République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par :

Aissani Nedjla & Abiza Yassmine

Intitulé

Etude d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle du seconde ordre.

Dirigé par :

Dr. ZENKOUFI Lilia

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. **Badi Sabrina**	Pr	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Zenkoufi Lilia	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. **Amor MENACEUR**	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chères parents Aissani Salem et Guemriche Fella pour leurs soutien, leurs patience et leurs encouragement durant mon parcours scolaire.

Ma chère sœur Sana et son mari Guerzize Kheireddine et mes chères frères Imad, Hamdi et sa femme Imen Harkat et leurs enfants Sima, Massa, Siba et Ghina, source de joie et de bonheur.

L'âme de ma chère grand-mère ≪MAMA BADRA≫.

Toute Ma famille, source d'espoir, d'amour et de motivation.

Toute mes chères amies.

Et à tous ceux qui ont toujours cru en moi, m'ont accompagné et soutenu ...

Trouver ici ma profonde reconnaissance

Aissani Nedjla

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chères parents Abiza Noureddine et lebbad khadidja pour leurs soutien,leurs patience,leurs encouragement durant ma parcours scolaire.

Mes chères frères Oussama et Ahmed ,source de joie et de bonheur.

Toute Ma famille, source d'espoir ,d'amour et de motivation.

Toute mes chères amies .

Et à tous ceux qui ont toujours cru en moi ,m'ont accompagné et soutenu ...

Trouver ici ma profonde reconnaissance

Abiza Yassmine

Table des matières

Remerciements

En premier lieu nous remercions **Dieu** tout puissant qui nous a donné la volonté, le courage et les moyens pour achever ce travail.

Nous tenons à présenter nos sincères et vifs remerciements à **notre Encadreur** : **Mme Zenkoufi Lilia** pour l'immense privilège qu'elle nous a offert en examinant et dirigeant notre travail.

Aux membres de jury qui ont accepté d'examiner ce travail.

Et bien sûr pour toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Abstract

In this work we are interested in the study of a second order boundary value problem whose conditions are given at three points of the domain, using the Leray-Schauder nonlinear alternative and the Banach contraction principle, we have demonstrated the existence and uniqueness of the non-trivial solution. The results obtained are illustrated by examples.

Key words : Leray-Schauder nonlinear alternative, Banach contraction principle, Boundary value problems, Existence of solution, Uniqueness.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites du second ordre dont les conditions sont données en trois points du domaine, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution non triviale. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Mots clés : Alternative non linéaire de Leray-Schauder, Le principe de contraction de Banach, Problèmes aux limites, Existence de la solution, Unicité la solution.

Introduction

Plusieurs phénomènes naturels de la vie réelle s'expriment mathématiquement sous forme d'équations différentielles non linéaires. La théorie et les applications des équations non linéaires dans le cadre topologique et algébrique nécessitent naturellement d'investir dans la branche de la théorie du point fixe.

En analyse, le théorème du point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Durant ces dernières années, les théorèmes du point fixe sont regardés comme de très puissants et importants outils dans l'étude des phénomènes non-linéaires. Le plus simple théorème de point fixe connu est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction : "toute contraction d'un espace métrique complet vers lui même admet un unique point fixe."

En 1912, Brouwer a trouvé une généralisation du théorème de Banach, il affirme que : "une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle même doit avoir un point fixe". Ce résultat a été généralisé par plusieurs mathématiciens, la plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "toute application continue et compacte d'un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même admet un point fixe". Ce puissant théorème de point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.

Remarquons que dans certains problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles ordinaires, les conditions aux limites sont imposées localement ou non localement. Par exemple dans le problème de Robin :

$$\begin{cases} u''(t) + f\left(t,\ u(t),\ u'(t)\right) = 0, \\ u(0) = 0,\ \ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Si la condition locale $u'(1) = 0$ est remplacée par la condition non locale $u(1) = u(\eta)$, $i.e$,

$$u(0) = 0 \ \text{ et } \ u(1) = u(\eta), \tag{2}$$

(où $\eta \in \left]0, 1\right[$), alors le problème est dit, un problème non-local.

Evidemment, le problème non-local donne de meilleurs résultats que le problème local. Dans le calcul numérique, il est plus difficile de déterminer la valeur de $u'(1)$ que celle de $\frac{u(\eta)-u(1)}{\eta-1}$. La condition non locale $u(1) = u(\eta)$, peut être écrite comme "une différence" $u(1) - u(\eta)$. L'étude de ces problèmes est d'actualité et plusieurs travaux et ouvrages sont consacrés à ce sujet.

Nous passons maintenant à la description du plan de ce mémoire.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre se compose notament des rappels de quelques résultats théoriques et notions de base de l'analyse fonctionnelle, qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième, on va présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où on va étudier les théorèmes de Banach, de Brouwer et de Schauder.

Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis.

Dans le troisième chapitre, nous nous s'intéressons à l'étude de problème aux limites du second ordre à trois points suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha u'(0),\ u(1) = \beta u(\eta), \end{cases}$$

où, $\eta \in \left]0, 1\right[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et f est une fonction continue : $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Inspiré des travaux $[4, 5, 6, 7, ...]$ et sous certaines conditions sur la non linéarité f, nous avons appliqué l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour démontrer l'existence de la solution non triviale et le théorème de contraction pour montrer l'unicité de la solution. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Enfin, nous clôturons ce mémoire par **une bibliographie**.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et le théorème d'Arzela-Ascoli, qu'on va utiliser dans la suite de notre travail. Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis.

1.1 Introduction

L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse qui étudie les espaces de fonctions.

Les espaces de base de l'analyse fonctionnelle sont les espaces vectoriels normés complets sur le corps des nombres réels ou des nombres complexes. De tels espaces sont appelés les espaces de Banach. Les espaces de Hilbert constituent un cas particulier important, où la norme est issue d'un produit scalaire.

1.1.1 Quelques rappels

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n.) sur un sous-corps $\Bbbk$ de $\mathbb{C}$ (en général $\Bbbk = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.), complet pour la distance issue de sa norme.

Soit V un e.v normé.

Définition 1.1 *(**convexe**).*

On dit qu'une partie A de V est convexe si pour tout $x, y \in A$, on a pour tout $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1-t)y \in A$.

ce qui signifie que le segment joignant x et y est entrièrement contenu dans A.

Définition 1.2 *(**espace metrique complet**)*

On dit que l'espace métrique (V, d) est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de V converge dans V.

Définition 1.3 *Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A.*

Proposition 1.1 *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*

Proposition 1.2 *Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Définition 1.4 *Soit E un espace topologique séparé. Un sous-ensemble F de E est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.*

Définition 1.5 *Une norme est une application définie sur V (e.v) réel, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, notée $||.||_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\|v\|_V = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda|\ \|v\|_V$.

(iii) Inégalité triangulaire: $\forall v, w \in V$, $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

Proposition 1.3

1) Si V est compact et si A est une partie fermée de V, alors A est compacte.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.6 $\big($*Espaces* $L^{1(\Omega)}\big)$

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on désigne par* $L^1(\Omega)$ *l'espace des fonctions intégrable sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega \mid f(x) \mid dx$$

Définition 1.7 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \mid f(x) \mid^p \in L^1(\Omega)\right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, *on a* $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable, vérifiant*

$$\exists\ c > 0 \text{ telle que} \mid f(x) \mid < c,\ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\| f \|_{L^\infty} = \| f \|_\infty = \inf\{c > 0,\ \ \mid f(x) \mid \leq c,\ p.p. \text{ sur } \Omega.\}$$

Théorème 1.1 *(Convergence dominée)*

Soit $f_n \in L^1(E)$, *une suite de fonctions sommable sur* E *telle que :*

1) *Pour presque tout* x, $f_n(x) \to f(x)$ *sur* E.

2) $|f_n| \leq g \in L^1(E)$.

Alors, $f \in L^1(E)$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.

Définition 1.8 *(Espaces de hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vactoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Théorème 1.2 *$L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\ .\ \|_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 1.1 *En particulier lorsque $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Notation Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note q l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.3 (*Inégalité de Hölder*)

Soit p telle que $1 \leq p \leq \infty$, et soient deux fonctions telles que

$$f \in L^p(\Omega) \quad et\ g \in L^q(\Omega)$$

Alors

$$f.g \in L^1(\Omega)\, et \parallel f.g \parallel_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}. \parallel g \parallel_{L^q(\Omega)}$$

Théorème 1.4 (*Fubini*)

Si $f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors les intégrales

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx\right) dt \ et\ \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\, dt\right) dx$$

existent et sont égales.

1.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Nous allons rappeler le théorème d'Ascoli qui concerne les compacts et qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle et il va nous servir beaucoup le long de ce travail.

1.2.1 Opérateurs compacts

Définition 1.9 *Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y.*

Définition 1.10 *(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur T est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

Définition 1.11 *Une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite uniformément bornée, s'il existe un nombre $M > 0$ tel que*

$$|u(x)| \leq M, \ \forall x \in X, \ \forall u \in F.$$

Définition 1.12 *(Equicontinuité).*

Soit (X, d) un espace métrique donné, une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite équicontinue si et seulement si :

$$\forall \epsilon \in X, \ \exists \ \delta > 0 : \forall (x, y) \in X^2, \ d(x, y) < \delta, \forall u \in F, \ \text{on a :} \ |u(x) - u(y)| < \varepsilon$$

Théorème 1.5 (*Théorème d'Arzéla-Ascoli*)

Soit X un espace métrique complet, alors une famille de fonctions $F \subset C(X, \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si :

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X.

- La famille $\mathcal{F}$ est unifomément bornée sur X.

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans ce chapitre on va donner une brève introduction sur les théorèmes du point fixe. On va étudier le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer et de Schauder, pour plus de détails voir $[1, 2, 3, ...]$.

Etant donné un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$, les théorèmes du point fixe donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E. Ces théorèmes présentent un outil important en mathématiques.

Définition 2.1 *Soit V un espace vectoriel normé, et f une application de V dans V. On dit que f est lipschitzienne sur V s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\forall u_1, u_2 \in V : \|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L \|u_1 - u_2\|_V .$$

Si $L < 1$, f est dite contractante.

Théorème 2.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.*

Si $f(I) \subset I$ (I stable par f), alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$).

Preuve. *Considérons la fonction* g *définie sur* I *:* $g(x) = f(x) - x$.

Montrons que $0 \in g(I)$*. On a :* $g(a) = f(a) - a \in g(I)$ *et* $g(b) = f(b) - b \in g(I)$

Or, comme $f(I) \subset I$*, on a :* $f(a) \geq a$ *et* $f(b) \leq b$*, c'est -à-dire* $g(a) \geq 0$ *et* $g(b) \leq 0$.

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ *tel que* $g(x) = 0$*, c'est-à-dire* $f(x) = x$. ∎

2.0.2 Le premier théorème du point fixe.

Ce théorème qui est un résultat métrique est dit principe de l'application contractante, on trouve aussi dans la littérature : théorème de contraction de Banach, théorème de Banach-Picard, il garentit l'existence d'un unique point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2 *Soient* (E, d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \longrightarrow E$ *une application contractante, (i.e, Lipschitzienne de rapport* $L < 1$*).*

Alors,

φ *admet un unique point fixe* $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$*, la suite itérée* $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{cases} x_0 \in E \quad \text{quelconque} \\ \quad x_{p+1} := \varphi(x_p), \end{cases}$$

converge vers a.

Preuve.

1. Existence : Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \quad p \geq 1.$$

Nous allons prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. pour $p < q$, nous utilisons l'inégalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q). \tag{P}$$

Puisque φ est une contraction, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, nous obtenons

$$d(x_p, x_q) \leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1)$$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque φ est une contraction, nous avons :

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} \varphi(x_{p-1}) = \varphi\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = \varphi(a).$$

nous avons donc prouvé que φ admet un point fixe a dans E ($i.e,\ \varphi(a) = a$).

2. Unicité : Supposons qu'il existe a, $b \in E$, $a \neq b$, tels que nous avons $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$. Alors,

$$d(a, b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq kd(a, b),$$

ce qui implique que : $d(a, b) = 0$, i.e, $a = b$. (puisque $k < 1$) . ■

Les hypothèses de ce théorème sont essentielles et si nous en négligeons seulement une, le point fixe n'existe pas.

Contre-exemples.

Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par f, $(f(X) \nsubseteq X)$: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,1]$.

Or, X est fermé dans $\mathbb{R}$ et complet car $\mathbb{R}$ est complet.

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x \in X} \left| f'(x) \right| &< 1 \Longrightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f n'a pas de point fixe car $f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right]$, *i.e*; X n'est pas stable par f.

2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$.

Or, $f : X \to X$ et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

Mais, $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1 \Longrightarrow f$ n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Or

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x \in X} \left| f'(x) \right| &= \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais, X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc n'est pas complet.

2.0.3 Le deuxième théorème du point fixe

Ce théorème (**de Brouwer**) est un théorème du point fixe topologique, il donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie

Théorème 2.3 *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue, alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque : Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.4 *Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ lui-même, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.1 1. *L'hypothèse "I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déja, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déja calculé ℓ en résolvant l'equation $f(x_0) = x_0$), cette hypothèse devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur I" par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I".*

Voici un contre-exemple :

Soit, $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschizienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

Le théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.5 ***(Schauder).***

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Preuve. Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \text{ dès que } \|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K ;

i.e,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L =: Vect\left(f\left(x_j\right)\right)_{1\leq j\leq p}$, alors L est de dimention finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \left\|x-y\right\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\left\|x-x_j\right\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B\left(x_j, \delta\right)$ est nulle dehors.

on a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j\left(x\right) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j\left(x\right) = \frac{\psi_j\left(x\right)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_{k(x)}}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(x\right) = 1$, pour tout $x \in K$.

on pose alors, pour $x \in K$,

$$g\left(x\right) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(x\right) f\left(x_j\right).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f\left(x_j\right)$).

donc, si on prend la restriction $g \diagup K^* : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f\left(y\right) - y &= f\left(y\right) - g\left(y\right) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(y\right) f\left(y\right) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(y\right) f\left(x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\left(y\right)\left(f\left(y\right) - f\left(x_j\right)\right) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$\|f(y) - f(x_j)\| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout j,

$$\left\|\varphi_j(y)\left(f(y) - f(x_j)\right)\right\| \leq \epsilon\varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)\left(f(y) - f(x_j)\right)\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*,$$

i.e, y^* est un point fixe de f sur K.

Exemple 2.1 *Etude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

■

On utilisant le théorème suivant :

Théorème 2.6 [8] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que lintervalle I est stable par g. Soit la suite récurrente (u_n) converge vers u, alors u est nécessairement un point fixe de g.*

On peut introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 + x}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = x \text{ avec } x \geq -1$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \left| f'(x) \right| = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} \leq \frac{1}{2}$$

D'aprés l'inégalité des accrroissements finie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a|$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'aprés le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ

Enfin $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'aprés ce qui précède (u_n) converge encore vers λ.

Dans l'ouvrage [1] , R. Agarwal, M. Meechan et D. O'Regan, ont démontré le théorème suivant :

Théorème 2.7 (*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*) *Soit F un epsace de Banach et soit Ω un sous ensemble ouvert et borné de F, $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to F$ un opérateur complètement continu. Alors, il existe un $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $T(x) = \lambda x$, ou il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$.*

Chapitre 3

Etude d'un problème aux limites du second ordre à trois points

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour une équation du second ordre à trois points, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples dans la dernière section.

3.1 Introduction

Depuis que Gupta a étudié des problèmes aux limites à trois points pour une équation differentielle ordinaire, de nombreux résultats classiques ont été obtenus par utilisation du théorème de continuation de Leray Schauder, l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder, le principe de contraction de Banach,.... Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur à $[4, 5, 6, 7, 9, ...]$ et à leurs références.

Dans ce chapitre, inspirée par les travaux de, [4] et Y-P. Sun [7] "qui ont étudié l'éxistence d'au moins : une solution non triviale et une solution positive d'un problème aux limites du second ordre à trois points", nous s'intéressons à l'étude de problème aux limites du second ordre à trois points suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u'(0), \ u(1) = \beta u(\eta) \end{cases} \tag{2.1}$$

où, $\eta \in]0, 1[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et f une fonction continue : $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans la deuxième section, nous allons donner quelques documents préliminaires : nous allons présenter et démontrer la forme de la solution du problème, l'opérateur intégral associé et quelques définitions de base dont nous avons besoin. Dans la troisième section, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le principe de contraction de Banach, nous présentons et nous prouvons les résultats d'existence et d'unicité de la solution non triviale du problème, nous allons démontrer aussi que l'opérateur intégral est complètement continu par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli. Comme application les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

3.2 Solution du problème

Nous allons donner quelques préliminaires que nous allons utiliser par la suite.

Soit $E = C[0, 1]$, muni de la norme $\|y\|_E = \sup\limits_{t \in [0,1]} |y(t)|$.

Lemme 3.1 *Soit* $y \in L^1[0, 1]$, *si* $\beta(\eta + \alpha) \neq \alpha + 1$, *alors le problème aux limites à trois points*

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha u'(0), \qquad u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{2.2}$$

a une solution unique

$$u(t) = -\frac{(t + \alpha)}{\beta(\eta + \alpha) - (\alpha + 1)} \int_0^1 (1 - s) y(s) ds - \int_0^t (t - s) y(s) ds$$

$$+\frac{\beta\left(t+\alpha\right)}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_0^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds. \tag{2.3}$$

Preuve. D'après l'équation dans (2.2) nous avons $u''\left(t\right)=-y\left(t\right).$

Pour $t\in[0,1]$ en intégrant de 0 à t, nous obtenons

$$u'\left(t\right)=-\int_0^t y\left(s\right)ds+C_1.$$

alors,

$$u\left(t\right)=-\int_0^t\left(\int_0^s y\left(x\right)dx\right)ds+C_1t+C_2,$$

$$u\left(t\right)=-\int_0^t\left(\int_s^t y\left(x\right)dx\right)ds+C_1t+C_2,$$

i.e,

$$u\left(t\right)=-\int_0^t\left(t-s\right)y\left(s\right)ds+C_1t+C_2,$$

de

$$u\left(0\right)=\alpha u^{'}\left(0\right),$$

$$C_2=\alpha C_1.$$

Nous avons

$$u\left(1\right)=-\int_0^1\left(1-s\right)y\left(s\right)ds+C_1+C_2,$$

$$u\left(\eta\right)=-\int_0^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds+C_1\eta+C_2,$$

alors de

$$u\left(1\right)=\beta u\left(\eta\right),$$

nous avons

$$C_1=-\frac{1}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_0^1\left(1-s\right)y\left(s\right)ds$$

$$+\frac{\beta}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds,$$

remplaçant C_1 et C_2 dans

$$u\left(t\right)=-\int_{0}^{t}\left(t-s\right)y\left(s\right)ds+C_1 t+C_2,$$

nous obtenons

$$u\left(t\right)=-\int_{0}^{t}\left(t-s\right)y\left(s\right)ds+\left(-\frac{1}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)y\left(s\right)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds\right)t$$

$$+\alpha\left(-\frac{1}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)y\left(s\right)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds\right).$$

Par conséquent, le problème aux limites à trois points (2.2) a une solution unique

$$u\left(t\right)=-\frac{\left(t+\alpha\right)}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)y\left(s\right)ds-\int_{0}^{t}\left(t-s\right)y\left(s\right)ds$$

$$+\frac{\beta\left(t+\alpha\right)}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)y\left(s\right)ds.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Définition 3.1 *Définissons l'opérateur intégral* $T:E\rightarrow E$, *par*

$$Tu\left(t\right)=-\frac{\left(t+\alpha\right)}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)ds-\int_{0}^{t}\left(t-s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)ds$$

$$+\frac{\beta\left(t+\alpha\right)}{\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)ds,\qquad\beta\left(\eta+\alpha\right)\neq\left(\alpha+1\right).\tag{2.4}$$

D'après le Lemme 3.1, *la fonction* $u(t)\in E$ *est une solution du problème* (2.1) *si et seulement si, l'opérateur* T *a un point fixe dans* E ($Tu\left(t\right)=u(t)$).

Maintenant nous donnons quelques définitions de base.

Définition 3.2 *$u(t)$ est dite une solution positive si $u(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$.*

Définition 3.3 *Un opérarteur est complètement continu s'il est continu et transforme chaque ensemble borné à un ensemble précompact.*

3.3 Résultats d'existence et d'unicité

3.3.1 Existence et unicité de la solution non triviale

Dans cette section, nous présentons et nous prouvons nos résultats d'existence et d'unicité, en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une fonction positive $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$, telles que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],$$

et

$$C = \frac{2(\beta+1)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\int_0^1 (1-s)k(s)\,ds < 1,$$

alors, le problème aux limites (2.1) a une solution unique dans E.

Preuve. Pour $\beta(\eta+\alpha) \neq (\alpha+1)$ nous avons,

$$Tu(t) = -\frac{(t+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)}\int_0^1 (1-s)f(s,u(s))\,ds - \int_0^t (t-s)f(s,u(s))\,ds$$

$$+\frac{\beta(t+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)}\int_0^\eta (\eta-s)f(s,u(s))\,ds,$$

Prouvant que T est une contraction.

Soit $u, v \in E$ alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \left[1 + \frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} + \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \times$$

$$\int_0^1 (1-s) |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds,$$

i.e.

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \left[1 + \frac{(1+\beta)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \int_0^1 (1-s) k(t) |u(s) - v(s)| \, ds,$$

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)| + (1+\beta)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s) k(t) |u(s) - v(s)| \, ds,$$

donc

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{\beta(1+\alpha) + (\alpha+1) + (1+\beta)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s) k(t) |u(s) - v(s)| \, ds,$$

alors

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{2(\beta+1)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s) k(t) |u(s) - v(s)| \, ds.$$

Passant à la norme, nous avons

$$\|Tu - Tv\|_E \leq C \|u - v\|_E \, .$$

Alors T est une contraction, donc il admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème aux limites (2.1). ■

Théorème 3.2 *Supposons que* $f(t, 0) \neq 0$, $\beta(\eta+\alpha) \neq (\alpha+1)$ *et qu'il existe deux* *fonctions positives* $k, h \in (L^1[0,1], \mathbb{R}_+)$ *telles que :*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t) \quad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

et

$$\left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right]\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds$$
$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\int_0^\eta (\eta-s)\,k(s)\,ds < 1.$$

Alors le problème aux limites (2.1) *a au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Pour prouver l'existence d'au moins une solution non triviale du problème (2.1) , nous emploierons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, donnée par *le Théorème* 2.8.

Preuve. Posons

$$F = \left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right]\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds$$

$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\int_0^\eta (\eta-s)\,k(s)\,ds,$$

et

$$G = \left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right]\int_0^1 (1-s)\,h(s)\,ds$$
$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\int_0^\eta (\eta-s)\,h(s)\,ds.$$

Montrant d'abord que l'opérateur T défini par (2.4) est complètement continu.

1) T est continu.

Nous savons que

$$Tu(t) = -\frac{(t+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)}\int_0^1 (1-s)\,f(s,u(s))\,ds - \int_0^t (t-s)\,f(s,u(s))\,ds$$

$$+\frac{\beta(t+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)}\int_0^\eta (\eta-s)\,f(s,u(s))\,ds, \qquad \beta(\eta+\alpha) \neq (\alpha+1).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans E.

Alors,

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \left[1 + \frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} + \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \times$$

$$\int_0^1 (1-s)|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|\, ds,$$

donc

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \left[1 + \frac{(1+\beta)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \int_0^1 (1-s)|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|\, ds,$$

et

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \left[\frac{2(\beta+1)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \int_0^1 (1-s)|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|\, ds.$$

Le théorème de convergence dominé de Lebesgue, implique que $\| Tu_n - Tu\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, T est continu.

2) Soit $B_r = \{u \in C[0,1] : \|u\|_E \leq r\}$ un sous ensemble borné.

Démontrons que $T(B_r)$ est relativement compact.

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour tout $u \in B_r$ et en utilisant (2.5), nous obtenons :

$$|Tu(t)| \leq \left[1 + \frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \int_0^1 (1-s)\, k(s)\, |u(s)|\, ds$$

$$+ \left[1 + \frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right] \int_0^1 (1-s)\, h(s)\, ds$$

$$+ \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta-s)\, k(s)\, |u(s)|\, ds$$

$$+ \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta-s)\, h(s)\, ds,$$

donc,

$$\|Tu\| \leq F\|u\| + G.$$

$$\leq Fr + G.$$

Alors, $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(B_r)$ est équicontinu.

Pour tout $t_1,\ t_2 \in [0,1]\,,\ t_1 < t_2$, nous avons :

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| = \left| \frac{(t_2+\alpha)-(t_1+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s) f(s,u(s))\,ds \right.$$

$$+ \frac{\beta(t_1+\alpha)-\beta(t_2+\alpha)}{\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)} \int_0^\eta (\eta-s) f(s,u(s))\,ds$$

$$\left. - \int_0^{t_1} (t_1-s) f(s,u(s))\,ds + \int_0^{t_2} (t_2-s) f(s,u(s))\,ds \right|,$$

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq L \left| \frac{t_2-t_1}{2[\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)]} - \frac{\beta\eta^2(t_2-t_1)}{2[\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)]} + \frac{t_2^2-t_1^2}{2} \right|,$$

$$où, \quad L = \max_{0\leq s\leq 1} |f(s,u)|.$$

Donc,

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \frac{L}{2}|t_2-t_1| \left[\frac{|1-\beta\eta^2|}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} + (t_2+t_1) \right].$$

Alors,

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent $T(B_r)$ est équicontinu.

Le théorème d'Arzela-Ascoli, implique que T est un opérateur complètement continu.

Alors, d'après la continuité de f et comme $f(t,0) \neq 0$ il existe un intervalle $[\sigma, \tau] \subset [0,1]$ tel que

$$\min_{\sigma \leq t \leq r} |f(t,0)| > 0 \text{ et du fait que } h(t) \geq |f(t,0)| \text{ sur } [\sigma,\tau], \text{ alors } G > 0.$$

Soit $M = G(1-F)^{-1}$ et $\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\|_E < M\}$.

Supposons que $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $Tu = \lambda u$, alors

$$\lambda M = \lambda \|u\| = \|Tu\|,$$

$$\lambda M = \max_{0\leq t\leq 1} |(Tu)(t)|,$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} \frac{t+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s)|f(t,s)|\,ds + \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^t (t-s)|f(t,s)|\,ds$$
$$+\max_{0\leq t\leq 1} \frac{\beta(t+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta-s)|f(t,s)|\,ds.$$

$$\lambda M \leq \left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right] \int_0^1 (1-s)|f(t,s)|\,ds$$
$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^1 (\eta-s)|f(t,s)|\,ds,$$

i.e,

$$\lambda M \leq \left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right] \int_0^1 (1-s)k(s)|u(s)|\,ds$$
$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta-s)k(s)|u(s)|\,ds$$
$$+\left[\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right] \int_0^1 (1-s)h(s)\,ds$$
$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta-s)h(s)\,ds.$$

Alors,

$$\lambda M \leq F \|u\| + G = FM + G.$$

Donc,

$$\lambda \leq F + \frac{G}{M} = F + \frac{G}{G(1-F)^{-1}} = F + (1-F) = 1,$$

ceci contredit $\lambda > 1$.

En appliquant *le Théorème* 2.8, nous disons que, l'opérateur T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$. Par conséquent le problème (2.1) a au moins une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$. ■

Théorème 3.3 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$, $\beta(\eta+\alpha) \neq (\alpha+1)$ *et qu'il existe deux fonctions positives* $k, h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Si une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) *Il existe une constante* $p > 1$ *telle que*

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds \leq \left[\frac{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|(1+q)^{\frac{1}{q}}}{(1+\alpha)\left(1+\beta\eta^{\frac{1}{q}}\right)+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\right]^p, \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

(2) *Il existe une constante* $\mu > -1$ *telle que*

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{(1+\alpha)(1+\beta\eta^{2+\mu})+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} s^\mu, \ \textit{p.p. } s \in [0,1].$$

(3) *Il existe une constante* $\mu > -1$ *telle que*

$$k(s) \leq$$

$$\frac{(1+\mu)(2+\mu)|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{2(1+\mu)[1+\alpha+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|]+\beta(1+\alpha)\left[1-(1-\eta)^{2+\mu}+\eta(2+\mu)\right]} \times$$

$$(1-s)^{\mu} \quad p.p. \ s \in [0,1] .$$

(4) *k vérifie*

$$k(s) \leq \frac{2\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}{(1+\alpha)\left(1+\beta\eta^2\right)+\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|} \quad p.p. \ s \in [0,1] .$$

(5) *f vérifie*

$$\omega = \lim_{|x|\to\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right| < \frac{1/2\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}{(1+\alpha)\left(1+\beta\eta^2\right)+\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}.$$

Alors, le problème aux limites (2.1) *admet au moins une solution non triviale* $u^* \in C[0,1]$.

Preuve. Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer que $F < 1$, *où*

$$F = \left[\frac{1+\alpha}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}+1\right]\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds +$$

$$\frac{\beta(1+\alpha)}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}\int_0^{\eta} (\eta-s)\,k(s)\,ds.$$

(1) En utilisant l'inégalité de *Hölder*, nous arrivons à

$$F \leq \left[\int_0^1 k(s)^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1+\alpha}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}+1\right)\left(\frac{1}{1+q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \frac{\beta(1+\alpha)}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}\left(\frac{\eta}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

$$F \leq \left[\int_0^1 k(s)^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1+\alpha}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|}+1\right)\frac{1}{(1+q)^{\frac{1}{q}}}\right.$$

$$\left. + \frac{\beta(1+\alpha)\,\eta^{\frac{1}{q}}}{\left|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)\right|(1+q)^{\frac{1}{q}}}\right],$$

ainsi

$$F\leq\left(\int_0^1 k\left(s\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{\frac{1}{q}}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\left(1+q\right)^{\frac{1}{q}}}\right).$$

Alors,

$$F\leq\frac{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\left(1+q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{\frac{1}{q}}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\times$$

$$\frac{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{\frac{1}{q}}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\left(1+q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Donc,

$$F\leq 1.$$

(2) Dans ce cas, nous avons

$$F\leq\frac{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{2+\mu}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\times$$

$$\left[\left(\frac{1+\alpha}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}+1\right)\frac{1}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{\beta\left(t+\alpha\right)}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}.\frac{\eta^{2+\mu}}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)}\right],$$

i.e,

$$F\leq\frac{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{2+\mu}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\times$$

$$\frac{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{2+\mu}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}=1.$$

(3) Dans ce cas, nous avons

$$F\leq\frac{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{2\left(1+\mu\right)\left[1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\right]+\beta\left(1+\alpha\right)\left[1-\left(1-\eta\right)^{2+\mu}+\eta\left(2+\mu\right)\right]}\times$$

$$\left[\left(\frac{1+\alpha}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}+1\right)\int_0^1\left(1-s\right)^{1+\mu}ds\right.$$

$$+\frac{\beta\left(1+\alpha\right)}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)\left(1-s\right)^{\mu}ds\right],$$

i.e,

$$F\leq\frac{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{2\left(1+\mu\right)\left[1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\right]+\beta\left(1+\alpha\right)\left[1-\left(1-\eta\right)^{2+\mu}\eta\left(2+\mu\right)\right]}\times$$

$$\left[\frac{1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\frac{2\left(1+\mu\right)}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta\left(1+\alpha\right)}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\frac{1-\left(1-\eta\right)^{2+\mu}+\left(2+\mu\right)\eta}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)}\right],$$

alors

$$F\leq\frac{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{2\left(1+\mu\right)\left[1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\right]+\beta\left(1+\alpha\right)\left[1-\left(1-\eta\right)^{2+\mu}+\eta\left(2+\mu\right)\right]}\times$$

$$\frac{2\left(1+\mu\right)\left[1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|\right]+\beta\left(1+\alpha\right)\left[1-\left(1-\eta\right)^{2+\mu}+\eta\left(2+\mu\right)\right]}{\left(1+\mu\right)\left(2+\mu\right)\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|},$$

$$F\leq1.$$

(4) Dans ce cas, nous avons

$$F\leq\frac{2\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{2}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\times$$

$$\left[\left(\frac{1+\alpha+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\right)\int_{0}^{1}\left(1-s\right)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta\left(1+\alpha\right)}{\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)ds\right],$$

donc

$$F\leq\frac{2\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}{\left(1+\alpha\right)\left(1+\beta\eta^{2}\right)+\left|\beta\left(\eta+\alpha\right)-\left(\alpha+1\right)\right|}\times$$

$$\left[\frac{1+\alpha+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{2|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+\frac{\beta(1+\alpha)\eta^2}{2|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\right],$$

alors

$$F \leq \frac{2|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{(1+\alpha)(1+\beta\eta^2)+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\times$$
$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta\eta^2)+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{2|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}$$

$$F \leq 1.$$

(5) Comme, $\omega = \lim_{|x|\to\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right|$ alors, il existe $c > 0$ tel que pour $|x| > c$, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ |f(t,x)| \leq (\omega+\epsilon)|x|.$$

Pour $t \in [0,1]$ posons

$$h(t) = \max_{-c\leq x\leq c} \{|f(t,x)|\},$$

choisissant $\epsilon = \omega$, alors

$$|f(t,x)| \leq 2\omega|x| + h(t),$$

i.e,

$$|f(t,x)| \leq \frac{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{(1+\alpha)(1+\beta\eta^2)+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}|x| + h(t),$$

prenons

$$k(t) = \frac{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}{(1+\alpha)(1+\beta\eta^2)+|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}.$$

Alors, le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$.

Ceci achève la preuve du *Théorème*. ■

Corollaire 3.1 *Supposons que* $f(t,0) \neq 0$, $\beta(\eta+\alpha) \neq (\alpha+1)$ *et il existe deux fonctions positives* k, $h \in (L^1[0,1], \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R},$$

Si une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) *Il existe une constante $p > 1$ telle que*

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds \leq \left[\frac{|(\beta-1)\alpha-1|(1+q)^{\frac{1}{q}}}{(1+\alpha)(1+\beta)+|(\beta-1)\alpha-1|}\right]^p, \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \quad \beta \neq 1.$$

(2) *Il existe une constante $\mu > -1$ telle que*

$$k(s) \leq \frac{(1+\mu)(2+\mu)|(\beta-1)\alpha-1|}{(1+\alpha)(1+\beta)+|(\beta-1)\alpha-1|}s^\mu \quad p.p.\ s \in [0,1], \quad \beta \neq 1.$$

(3) *k vérifie*

$$k(s) \leq \frac{2|(\beta-1)\alpha-1|}{(1+\alpha)(1+\beta)+|(\beta-1)\alpha-1|} \quad p.p.\ s \in [0,1], \quad \beta \neq 1.$$

(4) *f vérifie*

$$\lim_{|x|\to\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right| < \frac{\frac{1}{2}|(\beta-1)\alpha-1|}{(1+\alpha)(1+\beta)+|(\beta-1)\alpha-1|}, \quad \beta \neq 1.$$

Alors, le problème aux limites (2.1) *admet au moins une solution non triviale $u^* \in C[0,1]$.*

Preuve. Dans ce cas, nous avons

$$F = \left(\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}+1\right)\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds$$

$$+\frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|}\int_0^\eta (\eta-s)\,k(s)\,ds,$$

i.e,

$$F \leq \left(\frac{1+\alpha}{|\beta\alpha-(\alpha+1)|}+1\right)\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds + \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta\alpha-(\alpha+1)|}\int_0^1 (1-s)\,k(s)\,ds,$$

$$\leq \frac{(1+\alpha)(1+\beta) + |(\beta-1)\alpha - 1|}{|(\beta-1)\alpha - 1|} \int_0^1 (1-s)\, k(s)\, ds.$$

En procédant comme dans la preuve du *Théorème* 3.3 nous arrivons à terminer la démonstration de ce corollaire. ■

3.4 Application

Afin d'illustrer nos résultats, nous donnons quelques exemples.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites à troits points*

$$u'' + t^2 u \sin u - \cos e^t + 3\sin^2 t = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u(\eta). \tag{P_1}$$

Posons, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2$, $\eta = \frac{1}{2}$.

Nous avons

$$f(t,x) = t^2 x \sin x - \cos e^t + 3\sin^2 t,$$

nous pouvons choisir

$$\begin{cases} k(t) = t^2, \\ h(t) = \cos e^t + 3\sin^2 t. \end{cases}$$

$k,\ h \in L^1[0,1]$ *sont deux fonctions positives.*

1) Existence.

D'après le Théorème 3.2, *nous avons :* $k,\ h \in L^1[0,1]$ *telles que*

$$|f(t,x)| \leq t^2 |x| + \cos e^t + 3\sin^2 t,$$

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \qquad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

et

$$\left(\frac{1+\alpha}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} + 1\right) \int_0^1 (1-s)\, k(s)\, ds + \frac{\beta(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha)-(\alpha+1)|} \int_0^\eta (\eta - s)\, k(s)\, ds < 1.$$

Alors, le problème aux limites (P_1) *admet au moins une solution non-triviale* u^* *dans* E.

2) Unicité.

Nous avons

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq t^2 |x-y|,$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t) |x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

et

$$\frac{2(\beta+1)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s) k(s)\, ds < 1,$$

alors, d'après le Théorème 3.1 *le problème aux limites* (P_1) *a une solution unique dans* E.

Exemple 3.2 *Considérons le problème aux limites à troit points*

$$\begin{array}{c} u'' + \dfrac{2\sqrt{t}u^3}{3+u^4} e^{-\cos u} + \cos 3t - 2\sin e^t = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u(\eta). \end{array} \qquad (P_2)$$

Posons, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \sqrt{3}$, $\eta = \frac{1}{4}$, *et*

$$f(t,x) = \frac{2\sqrt{t}x^3}{3+x^4} e^{-\cos x} + \cos 3t - 2\sin e^t.$$

Nous avons

$$\left(\sqrt{3} - u^2\right)^2 \geq 0,$$

$$3 + u^4 \geq 2\sqrt{3}u^2,$$

alors

$$f(t,x) \leq \frac{2\sqrt{t}x^3}{2\sqrt{3}x^2} e^{-\cos x} + \cos 3t - 2\sin e^t,$$

$$f(t,x) \leq \sqrt{\frac{t}{3}} x e^{-\cos x} + \cos 3t - 2\sin e^t,$$

nous pouvons choisir

$$k(t) = \sqrt{\frac{t}{3}}, \quad h(t) = \cos 3t + 2\sin e^t.$$

Donc, $k,\ h \in L^1[0,1]$ *et*

$$|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t), \qquad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Supposons que : $p = q = 2$, *alors*

$$\int_0^1 k^p(s)\,ds \leq \left[\frac{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha-1)|\,(1+q)^{\frac{1}{q}}}{(1+\alpha)\left(1+\beta\eta^{\frac{1}{q}}\right) + |\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|}\right]^p.$$

Donc, d'après la condition (1) *du Théorème* 3.3*, le problème aux limites* (P_2) *admet au moins une solution non triviale* u^* *dans* E*.*

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes non linéaires. De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche. Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe et on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites du second ordre à trois points en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes de points fixes, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles une application
$f : E \to E$, admet un point fixe dans E.

Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Bibliographie

[1] R. Agarwal, M. Meechan, D. O'Regan, Fixed point theory and applications. Cambridge University Press, 141.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983

[3] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[4] A. Guezane-Lakoud, L. Zenkoufi, Positive solution of a three-point nonlinear boundary value problem for second order differential equations, Int. J. Appl. Math. Stat., (20), (2011), 38–46.

[5] C. P.Gupta, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation, J. Math.Anal. Appl. 168 (1992) 540-551.

[6] R. Ma, Positive solution of a nonlinear three point boundary value problem, E.J.D.E, (1998), 34, 1-8.

[7] Y-P. Sun, Nontrivial solution for a three-point boundary-value problem, E.J.D.E, Vol. 2004(2004), No. 111, 1-10. J. Math.Anal. Appl. 168(1992), 540–551.

[8] Zeidler, E., Nonlinear functional analysis and its applications, I.fixed-point theorems, Springer-Verlage, Berlin, 1993.

[9] R. G. Moorti and J. B. Garner, Existence-uniqueness theorems for three point boundary value problmes for nth-order nonlinear differential equations, J. Differential Equations 29 (1978), 205-213.