République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par : **BOUGUERRA Fatima**

Intitulé

Méthode de différence divisée pour les équations intégro-différentielles de volterra

Dirigé par : SEGNI Sami

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. EZZEBSA Abdellali	M.C.A Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. SEGNI Sami	M.C.B Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BENDJAZIA Nassima	M.C.B Univ-Guelma

Session juillet 2021

Table des matières

Remerciements

*En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes remerciements au bon "**Dieu**" qui nous a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.*

*Ensuite, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre encadreur Dr **Segni Sami** pour avoir accepté de nous suivre, et nos plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents.*

J'adresse également notre remerciement, à tous nos enseignants, qui nous ont donnée les bases de la science, nous remercions très sincèrement, les membres de jury pour nous avoir fait l'honneur d'évaluer notre travail.

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin à accpmplir ce travail je leur dis Merci.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné l'affection, tout la confiance et tout l'amour dont elle m'entoure la plus belle mère et le meilleur père dans ce monde, grâce à l'encouragement, son confiance et son soutien moral. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance.

A mon marié ***Kamel Zedadra*** *et mes enfants* ***Adem*** *et* ***Sajed****,*

A tout ma famille et amis pour leurs support et encouragement.

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle méthode d'approximation numérique pour traiter la solution unique de l'équation de Volterra intégro-différentielle non linéaire. Nous nous intéressons à une forme très particulière de cette équation, dans laquelle la dérivée de la solution recherchée apparaît sous le signe intégral de manière non linéaire. Notre vision est basée sur deux approches différentes : Nous utilisons la méthode de Nyström pour transformer l'intégrale en somme finie à l'aide d'une formule d'intégration numérique, puis nous utilisons la méthode de dérivée de différence finie en arrière pour approcher la dérivée de notre solution. Cette collocation entre deux méthodes différentes, le premier résultat du traitement numérique des équations intégrales et le second résultat du traitement numérique des équations différentielles, donne un nouveau système non linéaire pour aborder la solution de notre équation. Nous montrons que le système a une solution unique et que cette solution numérique converge parfaitement vers notre solution. Une section est dédiée aux tests numériques, dans laquelle nous montrons l'efficacité de notre nouvelle vision par rapport à deux méthodes basées uniquement sur l'intégration numérique.

Mots clés : équation intégro-différentielle de Volterra, équation non linéaire, point fixe, dérivée numérique, méthode de Nyström.

Abstract

In this research work, we propose a new numerical approximation method to deal with the unique solution of the nonlinear integro-differential Volterra equation. We are interested in a very particular form of this equation, in which the derivative of the sought solution appears under the integral sign in a nonlinear manner. Our vision is based on two different approaches : We use the Nystrom method to transform the integral into a finite sum using a numerical integration formula, then we use the numerical backward difference derivative method to approach the derivative of our solution. This collocation between two different methods, the first outcome of the numerical processing of integral equations and the second outcome of the numerical processing of differential equations, gives a new nonlinear system for approaching the solution of our equation. We show that the system has a unique solution and that this numerical solution converges perfectly to our solution. A section is dedicated to numerical tests, in which we show the effectiveness of our new vision compared to two methods based only on numerical integration.

keywords :Volterra Integro-differential equation ; Nonlinear equation ; Fixed point ; numerical derivative ; Nyström method.

Introduction

Les équations intégrales non linéaires de Volterra représentent un très grand intérêt pour la physique et la modélisation mathématique en tant que problèmes dépendant de l'histoire, théorie des systèmes, conduction thermique et diffusion [3, 10, 11, 12, 13]

L'étude analytique et numérique de son type non différentiel a été beaucoup étudiée [5, 6]. Dans cet mémoire, nous étudions un cas particulier de type équations intégro-différentielles : Pour trouver une fonction $f \in C^1(a,b)$donnée, une solution unique $u \in C^1(a,b)$ telle que

$$\forall t \in [a,b], \quad u(t) = \int_a^t K(t,s,u(s),u'(s))ds + f(t). \tag{1}$$

La particularité et l'intérêt de cette équation réside dans le fait que la dérivée de la solution apparaît sous le signe intégral de manière non linéaire. Les équations de ce type sont similaires à celles étudiées dans [5, 6], et nous pouvons considérer cette équation comme la version régulière de celle étudiée dans [8].

L'aspect analytique de cette équation a été étudié en détail par Guebbai et al[5]. Utilisons les hypothèses

$$(H)\left\|\begin{array}{ll} (H1) & \dfrac{\partial K}{\partial t} \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (H2) & \exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t,s \in [a,b],\ \forall x,y \in \mathbb{R}, \\ & \max\left(|K(t,s,x,y)|, \left|\dfrac{\partial K}{\partial t}(t,s,x,y)\right|\right) \leq M. \\ (H3) & \exists A, B, \overline{A}, \overline{B} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x,y,\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R},\ \forall t,s \in [0,T], \\ & |K(t,s,x,y) - K(t,s,\overline{x},\overline{y})| \leq A|x-\overline{x}| + B|y-\overline{y}|, \\ & |\dfrac{\partial K}{\partial t}(t,s,x,y) - \dfrac{\partial K}{\partial t}(t,s,\overline{x},\overline{y})| \leq \overline{A}|x-\overline{x}| + \overline{B}|y-\overline{y}| \\ (H4) & B < 1, \end{array}\right.$$

et le fait que

$$\forall t \in [a,b], \quad u'(t) = K(t,t,u(t),u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s))ds + f'(t), \quad (2)$$

les auteurs ont montré que l'équation a une solution unique $u \in C^1(a,b)$.

Dans le même article [5], ils utilisent la méthode de Nyström [3] pour construire une méthode d'approximation numérique représentée dans le système non linéaire suivant :

$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ h = \dfrac{b-a}{N},\ t_j = a + jh,\ 0 \le j \le N,$

$$\begin{aligned}
U_0 &= f(a), && (3)\\
\overline{U}_0 &= f'(a) + K(a,a,U_0,\overline{U}_0), && (4)\\
U_i &= f(t_i) + h\sum_{j=0}^{i} w_j K(t_i,t_j,U_j,\overline{U}_j), \quad 1 \le i \le N, && (5)\\
\overline{U}_i &= f'(t_i) + K(t_i,t_i,U_i,\bar{U}_i) + h\sum_{j=0}^{i} w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i,t_j,U_j,\overline{U}_j),\ 1 \le i \le N, && (6)
\end{aligned}$$

où, U_i approche $u(t_i)$, $\bar{U}_i$ approche $u'(t_i)$ et $\{w_j\}_{j=0}^N$ sont les poids d'un méthode d'intégration numérique appropriée, vérifiant :

$$\exists W > 0,\ \forall N \ge 1,\ \max_{0 \le j \le N} |w_j| \le W.$$

Mais, pour obtenir la convergence de ce schéma numérique, il leur fallait que $A < 1$ qui est une condition très restrictive.

Récemment, Segni et al[6] reprennent l'étude numérique de l'équation et proposent un nouveau schéma numérique qui ne converge que sous les hypothèses (H). Ils commencent par changer la variable u par la variable $v = u'$, qui transforme (2) en

$$\begin{aligned}
\forall t \in [a,b], \quad v(t) &= K\left(t,t,f(a) + \int_a^t v(s)ds, v(t)\right)\\
&+ \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}\left(t,s,f(a) + \int_a^s v(\tau)d\tau, v(s)\right) ds + f'(t).
\end{aligned}$$

Une fois la méthode Nyström appliquée, ils obtiennent le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned} V_0 &= f'(a) + K(a, a, f(a), V_0) && (7)\\ V_n &= f'(t_n) + K\left(t_n, t_n, f(a) + h\sum_{i=0}^{n} w_i V_i, V_n\right) \\ &+ h\sum_{i=0}^{n} w_i \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_n, t_i, f(a) + h\sum_{j=0}^{i} w_i V_i, V_i\right),\ 1 \leq n \leq N, && (8) \end{aligned}$$

où, V_n approche $v(t_n) = u'(t_n)$ et ils utilisent $f(a) + h\sum_{i=0}^{n} w_i V_i$ pour s'approcher

$$f\,(a) + \int_a^{t_n} v(s)ds = u(t_n).$$

Cette dernière méthode converge parfaitement sans avoir besoin de la condition supplémentaire $A < 1$.

Dans ce travail, nous proposons un nouveau schéma numérique complètement différent de ceux proposés dans [5] et [6], où nous appliquons la dérivée numérique en conjonction avec la méthode de Nyström. On sait d'ailleurs que la dérivée numérique est plus courante pour les équations aux dérivées partielles (EDP), mais ici nous donnons une nouvelle vision de la dérivée numérique pour aborder les équations intégro-différentielles. D'autre part, comme tous les travaux des chercheurs sont orientés vers la construction des conditions les plus faibles qui assurent la convergence de leurs méthodes, notre méthode proposée est également très efficace, puisque nous n'avons besoin que des hypothèses (H) pour confirmer sa convergence sans ajouter le condition restrictif $A < 1$.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappellons quelques résultats qui seront présentés sans démonstration, puisqu'ils font une partie integrante de notre formation.

Dans le deuxième chapitre,nous avons étudié notre équation intégro-différentielle de Volterra du deuxième espèce, alors sous ces conditions , nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la solution approchée par la méthode de Nyström.

Dans le troisème chpaitre, on a étudié numériquement notre équation intégro-différentielle, en utilisant la méthode de dérivée de différence finie en arrière et à la fin, nous fournissons quelques exemples numérique.

.

Chapitre 1

Rappels et Outils

Dans le chapitre 1, nous rappellons quelques résultats, plus ou moins classiques, à fin de démontrer la convergence des techniques numériques qu'on va construire dans la suite. Ce chapitre, est dédié à ces résultats. On va les cités et les démontrer sans entrer dans les détails et dans le sens dans lequel on va les utilisés aprés

1.1 Théoréme du point fixe de Banach

Soit $(X, \|.\|)$un espace de Banach, T une application définit de X sur lui même. Le théorème de Banach nous assure l'existence et l'unicité d'un point fixe x^*de T c-à-d $x^* = T(x^*)$.

Définition 1.1.1 *On dit que T est une* ***application lipschitzienne*** *si*

$$\exists k \succ 0, \forall x, y \in X, \|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Si $k < 1$, T est appellée **contraction.**

Théorème 1.1.1 *Si T est contractante, alors elle a un unique point fixe $x^* \in X$.*

De plus ,la suite

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = T(x_n); n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers x^* *et on a,*

$$\|x_n - x\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

Preuve. *Voir* [14] ■

1.2 Intégration Numérique

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.Dans cette section,on va rappellé les méthodes de Newton-côtes pour l'approximation numerique de l'intégrale suivante $\int_a^b f(t)\,dt$.

Pour $N \in \mathbb{N}$,on défine la subdivision suivante : $t_j = a + jh$,$0 \leq j \leq N$ et $h = \frac{b-a}{N}$.Les formules d'intégration numériques sont

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq h \sum_{i=0}^{N} w_i f(t_i),$$

où,les w_i sont des quantités positives appellés poids ,tel que $\max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$ fixe pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.1 *La méthode des trapézes est la méthode de quadrature qui a pour poids la suite suivante*

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{2}, \\ w_j = 1, 1 \leq j \leq N-1, \end{cases}$$

Cette méthode est celle qu'on va utiliser dans nos calcule numérique.On l' choisi puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la conditon de continuité uniquement . Contrairement à d'autre méthode,tel Simpson,qui exige plus de régularité

1.3 Théorème de Schauder

Dans cette section, nous rappelons le théorème de Schauder qui est le résultat qui assure l'existence des solutions des équations qui nous intéresses.

Il existe plusieurs version de ce théorème, celle qui nous intérrèsse est la suivante

Théorème 1.3.1 *Soint E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique séparé et C un ensemble convexe et fermé de E. Si T est une application continue de C dans C tel que $T(C)$ est relativement compact, alors T admet un point fixe.*
Preuve. *voir* [15] ■

1.4 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.4.1 *Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique complet.*

Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \forall y \in E, \ (d(x,y) \leq \eta) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$$

2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.
Preuve. *voir* [16] ■

1.5 Résultats important

Cette section est dédiée pour la démonstration des résultats trés importants pour la démonstration de convergence des méthodes numériques construites dans ce travail. On demande au lecteur de ne pas s'attarder dans l'utilité de ces résultats,qu'il verra dans la suite.

1.5.1 Lemme de majoration

Lemme 1.5.1 *soit $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$vérifiant*

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, n \in \mathbb{N},$$

où,

$$A > 0, |B_n| \geq B.$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1+A)^{n-1} (B + A |\xi_0|) \text{ , } n \geq 1.$$

Démonstration. On procéde par réccurence.soit

$$(p_n) =: |\xi_n| \leq (1+A)^{n+1} (B + A |\xi_0|) \text{ , } n \geq 1.$$

Pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned} (p_1) : |\xi_1| &\leq A |\xi_0| + B_1 \\ &\leq A |\xi_0| + B. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie jusque n,et on va démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} (p_{n+1}) : \left|\xi_{n+1}\right| &\leq A \sum_{i=0}^{n} |\xi_i| + B_{n+1} \\ &\leq A \sum_{i=1}^{n} (1+A)^{i+1} (B + A |\xi_0|) + B + A |\xi_0| \\ &\leq ((1+A)^n - 1) (B + A |\xi_0|) + B + A |\xi_0| \\ &\leq (1+A)^n (B + A |\xi_0|) \end{aligned}$$

1.5.2 Propriété de dérivation

Soit Ψ une fonction définie de $[a,b]^2$à image dans $\mathbb{R}$, tel que pour tout $s \in [a,b] \text{ , } \Psi(.,s) \in C^1(a,b)$. On defini la fonction suivante

$$\varphi(t) := \int_a^t \Psi(t,s)\, ds, t \in [a,b] \text{ .}$$

Proposition 1.5.1

$$\forall t \in [a,b] \text{ , } \quad \varphi'(t) = \Psi(t,t) + \int_a^t \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,s)\, ds.$$

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
\varphi^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{t+h}\psi(t+h,s)\,ds-\int_a^t\psi(t,s)\,ds}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{t}\psi(t+h,s)\,ds+\int_t^{t+h}\psi(t+h,s)\,ds-\int_a^t\psi(t,s)\,ds}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\psi(t+h,s)\,ds+\int_a^t\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h,s)\,ds-\psi(t,s)\,ds}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\psi(t+h,s)\,ds+\int_a^t\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s)\,ds
\end{aligned}
$$

Mais ,en utilisant le théoréme des accroissements finis ,il existe $\xi\in\,]0,h[$ tel que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Psi(t+h,s)\,ds=\Psi(t+h,t+\xi)\,.$$

On fait tendre h vers 0 pour optenir le résultat.

Chapitre 2

Équation Intégro-différentielle de Volterra

Par contre le chapitre deux est consacré à l'étude analytique de l'équation intégro-différentielle de Volterra du deuxième espèce avec un noyau régulier où, K est une fonction définie de $[a,b]^2 \times \mathbb{R}^2$ à image dans $\mathbb{R}$. On suppose que K vérifie les hypothéses suivantes

$$(H_3) \left\| \begin{array}{ll} 1) & K \in C\left([a,b]^2 \times \mathbb{R}^2\right), \\ 2) & \frac{\partial K}{\partial t} \in C\left([a,b]^2 \times \mathbb{R}^2\right), \\ 3) & \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall t,s \in [a,b], \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2, \\ & \max\left(|K(t,s,x,y)|, \left|\frac{\partial K}{\partial t}(t,s,x,y)\right|\right) \leq M. \end{array} \right.$$

Proposition 2.0.2 *Soit $f \in C^1(a,b)$. La fonctionelle*

$$\Phi(\cdot) := \int_a^t K(t,s,.,.)\,ds + f(t)$$

est définie sur $C^1([a,b])$ dans lui même.

Démonstration .
On met,pour tout $u \in C^1([a,b])$,

$$\bar{u}(t) := f(t) + \int_a^t K(t,s,u(s),u'(s))ds;$$

La continuité de $\bar{u}$ est classique et claire puisque cette fonction est somme de $f \in C^1([a,b])$. En appliquant la proposition 2, on obtient

$$\bar{u}'(t) := K(t,s,u(t),u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s))ds + f'(t).$$

Ce qui donne le résultat.

Soit l'éqution intégro-défférentielle non linéaire suivante :

$$\forall t \in [a,b], \qquad u(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,u(s),u'(s))ds; \qquad (3.1)$$

Où, $f \in C^1([a,b])$ et u est l'inconnu à chercher dans le même espace,

2.1 Existence de la solution

Nous allons démontrer qu'on peut trouver une solution de l'equation (3.1) ,mais sur un intervalle réduit.

Théorème 2.1.1 *Il existe r tel que l'equation* (3.1) *réduit à $[a, a+r]$ admet une solution $u \in C^1([a, a+r])$*

Démonstration. De la même façon due le chapitre 1, on montrer que la fonctionnelle Φ est continue sur $C^1([a, a+r])$ dans lui même.

Pour , $\rho > 0$ et $0 < r \leq \frac{\rho}{M}$, on définit l'ensemble suivant

$$F := \left\{ \begin{array}{c} u \in C(a,b) : u(a) = f(a),\ \forall t \in [a, a+r],\ |u(t) - f(t)| \leq \rho, \\ |u'(t) - f'(t)| \leq M + \rho \end{array} \right\}.$$

Il est claire que l'ensemble F est fermé et convexe. Pour tout $u \in F$ et tout $t \in [a, a+r]$

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)(a) &= f(a), \\
|\Phi(u)(t) - f(t)| &= \left| \int_a^t K(t,s,u(s),u'(s))\,ds \right|, \\
&\leq Mr, \\
&\leq \rho, \\
\left|\Phi(u)'(t) - f'(t)\right| &= \left| K(t,s,u(t),u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u(s),u'(s))\,ds \right|, \\
&\leq M + Mr, \\
&\leq M + \rho.
\end{aligned}
$$

Donc , $\Phi(F) \subset F$. Pour conclure en utilisant le théoréme de Schauder , il faut montrer que $\Phi(F)$ est relativement compact.

On a ,

$$
|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(x)| \leq \left(M + \rho + \max_{s\in[a,b]} |f'(s)| \right) |t - x|,
$$

Ce que donne le résultat par une application directe du théorème d'Arzla-Ascoli

2.2 Extension de la solution

L'idée de l'extension de notre solution est basée sur l'écriture suivante

$$
u(t) = \int_{a+r}^t K(t,s,u(s),u'(s))\,ds + F(t)
$$

Où,

$$
F(t) = \int_a^{a+r} K\left(t,s,\tilde{u}(s),\tilde{u}'(s)\right) ds + f(t)
$$

$\tilde{u} \in C^1([a,a+r])$ est la solution obtenue dans la première étape.

Cette nouvelle équation admet une unique solution $u \in C^1([a+r, a+2r])$. Il suffit de coller les deux solution $\tilde{u}$ et u pour obtenir une solution sur $[a, a+2r]$.

Nous reprenons ce procédé un nombre de fois fini jusqu'à atteindre b et obtenir une solution unique sur $[a, b]$.

2.3 Unicité de la solution

Sous les hyothéses $(H3)$, on n'arrive pasà démontrer l'unicité de la soiution . Donc ,on rajoute les hypothéses supplimentaires suivantes

Contrairement au chapitre précédent les conditions $(H3)$ n'assurent pas l'existence de la solution .Donc ,on rajoute les hypothéses suivantes

$$(H4) \left\| \begin{array}{ll} (1) & \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [0, T], \\ & |K(t,s,x,y) - K(t,s,\bar{x},\bar{y})| \leq A|x-\bar{x}| + B|y-\bar{y}|, \\ & \left|\frac{\partial K}{\partial t}(t,s,x,y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,\bar{x},\bar{y})\right| \leq \bar{A}|x-\bar{x}| + \bar{B}|y-\bar{y}|, \\ (2) & B < 1 \end{array} \right.$$

Théorème 2.3.1 *la solution de* (3.1) *est unique*

Démonsration. Soient $u, v \in C^1[a, b]$ deux solutions de l'equation (3.1).
On met :

$$\gamma(t) := |v(t) - u(t)| + |v'(t) + u'(t)|.$$

On a :

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &\leq \max(c\ d) \int_a^t \gamma(s)\, ds \\ (1-d)|v'(t) - u'(t)| &\leq a|v(t) - u(t)| + \max(\bar{c}, \bar{d}) \int_a^t \gamma(s)\, ds \end{aligned}$$

Alors,il existe p positive tel que

$$\gamma(t) \leq p \int_a^t \gamma(s)\, ds$$

En appliquant le lemme 1,
on obtient

$$v(t) = u(t)$$

Alors on obtient que l'equation (3.1) ademt une unique solution.

Chapitre 3

Méthode de collocation différence fini-Trapèze

Le chapitre 03 représente l'essentiel de notre travail, on a étudié numériquement notre équation intégro-différentielle. En uttilisant la méthode de dérivée de différence fini classique en arrière.

3.1 Méthode d'approximation numérique (ancienne méthode)

Nous construisons notre technique numérique pour aborder la solution de l'équation (1) basée sur deux principes numériques usuels, le premier est la méthode Nyström paser sur l'intégration numérique [1,3] et la seconde est la dérivée numérique [3]. Pour cela, nous définissons la subdivision suivante :

$$t_j = a + jh, \ 0 \leq j \leq N \quad \text{où}, \quad h = \frac{b-a}{N} \quad \text{et}, \quad N \geq 1.$$

La formule de l'intégration numérique est donnée par :

$$\int_a^b \xi(t)dt \simeq h \sum_{j=0}^{N} w_j \xi(t_j).$$

Où, $\{w_j\}_{0 \leq j \leq N}$ sont réels et vérifiez la condition suivante

$$\exists W > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W.$$

Et nous utilisons une dérivée numérique appelée différence fini en arriére, définie par la formule :

$$\xi'(t_j) \approx \frac{\xi(t_j) - \xi(t_j - h)}{h} = \frac{\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})}{h}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

En appliquant ces principes numériques sur les équations (1), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
U_0 &= f(a), && (3.1)\\
V_0 &= f'(a) + K(a, a, U_0, V_0), && (3.2)\\
U_i &= f(t_i) + hw_0 K(t_i, t_0, U_0, V_0) + h\sum_{j=1}^{i} w_j K\left(t_i, t_j, U_j, \frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right), \quad 1 \leq i \leq N, && (3.3)\\
V_i &= \frac{U_i - U_{i-1}}{h}, \ 1 \leq i \leq N, && (3.4)
\end{aligned}$$

où, U_i approches $u(t_i)$ et V_i approches $u'(t_i)$. Nous pouvons voir que nous n'avons utilisé que l'équation (1) pour trouver U_i et V_i pour $1 \leq i \leq N$, où il est facile de montrer selon les hypothèses (H) que l'équation (3.3) a une solution unique U_i, et la solution V_i est donné directement à partir de la relation (3.4). Dans la première, nous essayons d'approcher la deuxième équation étudiée dans [5] en utilisant cette méthode.

$$u(t) = \int_0^t \frac{k(t)(s+1)}{5 + (u(s) + u'^2} ds + t - \frac{k(t)}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \ln\left(\sqrt{6}\right) k(t), \quad t \in [0, 1],$$

où

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(t - t^2\right), & t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(t^2 - t\right), & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Et la solution exacte est $u(t) = t$. Nous désignons l'erreur obtenue en utilisant la nouvelle méthode par :

$$E_N = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \left|u(t_0) - U_0\right| + \left|u'(t_0) - V_0\right|, \left|u(t_i) - U_i\right| + \left|u'(t_i) - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right| \right\},$$

Le table 1 nous montre que notre méthode est **instable** car on manque d'information puisque nous avons utilisé uniquement l'équation (1)

Table 1. Example 1 of paper [5]

N	Error in [5]	E_N
200	3.75E-4	2.72E-2
300	2.51E-4	2.73E-2
500	1.51E-4	2.73E-2
1000	7.55E-4	2.74E-2
1500	5.04E-5	2.74E-2

Pour trouver les solutions U_i et V_i .

Pour cela , nous devons utiliser plus d'informations sur la dérivée u'. Les informations seront constuit en appliquant une nouvelle fois la méthode de Nyström sur l'équation (2) qui représente u' en fonction de $K, \frac{\partial K}{\partial t}$ et f. La section suivante est dêdiée à l'étude de cette nouvelle méthode.

3.2 Construction de la nouvelle méthode (nouvelle méthode)

Dans cette section, nous construisons notre technique numérique pour aborder la solution de l'équation (1) basée sur deux principes numériques usuels, le premier est la méthode Nyström basée sur l'intégration numérique [1, 3] et la seconde est la méthode des différences finies basée sur la dérivée numérique [1]. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la subdivision suivante :

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_j = a + jh, \ 0 \leq j \leq N.$$

La formule de l'intégration numérique est donnée par :

$$\forall \xi \in C\left(a,b\right), \ \int_a^b \xi(t)dt \simeq \tilde{T}\left(\xi,h\right) = \frac{h}{2}\xi(t_0) + h\sum_{j=1}^{N}\xi(t_j),$$

qui peut être appelée méthode de trapéze modifiée.

Et nous utilisons la dérivée numérique suivante, appelée différence finie en arrière, pour approcher la dérivée de notre solution

$$\xi'(t_j) \approx \frac{\xi(t_j) - \xi(t_j - h)}{h} = \frac{\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})}{h}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

En appliquant ces deux principes numériques aux équations (1) et (2), on obtient le nouveau système

$$
\begin{aligned}
U_0 &= f(a), && (3.5)\\
V_0 &= f'(a) + K(a, a, U_0, V_0), && (3.6)\\
U_i &= f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0, V_0) \\
&+ h \sum_{j=1}^{i} K\left(t_i, t_j, U_j, \frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right), \quad 1 \le i \le N, && (3.7)\\
V_i &= f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, V_i) + \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, U_0, V_0) \\
&+ h \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j), \ 1 \le i \le N, && (3.8)
\end{aligned}
$$

où, U_i approche $u(t_i)$ et V_i approche $u'(t_i)$ pour $1 \le i \le N$.

Notre intérêt est d'étudier le système (3.5)-(3.8) : Nous montrons qu'il est bien défini et converge vers la solution de l'équation (1). Des exemples numériques sont développés pour montrer son efficacité par rapport aux systèmes (3)-(6) et (7)-(8).

3.2.1 Etude du système

Dans le théorème suivant, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de notre nouveau système discret en utilisant uniquement les hypothèses (H).

Théorème 1. *Pour h suffisamment petit et sous les hypothèses (H) , le système (1.1)-(1.4) a une solution unique.*

Preuve. En premier, nous avons $U_0 = f(a)$, et en utilisant le point fixe de Banach, il est clair que l'équation (3.6) a une solution unique V_0.

Nous définissons $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq N$ et $X \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned}
\psi_i(X) &= f(t_i) + hK\left(t_i, t_i, X, \frac{X - U_{i-1}}{h}\right) + h\sum_{j=1}^{i-1} K\left(t_i, t_j, U_j, \frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right) \\
&+ \frac{h}{2}K(t_i, t_0, U_0, V_0), \\
\phi_i(X) &= f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, X) + h\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, U_i, X) + h\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) \\
&+ \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, U_0, V_0).
\end{aligned}$$

Nous avons pour tout $X, Y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\psi_i(X) - \psi_i(Y)| &\leq \left| hK\left(t_i, t_i, X, \frac{X - U_{i-1}}{h}\right) - hK\left(t_i, t_i, Y, \frac{Y - U_{i-1}}{h}\right)\right| \\
&\leq \left(h(A + \frac{B}{h})\right)|X - Y| = (hA + B)\,|X - Y|\,.
\end{aligned}$$

Alors, pour h suffisamment petit, $(hA + B) < 1$, donc ψ_i est une contraction et en utilisant le point fixe de Banach on obtient que (3.7) a une solution unique U_i.

De la même manière, nous obtenons pour tout $X, Y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_i(X) - \phi_i(Y)| &\leq |K(t_i, t_i, U_i, X) - K(t_i, t_i, U_i, Y)| \\
&+ h\left|\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, U_i, X) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, U_i, Y)\right| \\
&\leq \left(B + h\overline{B}\right)|X - Y|\,.
\end{aligned}$$

Aussi, pour h suffisamment petit, $\left(B + h\overline{B}\right) < 1$, donc ϕ_i est une contraction et en utilisant le point fixe de Banach on obtient que (3.8) a une solution unique V_i. □

3.2.2 Analyse de l'erreur

Maintenant, nous montrons que la solution obtenue à partir de notre nouveau système numérique converge vers la solution exacte de l'équation (1). Comme nous avons approché $u'(t_i)$ deux fois, par V_i et en utilisant sa formule de dérivée de différence numérique en arrière, pour cela, nous définissons pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^1 &= u(t_i) - U_i, \\
\varepsilon_i^2 &= u'(t_i) - V_i, \\
\varepsilon_i^3 &= u'(t_i) - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}, \\
\varepsilon_i &= \left|\varepsilon_i^1\right| + \left|\varepsilon_i^2\right| + \left|\varepsilon_i^3\right|.
\end{aligned}$$

Or, on dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \leq i \leq N} (\left|\varepsilon_i^1\right| + \left|\varepsilon_i^2\right|) = 0,$$

cela a été démontré dans [5, 6]. Dans cet article, nous montrons que

$$\lim_{h \to 0} (\max_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i) = 0.$$

Ce qui rend notre nouvelle méthode plus précise et plus efficace.

Pour des raisons techniques, nous définissons des erreurs de cohérence locale, pour $i \geq 1$ et $\xi \in C^1(a, b)$, par :

$$\begin{aligned}
\delta_K(h, t_i, \xi) &= \int_a^{t_i} K(t_i, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \\
&- \frac{h}{2} K(t_i, t_0, \xi(t_0), \xi'(t_0)) - h \sum_{j=1}^{i} K(t_i, t_j, \xi(t_j), \xi'(t_j)), \\
\delta_{K_t}(h, t_i, \xi) &= \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \\
&- \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, \xi(t_0), \xi'(t_0)) - h \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, \xi(t_j), \xi'(t_j)),
\end{aligned}$$

Il est clair que notre méthode numérique est cohérente avec (1), i. e.

$$\forall \xi \in C^1(a, b), \quad \lim_{h \to 0} (\max_{1 \leq i \leq N} \{|\delta_K(h, t_i, \xi)|, |\delta_{K_t}(h, t_i, \xi)|\}) = 0.$$

En effet, il suffit de montrer que notre méthode de trapéz modifiée est convergente. On rappelle que la formule de trapéz classique est donnée pour $N \geq 1$ par

$$\forall \xi \in C(a,b), \quad T(\xi,h) = \frac{h}{2}\xi(t_0) + h\sum_{j=1}^{N-1}\xi(t_j) + \frac{h}{2}\xi(t_N),$$

et sachant que

$$\forall \xi \in C(a,b), \quad \lim_{h\to 0}\left|\int_a^b \xi(s)ds - T(\xi,h)\right| = 0,$$

on peut en conclure que pour tout $\xi \in C(a,b)$,

$$\lim_{h\to 0}\left|\int_a^b \xi(s)ds - \tilde{T}(\xi,h)\right| \leq \lim_{h\to 0}\left|\int_a^b \xi(s)ds - T(\xi,h)\right| + \lim_{h\to 0}\frac{h}{2}|\xi(b)| = 0.$$

Théorème 2.

$$\lim_{h\to 0}(\max_{1\leq i\leq N}\varepsilon_i) = 0.$$

Preuve. Pour $i \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^1 &= \int_a^{t_i} K(t_i,s,u(s),u'(s))ds - \frac{h}{2}K(t_i,t_0,U_0,V_0) - h\sum_{j=1}^{i}K\left(t_i,t_j,U_j,\frac{U_j-U_{j-1}}{h}\right), \\
&= \int_a^{t_i} K(t_i,s,u(s),u'(s))ds - \frac{h}{2}K(t_i,t_0,U_0,V_0) - h\sum_{j=1}^{i}K(t_i,t_j,u(t_j),u'(t_j)) \\
&+ h\sum_{j=1}^{i}K(t_i,t_j,u(t_j),u'(t_j)) - h\sum_{j=1}^{i}K\left(t_i,t_j,U_j,\frac{U_j-U_{j-1}}{h}\right) \\
&+ \frac{h}{2}K(t_i,t_0,u(t_0),u'(t_0)) - \frac{h}{2}K(t_i,t_0,U_0,V_0).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition précédente de l'erreur de cohérence locale, les hypothèses (H) et les égalités $u(t_0) = U_0, u'(t_0) = V_0$ on obtient pour h suffisamment petit et $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i^1| &\leq |\delta_K(h,t_i,u)| + hA\sum_{j=1}^{i}|\varepsilon_j^1| + hB\sum_{j=1}^{i}\left|\varepsilon_j^3\right|, \\
|\varepsilon_i^1| &\leq \frac{|\delta_K(h,t_i,u)|}{1-hA} + \frac{hA}{1-hA}\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^1| + \frac{hB}{1-hA}\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^3\right| + \frac{hB}{1-hA}\left|\varepsilon_i^3\right|. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient pour h assez petit et $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i^2| &\leq \frac{|\delta_{K_t}(h,t_i,u)|}{1-(B+h\overline{B})} + \frac{A+h\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})}|\varepsilon_i^1| + \frac{h\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})}\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^1| \\
&+ \frac{h\overline{B}}{1-(B+h\overline{B})}\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^2|. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Maintenant pour estimer la quantité $\left|u'(t_i) - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right|$, nous commençons par :

$$\begin{aligned}
\frac{U_i - U_{i-1}}{h} &= \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h} + \frac{h}{2}\frac{K(t_i,t_0,U_0,V_0) - K(t_{i-1},t_0,U_0,V_0)}{h} \\
&+ K\left(t_i,t_i,U_i,\frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right) \\
&+ h\sum_{j=1}^{i-1}\frac{K\left(t_i,t_j,U_j,\frac{U_j-U_{j-1}}{h}\right) - K\left(t_{i-1},t_j,U_j,\frac{U_j-U_{j-1}}{h}\right)}{h}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $K(t,s,x,y)$ est différentiable par aport t, alors pour h assez petit, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{U_i - U_{i-1}}{h} &\approx f'(t_i) + \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i,t_0,U_0,V_0) + K\left(t_i,t_i,U_i,\frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right) \\
&+ h\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial K}{\partial t}\left(t_i,t_j,U_j,\frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i^3 &= \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s))ds - \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, u(t_0), u'(t_0)) - h\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\
&+ h\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) - h\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial K}{\partial t}\left(t_i, t_j, U_j, \frac{U_j - U_{j-1}}{h}\right) \\
&+ \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, u(t_0), u'(t_0)) - \frac{h}{2}\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, U_0, V_0) \\
&+ h\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) + K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) - K\left(t_i, t_i, U_i, \frac{U_i - U_{i-1}}{h}\right), \\
\left|\varepsilon_i^3\right| &\leq \frac{|\delta_{K_t}(h, t_i, u)|}{1-B} + \frac{h\overline{A}}{1-B}\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^1\right| + \frac{h\overline{B}}{1-B}\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^3\right| + \frac{M}{1-B}h + \frac{A}{1-B}\left|\varepsilon_i^1\right|. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Remplacement de (3.11) dans (3.9), pour obtenir pour h assez petit et $i \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_i^1| &\leq \alpha_1 \frac{|\delta_K(h, t_i, u)|}{1-hA} + \alpha_1 \frac{B|\delta_{K_t}(h, t_i, u)|}{(1-B)(1-hA)} + \\
&\alpha_1\left(\frac{h^2 B\overline{A}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hA}{1-hA}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^1| + \qquad (3.12) \\
&+ \alpha_1\left(\frac{h^2 B\overline{B}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hB}{1-hA}\right)\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^3\right| + \frac{\alpha_1 MB}{(1-B)(1-hA)}h^2, \qquad (3.13) \\
\alpha_1 &= \left(1 - \frac{hAB}{(1-B)(1-hA)}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

et (3.13) dans (3.10), pour obtenir pour h assez petit et $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i^2| &\leq \alpha_1\alpha_2 \frac{|\delta_K(h,t_i,u)|}{1-hA} + \left(\frac{1}{1-(B+h\overline{B})} + \frac{\alpha_1\alpha_2 B}{(1-B)(1-hA)}\right)|\delta_{K_t}(h,t_i,u)| \\
&+ \left(\frac{h\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})} + \alpha_1\alpha_2\left(\frac{h^2 B\overline{A}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hA}{1-hA}\right)\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^1| \\
&+ \left(\frac{h\overline{B}}{1-(B+h\overline{B})}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^2| \\
&+ \alpha_1\alpha_2\left(\frac{h^2 B\overline{B}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hB}{1-hA}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^3| \\
&+ \frac{\alpha_1\alpha_2 MB}{(1-B)(1-hA)}h^2, \qquad (3.14) \\
\alpha_2 &= \frac{A+h\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})}.
\end{aligned}$$

Enfin, on remplace (3.13) dans (3.11), pour obtenir pour h assez petit et $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon_i^3\right| &\leq \alpha_1\alpha_3 \frac{|\delta_K(h,t_i,u)|}{1-hA} + \left(\frac{1}{1-B} + \frac{\alpha_1\alpha_3 B}{(1-B)(1-hA)}\right)|\delta_{K_t}(h,t_i,u)| \\
&+ \left(\frac{h\overline{A}}{1-B} + \alpha_1\alpha_3\left(\frac{h^2 B\overline{A}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hA}{1-hA}\right)\right)\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^1\right| \\
&+ \left(\frac{h\overline{B}}{1-B} + \alpha_1\alpha_3\left(\frac{h^2 B\overline{B}}{(1-B)(1-hA)} + \frac{hB}{1-hA}\right)\right)\sum_{j=1}^{i-1}\left|\varepsilon_j^3\right| \\
&+ \frac{\alpha_1\alpha_3 MB}{(1-B)(1-hA)}h^2 + \frac{M}{1-B}h, \qquad (3.15) \\
\alpha_3 &= \frac{A}{1-B}.
\end{aligned}$$

Maintenant selon les équations (3.13), (3.14) et (3.15) on obtient :

$$\varepsilon_i \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3}{1-hA}|\delta_K(h,t_i,u)|$$

$$+\left(\frac{1}{1-B} + \frac{1}{1-(B+h\overline{B})} + \frac{(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)B}{(1-B)(1-hA)}\right)|\delta_{K_t}(h,t_i,u)|$$

$$+\left(\frac{h\overline{A}}{1-B}+\frac{h\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})}+\frac{h^2B\overline{A}(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}\right.$$

$$\left.+\frac{hA(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{1-hA}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^1|+\left(\frac{h\overline{B}}{1-(B+h\overline{B})}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^2|$$

$$+\left(\frac{h\overline{B}}{1-B}+\frac{h^2B\overline{B}(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}+\frac{hB(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{1-hA}\right)\sum_{j=1}^{i-1}|\varepsilon_j^3|$$

$$+\frac{MB(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}h^2+\frac{M}{1-B}h.$$

Puis,

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &\leq h\gamma\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j+\left(\frac{1}{1-B}+\frac{1}{1-(B+h\overline{B})}+\frac{(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)B}{(1-B)(1-hA)}\right)|\delta_{K_t}(h,t_i,u)|\\ &+\frac{\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3}{1-hA}|\delta_K(h,t_i,u)|+\frac{MB(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}h^2+\frac{M}{1-B}h,\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}\gamma &:= \max\left(\frac{\overline{A}}{1-B}+\frac{\overline{A}}{1-(B+h\overline{B})}+\frac{hB\overline{A}(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}+\frac{A(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{1-hA}\right.\\ &\left.,\frac{\overline{B}}{1-(B+h\overline{B})},\frac{\overline{B}}{1-B}+\frac{hB\overline{B}(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}+\frac{B(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{1-hA}\right).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème 7.1 de [3], nous obtenons

$$\varepsilon_i\leq(1+h\gamma)^{i-1}\delta,$$

où,

$$\begin{aligned}\delta &:= \max_{1\leq j\leq i}\left(\left(\frac{1}{1-B}+\frac{1}{1-(B+h\overline{B})}+\frac{(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)B}{(1-B)(1-hA)}\right)|\delta_{K_t}(h,t_j,u)|\right.\\ &\left.,\frac{\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3}{1-hA}|\delta_K(h,t_j,u)|,\frac{MB(\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)}{(1-B)(1-hA)}h^2,\frac{M}{1-B}h\right).\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$(1+h\gamma)^{i-1}\leq\left(1+\frac{(b-a)\gamma}{N}\right)^N,$$

et

$$\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{(b-a)\gamma}{N}\right)^N<+\infty.$$

Alors, $\exists\theta>0$ tel que

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \max_{1\le i\le N}(1+h\gamma)^{i-1}\le\theta.$$

ce qui termine la démonstration.

A la fin de ce chapitre , nous fournissons quelques exemples numériques développés, montrent son efficacité de cette nouvelle méthode. □

3.3 Résultats numériques

Dans cette section, pour montrer l'efficacité de notre méthode, nous construisons deux exemples numériques. Comme discrétisation, nous utilisons la méthode de trapéz, et nous mentionnons que les termes U_i et V_i ne sont pas calculés exactement, mais ils sont abordés en utilisant la méthode d'itération de Banach à partir de nos systèmes (3.7) et (3.8), avec la condition d'arrêt suivante :

$$\|X_{new}-X_{old}\|\le 10^{-7}$$

avec un nombre d'itérations qui ne dépasse pas 1000. Pour comparer les méthodes, nous désignons l'erreur en utilisant notre méthode (3.5)-(3.8) par :

$$E_1=\max_{0\le i\le N}\left\{|u(t_i)-U_i|+|u'(t_i)-V_i|\right\},$$

et par E_2, E_3 les erreurs obtenues lorsque nous utilisons les méthodes décrites respectivement dans [5], [6].

Exemple 1. Dans le premier exemple, nous considérons l'équation suivante :

$$u(t)=\int_0^t\frac{se^{-\alpha u^2(s)}}{2+t+u'(s)^2}ds+f(t),\alpha>0,t\in[0,1],$$

où,

$$f(t)=t-\frac{1}{3+t}\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t^2}\right).$$

TAB. 3.1 – Example 1 : Numerical results with $\alpha = e$

N	E_1	E_2	E_3
200	2.64E-4	3.01E-3	2.97E-3
300	1.76E-4	2.10E-3	1.98E-3
500	1.05E-4	1.05E-3	1.19E-3
1000	5.29E-5	6.05E-4	5.95E-4
1500	3.53E-5	4.21E-4	3.96E-4

TAB. 3.2 – Example 1 : Numerical results with $\alpha = 8e$

N	E_1	E_2	E_3
200	1.07E-4	6.22E+1	3.04E-3
300	7.15E-5	6.34E+1	2.03E-3
500	4.30E-5	6.33E+1	1.22E-3
1000	2.15E-5	6.42E+1	6.04E-4
1500	1.43E-5	6.36E+1	4.06E-4

La solution exacte est donnée par $u(t) = t$. Le noyau de cet exemple satisfait (H) avec le paramètre :

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{2e}}.$$

Nous remarquons que lorsque $\alpha = e$, qui assure $A < 1$, notre méthode est meilleure que celles développées en [5] et [6]. Mais, quand on voitt $\alpha = 8e$ qui donne $A > 1$, la méthode (3)-(6) diverge, contrairement à notre nouvelle méthode qui est plus rapide que (7)-(8).

Exemple 2. Dans le deuxième exemple, nous considérons l'équation suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \cos\left(|t-2s|\,(t-2s) + e^s - \alpha u(s) + u'(s)\right) ds + f(t), \alpha > 0, t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Si nous prenons $\alpha = 1$, et

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(FerS\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - FerS\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right)\right)\right. \\ &- \left.\cos\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(FerC\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - FerC\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\sin(t^2) + te^t - 4t^2 - 8t - 8, \end{aligned}$$

on a,

$$u(t) = 4t^2 + 8t + 8 - te^t.$$

Nous rappelons que $FerC$ et $FerS$ désignent respectivement la fonction intégrale de cosinus de Fresnel et la fonction intégrale de sinus de Fresnel. Le noyau de cet exemple satisfait (H) avec le paramètre :

$$A = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Mais si nous prenons $\alpha = 10$, et

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(FerS\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - FerS\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right)\right)\right. \\ &- \left.\cos\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(FerC\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}t\right) - FerC\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\right)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\sin(t^2) - \frac{1}{9}e^t - \left(\frac{2}{5}t^2 + \frac{2}{25}t + \frac{1}{125}\right), \end{aligned}$$

on a,

$$u(t) = \frac{1}{9}e^t + \left(\frac{2}{5}t^2 + \frac{2}{25}t + \frac{1}{125}\right).$$

dans ce cas,

$$A = \frac{5}{\pi}.$$

On obtient le même comportement ci-dessus des trois méthodes quand on fait varier le paramètre A.

Tab. 3.3 – Example 2 : Numerical results with $\alpha = 1$

N	E_1	E_2	E_3
200	3.46E-4	7.55E-4	7.95E-4
300	1.53E-4	3.21E-4	3.54E-4
500	1.23E-4	1.09E-4	1.25E-4
1000	4.32E-5	9.62E-5	8.25E-5
1500	2.23E-5	6.15E-5	5.42E-5

Tab. 3.4 – Example 2 : Numerical results with $\alpha = 10$

N	E_1	E_2	E_3
200	5.12E-4	7.63E+1	8.05E-4
300	3.09E-4	7.57E+1	3.33E-4
500	9.36E-5	7.48E+1	1.12E-4
1000	3.52E-5	7.34E+1	8.52E-5
1500	1.98E-5	7.28E+1	5.51E-5

Première partie

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons construit une nouvelle méthode numérique pour aborder la solution d'une équation de Volterra non linéaire intégro-différentielle, basée sur la dérivée numérique de la différence fini.

En pratique, la dérivée numérique est utilisée uniquement pour les équations déférentielles partielles (EDP), mais en appliquant cette technique numérique à notre équation intégro-différentielle, nous avons construit un système approximatif simple et clair, plus efficace que ceux étudiés dans [5] et [6].

En perspective, selon la simplicité de notre méthode, nous étudierons comment appliquer cette idée numérique à d'autres types d'équations différentielles integro, comme les équations de Fredholm [7] ou les équations à noyau faiblement singulier [8], aussi l'équation intégro-différentielle d'ordre supérieur [9]

Bibliographie

[1] K.Atkinson .,W. Han . *Theoretical numerical analysis : A functional analysis framework*, New York : Springer, 2009. https ://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4

[2] T.Sato . Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra, *Compositio Mathematica*, 1953, vol. 11, pp. 271–290. http ://www.numdam.org/item/ ?id=CM_1953__11__271_0

[3] Linz P. *Analytical and numerical methods for Volterra equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. https ://doi.org/10.1137/1.9781611970852

[4] Brunner H. The numerical treatment of Volterra integro-differential equations with unbounded delay, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1989, vol. 28, pp. 5–23. https ://doi.org/10.1016/0377-0427(89)90318-X

[5] Guebbai H., Aissaoui M. Z., Debbar I., Khalla B. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 229, pp. 367–373. https ://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.046

[6] Segni S., Ghiat M., Guebbai H. New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation, *Asian-European Journal of Mathematics*, 2019, vol. 12, no. 1, 1950016.
https ://doi.org/10.1142/S1793557119500165

[7] Pachpatte B. G. On Fredholm type integrodifferential equation, *Tamkang Journal of Mathematics*, 2008, vol. 39, no. 1, pp. 85–94. https ://doi.org/10.5556/j.tkjm.39.2008.48

[8] Ghiat M., Guebbai H. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation with weakly singular kernel, *Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 37, issue 4, pp. 4661–4674. https ://doi.org/10.1007/s40314-018-0597-3

[9] Pachpatte B. G. On higher order Volterra–Fredholm integro-differential equation, *Fasciculi Mathematici*, 2007, no. 37, pp. 35–48. http ://www.math.put.poznan.pl/artykuly/FM37_Pachpatte-wyd02.pdf

[10] Dareiotis K. On finite difference schemes for partial integro-differential equations of Lévy type, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, vol. 368, 112587.
https ://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112587

[11] Behera S., Saha Ray S. An operational matrix based scheme for numerical solutions of nonlinear weakly singular partial integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 367, 124771. https ://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124771

[12] Rajagopal N., Balaji S., Seethalakshmi R., Balaji V. S. A new numerical method for fractional order Volterra integro-differential equations, *Ain Shams Engineering Journal*, 2020, vol. 11, issue 1, pp. 171–177. https ://doi.org/10.1016/j.asej.2019.08.004

[13] Xu D. Analytical and numerical solutions of a class of nonlinear integro-differential equations with L^1 kernels, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2020, vol. 51, 103002.
https ://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.103002

[14] F.Boyer.Equations différentielles ordinaires, version du 13 décembre 2015, Chapiter 2 page 49.

[15] Eberhard Zeidler, P.R. Wadsack . Nonlinear Functional Analysis and its Applications : I : Fixed-Point Theorems

[16] J. W. Green and F. A. Valentine . Mathematics Magazine Vol. 34, No. 4 (Mar. - Apr., 1961), pp. 199-202 (4 pages) Published By : Taylor & Francis, Ltd.

[17] H. Guebbai ; S.Lemita ; S.Segni ; W.Merchela . Mathematics 2020.Vol.30.Issue 2.. Pp . 176-188 DOI : 10.35634/vm200203