p_i^*} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i} \delta_i\right) + {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'} \frac{2r_i^*}{p_i^*}\omega \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{2}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_i')} \frac{(T^\rho - a^\rho)^{\alpha_i+\alpha_i'}}{\rho^{\alpha_i+\alpha_i'+2}\alpha_i\alpha_i'}\delta_i + \frac{2r_i^*}{p_i^*\Gamma(\alpha_i')} \frac{(T^\rho - a^\rho)^{\alpha_i'}}{\rho^{\alpha_i'+1}\alpha_i'}\omega \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1+\alpha_i+\alpha_i'-\gamma_i} \frac{2}{p_i^*\rho^2\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_i'+1)}\delta_i + \frac{2r_i^*}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i'+1)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'} \omega \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'} \left(\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1+\alpha_i-\gamma_i} \frac{a_0}{\rho\Gamma(\alpha_i+1)}\delta_i + a_0 r_i^*\omega_i\right),
\end{aligned}$$

où $a_0 = \frac{2}{p_i^* \rho \Gamma(\alpha_i'+1)}$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebegue on a

$$|||(\mathcal{T}u_{ni})(t) - (\mathcal{T}u_i)(t)|||_{n\to\infty} \to 0.$$

Par conséquent, $\mathcal{T}$ est bien continu.

Etape 2

Nous allons montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. On choisit ω un réel positif tel que

$$\omega \geq \max\left(\frac{A_1\delta_1}{1-B_1}, \frac{A_2\delta_2}{1-B_2}\right).$$

Par l'hypothèse (H2), pour tout $t \in I_0$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$, on a

$$\left|\mathcal{T}_i u_i(t)\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\right|$$

$$\leq \left|\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i} f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right)(t)\right| + \left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i}{p_i}u_i\right)(t)\right|$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i^*}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i} \left|f_i\left(s, u_1(s), u_2(s)\right)\right|\right)(t) + \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left|u_i(s)\right|\right)(t)$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}(\frac{1}{p_i^*}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}\delta_i)(t) + {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}(\frac{r_i^*}{p_i^*}\left\|u_i(s)\right\|)(t)$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{1}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_i')} \quad \frac{(T^\rho - a^\rho)^{(\alpha_i+\alpha_i')}}{\rho^{\alpha_i+\alpha_i'+2}\alpha_i\alpha_i'}\delta_i + \frac{r_i^*}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)} \quad \frac{(T^\rho - a^\rho)^{\alpha_i'}}{\rho^{\alpha_i'+1}\alpha_i'}\left\|u_i\right\|$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i+\alpha_i+\alpha_i'} \frac{\delta_i}{p_i^*\rho^2\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_i'+1)} + \frac{r_i^*}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i'+1)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'}\omega_i.$$

$$\leq A_i\delta_i + B_i\left\|u_i\right\|$$

$$\leq A_i\delta_i + B_i\omega_i.$$

Nous obtenons $|||\mathcal{T}u||| \leq \omega$. Il suit que $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

Etape 3

Nous montrons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est uniformément borné. Pour tout $u \in \mathcal{U}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}_i u_i(t)\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\right| &\leq \left|\left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i} f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)\right)(t)\right| \\
&+\left|\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\frac{r_i}{p_i}u_i(s)(t)\right| \\
&\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i^*}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}|f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)|\right)(t) \\
&+{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\|u_i(s)\|\right)(t) \\
&\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\frac{1}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_i')}\quad\frac{(T^\rho-a^\rho)^{\alpha_i+\alpha_i'}}{\rho^{\alpha_i+\alpha_i'+2}\alpha_i\alpha_i'}\delta_i \\
&+\frac{r_i^*}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i'+1)}\left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho^{\alpha_i}}\right)^{\alpha_i'}\omega_i \\
&\leq (A_i\delta_i+B_i\omega_i)
\end{aligned}$$

Ainsi, $|||\mathcal{T}u||| \leq \max\{A_1\delta_1+B_1\omega_1, A_2\delta_2+B_2\omega_2\}$. Alors, $\mathcal{T}$ est uniformément borné.

Etape 4 Finalement, nous montrons que $\mathcal{T}$ est équicontinu.

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $t_1, t_2 \in I_0$ avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{T}_i u_i(t_2)-\mathcal{T}_i u_i(t_1))\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\right| \\
&\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\frac{1}{p_i^*\Gamma(\alpha_i+\alpha_i')}\int_a^{t_1}\left(\left(\frac{t_2^\rho-s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1}-\left(\frac{t_1^\rho-s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1}\right)s^{\rho-1} \\
&\times|f_i(s,u_1(s),u_2(s))|ds \\
&+\left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\frac{1}{p_i^*\Gamma(\alpha_i+\alpha_i')}\int_{t_1}^{t_2}\left(\left(\frac{t_2^\rho-s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1}s^{\rho-1}\right)|f_i(s,u_1(s),u_2(s))|ds \\
&+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}|u_i(s)(t_2)-u_i(s)(t_1)|\right).
\end{aligned}$$

Il suit que

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathcal{T}_i u_i(t_2) - \mathcal{T}_i u_i(t_1)\right)\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\right| \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{\delta_i}{p_i^*\Gamma(\alpha_i + \alpha_i')} \int_a^{t_1} \left(\left(\frac{t_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1} - \left(\frac{t_1^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1}\right) s^{\rho-1} ds \\
&+ \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{\delta_i}{p_i^*\Gamma(\alpha_i + \alpha_i')} \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{t_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'-1} s^{\rho-1}\right) ds + {}^\rho\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i'} \left(\frac{r_i^*}{p_i^*} \left\|u_i(s)\right\| \left|(t_2 - t_1)\right|\right) \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{\delta_i}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i + \alpha_i' + 1)} \left(\left(\frac{t_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'} - \left(\frac{t_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'}\right) \\
&\quad + \frac{r_i^*\omega}{p_i^*\Gamma(\alpha_i')} \left(\int_a^{t_2} \left(\frac{t_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'-1} s^{\rho-1} ds - \int_a^{t_1} \left(\frac{t_1^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'-1} s^{\rho-1}\right) ds \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i} \frac{\delta_i}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i + \alpha_i' + 1)} \left(\left(\frac{t_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'} - \left(\frac{t_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i+\alpha_i'}\right) \\
&\quad + \frac{r_i^*\omega}{\rho p_i^*\Gamma(\alpha_i' + 1)} \left(\frac{t_2^\rho - t_1^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous avons

$$\left\|\left\|\mathcal{T}u\left(t_2\right) - \mathcal{T}u\left(t_1\right)\right\|\right\| \to 0 \text{ quand } t_1 \to t_2,$$

ce qui implique que $\mathcal{T}$ est équicontinu. ■

Ainsi, par le théorème d'Arzela-Ascoli, l'opérateur $\mathcal{T}$ est complètement continu et par le théorème du point fixe de Schauder l'opérateur $\mathcal{T}$ a bien un point fixe $u \in \mathcal{U}$.

3.3.2 Unicité

Théorème 3.2 *Supposons que l'hypothèse (H1) et* (3.13) *soient satisfaites, alors le problème (3.1) a une solution unique dans* $C_{1-\gamma_1,\rho}(I_0)\times C_{1-\gamma_2,\rho}(I_0)$.

Preuve. Pour tout $u_i, v_i \in C_{1-\gamma_i,\rho}(I_0)$ et pour $t\in I_0$, on a

$$\left|(\mathcal{T}_i u_i(t)-\mathcal{T}_i v_i(t))\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\right|$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i^*}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}|f_i\left(s,u_1(s),u_2(s)\right)-f_i\left(s,v_1(s),v_2(s)\right)|\right)(t)$$

$$+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}|u_i(s)-v_i(s)|\right)(t)$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{1}{p_i^*}{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i}(N_i(\|u_1-v_1\|+\|u_2-v_2\|))\right)(t)$$

$$+{}^\rho\mathcal{I}_{a+}^{\alpha_i'}\left(\frac{r_i^*}{p_i^*}\|u_i(s)-v_i(s)\|\right)(t)$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i}\frac{1}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_i')}\quad\frac{(T^\rho-a^\rho)^{\alpha_i+\alpha_i'}}{\alpha_i\alpha_i'\rho^{\alpha_i+\alpha_i'+2}}(N_i(\|u_1-v_1\|+\|u_2-v_2\|))$$

$$+\frac{r_i^*}{p_i^*\Gamma(\alpha_i)}\quad\frac{(T^\rho-a^\rho)^{\alpha_i'}}{\alpha_i'\rho^{\alpha_i'+1}}(\|u_i(s)-v_i(s)\|)$$

$$\leq \left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_i+\alpha_i+\alpha_i'+1}\frac{1}{p_i^*\rho^2\Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_i'+1)}(N_i(\|u_1-v_1\|+\|u_2-v_2\|))$$

$$+\frac{r_i^*}{p_i^*\rho\Gamma(\alpha_i+1)}\left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_i'}(\|u_i(s)-v_i(s)\|)$$

$$\leq (2N_iA_i+B_i)\|u-v\|.$$

D'où, $|||\mathcal{T}u-\mathcal{T}v|||\leq K\|u-v\|$ où $K=\max\{K_1,K_2\}$. puisque $K<1$, l'opérateur $\mathcal{T}$ est une contraction. Ainsi, selon le principe de contraction de Banach, le problème(3.1) a une solution unique. ■

3.4 Exemple

On considère le problème différentiel fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^{0.5}D^{0.5,0.6}\left[\frac{200}{t} \quad {}^{0.5}D^{0.2,0.3}+0.001t\right]u_1(t)=\frac{t}{10}\left(\sin|u_1|-\sin|u_2|\right) \quad t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}], \\ {}^{0.5}D^{0.2,0.8}\left[\frac{400}{t} \quad {}^{0.5}D^{0.5,0.4}+0.01t\right]u_2(t)=\frac{t}{20}\left(\sin|u_1|-\sin|u_2|\right), \\ u_1(\frac{\pi}{2})=u_2(\frac{\pi}{2})=0, \end{cases} \tag{3.15}$$

avec

$$(\alpha_1=0.5,\alpha_1'=0.2,\alpha_2=0.2,\alpha_2'=0.5)\in(0,1),$$
$$(\beta_1=0.6,\beta_1'=0.3,\beta_2=0.8,,\beta_2'=0.4)\in[0,1],$$
$$(\gamma_1=0.8,\gamma_2=0.84,\gamma_1'=0.44,\gamma_2'=0.7)\in[0,1).$$

et

$$f_1(t,u_1,u_2)=\frac{t}{10}\left(\sin|u_1|-\sin|u_2|\right),\ f_2(t,u_1,u_2)=\frac{t}{20}\left(\sin|u_1|-\sin|u_2|\right).$$

Par définition(3.1) on a

$$C_{0.2,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])=\left\{y:(a,b]\to\mathbb{R}:\left(\frac{t^{0.5}-(\frac{\pi}{2})^{0.5}}{0.5}\right)^{0.2}y(t)\in C([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])\right\},$$

$$C_{0.16,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])=\left\{y:(a,b]\to\mathbb{R}:\left(\frac{t^{0.5}-(\frac{\pi}{2})^{0.5}}{0.5}\right)^{0.16}y(t)\in C([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])\right\},$$

par suite, $f_1\in C_{0.2,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])$ pour tout $y\in C_{0.2,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])$, et $f_2\in C_{0.16,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])$, pour tout $y\in C_{0.16,\ 0.5}([\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}])$.

En utilisant toutes les données fournies de notre problème(3.15), nous obtenons

$$|f_1(t,u_1,u_2)-f_1(t,v_1,v_2)|\leq\frac{\pi}{5}\left(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|\right),$$

$$|f_2(t,u_1,u_2)-f_2(t,v_1,v_2)|\leq\frac{\pi}{10}\left(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|\right),$$

$$|f_1(t,u_1,u_2)|\leq\frac{\pi}{5},$$

$$|f_2(t,u_1,u_2)|\leq\frac{\pi}{10},$$

pour tout $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Par conséquent, les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites.

Avec

$$\begin{cases} p_1(\frac{\pi}{2}) = 200(\frac{2}{\pi}) = \frac{400}{\pi} = 127.38853, \\ \\ p_1(\frac{3\pi}{2}) = 200(\frac{2}{3\pi}) = 42.46284, \end{cases}$$

où, $p_1^* = \inf\{p_1(\frac{\pi}{2}), p_1(\frac{3\pi}{2})\} = 42.46284$.

$$\begin{cases} p_2(\frac{\pi}{2}) = 400(\frac{2}{\pi}) = 254.77707, \\ \\ p_2(\frac{3\pi}{2}) = 400(\frac{2}{3\pi}) = 84.92569, \end{cases}$$

où, $p_2^* = \inf\{p_2(\frac{\pi}{2}), p_2(\frac{3\pi}{2})\} = 84.92569$.

Aussi,

$$\begin{cases} r_1(\frac{\pi}{2}) = 0.001(\frac{\pi}{2}) = 0.00157, \\ \\ r_1(\frac{3\pi}{2}) = 0.001(\frac{3\pi}{2}) = 0.00471, \end{cases}$$

où, $r_1^* = \max\{r_1(\frac{\pi}{2}), r_1(\frac{3\pi}{2})\} = 0.00471$, et

$$\begin{cases} r_2(\frac{\pi}{2}) = 0.1(\frac{\pi}{2}) = 0.157, \\ \\ r_2(\frac{3\pi}{2}) = 0.1(\frac{3\pi}{2}) = 0.471, \end{cases}$$

où, $r_2^* = \max\{r_2(\frac{\pi}{2}), r_2(\frac{3\pi}{2})\} = 0.471$.

Puisque

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\pi}{5}, \\ \\ N_2 = \frac{\pi}{10}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_1+\alpha_1+\alpha_1'} \frac{1}{p_1^* \rho^2 \Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_1'+1)} = (1.83452)^{0.9} \frac{1}{42.46284(0.25)0.885(0.981)} \\ \\ = \frac{1.72651}{9.21639} = 0.18733, \\ \\ A_2 = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma_2+\alpha_2+\alpha_2'} \frac{1}{p_2^* \rho^2 \Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_2'+1)} = (1.83452)^{0.86} \frac{1}{84.92569(0.25)0.2(4.59)0.5(1.77)} \\ \\ = \frac{1.68511}{18.43279} = 0.09141. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B_1 = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_1'} \frac{r_1^*}{p_1^* \rho \Gamma(\alpha_1'+1)} = (1.83452)^{0.2} \frac{0.00471}{42.46284(0.5)0.2(4.59)} = 1.12902 \frac{0.00471}{19.49042} = 0.00027, \\ \\ B_2 = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha_2'} \frac{r_2^*}{p_2^* \rho \Gamma(\alpha_2'+1)} = (1.83452)^{0.5} \frac{0.471}{84.92569(0.5)0.5(1.77)} = 1.35444 \frac{0.471}{37.57961} = 0.01697. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} K_1 = 2A_1N_1 + B_1 = 2(0.18733)\frac{\pi}{5} + 0.00027 = 0.23555 < 1, \\ \\ K_2 = 2A_2N_2 + B_2 = 2(0.09141)\frac{\pi}{10} + 0.01697 = 0.07437 < 1. \end{cases}$$

Donc condition (3.13) est vérifiée.

Finalement, Les hypothèses du théorème (3.2) étant satisfaites. Alors, le problème (3.15) a une solution unique dans $C_{0.2,\ 0.5}([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) \times C_{0.16,\ 0.5}([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}])$. .

Conclusion

L'apport de notre travail consiste principalement en un point qui est le suivant :
L'extension à l'étude d'un problème a valeur initiale défini par un système généralisé de Sturm-Liouville et Langevin d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Katugampola.
Nous avons pu donner une représentation intégrale de notre problème qui nous a permis de transformer celui-ci en un problème du point fixe. Les théorèmes du point fixe de Schauder et Banach fûrent la clé de l'analyse de notre problème.
L'exemple numérique confirme les résultats théoriques obtenus.

Bibliography

[1] Ahmad B, Alsaedi A, Salem S. On a nonlocal integral boundary value problem of nonlinear Langevin equation with different fractional orders. Adv Difference Equ. 2019;57. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2003-x

[2] Ahmad B, Nieto JJ, Alsaedi A, El-Shahed M. A study of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders in different intervals. Nonlinear Anal. 2012;13:599-606.

[3] Ahmad, B .Ntouyas, S.K.: A fully Hadamard type integral boundary value problem of a coupled system of fractional differential equations.Fract. Calc. Appl. Anal. 2014;17:348-360.

[4] Ahmad, B.,Ntouyas, SK.: Initial value problems of fractional order Hadamard-type functional differential equations. Electron J Differ Equ.2015;77:9.

[5] Almeida, R.,Malinowska, A.B., Odzijewicz, T.: Fractional differential equations with dependence on the CaputoKatugampola derivative. J. Comput. Nonlinear Dyn. 11(6), 11 (2016).

[6] Berhail, A.,Tabouche, N.,Matar, MM.,Alzabut, J.:Boundary value problem defined by system of generalized Sturm-Liouville and Langevin Hadamard fractional differentail equations. Math. Meth. Appl. Sci. 1-13 (2020).

[7] Berhail, A., Tabouche, N., Matar, M., Alzabut, J.: On nonlocal integral and derivative boundary value problem of nonlinear Hadamard Langevin equation with three different fractional orders. 1-16 (2019).

[8] Butzer, P.L. Kilbas, A.A. Trujillo, J.J.: Composition of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002).

[9] Butzer, P.L.Kilbas, A.A. Trujillo, J.J.: Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 127.

[10] Butzer, P.L. Kilbas, A.A. Trujillo, J.J.: Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002), 115.

[11] Dhaigude, D.B., Bhairat, S.P.: Existence and uniqueness of solution of Cauchy-type problem for Hilfer fractional differential equations. Commun. Appl. Anal. 22(1), 121-134 (2018).

[12] Elsayed, E.M.: On the existence and stability of solution of boundary value problem for fractional integro-differential equations with complex order. Filomat. 2018;32(8).

[13] Furati, K.M., Kassim, M.D.,Tatar, N.E.: Existence and uniqueness for a problem involving hilfer fractional derivative. Comput. Math. Appl. 64, 1616-1626 (2012).

[14] Granas, A., Dugundji, J.: Fixed Point Theory. Springer, New York (2003).

[15] Harikrishnan, S.,Kanagarajan, K.,Elsayed, EM.: Existence of solutions of nonlocal initial value problems for differential equations with Hilfer-Katugampola fractional derivative . The Royal Academy of Scince , Madrid (2019).

[16] Hadamard, J.:Essai sur l'étude des fonctions données par leur development de Taylor, J. Mat. Pure Appl. Ser. 8 (1892), 101-186.

[17] Hilfer, R.: Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore (1999).

[18] Katugampola, U.N.: New approach to a genaralized fractional integral. Appl. Math. Comput. 218, 860-865 (2011).

[19] Katugampola, U.N.: Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. Bull. Math. Anal. Appl. 6(4), 1-15 (2014).

[20] Katugampola, U.N.: New fractional integral unifying six existing fractional integrals. arxiv: 1612.08596 [math.CA] (2016).

[21] Kiataramkul, C. Ntouyas, S.K. Tariboon, J. Kijjathanakorn, A.: Generalized Sturm-Liouville and Langevin equations via Hadamard fractional derivatives with anti-periodic boundary conditions. Bound Value Probl. 2016;2016(1):1-13.

[22] A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[23] Langevin, P.: Sur la théorie du mouvement brownien [On the theory of Brownian motion]. C R Acad. Sci. Paris.(1908);146:350-533.

[24] Li X, Sun S, Sun Y. Existence of solutions for fractional Langevin equation with infinite-point boundary conditions. J Appl Math Comput. 2016;53(1):1-10.

[25] Matar, MA.: Solution of sequential Hadamard fractional differential equations by variation of parameter technique. Abstr Appl Anal.2018;2018:7.

[26] Muensawat, T., Ntouyas, S.K. Tariboon, J.: Systems of generalized Sturm-Liouville and Langevin fractional differential equations. Adv Differ Equ 2017, 63 (2017).

[27] Oliveira, D.S., Capelas de oliveira, E.: Hilfer-Katugampola fractional derivative.(2017).

[28] Podlubny, I., Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional diferential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[29] Sudsutad W, Ntouyas SK, Tariboon J. Systems of fractional Langevin equations of Riemann-Liouville and Hadamard types. Adv Differ Equ. 2015:235.

[30] Tarasov, V.E.: Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer, HEP, New York (2011).

[31] Thiramanus, P.Ntouyas, S.K.Tariboon, J.: Existence and uniqueness results for Hadamard-type fractional differential equations with nonlocal fractional integral boundary conditions, Abstr. Appl. Anal. (2014).

[32] Wang, Y., Zhang, Y.: Nonlocal initial value problems for differential equations with Hilfer fractional derivative. Appl. Math. Comput. 266, 850-859 (2015).

[33] Yukunthorn, W., Ntouyas, SK., Tariboon, J.: Nonlinear fractional Caputo-Langevin equation with nonlocal Riemann-Liouville fractional integral conditions.Adv.Differ.Equ.2014:315.