République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse Numérique**

Par:

LAIFA Yasmine
Et
BAKOUCHE Hamza

Intitulé

Méthode de Rothe appliquée a une équation différentielle fractionnaire.

Dirigé par : Dr. REZGUI Nassima

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr. HITTA Amara**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. REZGUI Nassima**	**M.C.B**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. FERNANE Khaireddine**	**M.C.A**	**Univ-Guelma**

Session Juillet 2021

Table des matières

Résumé en arabe

Résumé

Dans ce mémoire, nous appliquons la méthode de discrétisation de Rothe pour l'étude d'une équation différentielle fractionnaire semi-linéaire. Après avoir construit le schéma d'approximation correspondant, nous utilisons quelques propriétés des semi-groupes pour démontrer les estimations a priori nécessaires qui nous permettent d'établir l'existence et l'unicité de la solution forte. Par la suite, nous montrons la stabilité et la dépendance continue de la solution des données initiales.

Mots clés : Méthode de Rothe, équation différentielle fractionnaire, estimations a priori, solution forte.

Abstract

In this work, we apply Rothe's discretization method for the study of a semi-linear fractional differential equation. After having constructed the corresponding approximation scheme, we use some properties of the semi-groups to prove the necessary a priori estimates which allow us to establish the existence and the uniqueness of the strong solution. Thereafter, we show the stability and the dependence of the solution on the initial data .

Keywords : Rothe's method, fractional differential equation, a priori estimate, strong solution.

Chapitre 1

Introduction

La théorie des dérivées fractionnaires d'ordre non entier remonte à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz concernant le sens de la dérivée d'ordre un demi. Depuis ce jour, plusieurs mathématiciens comme : Euler, Riemann, Liouville et d'autres, ont montré leurs grand intérêt pour ce nouveau domaine. La différenciation et l'intégration fractionnaires sont la généralisation de la différenciation et l'intégration ordinaire à un ordre non entier arbitraire. Ainsi, le calcul fractionnaire est devenu un outil puissant qui joue un rôle important dans l'étude des oscillations non linéaires des tremblements de terre et dans la modélisation de nombreux problèmes. Les équations différentielles fractionnaires ont été appliquées à l'ingénierie, à la physique, aux problèmes de traitement du signal et de dynamique fractionnaire,...,. Récemment ils ont démontré que l'usage des nouveaux modèles d'ordre fractionnaire est plus adapté pour la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et représente plus d'avantages par rapport aux modèles classiques d'ordre entier dans lesquels de tels effets sont en fait négligés [4, 12].

Ce mémoire, est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité, d'une équation différentielle fractionnaire semi-linéaire dans un espace de Banach X, définie par

$$D^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(t, u(t)),\ t \in (0, T], \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

où $D^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ désigne la dérivée fractionnaire usuel de Riemann-Liouville d'ordre α, $-A : D(A) \subset X \to X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans X.

$D(A)$ est le domaine de A et $u_0 \in D(A)$. f est une application continue de $I \times\ D(A)$ dans X, où $I = [0, T]$, $f_0 = f(0, u_0)$.

Les équations différentielles fractionnaires impliquant l'opérateur différentiel de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$, sont d'une grande importance dans de nombreux problèmes physiques. Elles méritent donc une étude indépendante parallèle à la théorie bien connue des équations différentielles ordinaires [8].

Zhou [28] a utilisé le théorème du point fixe de Schauder pour établir l'existence et l'unicité des solutions du système d'équations différentielles fractionnaires suivant

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

où $D^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo.

Depuis 1948, la théorie des semi-groupes et ses applications ont fait un grand progrès dans l'analyse fonctionnelle des opérateurs. Ces résultats fondamentaux ont été obtenus par le mathématicien américain E. HILLE. Par la suite, cette théorie a été largement étudiée par plusieurs mathématiciens (K. Yosida,W. Feller et P. S. Phillips) dans le but de la généraliser et de la développer pour des objectifs plus élargis. Ainsi, la théorie des semi-groupes est devenue un outil indispensable dans un grand nombre de domaines de l'analyse moderne dû à son rôle important dans les problèmes d'évolution. La motivation essentielle de la théorie des semi-groupes réside dans le fait qu'elle permet de généraliser le concept de la matrice de transition, connu dans le cas des systèmes de dimension finie, à des opérateurs défini sur des espaces de dimension infinie [3, 26].

Wang et Zhou [17] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution faible et ils ont établi le contrôle optimal dans la α- norme en utilisant le calcul fractionnaire, la version singulière de l'inégalité de Gronwall et le théorème du point fixe de Leray-Schauder pour les équations d'évolution fractionnaires semi-linéaires suivantes

$$D^q x(t) = -Ax(t) + f(t, x(t)),\ t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0,$$

où D^q est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < q < 1$ $-A : D(A) \to X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique compact d'opérateurs linéaires uniformément bornés.

$f : J \times\ X_\alpha \to X$ est nue fonction localement Lipschitzienne continue dans X_α. Ici $X_\alpha = D(A^\alpha)(0 < \alpha < 1)$ est un espace de Banach de norme $\| x \|_\alpha = \| A^\alpha x \|$ pour $x \in X_\alpha$.

L'approximation de dérivées fractionnaires est traitée dans la référence [12].

Dans ce mémoire, notre objectif est d'utiliser la méthode de Rothe, connue sous le nom de méthode de semi-discrétisation en temps ou la méthode des lignes, pour prouver l'existence et l'unicité de la solution forte d'une équation différentielle fractionnaire semi-linéaire et d'étudier la dépendance continue de la solution des données initiales ainsi que la stabilité de la solution.

Depuis 1930, divers types classiques de problème de valeur limite ont été étudiés par de nombreux auteurs en utilisant la méthode de discrétisation en temps ou méthode de Rothe comme en [14] et [20].

La méthode de discrétisation en temps est un outil très efficace pour l'étude d'une solution approximative et sa convergence vers la solution du problème. Cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs pour étudier les solutions des problèmes de Cauchy abstraits avec des conditions classiques. On trouve plus d'applications de la méthode de Rothe aux problèmes aux limites paraboliques, dans les références [7, 11, 15, 19, 22].

Dans la méthode de Rothe, nous remplaçons la dérivée en temps par les quotients de différences correspondants et nous obtenons un système d'équations indépendant du temps. En utilisant les propriétés des semi-groupes en particulier la m-accrétivité de l'opérateur, ces systèmes sont garantis d'avoir des solutions uniques. En utilisant ces solutions approximatives, nous définissons les suites de Rothe. Après avoir prouvé quelques estimations a priori pour les solutions approchées, nous prouvons la convergence de la suite de Rothe vers la solution unique du problème donné.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Nous commençons par une introduction générale.

Dans le second chapitre, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle, calcul fractionnaire ainsi que quelques lemmes et théorèmes utiles.

Au troisième chapitre, nous donnons quelques définitions, théorèmes et lemmes concernant les semi-groupes qui ont été utilisé dans ce mémoire.

Dans le dernier chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution forte de l'équation différentielle fractionnaire donnée. On commence par faire les hypothèses nécessaires, on donne le concept précis de la solution forte et on traite la discrétisation de l'équation différentielle fractionnaire semi-linéaire en utilisant la méthode de Rothe. Ensuite, on déduit quelques estimations a priori des approximations et nous prouvons le résultat principal de ce travail.

Finalement, nous montrons l'unicité de la solution ainsi que la stabilité et la dépendance continue de la solution des données initiales.

Chapitre 2

Préliminaires

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur quelques notions de bases fondamentales d'analyse fonctionnelle, définitions élémentaires et théorèmes essentiels. Le choix étant réduit aux définitions et aux propriétés introduites dans ce mémoire.

La majorité des rappels énoncés dans ce chapitre sont tirés des références [10, 12, 24 et 25].

2.1 Espaces de Banach

Définition 2.1 *Une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \forall u \in X. \\ \|\lambda.u\| = |\lambda| \|u\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in X. \\ \forall u, v \in X : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{cases}$$

Le couple $(X, \|.\|)$ est alors appelé un espace vectoriel normé.

Définition 2.2 *(suite de Cauchy) On dit qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace normé X*

est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geq N \ et \ q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Remarque 2.1 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 2.3 *L'espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 2.4 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé et complet.*

Définition 2.5 *Soit X un espace vectoriel normé .$L(.)$ est une forme linéaire continue sur X, c'est à dire que $u \rightarrow L(u)$ est linéaire de X dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que $|L(u)| \leq C\|u\|$ pour tout $u \in X$.*

Définition 2.6 *Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On appelle forme bilinéaire sur X toute application*

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \rightarrow a(u,v)$$

linéaire par rapport à chaque variable, de plus $a(.,.)$ est continue, s'il existe $M > 0$ tel que $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$ pour tout $u, v \in X$..

Définition 2.7 *Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual(l'espace des formes linéaires et continues sur X).*

Pour tout $x \in X$ on définit l'application de dualité J par

$$J(x) = \{x^* \ : x^* \in X^* et \langle x^*, x\rangle = \| x \|^2 = \| x^* \|^2\},$$

où $\langle x^*, x\rangle$ désigne la valeur de x^* on x.

Définition 2.8 *Soit u une fonction définie d'un ensemble X dans un ensemble Y.*

(u est continue en a) $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X;\ \|x - a\|_X < \delta : \|u(x) - u(a)\|_Y \leq \varepsilon)$.

Définition 2.9 *Soit u une fonction de X dans Y .On dit que u est Lipschizienne par rapport à $k > 0$ si pour tout x, y de X.*

$$\|u(x) - u(y)\|_Y \leq k \|x - y\|_X).$$

2.2 Inégalité de Gronwall

Lemme 2.1 (Inégalité de Gronwall (forme continue)) *Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a, b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) \, ds,$$

alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) \, du\right) ds$$

Preuve. Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s) y(s) \, ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée par $\psi(t)$, on obtient

$$F'(t) - \psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)\exp(-\int_a^t \psi(s)\,ds),$$

avec $G(t) = F(t)\exp(-\int\limits_a^t \psi(s)ds)$. Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int\limits_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp(-\int\limits_a^s \psi(u)du)ds.$$

Or, par hypothèse, $y(t) \leq \varphi(t) + G(t)\exp(\int\limits_a^t \psi(s)ds)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci dessus. ■

On utilise parfois le lemme de Gronwall dans le cas particulier suivant :

Corollaire 2.1 *Soient ψ et $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant*

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ y(t) \leq c + \int\limits_a^t \psi(s)y(s)ds,$$

alors

$$\forall t \in [a,b] \qquad y(t) \leq c\exp(\int\limits_a^t \psi(s)ds),\ \forall t \in [a,b].$$

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est la fonction constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds = c + c\left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)\right]_a^t = c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Gronwall (forme discrète))

$$\gamma_n \geq 0, \alpha_n \geq \alpha_{n\ -1}, \beta_j \geq 0 \ et\ \gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \gamma_j,\ \ n \geq 0,$$

alors

$$\gamma_n \leq \alpha_n exp(\sum_{j=1}^{n} \beta_j).$$

2.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous rappelons quelques notions qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire. Nous allons définir les intégrales et les dérivées fractionnaires, en particulier celles de Riemann-Liouville ainsi que quelques propriétés utiles.

2.3.1 Fonction gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui généralise le factoriel $n!$ et permet à n de prendre des valeurs non entiers et même complexes.

Définition 2.10 *L'intégrale d'Euler du second type*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,\ \ Re(z) > 0,$$

est appelée la fonction gamma, avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0_+) = +\infty$.

La fonction gamma possède les propriétés suivantes

1- $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 \leq z < 1$.

2- La fonction gamma converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $Re(z) > 0$.

3- L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation suivante : $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),\ Re\ (z) > 0$,

Pour $z = n$ on obtient $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!$

2.3.2 Fonction bêta

Définition 2.11 *L'intégrale d'Euler du premier type*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}\,dt, Re(z) > 0, Re(\omega) > 0$$

est appelée la fonction bêta.

La relation entre les fonctions gêta et gamma est donnée par

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)},\ Re(z) > 0,\ Re(\omega) > 0.$$

2.3.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction notée par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

est appelée fonction Mittag-Leffler.

Cette fonction, est la généralisation à un seul paramètre de la fonction exponentielle e^z, qui joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

2.3.4 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)} = \int_a^t f(\tau)d\tau, \ I^{(2)}f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau,$$

d'après le théorème du Fubini on trouve

$$I^{(2)}f(t) = \frac{1}{1!}\int_a^t (t-\tau)^{2-1}f(\tau)d\tau.$$

En faisant la même opération n fois on obtient

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} ... \int t_a^{n-1}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$, la dernière expression a un sens même quand n prend des valeurs non-entiers, d'où l'idée de la définition d'intégration fractionnaire.

Définition 2.12 *Soit* $f \in L^1([a,b])$ *et* $\alpha > 0$. *On appel intégrales fractionnaires de Riemann-*

Liouville, les intégrales

$$I_{a+}^{\alpha}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\ t>a$$

$$I_{b-}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\ t<b,$$

On peut définir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur l'axe $(0,\infty)$ comme suit

Définition 2.13 *Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha>0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est défini par*

$$I_0^{\alpha}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau.$$

Quand $\alpha=0$, on pose : $I_0^0=I$, l'opérateur d'identité c'est-à-dire $I_0^0f(t)=f(t)$. De plus, $I_0^{\alpha}f(0^+)$ désigne la limite (si elle existe) de $I_0^{\alpha}f(t)$ quand $t\to0^+$ (cette limite peut être infinie).

2.3.5 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.14 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $0<\alpha<1$. Chacune des expressions suivantes*

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\\
D_{b-}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^b \frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ou dérivée fractionnaire d'ordre α.

On peut définir la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville sur l'axe $(0,\infty)$ comme suit

Définition 2.15 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est définie par*

$$
{}_0D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau.
$$

On peut utiliser la notation

$$
{}_0D_t^{-\alpha} f(t) = I_0^{\alpha} f\left(t\right).
$$

Propriétés

Soit α, $\beta \geq 0$. Soit $f(t)$ une fonction telle que $I_{a+}^{\alpha} g(t), I_{a+}^{\beta} g(t), D_{a+}^{\alpha}$ et D_{a+}^{β} existent.

Les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville possèdent les propriétés suivantes

- Interpolation (continuité)

$$\lim_{\alpha \to n} I_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{n} f(t),$$

où I^n $(n \in \mathbb{N})$ est l'opérateur usuel de n-fois intégration.

- Propriété des semi groupes (loi des exposants)

$$I_{a+}^{\alpha}\left[I_{a+}^{\beta} f(t)\right] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour tout $t \in [a, b]$

- Commutativité

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(t) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(t),$$

pour tout $t \in [a, b]$.

L'opérateur de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre α i.e

$$D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{-\alpha} g(t)\right) = g(t).$$

Lemme 2.3 *Soit* $T > 0$, $f \in C^n([0,T])$, $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors pour $t \in [0,T]$, *les propriétés suivantes sont vérifiées*

$$
\begin{aligned}
D_{RL}^{\alpha} f(t) &= \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t), \; n = 1, \\
D_{RL}^{\alpha} I^{\alpha} f(t) &= f(t), \\
I^{\alpha} D_{RL}^{\alpha} f(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \left(I^{n-\alpha} f\right)^{(n-k)}(0), \\
I^{\alpha} D_{RL}^{\alpha} f(t) &= f(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(I^{1-\alpha} f\right)(0), \; si\ n = 1.
\end{aligned}
$$

2.3.6 Dérivée fractionnaire de Caputo

La définition de la dérivée de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Les problèmes appliqués nécessitent des définitions de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables, contenant $g(a)$, $g'(a)$, etc. Alors M. Caputo a donné une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui vérifie plus de condition par rapport à celle de Riemann-Liouville, par exemple : la dérivée de Caputo d'une constante est 0, tandis que dans le cas d'une valeur fini de la borne inférieure a, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante c n'est pas égale à 0, $D_{RL}^{\alpha} c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ [12].

Définition 2.16 *Soit* $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *alors l'expression*

$$
{}^{C}D^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{g^{(n)}(s)\, ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \; t > 0,
$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.

Chapitre 3

Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

3.1 Opérateurs linéaires

Soit $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ deux espaces de Banach.

Définition 3.1 *Un opérateur linéaire A est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ dans Y.*

$D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A.

Soit $A : D(A) \subset X \to Y$, où $D(A) = \{u \in X, \|Au\| < \infty)\}$.

On dit que A est à domaine dense (où densément défini) si

$$\overline{D(A)} = X$$

i.e. pour tout $u \in X$,il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u.$$

Notation 3.1 *Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire.*

Le noyau de A, est l'ensemble $\ker(A)$*, défini par*

$$\ker(A) := \{u \in D(A); A(u) = 0\} \subset X.$$

L'image de A, est l'ensemble $R(A)$, défini par

$$R(A) := \{A(u); u \in D(A)\} \subset Y.$$

Le graphe de A est l'ensemble $G(A)$, défini par

$$G(A) := \{(u, Au)\,; u \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Définition 3.2 *On dit qu'un opérateur A est borné de X dans Y si $D(A) = X$ et s'il existe C*

> 0 tq

$$\|Au\| \leqslant C\,\|u\|\,, \forall u \in X.$$

On pose $\|A\| = \sup\limits_{u\in X,\|u\|\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$. Dans le cas contraire on dit que A est non borné.

Définition 3.3 *Soient X, Y deux espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathcal{L}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{L}(X)$) l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y (resp. de X dans X).*

Définition 3.4 *On dit qu'un opérateur A est non borné, s'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $D(A)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Au_n\| = +\infty$.*

Définition 3.5 *Un opérateur A est fermé si et seulement si, pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans X et $Au_n \to v$ dans Y, alors on a*

$$u \in D(A) \text{ et } Au = v.$$

3.2 Semi-groupe uniformément continue

Définition 3.6 *Soit X un espace de Banach. $\{S\ (t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaire de X dans X. On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe si*

(i) $S(0) = I$ (I est l'opérateur d'identité sur X)

(ii) $S(t+\tau) = S(t)\ S(\tau)$ pour tout $t, \tau \geq 0$ (dite propriété de semi-groupe).

Définition 3.7 *On dit que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

3.3 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 3.8 *On appelle générateur infinitésimale d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ défini par*

$$D\left(A\right) = \left\{ u\ \epsilon X : \lim_{t\to 0^+} \tfrac{S(t)u-u}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

$$Au = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{S(t)u-u}{t}, \forall u\ \epsilon D\left(A\right)$$

où $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 3.1 *Le générateur infinitésimale d'un semi-groupe $\{S(t))_{t\geq 0}\}$ est la dérivé droite de l'application $t \to S(t)\, u$ au point $t = 0$.*

3.4 Propriétés

Théorème 3.1 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Théorème 3.2 *Soit $\{S(t))_{t\geq 0}\}$ et $\{T(t))_{t\geq 0}\}$ deux semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus. Si*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t) - I}{t},$$

alors

$$S(t) = T(t) \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

3.5 Semi-groupe fortement continu

Définition 3.9 *Un semi groupe $\{S(t))_{t\geq 0}\}$ est fortement continu (ou C_0 -semi-groupe) si*

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u, \forall u \in X.$$

Théorème 3.3 ([3]) *Soit $\{S(t))_{t\geq 0}\}$ un C_0 -semi-groupe alors*

$$\exists \omega \geq 0 \text{ et } M \geq 1 \text{ tq } \|S(t)\| \leqslant M.e^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Si $M = 1$*et* $\omega = 0$*, on dit que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de contractions* $(\forall t \geq 0, \|S(t)\| \leq 1)$.

Théorème 3.4 *([3]) Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$ *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si* A *est m-dissipatif et de domaine dense dans* X.

Lemme 3.1 *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *-semi-groupe de contractions, alors* A *est m-accrétif, c'est-à-dire,*

$(Au, J(u)) \geq 0$*, pour* $u \in D(A)$*, où* J *est la fonction de dualité et* $R(I + \lambda A) = X$ *pour* $\lambda > 0$*,* I *est l'opérateur d'identité sur* X *et* $R(.)$ *est l'image d'un opérateur.*

Chapitre 4

Etude d'une équation différentielle fractionnaire semi-linéaire

4.1 Position du problème

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $I = [0, T]$.

On considère dans X,l'équation différentielle fractionnaire semi-linéaire (1.1)-(1.2) définie par

$$D^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(t, u(t)), t \in (0, T],$$

$$u(0) = u_0,$$

où $D^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

$-A : D(A) \subset X \to X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{\geq 0}$ dans X.

$D(A)$ est le domaine de A, $u_0 \in D(A)$

f est une application continue de $I \times\ D(A)$ dans X.

4.2 Hypothèses et définitions

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et hypothèses de base utiles dans ce mémoire.

Définition 4.1 *Une solution forte du problème* (1.1)-(1.2) *est une fonction inconnue u qui satisfait les conditions suivantes*

(i) $u \in C(I, X)$ et $u \in D(A)$.

(ii) D^{α} existe et continue sur I, où $0 < \alpha < 1$.

(iii) u satisfait (1.1) *presque par tout sur I avec la condition initiale $u(0) = u_0 \in D(A)$.*

Définition 4.2 *La solution de* (1.1)-(1.2) *est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que$\| u(t) \| < \epsilon$ quand $\| u_0 \| < \delta$, $\forall t \in [0, T]$.*

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution, admettons l'hypothèse suivante

(H) Il existe une constante $k_1 > 0$ telle que

$$\| f(t, u) - f(s, v) \| \leq k_1 [|t - s| + \| u - v \|], \ \forall t, s \in [0, T], \forall u, v \in D(A).$$

4.3 Discrétisation et estimations a priori

Dans ce chapitre, on commence par discrétiser en temps le problème continu (1.1)-(1.2) en utilisant un schéma numérique qui correspond à la méthode de Rothe, puis nous établissons quelques estimations a priori.

Soit n un entier positif, divisons l'intervalle $I = [0, T]$ en n sous-intervalles $\left[t_{j-1}^n, t_j^n\right]$, $j = 1, .., n$ de longueur $h_n = \frac{T}{n}$. Notons : $t_j^n = jh_n$, $u_j^n = u\left(t_j^n\right)$, $Au_j^n = Au\left(t_j^n\right)$ et $f^n(t) = f(t_j^n, u_{j-1}^n)$.

Alors le problème (1.1)-(1.2) est remplacé par les équations approximatives suivantes,

$$\frac{u_j^n - \ \alpha\ u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} + Au_j^n = f\left(t_j^n, u_{j-1}^n\right), \quad j = 1, ..., n, \tag{4.1}$$

$$u_0^n = u_0. \tag{4.2}$$

l'existence d'un unique $u_j^n \in D(A)$ qui satisfait $(4.1) - (4.2)$est assurée par la m-accrétivité de A.

Dans cette section, nous établissons quelques estimations a priori utiles de u_j^n et $\frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha}$.

Lemme 4.1 *Il existe une constante C (indépendante de n, j et h_n) telle que*

$$\| \ u_j^n - u_0 \ \| \leq C.$$

Preuve. Montrons ce résultat par récurrence.

En remplaçons dans la relation (4.1) par $j = 1$ et en utilisant (4.2), on obtient

$$\frac{u_1^n - \alpha u_0}{h_n^\alpha} + Au_1^n = f(t_1^n, u_0).$$

Par soustraction de $\frac{1}{h_n^\alpha} u_0 + Au_0$, des deux côtés de l'équation précédente, on obtient

$$\frac{u_1^n - \alpha u_0}{h_n^\alpha} + Au_1^n - \frac{1}{h_n^\alpha} u_0 - Au_0 = f(t_1^n, u_0) - \frac{1}{h_n^\alpha} u_0 - Au_0$$

d'où

$$u_1^n - u_0 + h_n^\alpha(Au_1^n - Au_0) = h_n^\alpha[f(t_1^n, u_0) - Au_0] - (1-\alpha)u_0.$$

En appliquant $J\,(u_1^n - u_0)$des deux côtés, on obtient

$$\begin{aligned} & \langle u_1^n - u_0, J(u_1^n - u_0)\rangle + h_n^\alpha\langle(Au_1^n - Au_0), J(u_1^n - u_0)\rangle \\ = \; & \langle h_n^\alpha(f(t_1^n, u_0) - Au_0) - (1-\alpha)u_0, J(u_1^n - u_0)\rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle Au, J\ u\ \rangle \geqslant 0$ (A est m-accrétive), alors

$$\langle u_1^n - u_0, J(u_1^n - u_0)\rangle \leqslant \langle h_n^\alpha(f(t_1^n, u_0) - Au_0) - (1-\alpha)u_0, J(u_1^n - u_0)\rangle.$$

En utilisant la définition de l'application de dualité J, on obtient

$$\begin{aligned} \| \quad & u_1^n - u_0 \| \leq h_n^\alpha[\| f(t_1^n, u_0) \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| \\ \leq \quad & h_n^\alpha[\| f(t_1^n, u_0) - f(0, u_0) \| + \| f(0, u_0) \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| . \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **H**, on obtient

$$\begin{aligned} \| \quad & u_1^n - u_0 \| \leq h_n^\alpha[k_1|t_1^n| + \| f(0, u_0) \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| \\ \leq \quad & T^\alpha[k_1 T + \| f_0 \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| \equiv C. \end{aligned}$$

Le résultat est vrai pour $j = 1$, supposons que

$$\| u_i^n - u_0 \| \leq C, \quad \forall i < j,$$

et montrons que

$$\| u_j^n - u_0 \| \leq C.$$

Par soustraction de $\frac{1}{h_n^\alpha}(u_0 - \alpha u_0) + Au_0$ des deux côtés de (4.1), on obtient

$$(u_j^n - u_0) + h_n^\alpha (Au_j^n - Au_0) = \alpha(u_{j-1}^n - u_0) + h_n^\alpha [f(t_j^n, u_{j-1}^n) - Au_0] - (1-\alpha)u_0.$$

En appliquant $J(u_j^n - u_0)$ des deux côtés et en utilisant la m-accrétivité de A, on obtient

$$\begin{aligned} \langle u_j^n - u_0, J(u_j^n - u_0)\rangle \quad &\leq \quad \alpha\langle u_{j-1}^n - u_0, J(u_j^n - u_0)\rangle + h_n^\alpha \langle f(t_j^n, u_{j-1}^n), J(u_j^n - u_0)\rangle \\ & \quad -h_n^\alpha \langle Au_0, J(u_j^n - u_0)\rangle - (1-\alpha)\langle u_0, J(u_j^n - u_0)\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'application J, on obtient

$$\| u_j^n - u_0 \| \leq \alpha \left\| u_{j-1}^n - u_0 \right\| + h_n^\alpha \left\| f(t_j^n, u_{j-1}^n) \right\| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| .$$

En utilisant **H** et l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \| \quad & u_j^n - u_0 \| \leq \alpha C + h_n^\alpha [k_1(|t_j^n| + C) + \| f_0 \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| \\ \leq \quad & \alpha C + T^\alpha [k_1(T + C) + \| f_0 \| + \| Au_0 \|] + (1-\alpha) \| u_0 \| \equiv C, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 4.2 *Il existe une constante C (indépendante de n, j et h_n) telle que*

$$\| \frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} \| \leq C$$

Preuve. Prenons $j = 1$ dans (4.1), on obtient

$$\frac{u_1^n - \alpha u_0^n}{h_n^\alpha} + A u_1^n = f(t_1^n, u_0^n).$$

Par soustraction de $\alpha A u_0^n$ et par application de $J(u_1^n - \alpha u_0^n)$ des deux côtés de l'équation ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{h_n^\alpha}\langle u_1^n - \alpha u_0^n, J(u_1^n - \alpha u_0^n)\rangle + \langle A u_1^n - \alpha A u_0^n, J(u_1^n - \alpha u_0^n)\rangle = \langle f(t_1^n, u_0^n) - \alpha A u_0^n, J(u_1^n - \alpha u_0^n)\rangle.$$

Comme l'opérateur A est m-accrétive , alors

$$\frac{1}{h_n^\alpha}\langle u_1^n - \alpha u_0^n, J(u_1^n - \alpha u_0^n)\rangle \leqslant \langle f(t_1^n, u_0^n) - \alpha A u_0^n, J(u_1^n - \alpha u_0^n)\rangle.$$

En utilisant la définition de l'application de dualité J, on obtient

$$\| \frac{u_1^n - \ \alpha \ u_0^n}{h_n^\alpha} \| \leq \| f(t_1^n, u_0^n) \| + \alpha \| A u_0^n \| .$$

En utilisant l'hypothèse **H,** on obtient

$$\| \frac{u_1^n - \alpha u_0^n}{h_n^\alpha} \| \leq k_1[|t_1^n| + \| f_0 \|] + \alpha \| A u_0 \| \leq k_1[T + \| f_0 \|] + \alpha \| A u_0 \| \equiv C.$$

Maintenant, montrons par récurrence que

$$\| \frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} \| \leq C.$$

La propriété est vraie pour $j = 1$, supposons que

$$\| \frac{u_i^n - \alpha u_{i-1}^n}{h_n^\alpha} \| \leq C, \forall i < j.$$

Multiplions l'équation (4.1) écrite pour $j-1$ par α , puis on fait la soustraction de la même équation écrite pour j, on obtient

$$\frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} - \alpha \frac{u_{j-1}^n - \alpha u_{j-2}^n}{h_n^\alpha} + Au_j^n - \alpha A u_{j-1}^n = f(t_j^n, u_{j-1}^n) - \alpha f(t_{j-1}^n, u_{j-2}^n).$$

En appliquant $J(u_j^n - \alpha u_{j-1}^n)$ des deux côtés et en utilisant la m-accrétivité de A, on obtient

$$\| \frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} \| \leq \alpha \left\| \frac{u_{j-1}^n - \alpha u_{j-2}^n}{h_n^\alpha} \right\| + \left\| f(t_j^n, u_{j-1}^n) \right\| + \alpha \left\| f(t_{j-1}^n, u_{j-2}^n) \right\|.$$

En utilisant **H,** on obtient

$$\| \frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} \| \leq \alpha \left\| \frac{u_{j-1}^n - \alpha u_{j-2}^n}{h_n^\alpha} \right\| + k_1(|t_j^n| + \| u_{j-1}^n - u_0 \|)$$

$$+\alpha k_1(|t_{j-1}^n| + \| u_{j-2}^n - u_0 \|) + (1+\alpha) \| f_0 \| .$$

En utilisant le lemme 4.1 et l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\parallel \frac{u_j^n - \alpha u_{j-1}^n}{h_n^\alpha} \parallel \leq \alpha C + k_1(1+\alpha)(T+C) + (1+\alpha) \parallel f_0 \parallel \equiv C,$$

D'où le résultat. ■

Maintenant, Construisons la suite de Rothe $\{U^{\,n}(t)\}$ de fonctions de I dans $D(A)$ définie par

$$U^n(t) = \begin{cases} u_0\ , \quad t \in [-\tau, 0], \\ u_{j-1}^n + \frac{t-t_{j-1}^n}{h_n^\alpha}\ (u_j^n - \alpha u_{j-1}^n), \quad t \in (t_{j-1}^n, t_j^n], \\ j = 1, ..., n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Montrons que la suite $\{U^n\}$ converge vers la solution unique du problème quand $n \to \infty$.

Définissons une suite de fonctions d'état $\{X^n(t)\}$ par

$$X^n(t) = \begin{cases} u_0, & t = 0, \\ u_j^n, & t \in (t_{j-1}^n, t_j^n] \end{cases} \tag{4.4}$$

Remarque 4.1 ***Remarque 4.2*** ***Remarque 4.3*** ***Remarque 4.4*** *Du lemme 4.1 et du lemme 4.2, il s'ensuit que les fonctions $U^n(t)$ sont uniformément Lipchitziennes continues sur $(0, T]$ et $U^n(t) - X^n(t) \to 0$ dans X quand $n \to \infty$ sur $(0, T]$. De plus, les suites $\{U^n(t)\}$ et $\{X^n(t)\}$ sont uniformément borneés dans X.*

En utilisant (4.3) et (4.4) dans (4.1), on obtient

$$D^\alpha U^n(t) + AX^n(t) = f^n(t), \tag{4.5}$$

où D^α désigne la dérivée fractionnaire sur $(0,T]$.

En intégrant l'équation ci-dessus de 0 à t, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}AX^n(s)ds = u_0 - U^n(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f^n(s)ds. \tag{4.6}$$

Lemme 4.3 *Il existe $u \in C([0,T],D(A))$ tel que $U^n \to u$, quand $n \to \infty$. De plus u est Lipschitzienne continue sur $[0,T]$.*

Preuve. Remplaçons n par m dans l'équation (4.5) ensuite faisons la soustraction de la même équation écrite pour n, et appliquons $J(X^n(t)-X^m(t))$ des deux côtés, et utilisons la m-accrétivité de A, on obtient

$$\langle D^\alpha U^n(t) - D^\alpha U^m(t), J(X^n(t)-X^m(t))\rangle \leq \langle f^n(t)-f^m(t), J(X^n(t)-X^m(t))\rangle,$$

comme

$$D^\alpha \parallel U^n(t)-U^m(t) \parallel^2 = \langle D^\alpha(U^n(t)-U^m(t)), J(U^n(t)-U^m(t))\rangle,$$

on obtient

$$\begin{aligned} D^\alpha \quad \parallel \quad & U^n(t)-U^m(t) \parallel^2 \leq \langle f^n(t)-f^m(t), J(U^n(t)-U^m(t))\rangle \\ & +\langle D^\alpha U^n(t) - D^\alpha U^m(t), J(U^n(t)-U^m(t))\rangle \\ & -\langle D^\alpha U^n(t) - D^\alpha U^m(t), J(X^n(t)-X^m(t))\rangle \\ & +\langle f^n(t)-f^m(t), J(X^n(t)-X^m(t))\rangle \\ & -\langle f^n(t)-f^m(t), J(U^n(t)-U^m(t))\rangle. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la définition de l'application de dualité, on obtient

$$D^{\alpha} \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel^2 \leq \parallel f^n(t) - f^m(t) \parallel \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel + \epsilon_{nm}(t), \tag{4.7}$$

où

$$\epsilon_{nm}(t) = [\parallel D^{\alpha}(U^n(t) - U^m(t)) \parallel + \parallel f^n(t) - f^m(t) \parallel] \epsilon'_{nm}(t)$$

et

$$\epsilon'_{nm}(t) = \parallel U^n(t) - X^n(t) \parallel + \parallel U^m(t) - X^m(t) \parallel .$$

Selon la remarque 4.3, ϵ_{nm}, $\epsilon'_{nm} \to 0$ lorsque n, $m \to \infty$.

En utilisant l'hypothèse H, on obtient

$$\parallel f^n(t) - f^m(t) \parallel = \parallel f(t_j^n, u_{j-1}^n) - f(t_l^m, u_{l-1}^m) \parallel \leq k_1[|t_j^n - t_l^m| + \parallel u_{j-1}^n - u_{l-1}^m \parallel].$$

En utilisant (4.3) et le lemme 4.2, on obtient

$$\parallel f^n(t) - f^m(t) \parallel \leq k_1[|t_j^n - t_l^m| + Ch_n + Ck_m] + k_1 \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel .$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus dans (4.7), on obtient

$$D^{\alpha} \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel^2 \leq \epsilon''_{nm}(t) + k_1 \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel^2$$

où

$$\epsilon''_{nm}(t) = k_1[|t_j^n - t_l^m| + Ch_n + Ck_m] \parallel U^n(t) - U^m(t) \parallel + \epsilon_{nm}(t).$$

et $\epsilon''_{nm} \to 0$ quand n, $m \to \infty$.

En intégrant entre 0 et t, et en utilisant la définition 2.13, on obtient

$$\| U^n(t) - U^m(t) \|^2 \leq g(t) + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| U^n(s) - U^m(s) \|^2 \, ds,$$

où

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \epsilon''_{nm}(t) ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous concluons qu'il existe $u \in C([0,T], D(A))$, tel que $Un \to u$ quand $n \to \infty$. Comme chaque U^n est uniformément Lipschitzienne continue, u est Lipschitzinne continue. Ceci complète la preuve du lemme. ■

Remarque 4.5 *Selon la remarque 4.3 et le lemme 4.4, on conclue que $X^n(t) \to u(t)$ quand $n \to \infty$. De plus, selon la remarque 4.3 la suite $\{AX^n(t)\}$ est uniformément borné dans $(0,T]$. Alors, selon le lemme 2.5 du référence [26], nous avons $AX^n(t) \rightharpoonup Au(t)$, où $(\rightharpoonup)$ désigne la convergence faible dans X.*

4.4 Existence et unicité de la solution

Le résultat principal de ce travail est donné dans le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Supposons que H soit satisfaite et que A soit m-accrétif. Alors le problème (1.1)-(1.2) a une unique solution forte sur I. De plus les solutions $u_i (i = 1, 2)$ correspondant aux données initiales $u_0^i (i = 1, 2)$ satisfait aux estimations suivantes*

$$\| u_1(t) - u_2(t) \| \leq \| u_0^1 - u_0^2 \| \, exp\left(\frac{T^\alpha \ k_1}{2\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Si de plus, f satisfait la condition suivante

$$\| f(t,u(t)) \| \leq k_2 \| u(t) \|,$$

alors la solution de (1.1)-(1.2) *est stable.*

Preuve. Pour tout $x^* \in X^*, t \in (0,T]$, de (4.6) on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} AX^n(s), x^* \rangle ds = \langle u_0, x^* \rangle - \langle U^n(t), x^* \rangle + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} f^n(s), x^* \rangle ds.$$

En utilisant le théorème de convergence bornée et le lemme 4.4, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} Au(s), x^* \rangle ds &= \langle u_0, x^* \rangle - \langle u(t), x^* \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} f(s, u\left(s\right), x^* \rangle ds. \end{aligned}$$

Comme $Au(t)$ est intégrable au sens de Bochner sur $(0,T]$, de l'équation précédente, on obtient

$$D^\alpha u + Au(t) = f(t,u(t)), \ p.p. \ sur \ (0,T]. \tag{4.8}$$

On a $u \in C([0,T],X)$ et différentiable p.p sur $(0,T]$ avec $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $(0,T]$ et $u(0) = u_0$ satisfait (4.8). Alors, u est une solution forte du problème (1.1)-(1.2) sur $[0,T]$. Maintenant, montrons l'unicité de cette solution. Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions fortes du problème (1.1)-(1.2). Soit $u = u_1 - u_2$, alors de (4.8), on a

$$D^\alpha u\left(t\right) + Au_1(t) - Au_2(t) = f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), t \in (0,T].$$

En appliquant $J(u_1(t) - u_2(t))$ des deux côtés et en utilisant la m-accrétivité de A, on obtient

$$D^\alpha \langle (u(t)) \,, J(u(t) \rangle \leq \langle f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)), J(u(t) \rangle.$$

En utilisant **H**, nous obtenons

$$D^\alpha \parallel u\,(t) \parallel^2 \leq k_2 \parallel u\,(t) \parallel^2$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \parallel u(s) \parallel^2 ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$u(t) = 0, t \in (0, T] \Rightarrow u_1(t) = u_2(t), \forall t \in (0, T],$$

ce qui donne l'unicité de la solution forte de (1.1)-(1.2). Maintenant, montrons la stabilité et la dépendance continue de la solution du problème (1.1)-(1.2) des données initiales. On a supposé que u_1 et u_2 sont deux solutions fortes qui corresponds respectivement aux données initiales u_0^1 et u_0^2 . De (4.8), nous avons

$$D^\alpha (u_1(t) - u_2(t)) + Au_1(t) - Au_2(t) = f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)).$$

En appliquant $J(u_1(t)-u_2(t))$ et en utilisant la m-accrétivité de A, on obtient

$$D^{\alpha}\langle(u_1(t)-u_2(t)),J(u_1(t)-u_2(t))\rangle \leq \langle f(t,u_1(t))-f(t,u_2(t)),J(u_1(t)-u_2(t))\rangle.$$

En utilisant la définition de l'application de dualité et **H**, nous obtenons

$$D^{\alpha}\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel^2\leq k_1\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel^2 .$$

En intégrant et en utilisant la définition 2.13, nous obtenons

$$\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel^2-\parallel u_0^1-u_0^2\parallel^2\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\parallel u_1(s)-u_2(s)\parallel^2 ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel^2\leq\parallel u_0^1-u_0^2\parallel^2 \exp\left(\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right)$$

$$\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel^2\leq\parallel u_0^1-u_0^2\parallel^2 \exp\left(\frac{T^{\alpha}K_1}{2\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

A la fin, nous montrons la stabilité du problème (1.1)-(1.2).

En appliquant $J(u(t))$ des deux côtés de (4.8), on obtient

$$D^{\alpha}\langle u(t),J(u(t))\rangle+\langle Au\left(t\right),J\left(u\left(t\right)\right)\rangle \leq \langle f(t,u(t)),J(u(t))\rangle.$$

En utilisant la m-accrétivité de A et la définition de l'application de dualité, nous obtenons :

$$D^{\alpha} \parallel u(t) \parallel^2 \leq \parallel f(t,u(t)) \parallel \parallel u(t) \parallel \leq k_2 \parallel u(t) \parallel^2 .$$

En intégrant et en utilisant la définition 2.13, nous obtenons

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq \parallel u(0) \parallel^2 + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \parallel u(s) \parallel^2 ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\parallel u(t) \parallel^2 \leq \parallel u(0) \parallel^2 exp\left(\frac{k_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds\right) \leq \parallel u(0) \parallel^2 exp\left(\frac{k_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Cela implique que

$$\parallel u(t) \parallel < \epsilon \text{ quand } \parallel u_0 \parallel < \varepsilon \exp\left(-\frac{k_2 T^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Ceci complète la preuve du résultat principal. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de Rothe pour l'étude d'une équation différentielle fractionnaire semi-linéaire, nous avons établis les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence du schéma d'approximation correspondant est démontrée. Ensuite, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution forte du problème donné. A la fin, nous avons montré la stabilité et la dépendance continue de la solution des données initiales.

Bibliographie

[1] A. Bouziani et R. Mechri, The Rothe's Method to a parabolic Integrodifferential Equation with a Nonclassical Boundary conditions, International Journal of Stochastic Analysis 2010 (2010), 1–16.

[2] A. G. Lakoud and A. Chaoui, Rothe's Method Applied to semilinear Hyperbolic Integrodifferetial equation with integral condition, International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics 4 (1) (2011), 1–14.

[3] A. Pazy, Semigroup of linear operators and application to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] A. Raheem, and D. Bahuguna, Existence and Uniqueness of a Solution for a Fractional Differential Equations by Rothe's Methode. Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications 4 (2013) : 43-54.

[5] C. Archana, J. Dabas, Existence of mild solutions for impulsive fractional-order semilinear evolution equations with nonlocal conditions, Electronic Journal of Differential Equations 2011 (107) (2011), 1–10.

[6] D. Bahuguna, A. K. Pani and V. Raghavendra, Rothe's method to semilinear hyperbolic integrodifferential equations, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 3

(4) (1990), 245–252.

[7] D. Bahuguna and V. Raghavendra, Rothe's method to parabolic integrodifferential equation via abstract integrodifferential equations, Applicable Analysis 33 (3-4) (1989), 153-167.

[8] F. Wang, Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional differential equation, Journal of Applied Mathematics and Computing 39 (2012), 53–67.

[9] G. M. Mophou and G. M. N'Guérékata, On a class of fractional differential equations in a Sobolev space, Applicable Analysis 91 (1) (2012), 15–34.

[10] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[11] H. Nagase, On an Application of Rothe's Method to Nonlinear Parabolic Variational Inequalities, Funkcialaj Ekvacioj 32 (1989), 273–299.

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego (1999).

[13] J. Kacur, Application of Rothe's method to perturbed linear hyperbolic equations and variational inequalities, Czechoslovak Mathematical Journal 34 (1) (1984), 92–106.

[14] J. Kacur, Method of Rothe in Evolution Equations, Proceeding of the International Conference on Differential Equations and their Applications (Brono, Czechoslovakia), Lecture Notes in Mathematics 1192 (1986), 23–34.

[15] J. Necas, Application of Rothe's method to abstract parabolic equations, Czechoslovak Mathematical Journal 24 (3) (1974), 496–500.

[16] J. R.Wang, M. Feckan, and Y. Zhou, On the new concept of solutions and existence results for impulsive fractional evolution equations, Dynamics Partial Differential Equation 8 (4) (2011), 345–361.

[17] J. Wang, Y. Zhou, A class of fractional evolution equations and optimal controls, Nonlinear Analysis Real World Applications, 12 (2011), 262–272.

[18] K. Rektorys and M. Ludvikova, A note on nonhomogeneous intial and boundary conditions in parabolic problems solved by the Rothe method, Applications of Mathematics 25 (1) (1980), 56–72.

[19] K. Rektorys, On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in the space variable, Czechoslovak Mathematical Journal 21 (2) (1971), 318–339.

[20] K. Rektorys, The Method of Discretization in time and Partial Differential Equations, D. Reidel Publishing Company, 1982.

[21] M. Pultar, Solutions of abstract hyperbolic equations by Rothe method, Applications of Mathematics 29 (1) (1984), 23–39.

[22] M. Slodièka, Semigroup formulation of Rothe's method : application to parabolic problems, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 33 (2) (1992), 245–260.

[23] N. Kikuchi and J. Kacur, Convergence of Rothe's method in Hölder spaces, Applications of Mathematics 48 (5) (2003), 353–365.

[24] O. P. Agrawal, Solution for fractional diffusion wave equation defined in bounded domain, Nonlinear Dyn. 29(2002), pp.145-155.

[25] S. Moussaoui, B. Khellouf, Les semi-groupes linéaires et l'équation de la chaleur. Mémoire de Master, Université de Jijel, 2019.

[26] T. Kato, Nonlinerar semigroup and evolution equations, Mathematical Society of Japan 19 (1967), 508–520.

[27] Y. K. Chang, R. Zhang, G. M. N'Guérékata, Weighted pseudo almost automorphic mild solutions to semilinear fractional differential equation, Computers and Mathematics with Applications 64 (10) (2012), 3160–3170.

[28] Y. Zhou, Existence and uniqueness of solutions for a system of fractional differential equations, Fractional Calculus and Applied Analysis 12 (2) (2009), 195–204.