

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

**Et analyse numérique**

Par :

**M<sup>r</sup>. SINDJONBA CAMUS**

## **Intitulé**

**Systeme d'équations intégrales non linéaires de  
Volterra-Fredholm**

Dirigé par :

**Dr. BELHIRECHE Hanane**

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Dr. HAMPLAOUI Hamid  
Dr. BELHIRECHE Hanane  
Dr. GHIAT Mourad**

**MCA Univ-Guelma  
MCB Univ-Guelma  
MCB Univ-Guelma**

**Session Juillet 2021**

# Remerciements

Je remercie en tout premier lieu Dieu tout puissant de m'avoir donné l'opportunité, la volonté et le courage de rédiger ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur Mme HANANE BELHIRECHE, pour son grand cœur, sa disponibilité, ses précieux conseils et son travail acharné qui a permis l'établissement de ce mémoire.

J'exprime également ma reconnaissance envers les membres du Jury qui ont accepté de présider et d'avoir un regard examinateur sur mon travail.

Je remercie également toute ma famille, mes parents, mes frères et sœurs, mes familles pour leur soutien moral, leur encouragement ; le corps enseignant du département de l'université 8 Mai 1945 pour l'enseignement promulgué et les encouragements durant mes années d'études. ainsi que toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à l'élaboration de ce travail.

# Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'équations intégrales non linéaires de Volterra-Fredholm. Nous considérons un système de deux équations non linéaires accouplées et l'objectif c'est de montrer l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de la méthode de Picard. En outre, nous cherchons à construire une méthode numérique pour résoudre le système basée sur la méthode d'intégration de Nyström.

A la fin, un exemple numérique est construit pour vérifier la convergence et l'efficacité de la méthode choisie.

**Mots clés :** Equation intégrale de Volterra, équation intégrale de Fredholm, méthode de Nyström, méthode des trapèzes.

# Abstract

In this work, we are interested to the study of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. We consider a system of two coupled nonlinear equations and the objective is to show the existence and the uniqueness of the solution using the Picard method. In addition, we seek to build a numeral method to solve the system based on the Nysström method. At the end, a numeral example is built to check the convergence and the efficiency of the chosen method.

**Key words :** Volterra integral equation, Fredholm integral equation, Nysström method, trapezoidal method.

# Table des matières

<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Classification des équations intégrales . . . . .	6
1.1.1 Equations intégrales de Fredholm . . . . .	7
1.1.2 Equations intégrales de Volterra . . . . .	7
1.1.3 Equations intégrales singulières . . . . .	8
1.1.4 Equations intégréo-différentielles . . . . .	8
<b>2 Rappel des notions fondamentales</b>	<b>10</b>
2.1 Notions d'analyse fonctionnelle . . . . .	10
2.1.1 Théorème de point fixe de Banach . . . . .	10
2.2 Notions d'analyse numérique . . . . .	12
2.2.1 Méthode d'approximation de Nysström . . . . .	12
2.2.2 Méthode des trapèzes . . . . .	12
<b>3 Système d'équations intégrales non linéaires mixtes</b>	<b>15</b>
3.1 Etude analytique . . . . .	16
3.2 Etudes numériques . . . . .	21
3.2.1 Etude du système . . . . .	22
3.2.2 Analyse de l'erreur . . . . .	25
<b>4 Résultats numériques</b>	<b>29</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les équations intégrales sont utilisées dans plusieurs domaines de mathématiques, de la physique mathématique, des problèmes de contacts et de l'astrophysique.

La théorie des équations intégrales est la théorie la plus répandue en mathématiques pures et appliquées, elle apparaît dans l'étude de nombreux problèmes physiques. Beaucoup de modèles mathématiques engendrés par des équations différentielles ordinaires(EDO) et aux dérivées partielles(EDP), peuvent être transformés en problème de résolution de certaines équations intégrales approximatives.

**J. Fourier(1768-1830)** fut le premier mathématicien qui a introduit ce genre d'équation intégrale dû au fait qu'il a obtenu la formule de leurs transformations.

En 1837, **J. Liouville(1809-1882)** a publié un article sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles linéaires, dans lequel, il a montré qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvant une équation intégrale.

En 1887, **V. Volterra(1860-1940)** a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégral-différentielles et aux équations intégrales singulières. **Fredholm(1866-1927)** a proposé des méthodes pour résoudre les équations intégrales de seconde espèce.

Une forme typique d'une équation intégrale en  $u(t)$  est donnée par :

$$\varphi(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k(t, s)u(s)ds \quad (1.1)$$

où  $k(t, s)$  est appelé noyaux de l'équation (1.1),  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  sont les limites de l'intégration. On peut facilement constater que la fonction inconnue  $u(t)$  apparaît sous le signe intégrale. Il est à noter que les fonctions  $k(t, s)$ ,  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$  sont données et  $\lambda$  est un paramètre constant.

## 1.1 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme une équation intégrale linéaire ou non linéaire. Les équations intégrales les plus fréquemment rencontrées relèvent de deux grandes classes, à savoir les équations intégrales de Volterra et de Fredholm. Bien-sûr, nous devons les classer comme homogène ou non homogène, ainsi que linéaire ou non linéaire. Dans certains problèmes pratiques, nous rencontrons également des équations singulières.

De cela, nous pouvons conclure que la classification des équations intégrales se présente sous trois caractéristiques de base décrivant leur structure globale à savoir :

*i)* L'espèce d'une équation est relative à l'emplacement de la fonction inconnue. En effet, pour les équation de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement sous le signe intégrale. Cependant pour les équations de seconde espèce, elle apparaît également à l'extérieur du signe intégrale.

*ii)* La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans le cas d'une équation de Fredholm, les bornes sont fixés, tandis que dans le cas d'une équation de Volterra, elles sont indéfinies ;

*iii)* Une équation intégrale est dite singulière si l'intervalle d'intégration est impropre, ou si l'une des bornes d'intégration au moins est infinies. De même si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, ainsi que si le noyau est singulière ou bien discontinu.

Nous distinguons quatre(4) types d'équations d'intégrales, à savoir :

- équations intégrales de Volterra ;
- équations intégrales de Fredholm ;
- équations intégrales-différentielle ;
- équations intégrales singulières.

### 1.1.1 Equations intégrales de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégrations sont fixées est une équation intégrale linéaire de Fredholm, dont

$$\varphi(t)u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)u(s)ds \quad t \in [a, b]. \quad (1.2)$$

- Si  $\varphi(t) = 1$ , l'équation s'écrit :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)u(s)ds \quad t \in [a, b]$$

et elle est dite non homogène de seconde espèce.

- Si  $\varphi(t) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)u(s)ds = 0 \quad t \in [a, b]$$

et elle est dite non homogène de première espèce.

- Si  $\varphi(t)$ , est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de  $[a, b]$ , elle est dite non homogène de troisième espèce.

- Si  $f(t) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$u(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)u(s)ds \quad t \in [a, b]$$

et elle est dite homogène.

### 1.1.2 Equations intégrales de Volterra

Les équations intégrales de Volterra de première, de seconde espèce, ou homogène sont définies de la même façon que l'équation intégrale de Fredholm sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c'est-à-dire que  $b = t$ . Aussi, notons qu'une équation intégrale de Volterra de première espèce peut être transformée en une équation intégrale de seconde espèce par dérivation de la manière suivante :

Soit :

$$\int_a^t k(t, s)u(s)ds = f(t) \quad t \in [a, b]$$

alors

$$k(t, t)u(t) + \int_a^t \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} u(s) ds = f'(t)$$

si  $k(t, t) \neq 0$ , on peut diviser les deux côtés de cette égalité par  $k(t, t)$ , on obtient donc

$$u(t) + \int_a^t \frac{k_t(t, s)}{k(t, t)} u(s) ds = \frac{f'(t)}{k(t, t)}$$

où  $k_t(t, s) = \frac{\partial k(t, s)}{\partial t}$ .

**Remarque 1.1.1** Si la fonction inconnue  $u(t)$ , apparaissant sous le signe d'intégrale, est donnée sous la forme fonctionnelle  $F(u(t))$ , tel que  $F$  est une fonction non linéaire, alors les équations intégrales de Fredholm et Volterra sont classées comme des équations intégrales non linéaires.

En général, l'équation intégrale non linéaire s'écrit sous la forme :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s) F(u(s)) ds \quad t \in [a, b] \quad (1.3)$$

### 1.1.3 Equations intégrales singulières

Une équation intégrale est dite singulière si l'une des bornes d'intégrations au moins est infinie et de même lorsque le noyau est non borné sur l'intervalle donné. Les exemples suivants :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(s) ds;$$

$$f(t) = \int_a^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} u(s) ds, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

représentent des équations intégrales singulières.

### 1.1.4 Equations intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle est une équation composée de deux opérations intégrale et différentielle, dont la fonction inconnue est  $u$ .

La forme générale d'une équation intégral-différentielle non linéaire d'ordre  $n$  est donnée par :

$$u^{(n)}(t) = f(t) + \lambda \int k(t, s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s)) ds \quad t \in E \quad (1.4)$$

où  $u$  l'inconnue à chercher dans  $\mathcal{C}^n([0, T])$  et  $f$  définie dans le même espace. Si les limites de l'intégration sont définies, alors on parle de l'équation intégral-différentielle de Fredholm et si elles sont indéfinies, alors on parle de l'équation intégral-différentielle de Volterra.

# Chapitre 2

## Rappel des notions fondamentales

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques résultats d'analyse fonctionnelle et d'analyse numérique, qui nous permettront de faire l'étude analytique et numérique des différents types d'équations intégrales.

### 2.1 Notions d'analyse fonctionnelle

#### 2.1.1 Théorème de point fixe de Banach

Soit  $(B, \|\cdot\|)$  un espace de Banach ; on définit d'application  $f$  de  $B$  dans  $B$ . Le théorème de Banach nous permet de prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe  $x^*$  de  $f$  tel que :

$$x^* = f(x^*) \tag{2.1}$$

.

**Définition 2.1.1**  $f$  est dite *Lipchitzienne* si :

$$\exists k > 0, \forall x, y \in B, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Si  $0 < k < 1$ , alors  $f$  est dite *contractante*.

**Théorème 2.1.1**  $f$  admet un unique point fixe  $x^* \in B$  si elle est contractante. De plus, nous avons la suite récurrente :

$$\begin{cases} x_0 \in B \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui converge vers  $x^*$  et vérifie la majoration suivante :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

**Démonstration 1** Nous montrons tout d'abord l'existence du point fixe en considérant la suite récurrente :

$$\begin{cases} x_0 \in B \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

On commence par montrer que cette suite est de Cauchy et que sa limite est une solution de (2.1). Dans un espace de Banach, toute suite de Cauchy est convergente, ce qui signifie que la limite existe. Notons que

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq \dots \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

En général, si  $n > m$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m)\| \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \dots + k^m) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \dots) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} \|x_1 - x_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{(n,m) \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ . Par conséquent, la suite  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dont on notera la limite  $x^*$ .

Il reste à montrer que  $x^*$  est une solution de l'équation (2.1).

Comme  $f$  est continue, alors

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Ensuite montrons l'unicité de ce point. Faisons un raisonnement par l'absurde, en supposant qu'il existe deux points fixes  $x^*$  et  $y^*$  tel que  $f(x^*) = x^*$  et  $f(y^*) = y^*$  alors :

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq k\|x^* - y^*\| \\ \Rightarrow \|x^* - y^*\| &\leq k\|x^* - y^*\| \\ \Rightarrow (1-k)\|x^* - y^*\| &\leq 0 \end{aligned}$$

or  $k > 0$ , d'où  $\|x^* - y^*\| = 0$ , ce qui signifie que  $x^* = y^*$ .  
D'où l'unicité du point fixe.

## 2.2 Notions d'analyse numérique

### 2.2.1 Méthode d'approximation de Nysström

Soient  $a < b$  deux réels et  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  continue. On définit la méthode de Nysström qui donne l'approximation numérique de l'intégrale suivant :

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  est  $t_j = a + jh$ ,  $0 \leq j \leq n$

et  $h = \frac{b-a}{n}$

Les formules d'intégrations numériques sont données par :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{j=0}^n w_j f(t_j) \quad (2.2)$$

où les poids  $w_j$  sont positifs, tels que

$$\max_{0 \leq j \leq n} |w_j| = W < \infty$$

### 2.2.2 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes représente un cas particulier de la méthode de quadrature où les poids sont données par la suite suivante :

$$\begin{cases} w_0 = w_n = \frac{1}{2} \\ w_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n-1, \end{cases}$$

ce qui donne

$$I = \int_a^b f(t)dt \simeq T_n = \frac{h}{2}f(t_0) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) + \frac{h}{2}f(t_n). \quad (2.3)$$

Cette méthode est celle que nous allons utiliser dans nos calculs numériques. Nous l'avons choisit puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement. Contrairement, à d'autres méthodes, telle que Simpson, qui exige plus de régularité.

**Théorème 2.2.1** Si  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I - T_n(f)| = 0.$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de rappeler la méthode d'interpolation polynômiale par morceaux. En effet, soit  $\{t_j\}_{j=1}^n$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ , on définit la suite de fonctions  $\{e_j\}_{j=1}^n$  par

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour  $2 \leq j \leq n - 1$  et

$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & t \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'interpolant polynômiale par morceaux d'ordre 1 d'une fonction  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  est donné par

$$\forall t \in [a, b] \quad P_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) e_j(t).$$

On définit également le module de continuité de  $f$  par

$$w_0(f, h) = \max_{|s-t| \leq h, a \leq s, t \leq b} |f(s) - f(t)|.$$

Comme  $f$  est une fonction continue alors  $w_0(f, h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0.

**Démonstration du théorème 2.2.1** Un simple calcul nous montre que  $\forall n \geq 1$ ,

$$T_n(f) = \int_a^b P_{n,1}[f](t) dt$$

où  $P_{n,1}$  est l'interpolant polynômiale par morceaux d'ordre 1 de la fonction  $f$  correspondant à la subdivision  $\{t_j\}_{j=1}^n$ .

En outre, on a  $\forall t \in [a, b]$ ,

$$P_{n,1}[f](t) = f(t_j)(1 - \alpha_j(t)) + f(t_{j+1})\alpha_j(t)$$

où

$$\alpha_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}$$

ce qui donne pour tout  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ,

$$P_{n,1}[f](t) - f(t) = (f(t_j) - f(t))(1 - \alpha_j(t)) + (f(t_{j+1}) - f(t))\alpha_j(t)$$

donc

$$\sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(f, h_n)$$

où

$$h_n = \max_{1 \leq j \leq n-1} (t_{j+1}, t_j)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |I - T_n(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_{n,1}[f](t)) dt \right| \\ &\leq (b - a)w_0(f, h_n) \end{aligned}$$

et comme  $h_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, le résultat est démontré.

# Chapitre 3

## Systeme d'equations integrales non lineaires mixtes

Dans ce chapitre, nous allons presenter le resultat principal de notre travail.

Nous nous interessons a l'etude du systeme d'equations integrales non lineaires de Volterra-Fredholm de la forme suivante :

$$\begin{cases} \lambda_1 u(t) = f_1(t) + \int_a^t p_1(t, s) \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \\ \lambda_2 v(t) = f_2(t) + \int_a^t p_2(t, s) \int_a^b K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \end{cases} \quad (3.1)$$

ou  $f_1, f_2$  sont des fonctions donnees appartenant a  $C^0([a, b])$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ , et  $(u, v)$  est l'inconnue a chercher dans l'espace  $C^0([a, b]) \times C^0([a, b])$ .

$p_1$  et  $p_2$  sont definies sur  $[a, b]^2$  a image dans  $\mathbb{R}$  et verifient :

$$(H_1) \left\| \begin{array}{l} p_1 \in C^0([a, b]^2), \quad p_2 \in C^0([a, b]^2) \\ \exists \quad M_1, M_2 > 0 \text{ tel que, } \forall t, s \in [a, b], \\ |p_1(t, s)| \leq M_1 \text{ et } |p_2(t, s)| \leq M_2 \end{array} \right.$$

En outre,  $K_1$  et  $K_2$  sont definies par :

$$\begin{aligned} K_1 : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \theta, u, v) &\longmapsto K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) \\ K_2 : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \theta, u, v) &\longmapsto K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) \end{aligned}$$

et vérifient les hypothèses suivantes :

$$(H_2) \left\| \begin{array}{l} K_1, K_2 \in \mathcal{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2) \\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \text{ tel que } , \forall s, \theta \in [a, b], \forall X, Y, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{R}, \\ |K_1(s, \theta, X, Y) - K_1(s, \theta, \bar{X}, \bar{Y})| \leq \alpha_1 |X - \bar{X}| + \beta_1 |Y - \bar{Y}| \\ |K_2(s, \theta, X, Y) - K_2(s, \theta, \bar{X}, \bar{Y})| \leq \alpha_2 |X - \bar{X}| + \beta_2 |Y - \bar{Y}| \end{array} \right.$$

L'objectif de notre travail est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution  $(u, v)$  du système (3.1) et puis de construire une méthode numérique pour l'approcher.

### 3.1 Etude analytique

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution  $(u, v)$  du système (3.1), on utilise la méthode de Picard (voir [3]) qui est basée sur la construction des suites  $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{v_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{\sigma_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et de montrer qu'elles convergent.

Soient les points  $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$ , tel que, pour  $0 \leq i \leq n$  et pour  $t \in [T_i, T_{i+1}]$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifient :

$$(H3) \left\| \begin{array}{l} |\lambda_1|^{-1} M_1 \max(\alpha_1, \beta_1) (T_{i+1} - T_i) (t - T_i) \leq \rho_1 < \frac{1}{2} \\ |\lambda_2|^{-1} M_2 \max(\alpha_2, \beta_2) (T_{i+1} - T_i) (t - T_i) \leq \rho_2 < \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Les suites  $\{u_n(t)\}$  et  $\{v_n(t)\}$  sont définies par les formules suivantes :

$$u_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} f_1(t) & \forall t \in [T_0, T_1] \\ \frac{1}{\lambda_1} f_1(T_1) & \forall t \in ]T_1, b] \end{cases}$$

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_1 u_n(t) = \begin{cases} f_1(t) + \int_a^t p_1(t, s) \int_a^b K_1(s, \theta, u_{n-1}(\theta), v_{n-1}(\theta)) d\theta ds & \forall t \in [T_0, T_1] \\ f_1(T_1) & \forall t \in ]T_1, b] \end{cases}$$

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} f_2(t) & \forall t \in [T_0, T_1] \\ \frac{1}{\lambda_2} f_2(T_1) & \forall t \in ]T_1, b] \end{cases}$$

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_2 v_n(t) = \begin{cases} f_2(t) + \int_a^t p_2(t, s) \int_a^b K_2(s, \theta, u_{n-1}(\theta), v_{n-1}(\theta)) d\theta ds & \forall t \in [T_0, T_1] \\ f_2(T_1) & \forall t \in ]T_1, b]. \end{cases}$$

On définit également les suites  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{\sigma_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t) & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \varphi_0(t) = u_0(t) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \sigma_n(t) = v_n(t) - v_{n-1}(t) & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sigma_0(t) = v_0(t) \end{cases}$$

ce qui donne,  $\forall t \in [a, T_1]$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t) \\ \sum_{i=0}^n \sigma_i(t) = v_n(t) \end{cases}$$

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution  $(u, v)$  du système (3.1) est donné dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Supposons que les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  sont vérifiées alors le système (3.1) admet une unique solution  $(u, v) \in \mathcal{C}^0([a, b] \times \mathcal{C}^0([a, b])$*

**Démonstration 2** : Soit  $t \in [T_0, T_1]$  on a,

$$|\lambda_1| |\varphi_n(t)| = |\lambda_1| |u_n(t) - u_{n-1}(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_a^t p_1(t, s) \int_a^b (K_1(s, \theta, u_{n-1}(\theta), v_{n-1}(\theta)) - K_1(s, \theta, u_{n-2}(\theta), v_{n-2}(\theta))) d\theta ds \right| \\
&\leq \int_a^t |p_1(t, s)| \int_a^b |K_1(s, \theta, u_{n-1}(\theta), v_{n-1}(\theta)) - K_1(s, \theta, u_{n-2}(\theta), v_{n-2}(\theta))| d\theta ds \\
&\leq M_1 \int_a^t \left( \int_a^{T_1} (\alpha_1 |u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)| + \beta_1 |v_{n-1}(\theta) - v_{n-2}(\theta)|) d\theta \right. \\
&\quad \left. + \int_{T_1}^b (\alpha_1 |u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)| + \beta_1 |v_{n-1}(\theta) - v_{n-2}(\theta)|) d\theta \right) ds \\
&\leq M_1 \int_a^t \left( \int_a^{T_1} (\alpha_1 |u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)| + \beta_1 |v_{n-1}(\theta) - v_{n-2}(\theta)|) d\theta \right. \\
&\quad \left. + \int_{T_1}^b (|f_1(T_1) - f_1(T_1)| + |f_2(T_1) - f_2(T_1)|) d\theta \right) ds \\
&\leq M_1 \int_a^t \int_a^{T_1} (\alpha_1 |u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)| + \beta_1 |v_{n-1}(\theta) - v_{n-2}(\theta)|) d\theta ds \\
&\leq M_1 \max(\alpha_1, \beta_1) (t - a) \max_{a \leq \theta \leq T_1} (|u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)| + |v_{n-1}(\theta) - v_{n-2}(\theta)|) (T_1 - a) \\
&\leq M_1 \max(\alpha_1, \beta_1) (t - a) (T_1 - a) (\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_{n-1} - v_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])})
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t)| &\leq \rho_1 (\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_{n-1} - v_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])}) \\
&\leq \rho_1 (\|\varphi_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])})
\end{aligned}$$

Par le même procédé, on trouve

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(t)| &\leq \rho_2 (\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_{n-1} - v_{n-2}\|_{C^0([a, T_1])}) \\
&\leq \rho_2 (\|\varphi_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])}).
\end{aligned}$$

On note par  $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ , on obtient

$$\|\varphi_n\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_n\|_{C^0([a, T_1])} \leq 2\rho (\|\varphi_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_{n-1}\|_{C^0([a, T_1])})$$

Ce qui donne

$$\|\varphi_n\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_n\|_{C^0([a, T_1])} \leq (2\rho)^n (\|\varphi_0\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_0\|_{C^0([a, T_1])})$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} (\|\varphi_i\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_i\|_{C^0([a, T_1])}) &\leq (\|\varphi_0\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_0\|_{C^0([a, T_1])}) \sum_{i=0}^{\infty} (2\rho)^i \\
&\leq \frac{1}{1 - 2\rho} (\|\varphi_0\|_{C^0([a, T_1])} + \|\sigma_0\|_{C^0([a, T_1])})
\end{aligned}$$

Donc  $\sum_{i=0}^{\infty} (\|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])} + \|\sigma_i\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])})$  est convergente. Par conséquent,  $\{u_n(t)\}$  et  $\{v_n(t)\}$  sont uniformément convergentes vers  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{C}^0([a, T_1])$  et on écrit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_i(t) = u(t)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sigma_i(t) = v(t)$$

Pour montrer que  $(u(t), v(t))$  est la solution du système de (3.1), on pose

$$u(t) = \begin{cases} u_n(t) + \Delta_n(t) & t \in [a, T_1] \\ \frac{1}{\lambda_1} f_1(T_1) & t \in ]T_1, b] \end{cases}$$

et

$$v(t) = \begin{cases} v_n(t) + \bar{\Delta}_n(t) & t \in [a, T_1] \\ \frac{1}{\lambda_2} f_2(T_1) & t \in ]T_1, b] \end{cases}$$

alors, pour  $t \in [a, T_1]$ , on a

$$\begin{aligned} & \left| u(t) - \frac{1}{\lambda_1} f_1(t) - \frac{1}{\lambda_1} \int_a^t p_1(t, s) \int_a^{T_1} K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \right| \\ &= \left| \Delta_n(t) + u_n(t) - \frac{1}{\lambda_1} f_1(t) - \frac{1}{\lambda_1} \int_a^t p_1(t, s) \int_a^{T_1} K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \right| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + |\lambda_1|^{-1} \int_a^t |p_1(t, s)| \int_a^{T_1} |k_1(s, \theta, u_{n-1}(\theta), v_{n-1}(\theta)) - k_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta))| d\theta ds \\ &\leq |\Delta_n(t)| + |\lambda_1|^{-1} M_1 \int_a^t \int_a^{T_1} (\alpha_1 |u_{n-1}(t) - u(\theta)| + \beta_1 |v_{n-1} - v(\theta)|) d\theta ds \\ &\leq |\Delta_n(t)| + |\lambda_1|^{-1} M_1 \max(\alpha_1, \beta_1) (t - a) (T_1 - a) (\|\Delta_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])} + \|\bar{\Delta}_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])}) \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \rho_1 (\|\Delta_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])} + \|\bar{\Delta}_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])}). \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} & \left| v(t) - \frac{1}{\lambda_2} f_2(t) - \frac{1}{\lambda_2} \int_a^t p_2(t, s) \int_a^{T_1} K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \right| \\ &\leq |\bar{\Delta}_n(t)| + \rho_2 (\|\Delta_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])} + \|\bar{\Delta}_{n-1}\|_{\mathcal{C}^0([a, T_1])}) \end{aligned}$$

or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta_n\|_{C^0([a, T_1])} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{\Delta}_n\|_{C^0([a, T_1])} = 0,$$

alors  $(u, v)$  est la solution du système (3.1) sur  $[a, T_1]$ .

Pour démontrer l'unicité de la solution  $(u, v)$  sur  $[a, T_1]$ , on suppose qu'il existe deux solutions  $(u_1(t), v_1(t))$  et  $(u_2(t), v_2(t))$  du système (3.1) sur  $[a, T_1]$  avec  $u_1(t) = u_2(t)$  et  $v_1(t) = v_2(t)$   $t \in ]T_1, b]$ .

alors,  $\forall t \in [a, T_1]$ , on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_1| |u_1(t) - u_2(t)| &= \left| \int_a^t p_1(t, s) \int_a^{T_1} (k_1(s, \theta, u_1(\theta), v_1(\theta)) - k_1(s, \theta, u_2(\theta), v_2(\theta))) d\theta ds \right| \\ &\leq \int_a^t |p_1(t, s)| \int_a^{T_1} |k_1(s, \theta, u_1(\theta), v_1(\theta)) - k_1(s, \theta, u_2(\theta), v_2(\theta))| d\theta ds \\ &\leq M_1 \int_a^t \int_a^{T_1} (\alpha_1 |u_1(\theta) - u_2(\theta)| + \beta_1 |v_1(\theta) - v_2(\theta)|) d\theta ds \\ &\leq M_1 \max(\alpha_1, \beta_1) (t - a) (T_1 - a) (\|u_1 - u_2\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_1 - v_2\|_{C^0([a, T_1])}) \\ \Rightarrow |u_1(t) - u_2(t)| &\leq \rho_1 (\|u_1 - u_2\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_1 - v_2\|_{C^0([a, T_1])}). \end{aligned}$$

Par le même procédé, on obtient

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq \rho_2 (\|u_1 - u_2\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_1 - v_2\|_{C^0([a, T_1])})$$

Par conséquent,

$$\|u_1 - u_2\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_1 - v_2\|_{C^0([a, T_1])} \leq 2\rho (\|u_1 - u_2\|_{C^0([a, T_1])} + \|v_1 - v_2\|_{C^0([a, T_1])})$$

avec  $\rho < \frac{1}{2}$ , cette inégalité n'est vraie que si  $u_1(t) = u_2(t)$  et  $v_1(t) = v_2(t)$ , pour tout  $t \in [a, T_1]$ .

Maintenant, on désigne par  $(u^0, v^0)$  la solution obtenue dans la première étape sur  $[T_0, T_1]$  et on définit par

$$\begin{aligned} \bar{u}^0(t) &= \begin{cases} u^0(t) & t \in [T_0, T_1] \\ u^0(T_1) & t \in ]T_1, b] \end{cases} \\ \bar{v}^0(t) &= \begin{cases} v^0(t) & t \in [T_0, T_1] \\ v^0(T_1) & t \in ]T_1, b] \end{cases} \end{aligned}$$

Pour  $t \in [T_1, T_2]$ , on écrit le système (3.1) sous la forme

$$\begin{cases} \lambda_1 u^1(t) = F_1(t) + \int_{T_1}^t p_1(t, s) \int_{T_0}^{T_n} K_1(s, \theta, u^1(\theta), v^1(\theta)) d\theta ds \\ \lambda_2 v^1(t) = F_2(t) + \int_{T_1}^t p_2(t, s) \int_{T_0}^{T_n} K_2(s, \theta, u^1(\theta), v^1(\theta)) d\theta ds \end{cases}$$

où

$$F_1(t) = f_1(t) + \int_a^{T_1} p_1(t, s) \int_a^b K_1(s, \theta, \bar{u}^0(\theta), \bar{v}^0(\theta)) d\theta ds$$

et

$$F_2(t) = f_2(t) + \int_a^{T_1} p_2(t, s) \int_a^b K_2(s, \theta, \bar{u}^0(\theta), \bar{v}^0(\theta)) d\theta ds.$$

On remarque que ce système est le même système que (3.1) avec l'origine  $T_1$ , on peut alors appliquer les mêmes étapes précédentes; ce qui nous permet d'obtenir la solution  $(u^1, v^1)$  sur  $[T_1, T_2]$ . On définit

$$u(t) = \begin{cases} u^0(t) & \text{dans } [T_0, T_1] \\ u^1(t) & \text{dans } [T_1, T_2]; \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} v^0(t) & \text{dans } [T_0, T_1] \\ v^1(t) & \text{dans } [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est clair que  $(u, v) \in \mathcal{C}^0([T_0, T_2]) \times \mathcal{C}^0([T_0, T_2])$  et elle est l'unique solution du système (3.1) dans  $[T_0, T_2]$ .

En répétant le même procédé sur un nombre fini de sous-intervalle dans  $[a, b]$ , on peut ainsi construire l'unique solution dans  $\mathcal{C}^0([a, b]) \times \mathcal{C}^0([a, b])$

## 3.2 Etudes numériques

Pour construire une approximation numérique de la solution  $(u, v)$  du système (3.1), on utilise les méthode numériques basées sur l'approximation de l'intégrale. On considère une subdivision  $\{t_i\}_{i=0}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de l'intervalle  $[a, b]$  avec  $t_i = a + ih$  et  $h = \frac{b-a}{n}$ .

On applique la méthode de Nysström, introduite dans le chapitre 2, pour l'approximation des intégrales qui apparaissent dans le système (3.1), on a

$$\begin{cases} \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta \simeq h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) \\ \int_a^b K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta \simeq h \sum_{k=0}^n w_k K_2(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \simeq \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) \left[ h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) \right] ds \\ \int_a^{t_i} p_2(t_i, s) \int_a^b K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \simeq \int_a^{t_i} p_2(t_i, s) \left[ h \sum_{k=0}^n w_k K_2(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) \right] ds \end{array} \right. \\
&\quad \simeq \left\{ \begin{array}{l} h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u(t_k), v(t_k)) \\ h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_2(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_2(t_j, t_k, u(t_k), v(t_k)) \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t_i) = \frac{1}{\lambda_1} \left[ f_1(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u(t_k), v(t_k)) \right] \\ v(t_i) = \frac{1}{\lambda_2} \left[ f_2(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_2(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_2(t_j, t_k, u(t_k), v(t_k)) \right] \end{array} \right.
\end{aligned}$$

on note par  $u_i = u(t_i)$  on récupère le système suivant :  
pour  $1 \leq i \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \frac{1}{\lambda_1} \left[ f_1(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) \right] \\ v_i = \frac{1}{\lambda_2} \left[ f_2(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_2(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_2(t_j, t_k, u_k, v_k) \right] \end{array} \right. \quad (3.2)$$

avec

$$u_0 = \frac{1}{\lambda_1} f_1(t_0)$$

et

$$v_0 = \frac{1}{\lambda_2} f_2(t_0)$$

### 3.2.1 Etude du système

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution du système (3.2).

**Théorème 3.2.1** Soient  $|\lambda_1| > 2W^2M_1(b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1)$  et  $|\lambda_2| > 2W^2M_2(b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2)$ . Pour  $n$  assez grand, le système (3.2) admet une unique solution.

**Démonstration 3** On définit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (U, V) &\longmapsto \psi(U, V) = (U, V) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \psi(U, V) &= (\varphi_1(U, V), \varphi_2(U, V), \dots, \varphi_n(U, V), \phi_1(U, V), \phi_2(U, V), \dots, \phi_n(U, V))^t, \\ U &= (u_1, u_2, \dots, u_n)^t; \quad V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_i(U, V) = \frac{1}{\lambda_1} \left[ f_1(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) \right] \\ \phi_i(U, V) = \frac{1}{\lambda_2} \left[ f_2(t_i) + h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_2(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_2(t_j, t_k, u_k, v_k) \right]. \end{cases}$$

Le système (3.2) s'écrit sous la forme :

$$(U, V) = \psi(U, V).$$

L'espace  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  est muni de la norme suivante :

$$\|(U, V)\|_\infty = \max(\|U\|_\infty, \|V\|_\infty)$$

avec

$$\|U\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

et

$$\|\psi(U, V)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|\varphi_i(u, v)|, |\phi_i(u, v)|).$$

Pour  $i = 1 \dots n$ , on a

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} h^2 \left| \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k (K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) - K_1(t_j, t_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k)) \right| \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{1}{|\lambda_2|} h^2 \left| \sum_{j=0}^i w_j p_2(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k (K_2(t_j, t_k, u_k, v_k) - K_2(t_j, t_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k)) \right|. \end{cases}$$

On pose  $W = \max_{0 \leq i \leq n} |w_i| < \infty$ , et on utilise l'hypothèse (H1), on a :

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n |K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) - K_1(t_j, t_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k)| \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_2|} M_2 W^2 \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n |K_2(t_j, t_k, u_k, v_k) - K_2(t_j, t_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k)| \end{cases}$$

En outre, on utilise l'hypothèse (H2), on a

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (\alpha_1 |u_k - \bar{u}_k| + \beta_1 |v_k - \bar{v}_k|) \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (\alpha_2 |u_k - \bar{u}_k| + \beta_2 |v_k - \bar{v}_k|) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \max(\alpha_1, \beta_1) \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (|u_k - \bar{u}_k| + |v_k - \bar{v}_k|) \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_2|} M_2 W^2 \max(\alpha_2, \beta_2) \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (|u_k - \bar{u}_k| + |v_k - \bar{v}_k|) \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \max(\alpha_1, \beta_1) \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (\|U - \bar{U}\|_\infty + \|V - \bar{V}\|_\infty) \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{h^2}{|\lambda_2|} M_2 W^2 \max(\alpha_2, \beta_2) \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n (\|U - \bar{U}\|_\infty + \|V - \bar{V}\|_\infty) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{2h^2}{|\lambda_1|} M_1 W^2 \max(\alpha_1, \beta_1) n(n+1) \|(U - \bar{U}, V - \bar{V})\|_\infty \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{2h^2}{|\lambda_2|} M_2 W^2 \max(\alpha_2, \beta_2) n(n+1) \|(U - \bar{U}, V - \bar{V})\|_\infty \end{cases}$$

avec  $h = \frac{b-a}{n}$ , on a alors

$$\begin{cases} |\varphi_i(U, V) - \varphi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{2}{|\lambda_1|} \left(1 + \frac{1}{n}\right) M_1 W^2 (b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1) \|(U - \bar{U}, V - \bar{V})\|_\infty \\ |\phi_i(U, V) - \phi_i(\bar{U}, \bar{V})| \leq \frac{2}{|\lambda_2|} \left(1 + \frac{1}{n}\right) M_2 W^2 (b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2) \|U - \bar{U}, V - \bar{V}\|_\infty \end{cases}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infinie, avec  $|\lambda_1| > 2W^2 M_1 (b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1)$  et  $|\lambda_2| > 2W^2 M_2 (b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2)$ , l'application  $\psi$  est une contraction. Par conséquent, par l'application du théorème du point fixe de Banach, le système (3.2) admet unique solution  $(u, v)$

### 3.2.2 Analyse de l'erreur

Dans cette section, on va montrer la convergence de notre méthode numérique.

Pour  $0 \leq i \leq n$ , on définit l'erreur de discrétisation par :

$$E_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \hat{\varepsilon}_i \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_i = u(t_i) - U_i \\ \hat{\varepsilon}_i = v(t_i) - V_i \end{cases}$$

et on note par

$$\|E_i\|_1 = |\varepsilon_i| + |\hat{\varepsilon}_i|$$

On dit que notre méthode est convergente si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} \|E_i\|_1 = 0$$

De plus, on définit l'erreur de consistance locale par :

$$\Delta(h, s) = \begin{pmatrix} \delta(K_1, h, s) \\ \delta(K_2, h, s) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Delta}(h, t_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}(p_1, h, t_i) \\ \tilde{\delta}(p_2, h, t_i) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \delta(K_1, h, s) = \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta - h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) \\ \tilde{\delta}(p_1, h, t_i) = \int_a^b p_1(t_i, s) K_1(s, t, x, y) d\theta - h \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) K_1(t_j, t, x, y) \end{cases}$$

avec

$$\|\Delta(h, \cdot)\|_{C^0([a,b]) \times C^0([a,b])} = \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_1, h, s)| + \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_2, h, s)|$$

et

$$\|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{C^0([a,b]) \times C^0([a,b])} = \max_{a \leq s \leq b} |\tilde{\delta}(p_1, h, s)| + \max_{a \leq s \leq b} |\tilde{\delta}(p_2, h, s)|$$

On dit que notre méthode est consistante si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max(\|\Delta(h, \cdot)\|_{C^0([a,b]) \times C^0([a,b])}, \|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{C^0([a,b]) \times C^0([a,b])}) = 0$$

On a le théorème suivant.

**Théorème 3.2.2** *Soient*

$$\begin{cases} |\lambda_1| > 2WM_1(b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1) \\ |\lambda_2| > 2WM_2(b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2) \end{cases}$$

*Si notre méthode est consistante, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} \|E_i\|_1 = 0$$

**Démonstration 4** *Du système (3.1) et (3.2), on a*

$$\begin{aligned} \lambda_1(u(t_i) - U_i) &= \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \\ &\quad - h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) \\ &= \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) \int_a^b K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) d\theta ds \\ &\quad - \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) ds \\ &\quad + \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) ds \\ &\quad - h^2 \sum_{j=0}^i w_j p_1(t_i, t_j) \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
|\lambda_1| |(u(t_i) - U_i)| &\leq \int_a^{t_i} |p_1(t_i, s)| |\delta(K_1, h, s)| ds \\
&+ \left| \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u(t_k), v(t_k)) ds \right. \\
&- \int_a^{t_i} p_1(t_i, s) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, u_k, v_k) ds \left. \right| \\
&+ \left| \int_a^{t_i} w_j p_1(t_i, s) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(s, t_k, U_k, V_k) ds \right. \\
&- h \sum_{j=0}^i p_1(t_i, t_j) h \sum_{k=0}^n w_k K_1(t_j, t_k, u_k, v_k) \left. \right| \\
&\leq \int_a^{t_i} |p_1(t_i, s)| |\delta(K_1, h, s)| ds + \int_a^{t_i} |p_1(t_i, s)| h \sum_{k=0}^n |w_k| (\alpha_1 |u(t_k) - U_k| \\
&+ \beta_1 |v(t_k) - V_k|) ds + h \sum_{k=0}^n |w_k| |\tilde{\delta}(p_1, h, t_i)| \\
&\leq M_1(b-a) \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_1, h, s)| + hW \max(\alpha_1, \beta_1) M_1(b-a) \sum_{k=1}^n (|\varepsilon_i| \\
&+ |\hat{\varepsilon}_i|) + Wh \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{\delta}(p_1, h, t_i)| (n+1)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|\lambda_1| |\varepsilon_i| &\leq M_1(b-a) \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_1, h, s)| + W \max(\alpha_1, \beta_1) M_1(b-a)^2 \|E_i\|_1 \\
&+ W(b-a) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{\delta}(p_1, h, t_i)|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| &\leq |\lambda_1|^{-1} M_1(b-a) \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_1, h, s)| + |\lambda_1|^{-1} (W \max(\alpha_1, \beta_1) M_1(b-a)^2) \|E_i\|_1 \\
&+ |\lambda_1|^{-1} W(b-a) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{\delta}(p_1, h, t_i)|
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\lambda_2| |\tilde{\varepsilon}_i| &\leq M_2(b-a) \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_2, h, s)| + W \max(\alpha_2, \beta_2) M_1(b-a)^2 \|E_i\|_1 \\
&+ W(b-a) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{\delta}(p_2, h, t_i)|
\end{aligned}$$

et donc

$$|\tilde{\varepsilon}_i| \leq |\lambda_2|^{-1} M_2 (b-a) \max_{a \leq s \leq b} |\delta(K_2, h, s)| + |\lambda_2|^{-1} (W \max(\alpha_2, \beta_2) M_1 (b-a)^2) \|E_i\|_1 \\ + |\lambda_2|^{-1} W (b-a) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{\delta}(p_2, h, t_i)|.$$

On a alors

$$\|E_i\|_1 \leq (b-a) \max(M_1 |\lambda_1|^{-1}, M_2 |\lambda_2|^{-1}) \|\Delta(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])} \\ + 2 \max(|\lambda_1|^{-1} W M_1 (b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1), |\lambda_2|^{-1} W M_1 (b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2)) \|E_i\|_1 \\ + \max(|\lambda_1|^{-1}, |\lambda_2|^{-1}) W (b-a) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}$$

On note par

$$C = 1 - 2 \max(|\lambda_1|^{-1} W M_1 (b-a)^2 \max(\alpha_1, \beta_1), |\lambda_2|^{-1} W M_2 (b-a)^2 \max(\alpha_2, \beta_2)),$$

on peut alors écrire

$$C \|E_i\|_1 \leq (b-a) \max(M_1 |\lambda_1|^{-1}, M_2 |\lambda_2|^{-1}) \|\Delta(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])} \\ + \max(|\lambda_1|^{-1}, |\lambda_2|^{-1}) W (b-a) \|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}$$

donc

$$\|E_i\|_1 \leq \frac{(b-a) \max(M_1 |\lambda_1|^{-1}, M_2 |\lambda_2|^{-1}) \|\Delta(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}}{C} \\ + \frac{\max(|\lambda_1|^{-1}, |\lambda_2|^{-1}) W (b-a) \|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}}{C}.$$

Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max(\|\Delta(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}, \|\tilde{\Delta}(h, \cdot)\|_{\mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b])}) = 0$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} \|E_i\|_1 = 0.$$

# Chapitre 4

## Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous allons illustrer l'efficacité de notre méthode choisie pour le système [3.1](#). Nous allons utiliser la formule d'intégration de trapèzes pour l'approximation des intégrales.

Considérons le système d'équations non linéaires mixtes suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 u(t) = \int_0^t (t^2 + s) \int_0^1 \frac{s^2(2e^{-\theta} + 1)}{e^{-u(\theta)} + e^{-v(\theta)} + 1} d\theta ds + f_1(t) \\ \lambda_2 v(t) = \frac{1}{3} \int_0^t (1 + 5(t-s)^2) \int_0^1 \frac{\theta + s}{1 + (\sin(u(\theta)))^2 + (\cos(v(\theta)))^2} d\theta ds + f_2(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Les noyaux

$$K_1(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) = \frac{s^2(2e^{-\theta} + 1)}{e^{-u(\theta)} + e^{-v(\theta)} + 1}$$

$$K_2(s, \theta, u(\theta), v(\theta)) = \frac{\theta + s}{1 + (\sin(u(\theta)))^2 + (\cos(v(\theta)))^2}$$

vérifient l'hypothèse (H2) avec  $\alpha_1 = \beta_1 = 13$  et  $\alpha_2 = \beta_2 = 17$ .

En outre, les noyaux

$$p_1(t, s) = t^2 + s$$

$$p_2(t, s) = \frac{1}{3} (1 + 5(t-s)^2)$$

vérifient l'hypothèse (H1) avec  $M_1 = 2$  et  $M_2 = 2$ .

Si on prend

$$f_1(t) = \lambda_1 t - \frac{1}{3}t^5 - \frac{1}{4}t^4$$

et

$$f_2(t) = \lambda_2 t - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{6}t^3 + \frac{5}{12}t^4 \right)$$

on trouve la solution  $(u(t), v(t))$  du système [4.1](#) donnée par

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t. \end{cases}$$

En accord avec la condition de convergence de notre système numérique, les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifient

$$|\lambda_1| \geq 13 \text{ et } |\lambda_2| \geq 17.$$

Les valeurs  $U_n$  et  $V_n$  ne sont pas calculées exactement, mais approchées en utilisant la méthode d'itération de Banach avec la condition d'arrêt

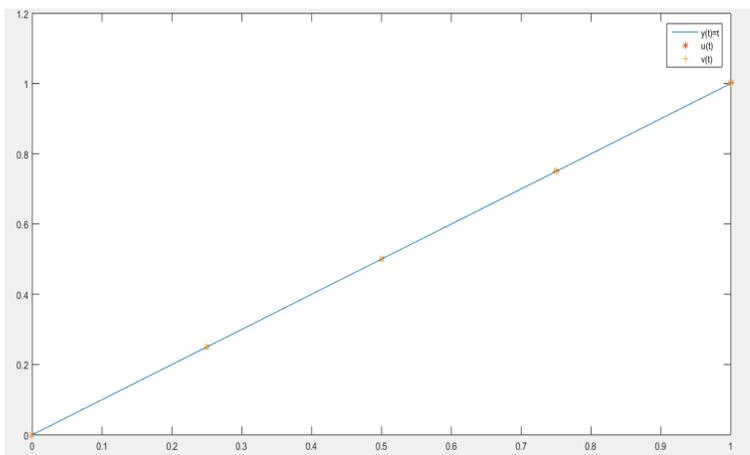
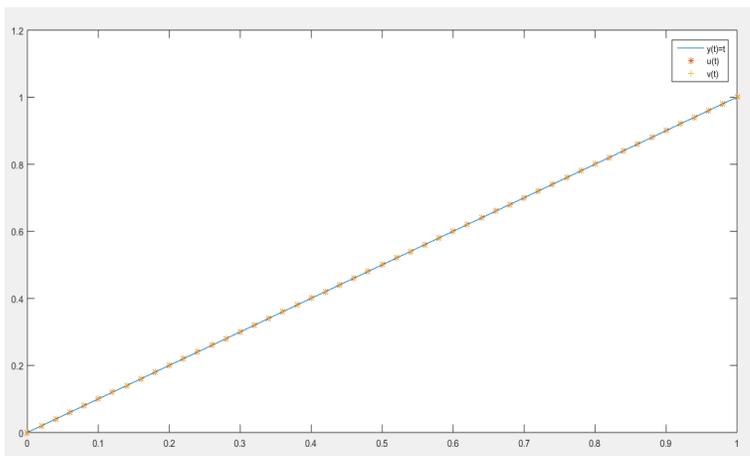
$$\|(U_{new}, V_{new}) - (U_{old}, V_{old})\| \leq 10^{-7}$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur comise entre la solution exacte et la solution approchée du système avec  $\lambda_1 = 13$  et  $\lambda_2 = 17$

Méthode de trapèzes	
$n$	$E = \max(\ u - U_i\ , \ v - V_i\ )$
4	2.010673086343839e-03
10	3.216445554199421e-04
20	8.040863372804630e-05
50	1.286495416841227e-05
100	3.215941837719782e-06
200	8.036920635667855e-07

D'après le résultat de calcul obtenu pour cet exemple, nous remarquons que l'erreur entre la solution exacte et son approximation tend vers 0 si  $n$  est assez grand. Ce qui assure la convergence de notre méthode appliquée.

Les figures suivantes représentent les graphes de la solution exacte et la solution approchée calculée pour  $N = 4$  et  $N = 50$ .

FIGURE 4.1 – Solution exacte et solution approchée pour  $N=4$ FIGURE 4.2 – Solution exacte et solution approchée pour  $N=50$

# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système d'équations non-linéaires de Volterra-Fredholm dans le sens analytique et numérique.

Dans le sens analytique, nous avons imposé des hypothèses qui assurent l'existence et l'unicité de la solution. Ces hypothèses sont acceptables au sens pratique.

En outre, dans le sens numérique, nous avons construit une méthode numérique basée sur la méthode de Nysström pour approcher la solution et nous avons montré que notre solution approchée converge vers la solution exacte.

A la fin, un exemple numérique développé montre l'efficacité de notre méthode numérique.

Comme perspectives, nous allons essayer de construire une nouvelle approche pour l'étude de la convergence afin d'affaiblir les conditions imposées sur  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

# Bibliographie

- [1] K. E. Atkinson : The numeral solution of integral equation of the second kind ;maison d'édition,1997.
- [2] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle (Théorie et applications), Masson 1987.
- [3] P. Linz : Analytical and numerical methods for Volterra Equations ; maison d'edition, 1985
- [4] A. Quateoni, R. Sacco, F. Salero : Méthodes numériques Algorithmes, analyse et applications, Springer-Verlag, Italia,2008
- [5] A. Rahmoun : Equations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution, August 16, 2018
- [6] S. Salah, H. Guebbai, S. Lemita and M.Z. Aissaoui, Equations de la dynamique avec une approche numérique, *thèse soutenue en vue de l'obtention d'un Doctorat.*