الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة 08 ماي 1945 قالمة
Université 8 Mai 1945 Guelma

جامعة 8 ماي 1945 قالمة
UNIVERSITE 8 MAI 1945 GUELMA

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
كلية الرياضيات و الإعلام الألي وعلوم المادة
Département de Mathématiques
قسم الرياضيات

Mémoire de Master Académique en Mathématiques
مذكرة ماستر أكادمية في الرياضيات
تخصص: المعادلات التفاضلية الجزئية و التحليل العددي

حول

Qelque Methodes de résolutions numériques des equations différentielles d'ordre fractionnaire
بعض الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية برتب كسرية

إعداد الطالبة: يوسف صفية
إشراف الدكتور:فرنان خير الدين
تاريخ المناقشة:13 جويلية 2021

أمام لجنة المناقشة:

الجامعة	الصفة	الرتبة	الإسم و اللقب
جامعة 08 ماي 1945	رئيسا	أستاذ التعليم العالي	نجيب بوسطيلة
جامعة 08 ماي 1945	مشرفا و مقررا	أستاذ محاضر-أ-	خير الدين فرنان
جامعة 08 ماي 1945	مناقشا	أستاذ محاضر-ب-	شاوي عبد الرزاق

الموسم الجامعي:2021/2020

شكر و تقدير

الحمد لله عز و جل الذي وفقني ومنحني العزيمة لإنجاز هذا العمل المتواضع.

أتقدم بخالص الشكر و العرفان إلى الأستاذ المشرف الدكتور "فرنان خير الدين" لما قدمه من نصائح ثمينة و توجيهات قيمة و تشجيع

الشكر موصول أيضا إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرة الذين تفضلوا بقراءة هذه المذكرة

و لا يفوتني أيضا أن أشكر كل عمال جامعة قالمة أساتذة كانوا أو إداريين.

إهـــــداء

إلى والدي الكريمين

إلى زوجي الفاضل

إلى بنيتي ميسون

إلى جميع أفراد أسرتي

أهدي هذا الجهد المتواضع

المحتويات

ملخص

المعادلات التفاضلية ذات الرتب الناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسكية.

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة القيم الابتدائية وأيضا دراسة تقريبات عددية لحل المعادلات التفاضلية الكسرية باستخدام بعض الطرق و الخوارزميات المعروفة كطريقة اولر و طريقة الفروق المنتهية و الطريقة التكرارية المتغيرة، حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمفهوم كابوتو.

الكلمات المفتاحية: الإشتقاق الكسري لـ كابوتو، معادلة تفاضلية خطية ذات رتبة كسرية، طريقة أولر الكسرية، طريقة الفروق المنتهية، الطريقة التكراررية المتغيرة.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques.

Dans le présent travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution au problème des valeurs initiales. Nous nous sommes aussi donné à l'étude des approximations numériques pour résoudre des équations différentielles fractionnaires. Pour se faire, nous avons utilisé certaines méthodes et algorithmes bien connus tels que : la méthode d'Euler, la méthode des différences finies et la méthode des itérées variationnelles. Il est à noter que les dérivées fractionnaires ont été utilisées au sens de Caputo.

Mots clés : la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Equation différentielle fractionnaire linéaire, Méthode d'Euler fractionnaire, Méthode de différence finie, Méthode des itérées variationnelles.

Summary

Fractional differential equations are generalizations of classical differential equations.

this work studies the existence and uniqueness of the solution to the initial value problem, as well as the numerical approximations to solve fractional differential equations using well-known methods and algorithms such as the Euler's method, the Finite difference method, and The variational iterated method, using Caputo fractional derivative

Keywords: Caputo fractional derivative ; Linear fractional differential equation, Fractional Euler method, Finite difference method, Variational iterated method

مقدمــــة

يعتبر حساب التفاضل و التكامل الكسريين أحد مجالات التحليل الرياضي الذي يناقش بحث و تطبيقات التفاضل و التكامل برتب غير صحيحة في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. يعد موضوعا قديما لاتفاق معظم الباحثين في تاريخ الرياضيات على أنه نشأ اواخر القرن17.

ففي 30سبتمبر1695 بعث ماركيز دو لوبيتال برسالة إلى غوتفريد ويلهوم لا يبنيز يسأل عن ملاحظة تخص بحثه المتعلق بحساب المشتق من الرتبةn للدالة f المعرفة بـ$f(x) = x$، وكان السؤال " ماهي النتيجة إذا كان $n = \frac{1}{2}$" وقد كان الجواب " السؤال يبدو متناقضامع ذلك فهو يحتمل الصحة"

- في سنة 1819، أثبت **لا كروا** في كتابه الذي يتحدث عن المشتقة برتبة كسرية، أنه إذا كان $y = x^\alpha$ فإن $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d^{\frac{1}{2}}x} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}x^{\alpha-\frac{1}{2}}$
  على وجه الخصوص نتحصل على: $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d^{\frac{1}{2}}x} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$
- في سنة 1823 ،قدم **ابال** أول تطبيق للتفاضل و التكامل الكسري في المسائل الفيزيائية.
- في سنة 1884 قدم **لوران** نظرية للمؤثر المعمم $D^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
- في سنة 1892 ، طبق **هايفيزيد** المشتق الكسري في نظرية خطوط النقل.
- في سنة 1963 استخدم **جومون** المشتق الكسري في المرونة.
- في سنة 1974، **رووس** عقد مؤتمراً دولياً حول حساب التفاضل والتكامل الجزئي وتطبيقاته.
- في سنة 1993نشر **كينيث ميللر** وروس كتاب: "مقدمة في حساب التفاضل والتكامل الكسري والمعادلات التفاضلية الكسرية" .

نظراً لأهمية المشتقات والتكاملات الكسرية وتعدد تطبيقاتها ، فقد تم في السنوات الأخيرة كتابة العديد من المقالات والكتب حول هذا الموضوع وتم نشرها في [6 ، 7].

تتكون هذه الأطروحة من أربعة فصول مقسمة على النحو التالي:

الفصل الأول: في هذا الفصل نتذكر بعض المفاهيم والتعريفات للدوال الأساسية المفيدة في جميع مراحل هذه الأطروحة (دالة جاما ، دالة بيتا ، دالة الخطأ التكميلية $(erfc)$ ودالة $Mittag-Leffler$) ، كما عرّفنا أيضًا تحويل لابلاس وخصائصه ، وأخيرًا تم ذكر بعض من نظريات النقطة الثابتة .

الفصل الثاني: نقتبس بعض التعريفات ونتائج حساب التفاضل والتكامل الكسريين بمعنى $Grnwald - Letnikov$، $Riemann - Liouville$و$Caputo$ وخصائصهم..

الفصل الثالث: هذا الفصل ، يدرس الجزء الأول وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية كسرية من نوع$Caputo$ ، مع إعطاء الحل الدقيق بطريقة تحويل لابلاس .

أما الجزء الثاني نعرف بعض الطرق العددية بحل للمعادلات التفاضلية الكسرية$EDOF$: طريقة اولر $Euler$ ،طريقة الفروق المنتهيةMDF و الطريقة التكرارية المتغيرةVIM كما نعطي تقريب المشتق الكسري بطريقة الفروق المنتهية والطريقة التكرارية المتغيرة.

الفصل الرابع: في هذا الفصل نعطي أمثلة عددية لمعادلات تفاضلية كسرية. ونقارن الحل الدقيق مع الحل التقريبي،نستخدم الطريقة التكرارية المتغيرة كنموذج . نقدم هاته المقارنة بمساعدة التمثيلات البيانية و جداول الأخطاء.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

في هذا الجزء سنقدم الدالة قاما و الدالة بيتا، التي سيتم استخدامها في الفصول القادمة، هاتان الدالتان ستلعبان دور هام في نظرية حساب التفاضل والتكامل الكسري و تطبيقاتها.

1.1 الدالة قاما

الدالة قاما دالة عقدية ودالة خاصة فهي امتداد للدالة العاملي في مجموعة الأعداد المركبة (باستثناء بعض النقط)

تعريف 1.1.1
من أجل كل $z \in \mathbb{C}$ حيث $Re\,(z) \succ 0$،الدالة قاما تعطى بالعلاقة التالية:

$$\Gamma\,(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{1.1}$$

خواص [2]

- الخاصية المهمة للدالة قاما هي العلاقة التراجعية التالية:

$$\Gamma\,(z+1) = z\Gamma\,(z) \tag{2.1}$$

- من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n \times n!}$$

- $\Gamma\,(1) = 1, \Gamma\,(0_+) = +\infty, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- الدالة قاما ليست لها أقطاب بسيطة من أجل النقط z=0;-1;-2;-3;.....

2.1 الدالة بيتا

تعريف 1.2.1 [4]
من أجل كل $(u,v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ حيث $Re\,(u) \succ 0; Re\,(v) \succ 0$ نعرف الدالة بيتا كما يلي:

$$B\,(u,v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt \tag{3.1}$$

خواص

من أجل كل $(u,v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ حيث $Re\,(u) \succ 0; Re\,(v) \succ 0$ لدينا:

- $B\left(u,v\right)=B\left(v,u\right)$
- $B\left(u,v+1\right)=\frac{v}{u}B\left(u+1,v\right)$
- $B\left(u+1,v\right)=\frac{u}{u+v}B\left(u,v\right)$
- $B\left(u,n+1\right)=\frac{n}{u\left(u+1\right)\left(u+2\right)......\left(u+n\right)},n\in\mathbb{N}^{*}$
- العلاقة بين الدالة قاما و الدالة بيتا تعطى بـ:

$$B\left(u,v\right)=\frac{\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(v\right)}{\Gamma\left(u+v\right)} \tag{4.1}$$

3.1 دالة الخطأ التكميلية

تعريف 1.3.1 [5]
دالة الخطأ التكميلية هي دالة عقدية معرفة بـ:

$$erfc\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty}e^{-t^{2}}dt \tag{5.1}$$

مع $erfc\left(-\infty\right)=2,erfc\left(0\right)=1,erfc\left(+\infty\right)=0$

خواص [5]
نذكر بعض العلاقات الهامة:

- $erfc\left(-x\right)=2-erfc\left(x\right)$
- $\int_{0}^{\infty}erfc\left(t\right)dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
- $\int_{0}^{\infty}erfc^{2}\left(t\right)dt=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

4.1 تحويل لابلاس

تعريف 1.4.1 [3]
تحويل لابلاس للدالة $f\left(t\right)$ يعطى بـ

$$F\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{f\left(t\right),s\right\}=\int_{0}^{\infty}f\left(t\right)e^{-st}dt,t\succ0. \tag{6.1}$$

تعريف 2.4.1

[6] يعرف تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ بـ:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s),t\}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds, c=Re(s)\succ c_0.$$

علما أن c_0 من نصف المستوي الايمن للتقارب المطلق لتكامل لابلاس.

1.4.1 جداء اللف

تعريف 6.1.1

جداء لف دالتين $f(t)$ و $g(t)$ هو:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

خواص تحويل لابلاس

إذا كان $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$، $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$، $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، $n\in\mathbb{N}$ تنتج الخواص الأتية:

- $\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha F(s)+\beta G(t)$
- $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}=F(s)G(t)$
- تحويل لابلاس للمشتقة من الرتبة n:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}\left\lfloor f^k(t)\right\rfloor_{t=0} \tag{7.1}$$

أمثلة

تحويل لابلاس لبعض الدوال المهمة

لدينا $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$

الدالة $F(s)$ تسمى تحويل لابلاس لـ $f(t)$

- $\mathcal{L}\{t^\alpha\}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \alpha\succ -1, s\succ 0$
- $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=\dfrac{1}{s-a}, s\succ\alpha$
- $\mathcal{L}\{\sin(at)\}=\dfrac{a}{s^2+a^2}, |s|\succ|\alpha|$

•
$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\alpha}\right)\right\}=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a},s^{\alpha}\succ|a| \qquad (8.1)$$

• $$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(at^{\alpha}\right)\right\}=\frac{s^{\alpha-\beta}k!}{\left(s^{\alpha}-a\right)^{k+1}},s^{\alpha}\succ|a|$$

تحويل لابلاس العكسي لبعض الدوال المهمة

الدالة $f(t)$ تحويل لابلاس العكسي لـ $F(s)$

• $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\right\}=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\alpha\succ 0$$

• $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^{\alpha}}\right\}=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-ax},\alpha\succ 0$$

• $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{\alpha}-a)}\right\}=t^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right),\alpha\succ 0$$

• $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}=\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right),\alpha\neq b$$

5.1 الدالة ميتاغ-ليفر(Mittag-Leffler)

الدالة ميتاغ-ليفر تعميم للدالة الأسية، وهذا ما يعطيها أهمية كبيرة في الحساب الكسري

تعريف 1.5.1 [3]

الدالة بوسيط واحد

عرفت الدالة ميتاغ-ليفر في لأول مرة بالسلسلة:

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\alpha\succ 0,\alpha\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C} \qquad (9.1)$$

تعريف 2.5.1 [3]

الدالة بوسيطين

التعميم إلى متغيرين قدم من طرف أغاروال (Agarwal) بالعبارة:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\alpha,\beta\succ 0,\alpha,\beta\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C} \qquad (10.1)$$

تسمى دالة بوسيطين من صنف ميتاغ-ليفر

خواص [3] من الخصائص المهمة نذكر:

- $E_{1,1}(z) = e^z$
- $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$
- $E_{2,2}(z^2) = \dfrac{\sinh(z)}{z}$
- $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$
- $E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} erfc(-z)\,.$

نظرية 1.5.1 [9]

للدالة ميتاغ-ليفر الخواص الأتية:

-1 من أجل $1 \prec |z|$ الدالة ميتاغ-ليفر المعممة تعطى ب: $\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)\, dt = \dfrac{1}{z-1}$

-2 من أجل $1 \prec |z|$ تحويل لابلاس للدالة ميتاغ-ليفر $E_\alpha(Z^\alpha)$ هو:

$$\int_0^\infty e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha)\, dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}$$

-3 الدالة ميتاغ-ليفر متقاربة من أجل كل عدد مركب z

-4 مشتقة الدالة ميتاغ-ليفر من الرتبة n تعطى بالعلاقة:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)\right] = x^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(x^\alpha)\,, \beta - n \succ 0, n = 0, 1, 2, \ldots.. \qquad (11.1)$$

-5 تكامل الدالة ميتاغ-ليفر يعطى بالعلاقة:

$$\int_0^x E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\, t^{\beta-1} dt = x^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda x^\alpha) \qquad (12.1)$$

-6 العلاقة السابقة هي حالة خاصة من العلاقة العامة التالية:

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\, t^{\beta-1} dt = x^{b+v-1} E_{\alpha,\beta+v}(\lambda x^\alpha)\,, v \succ 0 \qquad (13.1)$$

6.1 نظريات وتعاريف أساسية

تعريف 1.6.1 [9]
المجموعة المتراصة نسبيا: ليكن (E, d) فضاءا متريا و $F \subseteq E$.
المجموعةF متراصة نسبيا في E إذا كان مغلق F هو مجموعة جزئية متراصة في E

تعريف 2.6.1
نقول عن فضاء طبولوجي Eأنه فضاء بناخ إذا كان فضاء شعاعي نظيمي تام.

تعريف 4.6.1
ليكن E فضاء بناخ و $A : E \to E$ تطبيق
نقول أن x من E أنها نقطة صامدة لـA إذا تحقق: $Ax = x$

تعريف 5.6.1
ليكن E وF فضاءي بناخ نرمز لـ $C(E, F)$ لفضاء الدوال المستمرة من E نحو F ذو النظيم:

$$f \in C(E, F); \|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f\|_F$$

تعريف 6.6.1
ليكن E وF فضاءي بناخ و $f : E \to F$ تطبيق نقول أن f مستمر كليا إذا كان:

- f مستمر
- f يحول كل مجموعة من E إلى مجموعة متراصة نسبيا في F

تعريف 7.6.1
لتكن M مجموعة غير خالية من $C(E, F)$.
نقول عن M أنها مجموعة متساوية الاستمرارية على E إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \epsilon > 0; \exists \eta > 0; \forall x, y \in E : \|x - y\|_E < \eta \Rightarrow \forall f \in M : \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

تعريف 8.6.1
لتكن M مجموعة جزئيةغير خالية من $C(E,F)$.
نقول أن M محدودة بانتظام إذا تحقق:

$$\forall c>0, \|f\|_{\infty}\leqslant c, \forall f\in M$$

نظرية 1.6.1 [9] نظرية **Arzelà-Ascoli**
لتكن M مجموعة جزئيةغير خالية من $C(E,F)$. تكون متراصة نسبيا إذا كان:

- Mمتساوية الاستمرارية
- Mمحدودة بانتظام

7.1 نظريات النقطة الصامدة

نظرية النقطة الصامدة لويسينجر -Weissinger-

نظرية 1.7.1 [9] ليكن (E,d) فضاء متري كليا غير خالي،و $\alpha_j\geq 0$ من أجل كل $j\in\mathbb{N}$ و $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j$ متقاربة.
و أيضا التطبيق $A:U\to U$ يحقق: $d(A^ju,A^jv)\leq\alpha_j$
من أجل كل $j\in\mathbb{N}$ وكل $u;v\in U$ لديناA تقبل نقطة صامدة وحيدة u^*
و أيضا من أجل كل $u_0\in U$ المتتالية $(A^ju_0)_{j=1}^{\infty}$متقاربة نحوالنقطة الصامدة u^*.

نظرية النقطة الصامدة لشودر -Schauder-

نظرية 3.7.1 [9]
ليكن (E,d) فضاء متري تام و U مجموعة جزئية محدبة ومغلقة من E
ليكن: $A:U\to U$ تطبيق حيث المجموعة $\{Au:u\in U\}$ متراصة نسبيا في E ، إذن A يقبل على الأقل نقطة صامدة.

الفصل 2

الحساب الكسري

نقدم في هذا الفصل تعريفات و خصائص لبعض مؤثرات الاشتقاق والتكامل الكسري ، بالإضافة إلى بعض الأمثلة لبعض الدوال المعروفة.

الإشتقاق والتكامل الكسري

1.2 الاشتقاق الكسري لـGrünwald-Ltnikov

[10]

الفكرة الأساسية للإشتقاق الكسري لـ Grünwald-Ltnikov هي اعطاء تعميم للتعريف الكلاسيكي لمشتقة دالة برتبة كيفية.

مشتقةالدالة fمن الرتبة 1 :

$$f^{'}(t)=\frac{df}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} \tag{1.2}$$

بتطبيق التعريف مرتين نحصل على مشتقة الدالة f من الرتبة 2:

$$f^{''}(t)=\frac{d^2f}{dt^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{'}(t)-f^{'}(t-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2} \tag{2.2}$$

من (1.2) و (2.2) نحصل على:

$$f^{'''}(t)=\frac{d^3f}{dt^3}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3}$$

بالإشتقاق المتتالي:

$$f^{n}(t)=\frac{d^nf}{dt^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(t-rh) \tag{3.2}$$

حيث

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

العلاقة السابقة تمثل الإشتقاق من الرتبة n إذا كان n صحيح موجب ، التكامل يعاد n مرة إذا كان n صحيح سالب.

بفضل الخاصية:$\forall n\in\mathbb{N}\quad \Gamma(n+1)=n!$ نستطيع الحصول على عبارة أكثر تعميم،في حالةnسالب أو معدوم:

$$(-1)^r\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}=\frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)+\Gamma(-n)}$$

إذن لدينا:

تعريف 1.1.2 [3]
نعرف على التوالي الإشتقاق الكسري من الرتبة α (غير صحيح) ومن الرتبة $-\alpha$ بمفهوم **Grünwald-Ltnikov** للدالة f حيث: $f \in C[a,t]$ بـ:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (4.2) $$

و

$$ {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\alpha}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (5.2) $$

تعريف 2.1.2
إذا كانت f من الصنف C^m التكامل بالتجزئة لـ (4.2) و(5.2) تسمح لنا بكتابة :

$$ {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (6.2) $$

و

$$ {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_{-a}^{t} (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (7.2) $$

الصيغة المتحصل عليها (6.2) بفرض أن $f^r(t), r=(1,2,.....m)$ مستمرة على المجال المغلق $[a,t]$
حيث m عدد صحيح يحقق الشرط $m \succ \alpha$
أصغر قيمة ممكنة لـm معطاة بالعلاقة التالية: $m-1 \prec \alpha \prec m$

1.1.2 المشتقة الكسرية لثابت f(t)=c

إذا كان α عدد غير صحيح لدينا $r=1,2,3....m$,$f^r(t)=0$ إذن:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau $$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{r=1}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau}_{0}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

2.1.2 التركيب مع المشتقة برتبة صحيحة

فرضية1.1.2 [3] m عدد صحيح موجب تماما، α غير صحيح ومنه

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^{\alpha} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{\alpha+m} f(t) \tag{8.2}$$

و

$${}_a^G D_t^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{\alpha+m} f(t) - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)} \tag{9.2}$$

البرهان

من أجل $n-1 \prec \alpha \prec n$ لدينا من جهة:

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^{\alpha} f(t)\right) = \sum_{r=0}^{n+m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-(\alpha+m)}}{\Gamma(r-(\alpha+m)+1)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau$$

أي

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^{\alpha} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{\alpha+m} f(t)$$

من جهة أخرى

$${}_a^G D_t^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(m+r)}(a)(t-a)^{r-a}}{\Gamma(r-(\alpha+m)+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{r=0}^{n+m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-(\alpha+m)}}{\Gamma(r-(\alpha+m)+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)\, d\tau$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)}$$

إذن:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right)={}_a^G D_t^{m+\alpha}f(t)-\sum_{r=0}^{m-1}\frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)}$$

أي نريد القول أنه لا يوجد تبادل بين المشتق الكسري و المشتق الاصطلاحي إلا إذا كان $f^{(r)}(a)=0 \quad r=0;12....;m-1$

3.1.2 التركيب مع االمشتق الكسري

فرضية 2.1.2 [3]

نميز ثلاث حالات:

1- من أجل $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad\beta<0$ لدينا:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha}\left({}_a^G D_t^{\beta}(f(t))\right)={}_a^G D_t^{\alpha+\beta}f(t)$$

2- إذا كان $0\leq m\leq\beta<m+1,\alpha<0$

و $f^{(r)}(a)=0 \quad r=0;1;2....;m-1$

فإن:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha}\left({}_a^G D_t^{\beta}(f(t))\right)={}_a^G D_t^{\alpha+\beta}f(t)$$

3- إذا كان $0\leq m\leq\beta<m+1$ ،$0\leq n\leq\alpha<n+1,\alpha<0$

و $f^{(r)}(t)=0 \quad r=0;1;2....;k-1$ حيث $k=\max(m,n)$

فإن:

$$ {}_a^G D_t^{\alpha}\left({}_a^G D_t^{\beta}(f(t))\right)={}_a^G D_t^{\beta}\left({}_a^G D_t^{\alpha}(f(t))\right)={}_a^G D_t^{\alpha+\beta}f(t)$$

البرهان

أنظر [3](ص 59-62)

2.2 الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل -Riemann-Liouville-

في هذا الجزء نذكر بعض التعاريف و النتائج للحساب الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل. نبدأ بتعريف تكامل ريمان -ليوفيل. [10]

1.2.2 التكامل من رتبة كيفية

لتكن $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ (حيث aقيمة شعاعية) دالة مستمرة،bقيمة منتهية أو غير منتهية.

أصليةfتعطى بالعبارة

$$\left(I_a^1 f\right)(t)=\int_a^t f(\tau)\,d\tau$$

نكامل مرة ثانية:

$$\left(I_a^2 f\right)(t)=\int_a^t\left(\int_a^s f(\tau)\,d\tau\right)ds$$

باستخدام مبرهنة فوبيني، نحصل على:

$$\left(I_a^2 f\right)(t)=\int_a^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

نستنتج:

$$\left(I_a^n f\right)(t)=\int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,d\tau$$

تعريف 1.2.2 [3]
لتكن $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$.
نسمي تكامل ريمان-ليوفيل للدالة f التكامل المعرف بالعلاقة التالية:

$$\left(I_a^\alpha f\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\left(\tau\right)d\tau \quad (10.2)$$

حيث α عدد حقيقي أو مركب.

ملاحظة

الصيغة (10.2) هي تعميم التكامل من الدرجةn حيث α غير صحيح

2.2.2 التكامل الكسري لكثير الحدود $(t-a)^{\beta}$

لتكن الدالة $f(t)=(t-a)^{\beta},\ \beta>-1$

من خلال الصيغة (10.2) نجد:

$$\left(I_a^{\alpha}\right)(t-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}\,d\tau$$

لحساب التكامل نضع $\tau=a+(t-a)\,s$ فنجد:

$$\left(I_a^{\alpha}\right)(t-a)^{\beta}=\frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta}ds$$

$$=\frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)$$

$$=\frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\times\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \tag{11.2}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(t-\alpha)^{\beta+\alpha}$$

مثال

نأخذ $\alpha=\frac{1}{2}$

نضع في الصيغة (11.2) $\beta=0,1,2\ ;\ a=0$ نجد

$${}_a^RD_t^{-\frac{1}{2}}x^0=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$${}_a^RD_t^{-\frac{1}{2}}x^1=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.$$

$${}_a^RD_t^{-\frac{1}{2}}x^2=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}}=\frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.$$

3.2.2 التكامل الكسري لثابت f(t)=c

العلاقة (11.2) تشير أن التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل من الرتبة α لثابت تعطى بالعلاقة التالية:

$${}_a^RD_t^{-a}c=I_a^{\alpha}c=\frac{c}{\Gamma(1+\alpha)}(t-a)^{\alpha}$$

فرضية 1.2.2
ليكن α,β عددين مركبين و $f\in C^0([a,b])$:

-1 $I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right)=I_{\alpha}^{\alpha+\beta}f,(Re(\alpha)\succ 0,Re(\beta)\succ 0)$

-2 $\frac{d}{dt}\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)=\left(I_{\alpha}^{\alpha-1}f\right)(t),(Re(\alpha)\succ 1)$

-3 $\lim_{\alpha\to 0^+}\left(I_a^{\alpha}f\right)(t)=f(t),(Re(\alpha)\succ 0)$

البرهان

-1 أنظرص76 [3]

-2 أنظرص71 [3]

-3 أنظرص65 [3]

4.2.2 المشتقة من رتبة كيفية

تعريف 2.2.2
ليكن $m-1<\alpha<m;\quad m\in\mathbb{N}^*$
نسمي المشتقة الكسرية من الدرجةαبمفهوم ريمان-ليوفيل الدالة المعرفة بـ

$$ {}_a^RD_t^{\alpha}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\left(I_a^{m-\alpha}f\right)(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)\,d\tau $$

(12.2)

5.2.2 المشتق الكسري لكثير الحدود $(t-a)^{\beta}$

بحساب مشتقة ريمان-ليوفيل للدالة $f(t)=(t-a)^{\beta}$ من خلال الصيغة (11.2) نجد:

$$ {}_a^RD_t^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right] $$

$$ =\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-\alpha)^{\beta+m-\alpha} \qquad (13.2) $$

علما أن:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-1-\alpha)\ldots(\beta-\alpha+1)(t-\alpha)^{\beta-\alpha} \quad (14.2)$$

بتعويض (14.2) في (13.2) نجد:

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta--\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \quad (15.2)$$

ملاحظة

1- من أجل $\alpha = 1$ صيغة الاشتقاق (15.2) تلخص بـ

$${}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta$$

2- من أجل $\beta = 0$ في المثال السابق نستنتج: ${}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

أي أن المشتقة الكسرية لريمان-ليوفيل لثابت ليست معدومة و أيضا ليست ثابتة لكن لدينا: ${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$

تعريف 3.2.2 [3]

التكامل الكسري لريمان-ليوفيل على اليسار

$$\forall t > a \quad {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

تعريف 4.2.2 [3]

الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل على اليسار

$$\forall t > a \quad {}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

في التعريفين السابقين تم استخدام قيم $f(\tau)$ في المجال $]a,t[$
نستطيع تعريف المؤثرين المماثلين في حالة استخدام قيم $f(\tau)$ في المجال $]t,b[$ على النحو التالي:

تعريف 5.2.2 [3]

التكامل الكسري لريمان-ليوفيل على اليمين

$$\forall t < b \quad {}_a^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau$$

تعريف 6.2.2 [3]

الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل على اليمين

$$\forall t < b \quad {}_a^R D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f(\tau)\, d\tau$$

نلاحظ أن f دالة تحقق ${}_a^R D_t^{\beta} f(t)$و${}_a^R D_t^{\alpha} f(t)$ معرفين.

6.2.2 التركيب

فرضية 2.2.2
التركيب مع التكامل الكسري
من أجل $\alpha > 0$ و $t > 0$

$$ {}_a^R D_t^{\alpha} \left({}_a^R D_t^{-\alpha} f(t)\right) = {}_a^R D_t^{\alpha} \left(I_a^{\alpha} f(t)\right) = f(t) \qquad (16.2)$$

ما يعني أن مؤثر الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل هو عكسي من اليسار للمؤثر التكاملي الكسري لريمان-ليوفيل من نفس الرتبة.

فرضية 3.2.2
إذا كانت المشتقة الكسرية ${}_a^R D_t^{\alpha} f(t)$، $(m-1 \leq \alpha < m)$للدالة$f(t)$ كمولة فإن:

$$ {}_a^R D_t^{-\alpha} \left({}_a^R D_t^{\alpha} f(t)\right) = f(t) - \sum_{i=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{\alpha-i} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} \qquad (17.2)$$

فرضية 4.2.2
إذا كان $(0 \leq m-1 \leq \beta < m)$ لدينا:

$$ {}_a^R D_t^{-\alpha} \left({}_a^R D_t^{\beta} f(t)\right) = {}_a^R D_t^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{\beta-i} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} \qquad (18.2)$$

بما أن الاشتقاق و التكامل برتب صحيحة،فإن الاشتقاق و التكامل الكسريين غير قابلين للتبادل في الحالة العامة.

فرضية 5.2.2 [3] **التركيب مع المشتقة برتبة صحيحة**

نستعمل التعريف 4.2.2 لمشتقة ريمان-ليوفيل نتحصل على:

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a^RD_t^\alpha) = \frac{d^n}{dt^n}(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma((m+n)-(n+\alpha))}\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau$$

$$= ({}_a^RD_t^{n+\alpha})f(t) \tag{19.2}$$

الترتيب العكسي للموثرات،يأخذ بعين الاعتبار

$${}_a^RD_t^{-n}f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau = f(t) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \tag{20.2}$$

و

$${}_a^RD_t^\alpha f(t) ={}_a^R D_t^{\alpha+n}({}_a^RD_t^{-n}f(t)) \tag{21.2}$$

بتركيب (15.2) ، (20.2)و(21.2) نجد:

$${}_a^RD_t^\alpha(\frac{d^nf(t)}{dt^n}) ={}_a^R D_t^{\alpha+n}\{f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+1)}\} ={}_a^R D_t^{\alpha+n}f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+1-\alpha-n)}$$

نستنتج بعد ذلك أن اشتقاق Riemann-Liouville الكسري والاشتقاق برتبة صحيحة ينتقل فقط إذا كانت $f^i(a) = 0$ من أجل $i = 0; 1; 2; ....; n-1$

فرضية 6.2.2

ليكن $n-1 \leqslant \alpha < n$ و $m-1 \leqslant \beta < m$ نستخدم التعريف 4.2.2 و المشتق الكسري لريمان-ليوفيل (17.2) و (19.2) فنتحصل على:

$${}_a^RD_t^\alpha({}_a^RD_t^\beta f(t)) = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a^RD_t^{-(m-\alpha)}({}_a^RD_t^\beta f(t))\right\}$$

$$= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a^RD_t^{\alpha+\beta-m}f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\left[{}_a^RD_t^{\beta-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-\alpha-i}}{\Gamma(1+m-\alpha-i)}\right\}$$

$$= {}_a^R D_t^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}_a^RD_t^{\beta-i}f(t)\right]\frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(1-\alpha-i)} \quad (22.2)$$

نبادل αو β نحصل على

$${}_a^RD_t^{\beta}({}_a^RD_t^{\alpha}) = {}_a^R D_t^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}_a^RD_t^{\alpha-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(1-\beta-i)} \quad (23.2)$$

المقارنة بين العلاقة (22.2) و (23.2) أثبتت أن المؤثرين الكسريين ${}_a^RD_t^{\beta}$ و${}_a^RD_t^{\alpha}$ غير تبادليين إلا إذا كانا متساويين أو يحققا الشرطين التاليين معا:

-1

$$[{}_a^RD_t^{\beta-i}f(t)]_{t=a} = 0 \quad (24.2)$$

من أجل $i = 0; 1; 2; ...; m$

-2

$$[{}_a^RD_t^{\alpha-i}f(t)]_{t=a} = 0 \quad (25.2)$$

من أجل $i = 0; 1; 2; ...; n$

7.2.2 تحويل لابلاس للتكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل

توطئة 7.2.2 [11] تحويل لابلاس للتكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ هو:

$$\mathcal{L}\left\{{}_a^RD_t^{-\alpha}f(t)\right\} = \frac{F(t)}{s^{\alpha}}$$

أو

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

3.2 المشتق الكسري بمفهوم كابوتو

تعريف 1.3.2 [13][14]

المشتق الكسري بمفهوم كابوتو للدالة $f(t)$ على المجال $[a,b]$ تعرف بالعلاقة التالية:

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \qquad (26.2)$$

حيث $m \in \mathbb{N}$ و$m = [\alpha]+1$، $[\alpha]$ يعني الجزء الصحيح لـα

ملاحظة

الميزة الرئيسية لتقريب كابوتو هي أن الشروط الأولية للمشتق الكسري بمفهوم كابوتو للمعادلات التفاضلية الكسرية تأخذ نفس الشكل كما في حالة المعادلات التفاضلية ذات رتبة صحيحة.

تعريف 2.3.2 [6]

المشتق الكسري لكابوتو على اليسار

$$\forall t > a \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

تعريف 1.5.2 [6]

الاشتقاق الكسري لكابوتو على اليمين

$$\forall t < b \quad {}_a^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (-1)^m \int_t^b (t-\tau)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

نلاحظ أنf دالة بحيث ${}_a^C D_t^\beta f(t)$ و ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ معرفين.

1.3.2 العلاقة بين المشتق الكسري لكابيتو و المشتق الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل

نظرية 5.2.2 [15] لتكن $f \in C^n([a,b])$ و$\alpha > 0$ حيث$n \in \mathbb{N}^*$، $n-1 \le \alpha < n$

العلاقة بين مؤثر ريمان-ليوفيل و مؤثر كابيتو تعطى بـ:

$$ {}^C D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-k)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) \qquad (27.2)$$

حالات خاصة[15]

-1 إذا كان $0<\alpha<1$ فإن

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(f(t)-f(a)) \tag{28.2}$$

-2 إذا كان $n=[\alpha]+1; \forall k=\overline{0,n-1} : f^{(k)}(a)=0$ فإن

$$ {}^{R}D_{a}^{\alpha}f(t) = {}^{C}D_{a}^{\alpha}f(t) \tag{29.2}$$

-3 إذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ فإن:

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}({}_{a}^{R}I_{t}^{\alpha})f(t) = f(t) \tag{30.2}$$

و منه مؤثر الاشتقاق الكسري لكابوتو هو المعاكس من اليسار للمؤثر التكاملي لريمان-ليوفيل من نفس الرتبة، لكن ليس له معاكس من اليمين.

2.3.2 المشتق الكسري للدالة $(t-a)^{\beta}$

لتكن الدالة $f(t)=(t-a)^{\beta}$، m عدد صحيح و p عدد حقيقي حيث : $0\leq m-1<\alpha<m$ و $\beta>m-1$

لدينا:

$$f^{(m)}(\tau)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(\tau-a)^{\beta-m}$$

إذن

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m}$$

بتبديل المتغير $\tau=a+s(t-a)$ نحصل على:

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m}d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{a}^{t}(1-s)^{m-\alpha-1}s^{\beta-\alpha}d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)B(m-\alpha,\beta-m+\alpha)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{31.2}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

ملاحظة: المشتق الكسري بمفهوم كابوتو لدالة ثابتة معدوم بمعنى أخر : ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}c=0$

3.3.2 تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم كابوتو

توطئة 1.3.2 [11] تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم كابوتو من الرتبة α حيث $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ هو:

$$\mathcal{L}\left\{{}_a^C D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

البرهان نستخدم التوطئة 7.2.2 و (7.1) نتحصل على :

$$\mathcal{L}\left\{{}^C D_t^\alpha f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{{}^C D_t^{-(n-\alpha)}\left[D^n f(t)\right]\right\}$$

$$= \frac{\{D^n f(t)\}}{s^{n-\alpha}}$$

$$= \frac{s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)}{s^{n-\alpha}}$$

$$= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

توطئة 2.3.2

لتكن الدالة $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ من أجل $\alpha > 0$ المعادلة التفاضلية المتجانسة ذات رتبة كسرية α ${}^C D^\alpha h(t) = 0$ تقبل الحل التالي:

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1} \tag{32.2}$$

$$c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n-1}, n = [\alpha] + 1$$

توطئة 3.3.2

لتكن الدالة $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ من أجل $\alpha > 0$ لدينا

$$I^\alpha({}^C D_a^\alpha h(t)) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1} + h(t) \tag{33.2}$$

$$c_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n-1}, n = [\alpha] + 1$$

البرهان

لدينا:

$${}^C D_a^\alpha h(t) = I^{n-\alpha} h^{(n)}(t)$$

ندخل التكامل الكسري على الطرفين:

$$I^{\alpha}({}^{C}D_{a}^{\alpha}h(t)) = I^{\alpha}(I^{n-\alpha}h^{(n)}(t))$$

$$= I^{n}({}^{R}D^{n}h(t))$$

$$= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$$

$$= h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

الفصل 3

المعادلات التفاضلية الخطية برتب كسرية

يتم نمذجة العديد من المشكلات في العديد من التطبيقات رياضياً بواسطة المعادلات التفاضلية مثل معادلة التذبذب الكسري المركب والمعادلات الكسرية الديناميكية. في هذا الفصل سنثبت وجود الحل وتفرده لـ EDOF وطرح طريقة لابلاس للحصول على الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية الكسرية، وفي حالة عدم الحصول على الحل الدقيق نلجأ لطرق الحل العددية ، مثل طريقة أويلر ، طريقة الفروق المنتهية (MDF)و الطريقة التكرارية المتغيرة(VIM)

المسألة1.3
ليكن $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ومنه

$$^{C}D^{\alpha}y(x) = f(x, y(x)) \qquad (1.3)$$

تسمى معادلة تفاضلية كسرية من صنف كابوتو وفي هذه الحالة نستعمل كشروط ابتدائية:

$$y^{(k)}(0) = b_k, k = 0, 1, ..., n - 1 \qquad (2.3)$$

1.3 الوجود و الوحدانية

[16]
مبرهنة1.1.3 [9]
ليكن $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ و ليكن أيضا $k > 0; b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$ و $h* > 0$

نعرف $G = [0, h^*] \times [b_0 - k, b_0 + k]$ و لتكن الدالة المستمرة$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$، ومنه يوجد عدد حقيقي $h > 0$ و دالة $y \in C[0, h]$ حل للمعادلة التفاضلية الكسرية من صنف كابوتو بشروط ابتدائية.
من أجل $\alpha \in (0, 1)$ العنصر h يعطى بـ:$h = \min\left\{h^*, (\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{M})^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$حيث$M = \sup\limits_{(x,z)\in G} |f(x, z)|$ و أيضا fليبتشنزي بالنسبة للمتغير الثاني:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

مع $L > 0$ ثابت مستقل عن y_2, y_1 و xومنه الدالة $y \in C[0, h]$وحيدة.
لإثبات وجود و وحدانية حل المسألة بالشروط الابتدائية من صنف كابوتو نذكر التوطئة التالية:
(البرهان : أنظرص68 [10])
توطئة1.1.3 [9] من خلال فرضيات المبرهنة 1.3الدالة $y \in C[0, h]$ حل للمعادلة التفاضلية الكسرية من صنف كابوتو (1.3)بالشروط الابتدائية (2.3) إذا وفقط إذا كانت حل لمعادلة فولتيرا من الصنف 2:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt$$

سنستعمل هذه النتيجة لإثبات المبرهنة 1.3
توطئة1.1.3 [9]
من خلال فرضيات المبرهنة1.3، معادلة فولتيرا:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}b_k+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \tag{3.3}$$

لها حل وحيد $y\in C\,[0,h]$

البرهان[9]

البرهان

البرهان مقسم إلى جزئين، نعتبر الحالة$\alpha>1$ ثم الحالة $\alpha\in(0,1)$.

و هذا مرتبط بمعادلة فولتيرا (3.3) التي تملك نواة شاذة $(x-t)^{\alpha-1}$ في حالة $\alpha\in(0,1)$ أما في الحالة الأخرى النواة مستمرة

- الحالة $\alpha>1$

المعادلة (3.3) لها نواة مستمرة و الدالة خارج مجال التكامل مستمرة. ومنه وجود الحل يعتمد مباشرة على استخدام الطرق الاعتيادية لبرهنة معادلات فولتيرا. ومن أجل الوحدانية نستخدم شرط ليبشيز [21]

- الحالة $\alpha\in(0,1)$

1.1.3 الوجود

تلخص معادلة فواتيرا (3.3) إلى

$$y(x)=b_0+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt$$

لبرهان وجود الحل نعرف المجموعة: $U=\{y\in C\,[0,h]:\|y-b_0\|\le k\}$

من الواضح بأنها جزء مغلق و محدب من فضاء بناخ من أجل جميع الدوال المستمرة على $[0,h]$ المزودة بنظيم تشيبيتشاف$\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le h}|f(x)|$. و أيضا Uليست خالية فالدالة الثابتة $y=b_0\in U$.

نعرف على U المؤثر A

$$(Ay)(x)=b_0+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt$$

ومنه تصبح المعادلة من الشكل: $Ay=y$

و لإثبات وجود الحل يجب إثبات أن المؤثر A له نقطة صامدة.

بالنظر إلى خصائص A:

1- Aيحول من U إلى U

من أجل$y\in U;x\in[0,h]$ لدينا:

$$\begin{aligned}\left|(Ay)(x)-y_0^{(0)}\right| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_\infty h^\alpha \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_\infty \tfrac{k\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} = k\end{aligned}$$

إذن $Ay \in U$ إذا كان $y \in U$ومنه A يحول Uإلى U

2- **الاستمرارية**

نلاحظ أنه من أجل $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$:

$$\begin{aligned}|(Ay)(x_1)-(Ay)(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{x_1}(x_1-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt - \int_0^{x_2}(x_2-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt\right| \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{x_1}((x_1-t)^{\alpha-1}-(x_2-t)^{\alpha-1})dt - \int_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{\alpha-1}dt\right| \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(2(x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha)\end{aligned} \tag{4.3}$$

إذن Ay تطبيق مستمر

3- $A(U)$ **مجموعة متراصة نسبيا**

لدينا:$A(U)=\{Au : u \in U\}$

- **المحدودية**

من أجل $z \in A(U)$ نجد أنه من أجل كل $x \in [0,h]$:

$$\begin{aligned}|z(x)| = |(Ay)(x)| &\leq |b_0| + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t,y(t))|dt \\ &\leq |b_0| + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_\infty h^\alpha\end{aligned}$$

إذن AU محدود

- **تساوي الاستمرارية**

من أجل$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$ ومن خلال 2

$$\begin{aligned}|(Ay)(x_1)-(Ay)(x_2)| &\leq \tfrac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(2(x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha) \\ &\leq 2\tfrac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(x_2-x_1)^\alpha\end{aligned}$$

إذا كان $|x_2 - x_1| < \delta$ إذن: $|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\delta^\alpha$ مستقل عن y
إذن من خلال نظرية أرزيلا-أسكولي 6.1 AU متراص نسبيا
مبرهنة شودر 7.1 تؤكد لناأن A له نقطة صامدة ،بمعنى أن المسألة بقيم إبتدائية لها حل.

2.1.3 الوحدانية

لإثبات الوحدانية سنستخدم مرة أخرى المؤثر A ، نذكر أنه يحول المجموعة غير الخالية ،المحدبة و المغلقة $U = \{y \in C[0,h] : \|y - b_0\| \leq k\}$ إليه.
نبرهن الأن على أنه يملك نقطة ثابتة وحيدة، نثبت أولا أنه من أجل كل $j \in \mathbb{N}$ و من أجل كل $x \in [0,h]$ لدينا:

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} \tag{5.3}$$

نبرهن بالتراجع:
من أجل $j = 0$ ، المتراجحة محققة.
من المرحلة $j - 1 \to j$ نكتب:

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} = \|A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y})\|_{L_\infty[0,x]}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0\leq w\leq x} \left| \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} \left[f(t, A^{j-1}y(t)) - f(t, A^{j-1}\tilde{y}(t))\right] dt \right|$$

في المرحلة االتالية نستخدم الشرط f ليشبيزية من خلال الفرضية التراجعية نجد:

$$\begin{aligned}
\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0\leq w\leq x} \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} \left|A^{j-1}y(t) - A^{j-1}\tilde{y}(t)\right| dt \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup_{0\leq w\leq t} \left|A^{j-1}y(w) - A^{j-1}\tilde{y}(w)\right| dt \\
&\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} \sup_{0\leq w\leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)|\, dt \\
&\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0\leq w\leq x} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} dt \\
&= \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \|y - \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} x^{\alpha j}
\end{aligned}$$

نأخذنظيم تشيبيتشاف على المجال $[0,h]$:

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L\infty[0,x]}$$

تمت البرهنة على فرضيات النظرية (7.1) حيث: $\alpha_j = \frac{L(x^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha_j)}$ لاستخدام هاته المبرهنة، يجب التأكد أن السلسلة $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha j$ متقاربة، و هذا يعتمد على الخاصية 3 من المبرهنة 5.1
و لهذا نستطيع تطبيق مبرهنة ويسنجر 7.1 النقطة الصامدة وبهذا نبرهن على وجود حل وحيد للمعادلة التفاضلية.

3.1.3 الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية الكسرية باستعمال تحويل لابلاس

في هذا الجزء نطرح الحل الدقيقي لعدة معادلات تفاضلية خطية برتب كسرية بمفهوم كابوتو باستعمال تحويل لابلاس

مبرهنة 1.4.3 [15]
لتكن المعادلة التفاضلية الخطية برتبة كسرية الغير متجانسة الأتية:

$$ {}^{C}D^{\alpha}y(x) - ay(x) = h(x); \qquad n-1<\alpha<n; \quad n\in\mathbb{N} \tag{6.3}$$

$$ y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0,1,.....,n-1 $$

الحل الدقيق لـ (6.3) يعطى بـ:

$$ y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha,k+1}(ax^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(a(x-t)^\alpha)h(t)dt \tag{7.3}$$

البرهان
نأخذ تحويل لابلاس لـ (6.3) من الجهتين نتحصل:

$$ \begin{aligned} s^\alpha Y(s) - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0) - aY(s) = H(s) \\ Y(s)(s^\alpha - a) = H(s) + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}b_k \\ Y(s) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^\alpha - a)} + \frac{H(s)}{(s^\alpha - a)} \end{aligned} \tag{8.3}$$

بتطبيق التحويل العكسي لابلاس على (8.3) و باستخدام (8.1) نتحصل على الحل الدقيق مثلما ذكر في (7.3)

مثال
نعتبر المعادلة التفاضلية الغير متجانسة التالية:

$$ D^{\frac{1}{2}}y(x) - 2y(x) = x \ ,0<\alpha\le 1, y(0) = 1 $$

الحل الدقيق يعطى حسب المبرهنة 3.1.3 بـ:

$$y(x)=E_{\frac{1}{2},1}(2x^{\frac{1}{2}})+\int\limits_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2(x-t)^{\frac{1}{2}})tdt$$

بوضع $s=x-t$ نجد: $y(x)=E_{\frac{1}{2},1}(2x^{\frac{1}{2}})+\int\limits_0^x s^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2s^{\frac{1}{2}})(x-s)ds$

باستعمال (13.1) نجد:

$$y(x)=E_{\frac{1}{2},1}(2x^{\frac{1}{2}})+\Gamma(3)x^{\frac{5}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{7}{2}}(2x^{\frac{1}{2}})$$

2.3 الطرق العددية لحل معادلة تفاضلية كسرية

في هذا الجزء سنقدم الطرق الكسرية لاولر و طريقة الفروق المنتهية والتي تستخدم لحل معادلة تفاضلية كسرية بدلالة الزمن.

نسجل $t_n=nh; n=0,1,2,....,N$ حيث $h=\frac{T}{N}$ حجم الخطوة، و $N>0$ عدد صحيح، $T>0$.

ليكن U_n الحل التقريبي لـ $U(t_n)$ عند $t=t_n$

في كل ما سيأتي نقدم الطرق العددية الكسرية من أجل المسألة.

حيث أن:

- الصيغة المستطيلة الكسرية على اليسار

في كل جزء $[t_k,t_{k+1}]$ حيث $k=0,1,....,n-1$ الدالة $f(t)$ تقرب بالقيمة $f(t_k)$

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{-\alpha}f(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}f(s)ds\\
&\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}f(t_k)ds\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}b_{n-k-1}f(t_k)
\end{aligned}$$

حيث: $b_k=\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[(k+1)^\alpha-k^\alpha]$

ومنه

$$ {}^{R}D^{-\alpha}f(t_n)\approx\sum_{k=0}^{n-1}b_{n-k-1}f(t_k), b_k=\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[(k+1)^\alpha-k^\alpha] \qquad (9.3)$$

- الصيغة المستطيلة الكسرية على اليمين:

في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ حيث $k = 0, 1, ..., n-1$ الدالة $f(t)$ تقرب بالقيمة $f(t_{k+1})$ بنفس الطريقة نجد :

$$ {}^{R}D^{-\alpha} f(t_n) \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k+1), b_k = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[(k+1)^\alpha - k^\alpha] \tag{10.3} $$

الان ندخل المؤثر التكاملي لريمان ليوفيل على الطرفين لـ (1.3) فنتحصل على:

$$ {}^{R}D_0^{-\alpha C}D_0^{\alpha} u(t) = {}^{R}D_0^{-\alpha} f(t, u(t)) $$

من خلال (10.2) و1.3.2 لدينا:

$$ u(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^{(j)} = {}^{R}D_0^{-\alpha} f(t, u(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds $$

إذن:

$$ u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^{R}D_0^{-\alpha} f(t, u(t)) \tag{11.3} $$

1.2.3 الطرق الكسرية لاولر

[6]

1- طريقة اولر الكسرية إلى اليسار:

لدينا : $\left[{}^{R}D_0^{-\alpha} f(t, u(t))\right]_{t=t_n}$ قربت بالصيغة الكسرية المستطيلية على اليسار بـ:

$$ \begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j; u_j) \\ b_{j,n+1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha] \end{aligned} \tag{12.3} $$

2- طريقة اولر الكسرية إلى اليمين:

لدينا : $\left[{}^{R}D_0^{-\alpha} f(t, u(t))\right]_{t=t_n+1}$ قربت بالصيغة الكسرية المستطيلية على اليمين بـ:

$$ \begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j+1; u_j+1) \\ b_{j,n+1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha] \end{aligned} \tag{13.3} $$

2.2.3 طريقة الفروق المنتهية

[17]

صيغة الفروق المنتهية باستخدام متسلسلة تايلور:

صيغة تايلور: لتكن g دالة قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة على المجال$[a,b]$ حيث $x_0 \in [a,b]$.
من أجل كل $x_0 \in [a,b]$ يوجد ξ بين العددين xوx_0 حيث:

$$\begin{aligned}
&g(x) = g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)(x-x_0) + \frac{d^2g}{dx^2}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{d^3g}{dx^3}(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots\dots\\
&+\frac{d^ng}{dx^n}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1}g}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{(x-x_0)}{(n+1)!}\\
&R(\xi) = \frac{d^{n+1}g}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{(x-x_0)}{(n+1)!}
\end{aligned} \tag{14.3}$$

تقريب المشتقة الأولى للدالة g بالفروق المنتهية إلى الأمام بثلاث نقط

بوضع $x_j = x_0 + jh$ في (14.3)

إذا كان $x = x_{j+1}$ و $x_0 = x_j$ فإن:

$$\begin{aligned}
&g(x_{j+1}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1}-x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{(x_{j+1}-x_j)^3}{3!}\\
&= g(x_j) + g'(x_j)h + g''(x_j)\frac{h^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{h^3}{3!}
\end{aligned} \tag{15.3}$$

إذا كان $x = x_{j+2}$ و $x_0 = x_j$ فإن:

$$\begin{aligned}
&g(x_{j+2}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+2}-x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+2}-x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2)\frac{(x_{j+2}-x_j)^3}{3!}\\
&= g(x_j) + g'(x_j)\,(2h) + g''(x_j)\frac{(2h)^2}{2!} + g'''(\xi_2)\frac{(2h)^3}{3!}
\end{aligned} \tag{16.3}$$

بضرب (15.3) في (-4) والجمع مع (16.3) نجد:

$$g'(x_j) = \frac{-3g(x_j) + 4g(x_{j+1}) - g(x_{j+2})}{2h} - \frac{2h^2}{3!}g''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}g'''(\xi_2) \tag{17.3}$$

حيث الخطأ=$-\frac{2h^2}{3!}g''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}g'''(\xi_2) = O(h^2)$

تقريب المشتقة الثانية للدالة g بالفروق المنتهية إلى الأمام بثلاث نقط

إذا كان $x = x_{j+1}$ و $x_0 = x_j$ فإن:

$$\begin{aligned}
&g(x_{j+1}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1}-x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{(x_{j+1}-x_j)^3}{3!}\\
&= g(x_j) + g'(x_j)h + g''(x_j)\frac{h^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{h^3}{3!}
\end{aligned} \tag{18.3}$$

إذا كان $x = x_{j+2}$ و $x_0 = x_j$ لدينا من خلال (14.3) فإن:

$$g(x_{j+2}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+2} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2)\frac{(x_{j+2} - x_j)^3}{3!}$$
$$= g(x_j) + g'(x_j)\,(2h) + g''(x_j)\frac{(2h)^2}{2!} + g'''(\xi_2)\frac{(2h)^3}{3!} \quad (19.3)$$

بضرب (18.3) في(-2) واجمع مع (19.3) نجد:

$$g''(x_j) = \frac{g(x_j) - 2g(x_{j+1}) + g(x_{j+2})}{h^2} - \frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) + \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) \quad (20.3)$$

حيث الخطأ=$-\frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) + \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) = O(h)$

تقريب المشتقة الثانية للدالة g بالفروق المنتهية إلى الخلف بثلاث نقط

إذا كان $x = x_{j-1}$ و $x_0 = x_j$ فإن:

$$g(x_{j-1}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{3!}$$
$$= g(x_j) + g'(x_j)h + g''(x_j)\frac{h^2}{2!} + g'''(\xi_1)\frac{h^3}{3!} \quad (21.3)$$

إذا كان $x = x_{j-2}$ و $x_0 = x_j$

لدينا من خلال (14.3)

$$g(x_{j-2}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-2} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j-2} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2)\frac{(x_{j-2} - x_j)^3}{3!}$$
$$= g(x_j) - g'(x_j)\,(2h) + g''(x_j)\frac{(2h)^2}{2!} - g'''(\xi_2)\frac{(2h)^3}{3!} \quad (22.3)$$

بضرب (21.3) في(-2) واجمع مع (22.3) نجد:

$$g''(x_j) = \frac{g(x_{j-2}) - 2g(x_{j-1}) + g(x_j)}{h^2} + \frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) - \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) \quad (23.3)$$

حيث الخطأ=$\frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) - \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) = O(h)$

تقريب المشتقة الثانية للدالة g بالفروق المنتهية المركزية بثلاث نقط

إذا كان $x = x_{j+1}$ و $x_0 = x_j$ من خلال (14.3)

$$g(x_{j+1}) = g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + g'''(x_j)\frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!}$$
$$+\frac{(x_{j+1} - x_j)^4}{4!}g''''(\xi_1) \quad (24.3)$$
$$= g(x_j) + g'(x_j)h + g''(x_j)\frac{h^2}{2!} + g'''(x_j)\frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1)$$

إذا كان $x = x_{j-1}$ و $x_0 = x_j$ إذن

$$\begin{aligned} g(x_{j-1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j-1}-x_j)^2}{2!} + g'''(\xi)\frac{(x_{j-1}-x_j)^3}{3!} \\ &+ \frac{(x_{j-1}-x_j)^4}{4!} g''''(\xi_2) \\ &= g(x_j) - g'(x_j)\, h + g''(x_j)\frac{h^2}{2!} - g'''(\xi)\frac{h^3}{3!} + g''''(\xi_2)\frac{h^4}{4!} \end{aligned} \tag{25.3}$$

نجمع (24.3) و(25.3) فنجد

$$g''(x_j) = \frac{g(x_{j-1}) - 2g(x_j) + g(x_{j+1})}{h^2} - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1) - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_2) \tag{26.3}$$

حيث الخطأ=$\frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1) - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_2) = O(h^2)$

- **تقريب المشتقة الكسرية بطريقة الفروق المنتهية**

نظرية1.2.3[18]
لنفترض أن المجال $[a,b]$ مقسم إلى مجالات جزئية$[x_k, x_{k+1}]$بخطوة $h = \frac{b-a}{n}$ نستخدم العقد المتباعدة بشكل متساو$x_k = a + kh$ من أجل $k = 0, 1, 2, ..., n$
يمكن التعبير عن القاعدة شبه المنحرفة المتكونة من n مجال جزئي بالعلاقة:

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \tag{27.3}$$

و هذا تقريب لتكامل الدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ حيث

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f,h) \tag{28.3}$$

ولهذا لدينا:

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}y(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{y'(x)}{(t-x)^{\alpha}}dx \\ 0 < \alpha &< 1, t \geq 0 \end{aligned}$$

نكامل بالتجزئة نستنتج ما يلي:

$${}^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left(y'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{1-\alpha}y''(x)dx\right)$$

نستخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة (27.3) (28.3) لتقدير التكامل:

نضع $f(x) = \int_0^t (t-x)^{1-\alpha}y''(x)dx$

ومنه:

$$\int_0^t (t-x)^{1-\alpha} y''(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[(t-x_{j-1})^{1-\alpha}y''(x_{j-1}) + (t-x_j)^{1-\alpha}y''(x_j)\right]$$
$$\approx \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(t-x_{j-1})^{1-\alpha}y''(x_{j-1}) + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(t-x_j)^{1-\alpha}y''(x_j) \tag{29.3}$$
$$\approx \frac{h}{2}\left[(t-x_0)^{1-\alpha}y''(0) + (t-x_n)^{1-\alpha}y''(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(t-x_j)^{1-\alpha}y''(x_j)\right]$$

إذن:

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{h\left[(t-x_0)^{1-\alpha}y''(0) + (t-x_n)^{1-\alpha}y''(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(t-x_j)^{1-\alpha}y''(x_j)\right]}{2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(t-x_0)^{1-\alpha}y'(0)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \tag{30.3}$$

بوضع $y(x_j) = y_j$ من خلال (17،3) ، (23،3) و (26،3) نجد:

$$y'_j \approx \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h}$$
$$y''_j \approx \frac{y_{j-2} - 2y_{j-1} + y_j}{h} \tag{31.3}$$
$$y''_j \approx \frac{y_{j-1} - 24y_j - y_{j+1}}{h}$$

إذن:

$$y'_0 \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$
$$y''_0 \approx \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h} \tag{32.3}$$
$$y''_0 \approx \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} - y_n}{h}$$

ومنه:

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h}(t-x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} - y_n}{2h}(t-x_n)^{1-\alpha}\right] + \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{y_{j-1} - 2y_j - y_{j+1}}{h}(t-x_j)^{1-\alpha}\right] + \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-x_0)^{1-\alpha} \tag{33.3}$$

إذن:

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left[M_1 + \frac{h}{2}(M_2 + 2M_3 + M_4)\right] \tag{34.3}$$

حيث

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}(t - x_0)^{1-\alpha} \\
M_2 &= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h}(t - x_0)^{1-\alpha} \\
M_3 &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{y_{j-1} - 2y_j - y_{j+1}}{h}(t - x_j)^{1-\alpha} \right] \\
M_4 &= \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} - y_n}{h}(t - x_n)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

3.2.3 الطريقة التكرارية المتغيرة

في سنة 1978، اينوكتي $(Inokuti)$،سكين $(Sekine)$ ميرا $(Mura)$اقترحو طريقة مضروب لاغرنج لحل المعادلات التفاضلية الغير خطية في الميكانيك الكوانتية،مبدأ هاته الطريقة مثل مبدأ نيوتن في حل المعادلات جبرية.
طريقة(VIM) هي عبارة عن تحسين لطريقة مضروب لاغرنج. نعتبر المعادلة التفاضلية الأتية:

$$L(u)+N(u)=g(x)$$

حيث L مؤثر خطي معرف بـ$L=\frac{d^m}{dt^m}; m\in \mathbb{N}^*$ ، Nمؤثر غير خطي ، g دالة معلومة. الشروط الابتدائية معرفة كالتالي: $u^{(k)}(0)=c_k; k=0,1,...m-1$ حيث c_k معاملات حقيقية. نبني دالة تصحيحية من خلال الطريقة التكرارية المتغيرة التالية:

$$U_{n+1}=U_n+\int_0^x \lambda(t)(L(u_n(t)+N\widetilde{u_n}(t)-g(t))dt \qquad (35.3)$$

حيث λ مضروب لاغرنج المعمم، $u_n(t)$ يمثل التقريب من الرتبة n، $\widetilde{u_n}$ تغير متبقي بمعنى$\delta\widetilde{u_n}(t)=0$
ترتكز الطريقة على خطوتين أساسيتين :أولاً تحديد مضروب لاغرانج λ الذي قد يكون معرف بطريقة أمثلية من خلال التكامل بالتجزئة وباستخدام التغير المتبقي.
بعد تعريف λ ، الصيغة المتغيرة بدون التغير المتبقي تستخدم لتعريف التقريب $u_{n+1}(x); n\geq 0$ للحل $U(x)$.
التقريب صفر يمكن أن يكون أي دالة مختارة، نستخدم القيم الابتدائية $u(0),u'(0),u''(0),.....,u^{(k)}(0)$ لتقريب الصفر المختار u_0
في النتيجة يكون الحل الدقيق هو النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} U_n=U(x)$$

الطريقة التكرارية المتغيرة تعتمد على الخطوتين التاليتن:

1- تحديد مضروب لاغرنج:

إذا كان: $m=1, \lambda(t)=-1; u_0(x)=u(0)$

إذا كان: $m=2, \lambda(t)=t-x; u_0(x)=u(0)+xu'(0)$

في الحالة العامة :

$$\lambda(t)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(t-x)^{m-1};\ u_0(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}x^k;\ c_k=u^{(k)}(0)$$

2- تحديد الصيغة التكرارية:

$$U_{n+1}(x)=U_n(x)+\int_0^x \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(t-x)^{m-1}\left[Lu_n(t)+Nu_n(t)-g(t)\right]dt \qquad (36.3)$$

أساسيات

تمت دراسة التقارب بطريقة التكرارات المتغيرة للمعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم كابوتو من طرف زهيوي و البقية $(Zhiwi\, et\, all)$ [19] .

لتكن المسألة التالية:

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{0}^{\alpha}y\right)(t) = f(t, y(t)); n-1 < \alpha \le n \\ y^{(k)}(0) = y_0^k, k = 0, 1, ..., n-1 \end{cases} \tag{37.3}$$

حيث $t \in [a, b]$ ، $y^{(k)}(t)$ المشتق من الرتبة k لـ $y(t)$.

$f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبتشيز :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \le L\,|u_1 - u_2|\,; t > 0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

Lثابت ليبتشيز، نعرف النظيم $\|y\|_\infty = \max\limits_{0 \le t \le T} |y(t)|$

$\left({}^{C}D_{0}^{\alpha}y\right)(t)$ المشتق الكسري لكابوتو من أجل الأعداد الحقيقية α حيث $n-1 \le \alpha \le n$

نعرف المشتق الكسري لكابوتو من الرتبة α للدالة $f(t)$ على المجال$[a, b]$ كالتالي:

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f(t) = I_{a^+}^{n-\alpha}(D^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}dt \tag{38.3}$$

أثبت كل من ديثلم و أخرون $(Diethelm\, et\, al)$ [8] أن المسألة 3.2.3 تكافئ معادلة فولتيرا التكاملية التالية:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{39.3}$$

بوضع : $g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^j}{j!} y_0^{(j)}$ تحول 3.2.3 إلى الشكل:

$$y(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

من خلال فكرة Xu [20] و$Ghorbani\, et\, all$ [7] الطريقة التكرارية المتغيرة للمعادلة 3.2.3 كما يلي:

$$y_{n+1}(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau))d\tau \tag{40.3}$$

نستخدم القيم الابتدائية$y_0(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + ... + y_{n-1}t^{n-1}$ ثم نبدأ التكرار. القيمة y_n هي التكرار من الرتبةn، تقترب من الحل الدقيق للمسألة 3.2.3 من خلال : $y = \lim_{n\to\infty} y_n$

الفصل 4

تطبيق عددي

في هذا الفصل، سنقدم بعض الأمثلة مع الحل الدقيق لمعادلات تفاضلية كسرية. تم البحث عن الحل التقريبي باستخدام الطريقة التكرارية المتغيرة .
ثم مقارنة الحل الدقيق مع الحل التقريبي في كل حالة من خلال التمثيلات البيانية و جدول الأخطاء المطلقة.

مثال 01

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية:

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) + xu = 1.50451x^{1.5} + x^3 + x, & 0 \le x \le 1, \quad 0 < \alpha < 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

الحل الدقيق $u(x) = x^2 + 1$

$\alpha = 0.5$

جدول 01: الحل العددي باستخدام الطريقةالتكرارية المتغيرة (VIM) في الحالات: $n = 10, n = 20, n = 30$ و $\alpha = 0.5$

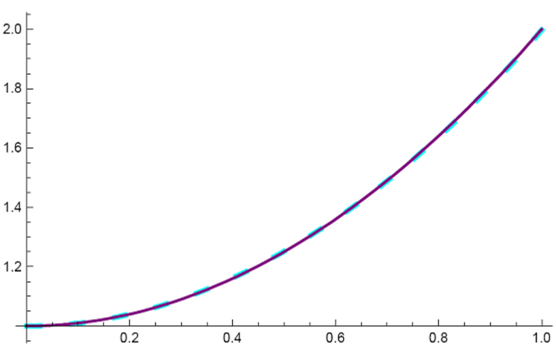
x_i	Sol Exacte	Sol Ap $n = 10$	Sol Ap $n = 20$	Sol Ap $n = 30$
0	1	1	1	1
0.1	1.01	1.00913	1.01003	1.01002
0.2	1.04	1.03968	1.0401	1.03999
0.3	1.09	1.09094	1.08996	1.08999
0.4	1.16	1.16179	1.15987	1.16001
0.5	1.25	1.2516	1.24993	1.25001
0.6	1.36	1.36031	1.36007	1.35999
0.7	1.49	1.48837	1.49018	1.48998
0.8	1.64	1.63659	1.64015	1.63999
0.9	1.81	1.80586	1.80998	1.81001
1	2	1.99689	1.99978	2.00002

جدول 02: تقدير الخطأ في الحالات: $n=10, n=20, n=30$ و $\alpha=0.5$

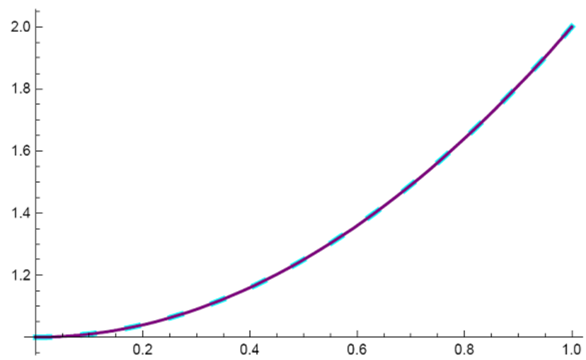
x_i	Err $n=10$	Err $n=20$	Err $n=30$
0	0	0	0
0.1	0.00087339	0.0000268	0.000018596
0.2	0.00032350	0.0000268	0.000014884
0.3	0.00094001	0.0000963	$6.167627960E-06$
0.4	0.00179166	0.0001277	0.00001422133
0.5	0.001600156	0.0000733	0.00001052215
0.6	0.000307642	0.0000698	$8.47748806109E-06$
0.7	0.001630798	0.0001757	0.0000179098
0.8	0.003411330	0.0001470	$6.404158311E-06$
0.9	0.004135065	0.00001940	0.0000149950
1	0.0031139520	0.00022468	0.000024357367

قدمنا هاته المقارنة بالاستعانة بالمنحنيات الأتية:

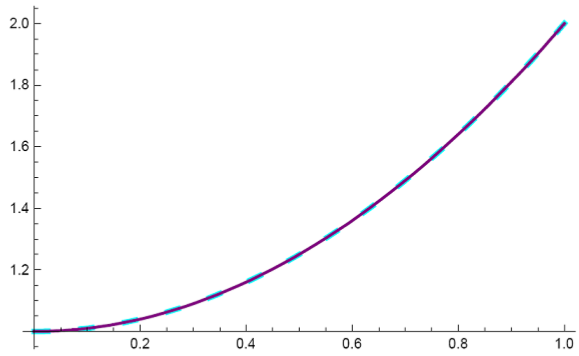
n=10



n=20



n=30



النتائج المتحصل عليها من خلال برنامج ولفرم ماتيماتيكا $Wolfram Mathematica$ باستخدم الطريقة التكرارية المتغيرة من أجل قيم مختلفة $n=10, n=20, n=30$ برتبة $\alpha=0.5$.

من خلال النتائج المدونة في الجدول 01 نلاحظ أنه كلما كانت n كبيرة كلما قل الخطأ أي اقترب الحل التقريبي من الحل الدقيق.

مثال 02

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية:

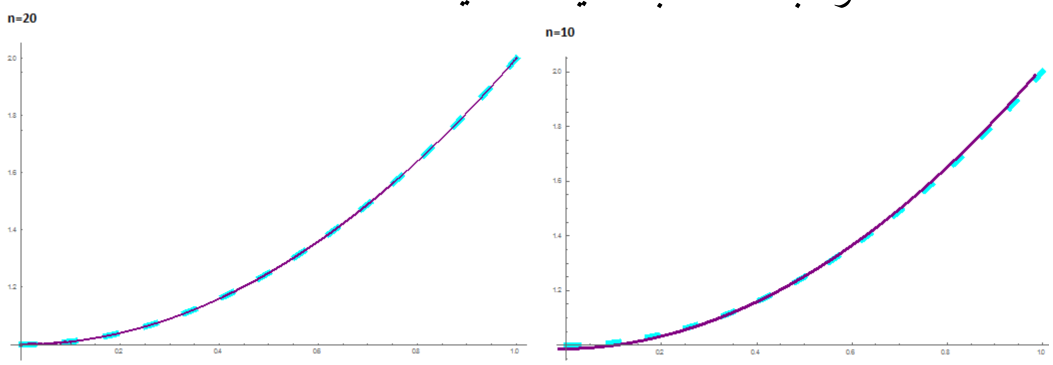
$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) + xu = 1.91116x^{1.1} + x^3 + x, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

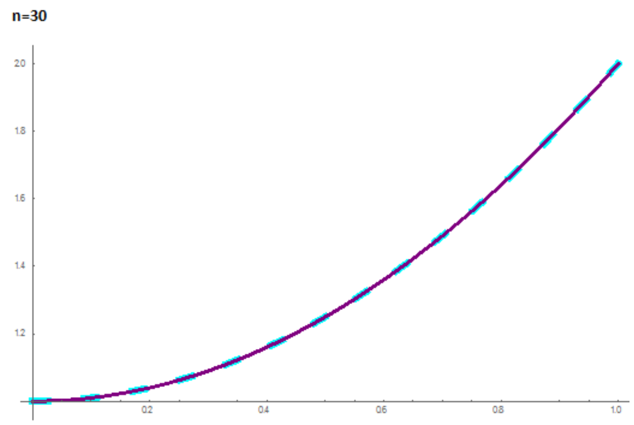
الحل الدقيق $u(x) = x^2 + 1$

جدول 03: تقدير الخطأ في الحالات: $n = 10, n = 20, n = 30$ و $\alpha = 0.9$

x_i	Err $n = 10$	Err $n = 20$	Err $n = 30$
0	0	0	0
0.1	$6.897E-9$	$8.504E-14$	$7.276E-12$
0.2	$1.056E-8$	$1.554E-15$	$6.386E-11$
0.3	$3.693E-8$	$1.168E-13$	$5.196E-11$
0.4	$1.693E-8$	$6.83E-13$	$4.708E-10$
0.5	$1.52E-8$	$5.029E-12$	$7.778E-11$
0.6	$8.051E-9$	$3.981E-12$	$7.311E-10$
0.7	$3.947E-8$	$7.654E-12$	$4.548E-9$
0.8	$4.694E-8$	$1.062E-11$	$5.642E-9$
0.9	$1.257E-9$	$1.491E-11$	$8.135E-9$
1	$1.012E-7$	$4.315E-11$	$3.44E-8$

قدمنا هاته المقارنة بالاستعانة بالمنحنيات الأتية:





نتائج الجدول 03 تمثل مقارنة بين الخطأ المطلق للحل التقريبي و الحل الدقيق للمثال 02 في مختلف الحالات $n = 10, 20, 30$ برتبة $\alpha = 0.9$ باستخدام الطريقة التكرارية المتغيرة.

نتائج الجدول 03 تثبت أنه يوجد توافق مقبول بين الحل التقريبي و الدقيق للمثال 02 ، فكلما كبرت n كلما اقترب الحل التقريبي من التطابق مع الحل الدقيق.

من خلال نتائج الجدول 01 و الجدول 02 و الجدول 03 نلاحظ فعالية الطرق العددية في الحصول على نتائج مقبولة.

الخاتمة

في هذا العمل، قدمنا بعض الطرق المستخدمة لحساب التقريبات العددية لحل المعادلات التفاضلية الكلاسيكية التي تم تطويرها لحل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية للصيغة:

$$^{C}D_0^{\alpha} - au(t) = g(t); 0 < \alpha < 1; u(0) = 0; t > 0$$

لقد حاولنا إعطاء حل تقريبي باستخدام الطرق الثلاث المدروسة (طريقة أولر إلى الأمام، طريقة الفرووق المنتهية،الطريقة التكرارية المتغيرة) وأنهينا العمل بدراسة أمثلة عددية باستخدام الطريقة التكرارية المتغيرة كنموذج.
لاحظنا فعالية الطريقة التكرارية المتغيرة خاصة في المثال الثاني في حالة$\alpha = 0.9$ فلقد أعطت نتائج مقبولة.
نعتزم في المستقبل ، تطبيق الأساليب المذكورة في هذه الأطروحة على معادلات اخرى ، وتطوير طرق عددية أخرى لحل المعادلات التفاضلية بمشتقات كسرية ، أكثر دقة من تلك المقترحة في هذه الأطروحة.

المراجع العلمية

[1] Arvet Pedas and Enn Tamme .Numerical solution of nonlinear fractional differential equations by spline collection methods.Journal of comptational and Applied Mathrmatics,255:216-260,2014.

[2] Stegun I.A.Abramowitz M.Handbook of Mathemathical Functions. 9 edition,1964.

[3] Ignor Podlubny and Kenneth V. Thimann (Eds). Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Mathematics in science and engineering 198. Academic Press, 1st edition, 1999.

[4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (Auth.). Table of Integrals, Series, and Products. Elsevier Inc, Academic Press Inc, 2nd edition, 1980.

[5] Eric Weisstein. 'Erfc.'From MathWorld A Wolfram Web Resource, 2020 (accessed February 3, 2020). https://mathworld.wolfram.com/Erfc.html.

[6] Changpin Li and Fanhai Zeng. Numerical methods for fractional calculus, volume 24. CRC Press, 2015.

[7] Ghorbani.A,Nadjufi.J.S,"An effective modification of He's variational iteration method",Nonl.Anal.real W.Appl,10,(2009),2828-2833.

[8] Kai Diethelm (auth.). The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Lecture Notes in Mathematics 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2010.

[9] Marc Weilbeer. Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. Papierflieger, 2005.

[10] Tellab Brahim. Résolution des équations différentiel les fractionnaires. Université des Frères Mentouri Constantine -1, faculté des sciences exactes edition, 2018.

[11] Saeed Kazem. Exact solution of some linear fractional differential equations by laplace transform. International Journal of Nonlinear Science, 16(1) :3–11, 2013. de statistique mathématique, Édition de Moscou, 1978.

[12] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. Geophysical Journal International, 13(5) :529–539, 1967.

[13] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", fractional calculus and applied analysis, vol.5, number 4, 2002.

[14] H Eduardo Roman and Massimiliano Giona. Fractional diffusion equation on fractals : three-dimensional case and scattering function. Journal of Physics A : Mathematical and General, 25(8) :2107, 1992.

[15] Hari M. Srivastava Anatoly A. Kilbas and Juan J. Trujillo (Eds.). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, 1 edition, 2006.

[16] HOUMOR Tarek. Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentiel les Fractionnaires. Université des Frères Mentouri Constantine -1, faculté des sciences exactes edition, 2014.

[17] Ramzi B Albadarneh, Mohammad Zerqat, and Iqbal M Batiha. Numerical solutions for linear and non-linear fractional differential equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 106(3) :859–871, 2016.

[18] Ramzi B Albadarneha, Iqbal M Batihab, and Mohammad Zurigatb. Numerical solutions for linear fractional differential equations of order 1< < 2 using finite difference method (ffdm). Int. J. Math. Comput. Sci, 16(1) :103–111, 2016.

[19] Wem.Z,Yi.J,Liu.H ,"Convergence Analysis of Variational Iteration Method for Caputo Fractional Differential Equations",V.324 of the series Commu. in Comp and Inf Sci,Asia Sim,(2012),2506-2509.

[20] XU.L,"The variational iteration method for solving integral equations",Comp.Math Appl,54,(2007),1071-1078.

[21] Richard K Miller and Richard Kendall Miller. Nonlinear Volterra integral equations. Number 48. WA Benjamin, 1971