

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## Mémoire de Master

Présenté à l'Université 8 Mai 1945 de Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Spécialité : Génie Civil

Option : STRUCTURES

Présenté par :

**BOUACHA Faten**

---

---

### Thème

**Contribution à la programmation de quelques notions du calcul de  
dynamique**

**Des structures par l'utilisation de MATLAB**

---

---

Sous la direction de : **Dr. BOURAS. Faouzi**

---

**Juillet 2021**

---

# Remerciement

## Remerciement

Mes premiers remerciements vont pour le bon dieu, le tout puissant, qui nous a donné la santé, la force, la patience et la sagesse d'arriver à ce stade dans nos études.

Je dédie ce travail.

A mes chers parents, qui m'ont donné tout le courage, la tendresse

Et la patience.

« Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

A mes frères, mes chère sœur, mes cousine

Et surtout a ma chère tante

je remercie également l'ensemble des enseignants qui nous ont aidé et orienté pour élaboré ce travail.

Sans oublier mes collègue de travail qui mon soutenir surtout mohamed helassi

Et à ceux avec qui je partage de bons souvenirs kami-sonia –nadira –

Je tiens à remercier mes responsables au boulot : monsieur kelaia laid –notre directeur  
latreche lakhmissi

et le Big boss dris abd elkarim

# BOUACHA FATEN

2020/2021

---

## Sommaire

Remerciement .....	i
Sommaire.....	ii
Liste des notations et abréviations.....	iv
Liste des figures .....	v
Liste des tableaux.....	vi
Résumé.....	vii
Abstract.....	vii
ملخص.....	viii
1. Introduction générale.....	1
2. Problématique.....	2
3. Méthodologie.....	3
4. Organisation du mémoire.....	3

### **CHAPITRE I: QU'EST CE QUE MATLAB**

I.1.Introduction .....	4
I .2. Définition de l'environnement MATLAB.....	4
I .3. L'environnement MATLAB .....	5
I.4 Lancer, quitter MATLAB .....	6
I.5 Fonctions et commandes.....	6
I.6- Conclusion.....	7

### **CHAPITRE II: NOTIONS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

II.1- Introduction .....	8
II .2.Définition.....	8
II .3..Loi de comportement de l'oscillateur.....	9
II .4. Equations de l'équilibre dynamique.....	11
II .4.1. Méthode directe.....	11
II .4.2. Méthode des puissances virtuelles.....	12
II .4.3. Méthode énergétique.....	12
II .5. Formulation réduite de l'équation d'équilibre.....	13
II .6 .Vibrations libres.....	15
II .6.1 Système non amorti .....	15

---

II .6.2 Système a amortissement sous-critique.....	18
II .6.3. Système a amortissement critique.....	23
II .6.4. Système a amortissement sur critique.....	25
II .7. Vibrations forcées.....	29
II. 7.1. Sollicitation harmonique.....	29
II.7.1.1. Oscillation forcée sans amortissement .....	29
II.7.1.2. Oscillation forcée sans amortissement.....	32
II .7.2. Etude de la résonance .....	36
II.8.Conclusion.....	37

### **CHAPITRE III: ANALYSE SISMIQUE PAR LA METHODE DYNAMIQUE MODALE SPECTRALE.**

III.1.Introduction.....	38
III.2.Objectifs de l'étude dynamique.....	38
III.3. Choix de la méthode de calcul.....	38
a- méthodes utilisables.....	38
b - conditions d'application de la méthode statique équivalente.....	39
c - conditions d'application des méthodes dynamiques.....	39
III.4 - Méthode dynamique modale spectrale	
III.4.1. – Principe.....	40
III.4.2. – Modélisation.....	40
III.4.3. - Spectre de réponse de calcul.....	41
III.4.4.Calcul de la réponse sismique.....	45
III.4.4.1.Systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPPDL).....	47
III.5.Exemples traites .....	48
III.6.Conclusion.....	58
III.7.Conclusion générale.....	59
Bibliographie.....	60

---

## LISTE DES NOTATIONS ET ABREVIATIONS

**m** : masse

**p(t)**: force

**u(t)**: déplacement horizontal

**u̇(t)**: vitesse

**f(u, u̇)**: fonction du déplacement et de la vitesse

**c**: constante de proportionnalité

**u<sub>max</sub>**: amplitude maximale du déplacement égale a

**E<sub>d</sub>** : énergie

**ω** : Pulsation propre

**δu̇**: vitesse virtuelle

**E<sub>c</sub>** : énergie cinétique

**V** : énergie potentielle

**f** : fréquence propre

**T** : période propre

**ε** : pourcentage d'amortissement critique

**c<sub>0</sub>**: amortissement critique

**k**: raideur

**ρ** : l'amplitude

**a** : coefficient d'accélération de zone

**v**: facteur de correction d'amortissement

**r** : coefficient de comportement de la structure

**t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>** : périodes caractéristiques

**q** : facteur de qualité

**pq** : pénalité

**q**:critere de qualité

**∅**:mode propre

---

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1:</b> oscillateur a 1 degré de liberté.....	7
<b>Figure 2 :</b> relation force-déplacement. ....	8
<b>Figure 3 :</b> amortissement équivalent. ....	9
<b>Figure 4:</b> forces appliquées a l'oscillateur. ....	10
<b>figure.5 :</b> système linéaire. ....	13
<b>figure.6:</b> vibration libre d'un système non amorti. ....	18
<b>Figure 7 :</b> vibration libre d'un système a amortissement sous-critique. ....	21
<b>figure 8:</b> variation de la pulsation propre amortie en fonction de $\xi$ . ....	23
<b>Figure 9:</b> vibration libre d'un système a amortissement critique. ....	25
<b>Figure 10:</b> vibration libre d'un système a amortissement sur critique. ....	27
<b>Figure 11:</b> présentation des trois exemples de la vibration libre.....	29
<b>Figure 12 :</b> présentation graphique d'un oscillateur forcée sans amortissement.....	32
<b>Figure 13 :</b> présentation graphique d'un oscillateur forcée avec amortissement.....	35
<b>Figure 14 :</b> présentation graphique d'un oscillateur forcée avec amortissement.....	35

---

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau n°01:</b> pourcentage d'amortissement critique $\xi$ .....	39
<b>Tableau n°02:</b> valeurs du coefficient de comportement $R$ .....	40
<b>Tableau n°03:</b> valeurs de $t_1$ et $T_2$ .....	40
<b>Tableau n°04:</b> coefficient d'accélération de zone $A$ .....	41
<b>Tableau n°05:</b> critère de qualité $q$ .....	41

---

## **Résumé**

Le calcul dynamique des structures revêt une importance capitale lors de l'élaboration d'une notice de calcul des structures. Les calculs dynamiques font appel à des notions de mathématiques complexes. Afin de palier à ce problème, une numérisation, utilisant MATLAB, de quelques problèmes en dynamique de structures est proposée.

Les phénomènes d'origine dynamique se caractérisent par des sollicitations qui varient dans le temps et dans l'espace. En génie civil la science qui étudie les réponses de structures et les sollicitations qui sont engendrées par les phénomènes vibratoires s'appelle dynamique des structures.

Afin d'aller plus vite en besogne dans les calculs dynamiques nous proposons dans ce projet de fin d'étude des programmes de calcul (en MATLAB) pour certaines notions de dynamique des structures (vibration libre, vibration forcée).

En dernier lieu, un programme MATLAB est établi pour traiter les problèmes sismiques en utilisant la méthode d'analyse modale. ce travail est exécuté en respectant le règlement parasismique algérien (RPA 99/2003).

Les réponses des structures sujettes à des actions sismiques calculées sont les fréquences, les valeurs propre et l'accélération ( $S_a$ ....).

### **Mots clés :**

D.D.S – dynamique des structures-MATLAB-frequences- accélérations –mode propre.

### **Abstract**

The dynamic calculation of structures is of paramount importance when drawing up a calculation notice. Dynamic calculations call upon notion of complex mathematics. In order to overcome this problem, a digitization, using MATLAB, of some problems in structural dynamics is proposed.

phenomena of dynamic origin are characterized by solicitations which vary in time and space. In civil engineering the science which studies the responses of structures and the solicitations which are generated by vibratory phenomena is called dynamics of structures.

in order to get work done faster in dynamic computation, in this end of study project we are proposing computational programs (in MATLAB) for certain notions of structure dynamics (free vibration, forced vibration) finally, a MATLAB program is established to deal with seismic problems using modal analysis method. This work is carried out in compliance with the algerian earthquake regulations (RPA 99/2003).

The responses of structures subject to calculated seismic action are frequencies, eigenvalues and acceleration  $S_a$ ).

### **Passwords:**

D.D.S-Matlab-Dump vibration- dynamic of structure- eigenvalues-frequences.



## ملخص:

إن الحساب الديناميكي للهيكل ذو أهمية كبيرة عند إعداد إشعار الحساب ،تستدعي الحسابات الديناميكية مفاهيم الرياضيات المعقدة . من أجل التغلب على هذه المشكلة تم إقتراح رقمنة ، بإستخدام MATLAB لبعض المشاكل في الديناميكيات الهيكلية .

تتميز ظواهر الأصل الديناميكي بإختلافها وتغيراتها مع الوقت . في الهندسة المدنية يطلق على العلم الذي يدرس استجابات الهياكل و التغيرات التي تولدها الظواهر الاهتزازية بديناميكيات الهياكل . من أجل إنجاز العمل بشكل أسرع في وحدات الاتصال الديناميكية، و بنهاية مشروع الدراسة هذا ، نقترح برامج حسابية MATLAB لمفاهيم معينة عن الديناميكيات الهيكلية ( الاهتزاز الحر و الاهتزاز الخاضع لقوى دفع ).

أخيرا تم إنشاء برنامج MATLAB للتعامل مع المشكلات الزلزالية باستخدام طريقة التحليل النموذجي. تم تنفيذ هذا العمل وفقا لقانون الزلازل الجزائري (RPA99/2003).

استجابات الهياكل الخاضعة للحساب الزلزالي هي الترددات والقيم الذاتية و التسارع Sa.....الخ.

## **Introduction générale**

Les séismes sont parmi les catastrophes naturelles les plus dévastatrices, ils constituent une activité géologique naturelle, ils induisent des destructions importantes et occasionnent des pertes considérables en vies humaines et d'importants dégâts matériels. Ils touchent la majorité des pays et notamment les pays Méditerranéens dont l'Algérie,

Dans la plus part des régions sismiques, l'adoption de techniques de construction visant à réduire les risques liés aux tremblements de terre, vise l'augmentation de la résistance des structures. Mais la question qui se pose est comment peut-on et par quel moyen renforcer la structure sous une sollicitation sismique, et quelle est le positionnement le plus rentable, coté résistance, économique et bien sûr architectural.

## **Problématique :**

Il existe plusieurs méthodes d'analyse dynamique pour l'étude de la résistance des bâtiments au séisme utilisées par l'ingénieur. Parmi ces méthodes il ya la méthode d'analyse modale spectrale.

L'étude de la résistance des structures soumises aux actions dynamiques se fait par une science dite "dynamique des structures ". Cette dernière consiste à évaluer les actions dynamiques sur les structures et en déduire les réponses de celles-ci (comme les déplacements, vibrations pour les effets sismiques).

Aussi un code de calcul MATLAB sera proposé pour l'étude dynamique des structures utilisant la méthode d'analyse modale.

Notre travail consiste en une contribution du calcul de Dynamique de structure en proposant d'abord des codes de calculs pour un oscillateur simple en vibration libre amortie et non amortie ainsi que la vibration forcés avec et sans amortissement.

L'utilisation de MATLAB est avantageuse pour résoudre un problème qui peut être idéalement représenté par des matrices, en se servant des opérations de l'algèbre matricielle linéaire et de la représentation relativement simple des graphiques en deux et trois dimensions.

Le calcul de la solution d'équations linéaires, la présentation, la manipulation et l'affichage des données d'ingénierie sont peut-être les meilleurs exemples de problèmes pour lesquels MATLAB est idéalement adapté.

Ce projet rédigé de manière à attirer l'attention sur les applications pratiques du sujet traité. Non seulement le langage de programmation MATLAB est exceptionnellement simple à utiliser (tous les objets de données sont supposés être des tableaux), le code de programme MATLAB sera beaucoup plus court et en plus c'est un langage idéal pour la création de prototypes de solutions logicielles à des problèmes d'ingénierie.

## **Méthodologie:**

Certaines notions de dynamique de structures simples sont abordées dans ce mémoire et traitées avec des sous programmes en MATLAB. La seconde partie concerne l'étude sismique des structures avec application de l'analyse modale et traitée à son tour avec un programme code MATLAB.

## **Plan de travail :**

Le projet est divisé en trois chapitres comme suit :

**Chapitre N°01 :** un aperçu général sur MATLAB

**Chapitre N°02:** notion de dynamique de structure

Définition de l'Oscillateur linéaire à un degré de liberté.

Les Equation de l'équilibre dynamique.

La Formulation réduite de l'équation d'équilibre.

### **1- Vibration libre :**

- Système non amorti, Système amorti sous critique, Système amorti critique, Système amorti sur critique.
- Proposition d'un programme MATLAB pour le calcul des déplacements.

### **2- Vibration forcé :**

- vibration forcé harmonique, Système amorti sous critique, Système amorti critique; Système amorti sur critique.
- (Proposition d'un programme MATLAB pour le calcul des déplacements.

### **Chapitre N°03: Analyse modale**

Le traitement des problèmes de structures soumises aux actions sismiques est mené par plusieurs méthodes dynamiques. Pour notre projet de fin d'études le choix porte sur l'étude de la réponse sismique des structures par l'analyse modale. Cette méthode utilise un spectre de réponse définit dans le règlement parasismique algérien RPA99/2003. Cette partie ponctuée par la proposition d'un programme code en MATLAB pour le calcul des fréquences propres, périodes, pulsations et l'accélération des structures.

## **CHAPITRE I : QU'EST CE QUE MATLAB**

## **I.1- Introduction :**

MATLAB est un code de calcul matriciel simple ,robuste et en même temps aisé il sera utilisé comme matière principale .

Le calcul dynamique des structures revêt une importance capitale lors de l'élaboration d'une notice de calcul. Les calculs dynamiques font appel à des notions de mathématiques complexes. Afin de palier à ce problème, une numérisation, utilisant MATLAB, de quelques problèmes en DDS est proposée dans ce mémoire , ainsi donc , il à été jugé utile de faire une présentation de MATLAB .

## **I.2 Définition de l'environnement MATLAB**

MATLAB est une abréviation de Matrix LABORatory, écrit à l'origine, en Fortran, par C.Moler.

MATLAB était destiné à faciliter l'accès au logiciel matriciel développé dans les projets LINPACK et EISPACK. La version actuelle, écrite en C par the MathWorks Inc., existe en version professionnelle et en version étudiant. Sa disponibilité est assurée sur plusieurs plateformes : Sun, Bull, HP, IBM, compatibles PC (DOS, Unix ou Windows), Macintosh, iMac et plusieurs machines parallèles.

MATLAB est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

MATLAB est un environnement complet, ouvert et extensible pour le calcul et la visualisation. Il dispose de plusieurs centaines (voire milliers, selon les versions et les modules optionnels autour du noyau MATLAB) de fonctions mathématiques, scientifiques et techniques. L'approche matricielle de MATLAB permet de traiter les données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numérique et symbolique de façon fiable et rapide. Grâce aux fonctions graphiques de MATLAB, il devient très facile de modifier interactivement les différents paramètres des graphiques pour les adapter selon nos souhaits.

L'approche ouverte de MATLAB permet de construire un outil sur mesure. On peut inspecter le code source et les algorithmes des bibliothèques de fonctions (Toolboxes), modifier des fonctions existantes et ajouter d'autres.

MATLAB comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés Toolboxes (ou Boîtes à Outils). Indispensables à la plupart des utilisateurs, les Boîtes à Outils sont des collections de fonctions qui étendent l'environnement MATLAB pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes.

MATLAB permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme l'un des meilleurs langages de programmation, MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages:

- La programmation facile,
- La continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes,
- La gamme étendue des nombres et leur précision,
- La bibliothèque mathématique très compréhensive,
- L'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- La possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmation (C ou Fortran).
- La bibliothèque des fonctions mathématiques dans MATLAB donne des analyses mathématiques très simples. En effet, l'utilisateur peut exécuter dans le mode commande n'importe quelle fonction mathématique se trouvant dans la bibliothèque sans avoir à recourir à la programmation.

Pour l'interface graphique, des représentations scientifiques et même artistiques des objets peuvent être créées sur l'écran en utilisant les expressions mathématiques. Les graphiques sur MATLAB sont simples et attirent l'attention des utilisateurs, vu les possibilités importantes offertes par ce logiciel.

MATLAB n'est pas le seul environnement de calcul scientifique, il existe d'autres concurrents dont les plus importants sont Maple et Mathematica. Il existe même des logiciels libres qui sont des clones de MATLAB comme Scilab et Octave.

### **I.3 L'environnement MATLAB**

MATLAB affiche au démarrage plusieurs fenêtres. Selon la version on peut trouver les fenêtres suivantes:

**Current Folder:** indique le répertoire courant ainsi que les fichiers existants.

**Workspace:** indique toutes les variables existantes avec leurs types et valeurs.

**Command History:** garde la trace de toutes les commandes entrées par l'utilisateur.

**Command Window:** utilisée pour formuler nos expressions et interagir avec MATLAB. C'est la fenêtre que nous utilisons tout au long de **ce travail**.

Mathématiques. Les graphiques sur MATLAB sont simples et attirent l'attention des utilisateurs, vu les possibilités importantes offertes par ce logiciel.

MATLAB n'est pas le seul environnement de calcul scientifique, il existe d'autres concurrents dont les plus importants sont Maple et Mathematica. Il existe même des logiciels libres qui sont des clones de MATLAB comme Scilab et Octave.

MATLAB est beaucoup plus qu'un langage de programmation. Il s'agit d'une console d'exécution (shell) permettant d'exécuter des fonctions, d'attribuer des valeurs à des variables, etc. La console MATLAB permet d'effectuer des opérations mathématiques, de manipuler des matrices et de tracer facilement des graphiques.

Le langage MATLAB n'est pas un langage compilé, à chaque appel d'un SCRIPT (ou d'une FUNCTION), le logiciel lit et exécute les programmes ligne par ligne.

L'utilisateur peut grâce à l'invite MATLAB affecter des valeurs à des variables et effectuer des opérations sur ces variables.

#### **I.4 Lancer, quitter MATLAB**

Dans l'environnement unix, pour lancer MATLAB on tape la commande matlab sur la ligne de commande active; dans les environnements Windows ou MacOS, il suffit de cliquer sur l'icône de l'application. La fenêtre de commande de MATLAB s'ouvre alors et on tape les commandes ou les expressions à évaluer à droite du prompt ». Le processus d'évaluation est déclenché par la frappe de la touche <enter>. A chaque début session, l'utilisateur indiquera à MATLAB que le répertoire my Matlab défini précédemment est le répertoire de travail de la session en tapant la commande cd suivie du chemin d'accès au répertoire my Matlab. On quitte MATLAB en tapant quit dans la fenêtre de commande ou en sélectionnant quit dans le menu File de la barre de menu pour les versions Windows ou MacOS.

#### **I.5 Fonctions et commandes**

Certaines fonctions de MATLAB ne calculent pas de valeur numérique ou vectorielle, mais effectuent une action sur l'environnement de la session en cours. Ces fonctions sont alors appelées commandes. Elles sont caractérisées par le fait que leurs arguments (lorsqu'ils existent) ne sont pas placés entre parenthèses. Les autres fonctions se comportent de façon assez semblable aux fonctions mathématiques et la valeur qu'elles calculent peut être affectée à une variable. Dans de nombreux cas, fonctions ou commandes peuvent être appelées avec des arguments qui diffèrent soit par leur nombre, soit par leur nature (nombre, vecteur, matrice, ...). Le traitement effectué dépend alors du nombre et de la



nature des arguments. Par exemple, nous verrons plus loin que la fonction `diag` appelée avec une matrice pour argument retourne le vecteur constitué par sa diagonale principale ou vecteur diagonal. Lorsque cette même fonction est appelée avec un vecteur pour argument, elle retourne la matrice diagonale dont le vecteur-diagonal est le vecteur donné. Aussi une fonction ou une commande n'est pas caractérisée par son seul nom, mais par sa signature c'est à dire l'ensemble constitué de son nom et de la liste des types de ses paramètres.

### **I.6- Conclusion :**

Un des avantages de MATLAB est de proposer une syntaxe très simple pour traduire les calculs matriciels. Les opérateurs sont représentés par les mêmes symboles (à une ou deux exceptions près) que ceux utilisés communément en algèbre linéaire. Mieux, ils opèrent directement sur les tableaux (par exemple, il n'est pas nécessaire d'écrire des boucles pour effectuer la somme ou le produit de deux matrices).

## **CHAPITRE II: NOTIONS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

## II.1- Introduction :

Un phénomène d'origine dynamique se caractérise par une sollicitation variant à la fois dans le temps et dans l'espace, dans lequel les forces d'inertie (produit de la masse par l'accélération), jouent un rôle important dans la réponse. Donc un chargement statique est un cas particulier de chargement dynamique, puisqu'il ne varie pas avec le temps, ni dans l'espace. Pour l'étude des structures linéaires, il est plus pratique de séparer les composants statiques et dynamiques du chargement appliqué, de calculer séparément la réponse à chaque type de charge, puis de superposer les deux composantes de la réponse pour obtenir la réponse totale. Une charge dynamique est définie comme une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application, varient dans le temps.

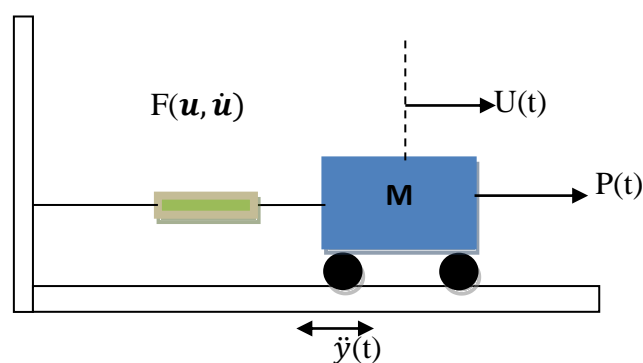
## II.2. Définition

L'oscillateur à un degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse  $\mathbf{M}$  connecté à un Support.

La figure (1) présente un tel oscillateur, sollicité par une force  $\mathbf{p(t)}$  variable dans le temps.

Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal,  $\mathbf{u(t)}$ , de la masse.

L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force  $\mathbf{F(u, \dot{u})}$  fonction du déplacement et de la vitesse de la masse  $\mathbf{M}$ . La relation  $\mathbf{F(u, \dot{u})}$  caractérise le comportement de l'oscillateur; la force  $\mathbf{p(t)}$  caractérise la sollicitation.



**Figure (1): Oscillateur à 1 degré de liberté**

### II.3. Loi de comportement de l'oscillateur

Cette loi de comportement dépend dans le cas le plus général du déplacement  $\mathbf{u}(t)$  de la masse et de sa vitesse  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  par rapport au support.

La force de rappel  $\mathbf{F}$  peut ne dépendre que du déplacement  $\mathbf{u}(t)$  **figure (2)**. Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement (figure 2/a), l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

La relation entre la force développée dans la liaison et le déplacement relatif  $\mathbf{u}$  des deux extrémités de cette liaison s'écrit simplement:

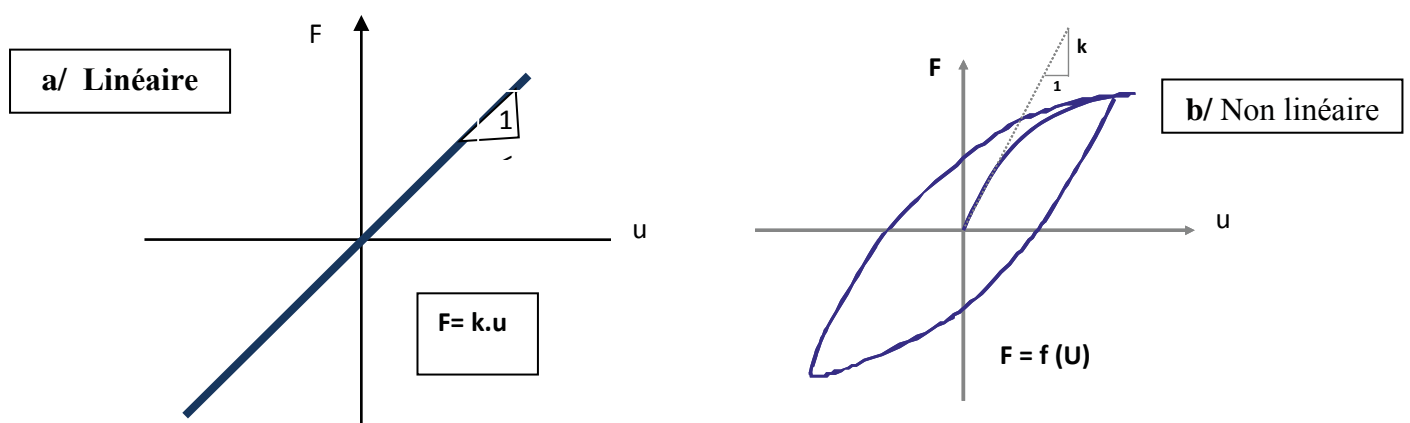
$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \dots\dots\dots (1)$$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire (figure 2/b); initialement il y a proportionnalité entre force et déplacement (**oscillateur élastique linéaire**) puis, au-delà d'un certain seuil de déplacement, la relation cesse d'être linéaire; par ailleurs la décharge peut s'effectuer suivant un trajet distinct de la charge.

C'est le cas par exemple d'une liaison masse-support constituée d'un assemblage en série d'éléments de ressorts linéaires et de frotteurs de Coulomb (éléments rigides en-delà d'un certain seuil d'effort puis développant un effort constant au-delà du seuil).

Pour certaines liaisons, il est possible que la décharge s'effectue le long de la même courbe que la charge; l'oscillateur est alors élastique non linéaire. Dans tous les cas, l'oscillateur est dit non linéaire et la relation force-déplacement s'écrit de façon symbolique:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) \dots\dots\dots (2)$$

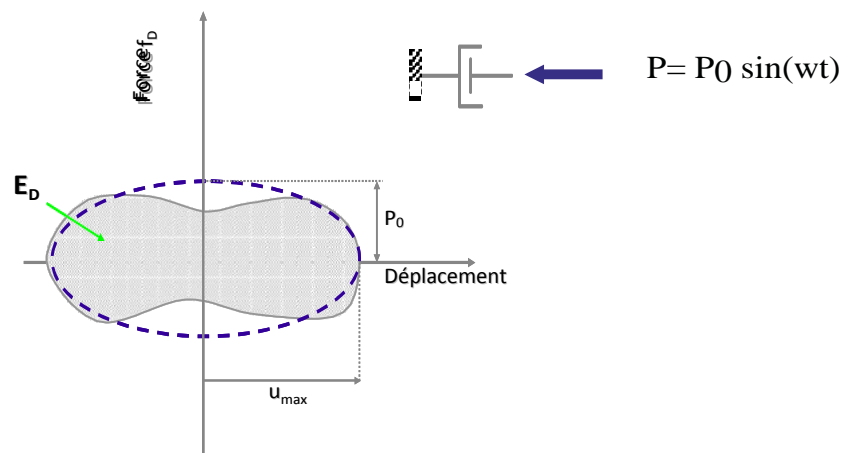


**Figure (2) : Relation force-déplacement**

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F = c\dot{u} \dots\dots\dots (3)$$

La constante de proportionnalité (**c**), caractéristique de l'amortisseur, a pour unités une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement. En se référant à la **figure (3)**, considérons un système soumis à un cycle caractérisé par une amplitude maximale du déplacement égale à **u<sub>max</sub>**. Si au cours de ce cycle on mesure la force nécessaire pour déformer la structure, le diagramme force-déplacement peut être représenté par la courbe limitant l'aire hachurée de **la figure (3)**



**Figure (3) : Amortissement équivalent**

L'aire de la boucle représente l'énergie **E<sub>D</sub>** dissipée par la structure au cours d'un cycle de sollicitation.

Considérons maintenant l'amortisseur linéaire de la **figure (3)** soumis à une force harmonique de pulsation **ω**.

$$P = P_0 \sin(\omega t) \dots\dots\dots (4)$$

Pour ce système, la constante de l'amortisseur **c** est donnée par :

$$c = \frac{FD_{max}}{U_{max}} = \frac{P_0}{\omega U_{max}} \dots\dots\dots (5)$$

La courbe effort-déplacement décrite par ce système est représentée par une ellipse, figurée en trait pointillé sur **la figure (4)**

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'amortisseur linéaire est donnée par :

$$E_c = \oint F_D d_u = \int_0^{2\pi} (c\dot{u}) \dot{u} dt = \pi c \bar{\omega} u_{max}^2 \dots \dots \dots (6)$$

Cette énergie est égale à l'énergie  $E_D$  dissipée par le système, la constante d'amortisseur est donnée par:

$$c_{eq} = \frac{E_d}{P \bar{\omega} u_{max}^2} \dots \dots \dots (7)$$

## II.4. Equations de l'équilibre dynamique

L'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue à partir de trois méthodes:

Méthode directe, méthode énergétique et principe des puissances virtuelles.

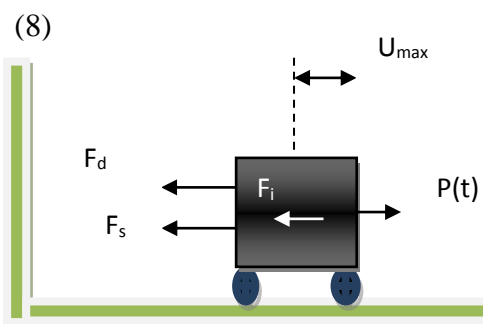
Ces trois méthodes sont illustrées ci-après:

### II.4.1. Méthode directe

Les forces s'exerçant sur l'oscillateur de **la figure (4)** sont :

- \*la force extérieure appliquée  $P(t)$ .
- \*la force de liaison  $F_s$ , reliée au déplacement  $u$  de la masse; dans le cas d'un système linéaire.
- \*cette force est donnée par **l'équation (1)**.
- \*la force de liaison  $F_D$  reliée à la vitesse  $\dot{u}$  de la masse dans le cas d'un amortisseur visqueux linéaire, cette force est donnée par l'équation **(3)** .
- \*les forces d'inertie  $F_i$  s'exerçant sur la masse  $M$  égales au produit de celle-ci par l'accélération  $\ddot{u}$  de la masse .la résultante de toutes ces forces est nulle :

$$F_s + F_D = P(t) - F_i$$



**Figure (4): Forces appliquées à l'oscillateur**

Dans l'équation précédente, on reconnaît **le principe d'Alembert**; les forces extérieures sont égales aux forces directement appliquées à la masse,  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , diminuées des forces d'inertie  $\mathbf{F}_i$ . Ces forces extérieures sont égales aux forces "intérieures",  $\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_D$ , se développant dans la liaison.

Pour un système visco-élastique linéaire, l'équation (8) devient en tenant compte de (1) et (3):  
 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{t})$  ..... (9)

#### II.4.2. Méthode Des Puissances Virtuelles :

Considérons une vitesse virtuelle  $\delta\hat{\mathbf{u}}$  pour la masse  $\mathbf{M}$ . La puissance virtuelle des efforts extérieurs est:

$$\mathbf{P}_e(\delta\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})(\delta\hat{\mathbf{u}}) \dots \dots \dots (10)$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est:

$$\mathbf{P}_i(\delta\hat{\mathbf{u}}) = -\mathbf{F}_S(\delta\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{F}_D(\delta\hat{\mathbf{u}}) \dots \dots \dots (11)$$

et la puissance virtuelle des quantités d'accélération est :

$$\mathbf{A}(\delta\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{M}\mathbf{u}\delta\hat{\mathbf{u}} \dots \dots \dots (12)$$

En écrivant le principe des puissances virtuelles, il vient :

$$[\mathbf{F}_S - \mathbf{F}_D + \mathbf{P}(\mathbf{t})](\delta\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{M}\mathbf{u}\delta\hat{\mathbf{u}} \dots \dots \dots (13)$$

valable pour toute vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}}$ . La relation (8) en découle de manière triviale.

#### II.4.3. Méthode énergétique :

L'énergie cinétique de la figure (1) est donnée

$$\mathbf{E}_C = \frac{1}{2} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}^2 \dots \dots \dots (14)$$

Son énergie potentielle, dans le cas d'un système linéaire par:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{k}\mathbf{u}^2 \dots \dots \dots (15)$$

Le travail des forces non conservatives est égal au travail des forces appliquées et des forces dissipatives.

$$\delta\mathbf{W}_{nc} = \mathbf{P}(\mathbf{t})\delta\mathbf{u} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} \dots \dots \dots (16)$$

Le principe d'Hamilton permet d'écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}\delta\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u}\delta\mathbf{u}] dt + \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{P}(\mathbf{t}) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}] dt = 0 \dots \dots \dots (17)$$

En intégrant par parties le terme  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dt$  il vient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}(t)] \delta \mathbf{u} dt = \mathbf{0} \dots\dots\dots(18)$$

qui est valable pour toute variation  $\delta \mathbf{u}$ .

L'équation (9) en découle immédiatement.

### **II.5. Formulation réduite de l'équation d'équilibre :**

La mise en œuvre de l'une des trois méthodes exposées ci-dessus conduit à l'équation d'équilibre (9) pour l'oscillateur à un degré de liberté. Divisant les deux membres de cette équation par  $\mathbf{M}$ , on obtient la formulation réduite de l'équation d'équilibre :

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\varepsilon\omega\dot{\mathbf{u}} + \omega^2\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}(t)}{\mathbf{M}} \dots\dots\dots(19)$$

pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}} \dots\dots\dots(20)$$

ou, de façon équivalente, la fréquence propre

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}} \dots\dots\dots(21)$$

Ou la période propre

$$\mathbf{T} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{K}}} \dots\dots\dots(22)$$

#### **❖ Pourcentage d'amortissement critique**

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{C}}{2\sqrt{\mathbf{KM}}} = \frac{\mathbf{C}}{2\mathbf{M}\omega} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{C}_0} \dots\dots\dots(23)$$

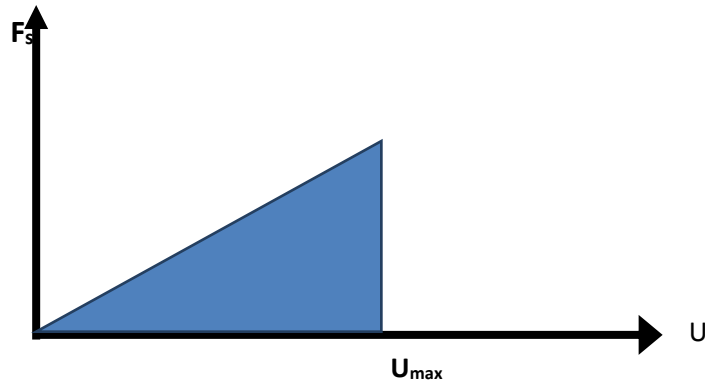
Où  $\mathbf{C}_0$  est par définition l'amortissement critique avec  $\mathbf{C}_0 = 2\mathbf{M}\omega$



L'amortissement critique donné par l'équation (23) peut également s'exprimer en fonction de la raideur  $k$  en tenant compte de l'équation (21).

$$C_0 = \frac{2K}{\omega} \dots \dots \dots (24)$$

Pour un système linéaire, dont la courbe effort-déplacement est représentée sur la figure (5), la raideur  $k$  peut être exprimée en fonction de l'énergie élastique emmagasinée  $E_s$ , égale à l'aire sous la courbe.



**Figure(5) : Système linéaire**

$$K = \frac{2E_s}{u_{\max}^2} \dots \dots \dots (24)$$

Revenant à l'équation (7) qui définit l'amortisseur équivalent du système viscoélastique linéaire dont les propriétés dissipatives sont égales à celles d'une structure pour laquelle la nature exacte de l'amortissement est inconnue, il résulte du rapprochement des équations (7),(24),(23) et (22) que, en se plaçant à résonance, le pourcentage d'amortissement critique équivalent de la structure est donné par:

$$\varepsilon = \frac{E_D}{2\pi E_s} \dots \dots \dots (25)$$

Le pourcentage d'amortissement critique défini par l'équation (25) est indépendant de la fréquence de sollicitation  $\omega$  si  $E_D$  ne dépend pas de celle-ci (cas de la dissipation d'énergie dans un matériau élasto-plastique par exemple). Il est donc plus commode de représenter les propriétés dissipatives de la structure par son pourcentage d'amortissement critique que par l'amortisseur équivalent de l'équation (7) qui dépend de  $\omega$ . La solution de l'équation (19) donnant la réponse de l'oscillateur simple est obtenue de façon classique en cherchant une solution de l'équation homogène, sans second membre ( $P(t) = 0$ ) et une solution particulière.

La résolution de l'équation homogène conduit à l'étude des vibrations libres du système ; la recherche d'une solution particulière à celle des vibrations forcées.

## **II.6. Vibrations libres:**

Les vibrations libres sont solutions de l'équation :

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\varepsilon\omega\dot{\mathbf{u}} + \omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \dots\dots\dots(26)$$

Sous certaines conditions initiales pour la vitesse et le déplacement.

La solution générale de l'équation (26) est (obtenue tout naturellement en effectuant une transformation de Laplace de l'équation (27) :

$$\mathbf{u}(t) = \lambda e^{at} \dots\dots\dots(27)$$

Reportant (27) dans (26), l'inconnue s doit satisfaire l'équation:

$$s^2 + 2\varepsilon\omega s + \omega = \mathbf{0} \dots\dots\dots(28)$$

dont la solution dépend du signe du déterminant :

$$\Delta = \omega^2(\varepsilon^2 - 1) \dots\dots\dots(29)$$

qui lui-même dépend de la valeur de  $\xi$ .

On distinguera trois cas possibles:

- système non amorti  $\xi=0$  ou à amortissement **sous-critique**  $\xi<1$
- système à amortissement **critique**  $\xi=1$
- système à amortissement **sur-critique**  $\xi>1$

Tout en notant que le cas de l'amortissement sous-critique est celui pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique.

### **II.5.1. Systeme non amorti $\xi = 0$**

L'équation (26) se réduit à :

$$\ddot{\mathbf{u}} + \omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \dots\dots\dots(30)$$

Dont la solution s'écrit pour des conditions initiales du déplacement  $\mathbf{u}(0)$  et de la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}(0)$ :

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\dot{\mathbf{u}}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + \mathbf{u}(0)\cos(\omega t) \dots\dots\dots(31)$$

Ou de façon équivalente

$$\mathbf{u}(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \dots\dots\dots(32)$$

$\rho$  désigne l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase

$$\rho = \sqrt{\mathbf{u}(0)^2 + \left(\frac{\dot{\mathbf{u}}(0)}{\omega}\right)^2} \dots\dots\dots(33)$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{\dot{\mathbf{u}}(0)}{\omega \mathbf{u}(0)} \dots\dots\dots(34)$$

**La figure (6)** représente la vibration du système non amorti au cours du temps. Celle-ci se reproduit à l'identique au bout d'un intervalle de temps égal à la période propre  $T=2\pi/\omega$  de l'oscillateur et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à  $\rho$ .

Si on considère le cas de vibration libre non amorti avec  $\mathbf{F}(t)=\mathbf{0}$  et  $\mathbf{C}=\mathbf{0}$ .

Soit une masse attachée à un ressort élastique avec **rigidité K** comme illustrée à **la figure N°01**, déplacé d'un déplacement **U**.

**Le déplacement U** au cours du **temps (t)** présenté graphiquement sur **la figure N°06** utilisant un programme **MATLAB**.

Un programme MATLAB est proposé pour montrer graphiquement le déplacement au cours du temps pour **une vibration du système non amorti** :

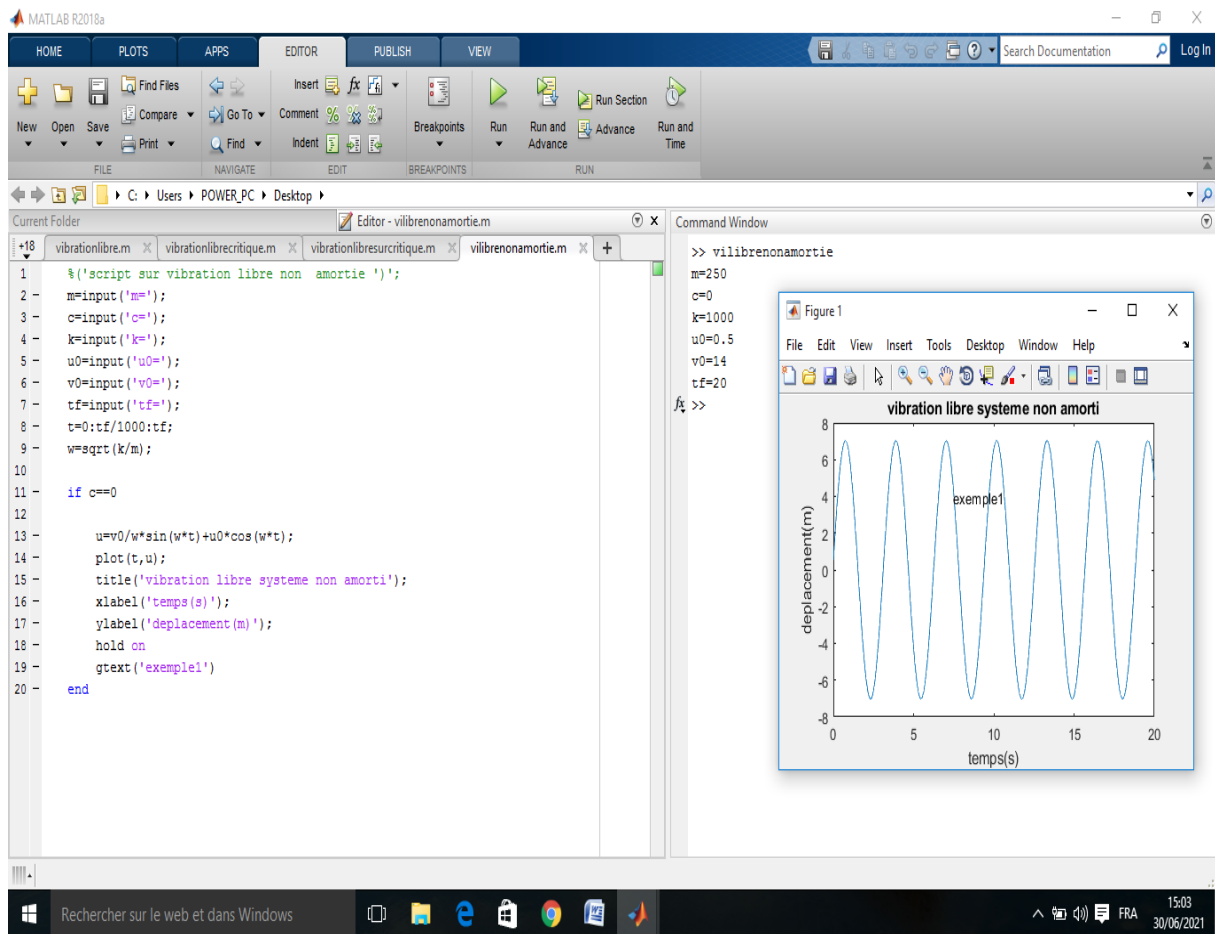
```

%('script sur vibration libre non amortie ');
m=input('m='); % la masse donné en kg ;
c=input('c='); % c'est la constante de proportionnalité , caractéristique de
l'amortissement ;
k=input('k='); % la rigidité donné en N/m ;
u0=input('u0='); % le déplacement initial en mètre ;
v0=input('v0='); % la vitesse initial en mètre/second ;
tf=input('tf='); % donné en seconde ;
t=0:tf/1000:tf; % donné en seconde ;
w=sqrt(k/m); % donné en radian /seconde ;
% Utilisant l'illustration if
if c=0
u=v0/w*sin(w*t)+u0*cos(w*t) ;
% utilisant la fonction plot pour présenter l'affichage graphique du déplacement
au cours du temps ;
Plot (t,u) ;
title ('vibration libre système non amorti) ;
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');
end

```

**Programme N°01: représentation graphique d'un système a un seul degré de liberté en vibration libre non amortie**

Utilisons la fenêtre sur le MATLAB << command window>> pour formuler nos expressions



Utilisant la fenêtre << workspace >> pour indiquer toutes les variantes avec leur types et valeurs.

### Exemple 01:

Données :

$M=250$  kg ;

$C=0$  1 N/m;

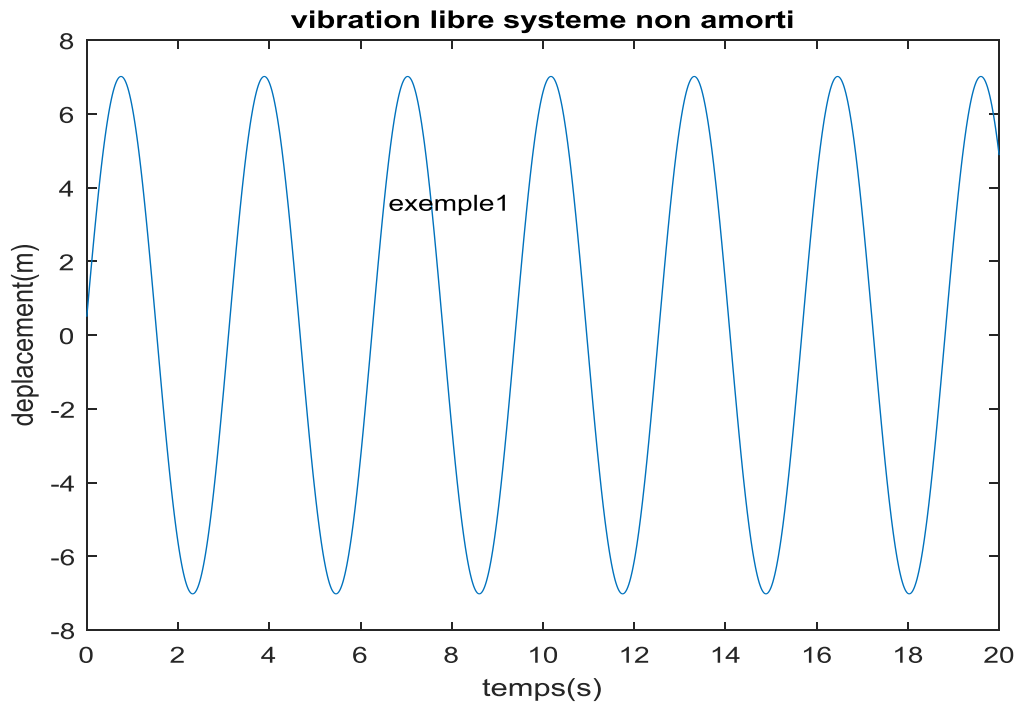
$K=1000$  N/m ;

$U_0=0.50$  m ;

$V_0=14$  m/s ;

$T_f=20$  s .

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°06**



**Figure (06): Vibration libre d'un système non amorti**

**II.6.2 .Système a amortissement sous-critique**

Ce cas correspond à  $\xi < 1$  et  $C < 2M\omega$ . La solution de l'équation(28) conduit aux deux solutions

$$s = -\epsilon\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \epsilon^2} \dots\dots\dots(35)$$

Introduisons la quantité

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \epsilon^2} \dots\dots\dots(36)$$

$\omega_D$ : est Appelée pulsation propre amortie, la réponse du système soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit :

$$U(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \epsilon\omega u(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D(t)) + u(0) \cos \omega_D(t) \right] e^{-\epsilon\omega t} \dots\dots\dots(37)$$

$$A1 = \frac{\dot{u}(0) + \epsilon\omega u(0)}{\omega_D} \quad ; \quad A2 = u(0)$$

La solution de l'équation (37) peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude  $\rho$  et la phase  $\theta$  sous la forme :

$$u(t) = \rho e^{-\varepsilon\omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \dots \dots \dots (38).$$

Elle est représentée sur la figure (7) en fonction du temps et suivant un programme code en MATLAB .

Un programme MATLAB est proposé pour montrer graphiquement le déplacement au cours du temps pour une **vibration du système amorti sous critique** :

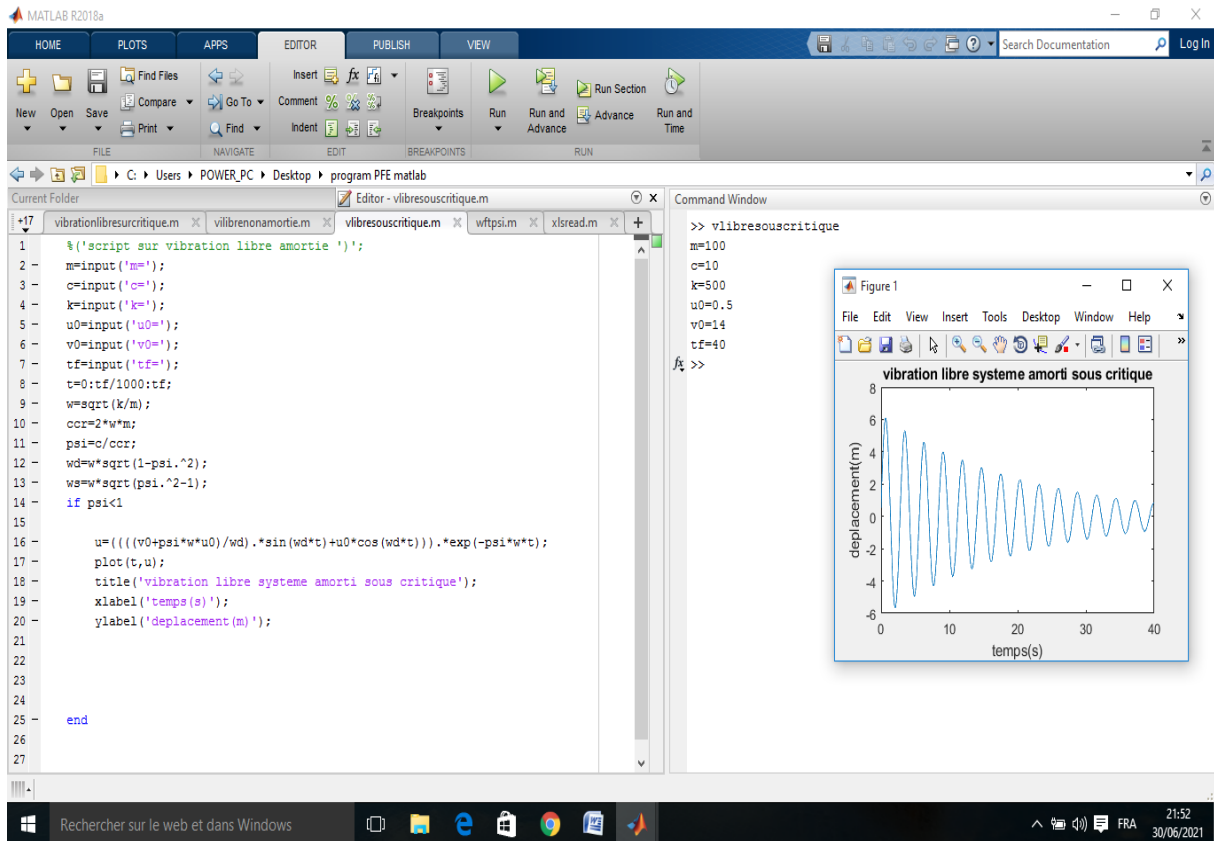
```

%('script sur vibration libre amortie sous critique');
m=input('m=');
c=input('c=');
k=input('k=');
u0=input('u0=');
v0=input('v0=');
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
w=sqrt(k/m);
ccr=2*w*m;
psi=c/ccr;
wd=w*sqrt(1-psi.^2);
ws=w*sqrt(1-psi.^2);
if psi<1          % le pourcentage de l'amortissement ;
u((((v0+psi*w*u0)/wd).*sin(wd*t)+u0*cos(wd*t)).*exp(-psi*w*t);
plot(t,u);
title ('vibration libre système amorti sous critique') ;
xlabel('temps(s)');
ylabel('déplacement(m)');
end

```

**Programme N°02: représentation graphique d'un système a un seul degré de liberté en vibration libre amortie sous critique**

Utilisons la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variant avec leurs types et valeurs.



### Exemple 02:

Données :

$M=100$  kg ;

$C=10$  N/m;

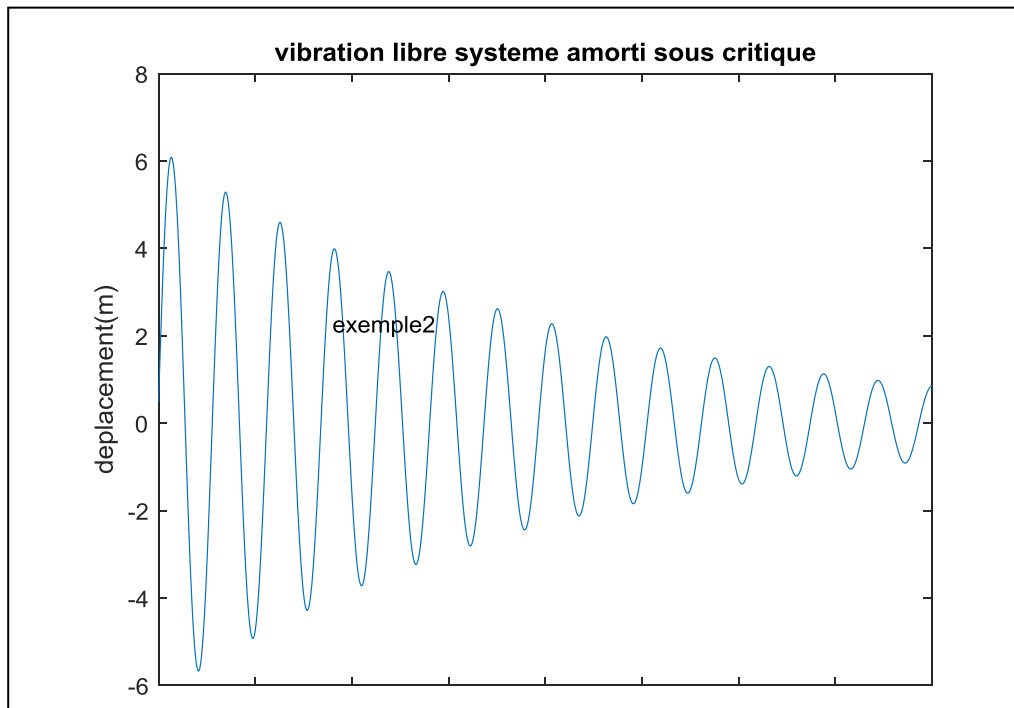
$K=500$  N/m ;

$U_0=0.50$  m ;

$V_0=14$  m/s ;

$T_f=20$ s

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°07**



**Figure (07) : Vibration libre d'un système à amortissement sous-critique**

L'examen de la **figure (7)** montre que la réponse passe par **des extrema** espacés d'un temps  $T=2\pi/\omega_D$ ; l'amplitude des extrema, égale à  $\rho e^{-\xi\omega t}$ , décroît en fonction du temps pour tendre vers **0** au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant à un **déplacement nul**.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement **critique**  $\xi$  est **élevé**.

Si l'on considère deux extrema successifs, de même signe, dans la réponse vibratoire, le rapport des amplitudes est égal à :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}} \dots\dots\dots (39)$$

Prenant le logarithme des deux membres de **l'équation (39)**, le pourcentage d'amortissement critique équivalent est égal :



$$\delta = L_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \dots \dots \dots (40.a)$$

Pour les faibles valeurs de  $\xi$  se réduit à :

$$\delta = 2\pi\varepsilon \dots \dots \dots (40.b)$$

La quantité  $\delta$  est appelée décrement logarithmique. La mesure expérimentale de ce décrement logarithmique permet d'accéder au pourcentage d'amortissement critique d'un système, sans nécessairement connaître la valeur de la constante d'amortisseur (**c**). Alliée à la définition du pourcentage d'amortissement critique équivalent d'un système, on dispose ainsi d'une méthode expérimentale pour caractériser globalement la dissipation d'énergie dans une structure sans en connaître nécessairement l'origine physique.

Pour conclure sur l'oscillateur à amortissement sous-critique, on notera que pour les faibles valeurs de  $\xi$  (typiquement inférieures à 20%) telles qu'on les rencontre dans la pratique, on peut sans préjudice confondre  $\omega$  avec  $\omega_D$ . **La figure (8)** présente la variation  $\omega/\omega_D$  en fonction de  $\xi$  qui est représentée par un cercle de rayon unité.

**Le programme code avec MATLAB proposé est :**

```
%('Variation de la pulsation propre amortie en fonction de psi');
m=input('m=');
k=input('k=');

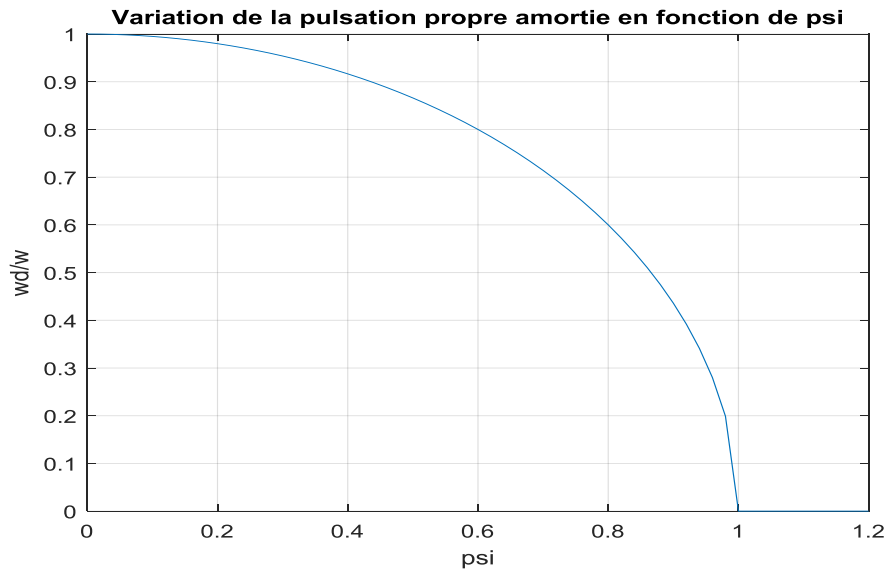
psi=(0:.2/10:1.2);
w=sqrt(k/m);

wd=w*sqrt(1-psi.^2);
A=(wd/w);

Plot (psi, A);
grid on
title('Variation de la pulsation propre amortie en fonction de psi');
xlabel('psi');
ylabel('wd/w');
```

**Programme N°03: présente graphiquement la Variation de la pulsation propre amortie en fonction de  $\xi$**

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°08**



**Figure (08) : Variation de la pulsation propre amortie en fonction de  $\xi$**

**II.6.3. Système a amortissement critique**

Ce cas correspond à  $\xi=1$  et  $C=2M\omega$ .

Sous les mêmes conditions initiales  $\mathbf{u}(0)$  et  $\dot{\mathbf{u}}(0)$ , la réponse du système s'écrit :

$$\mathbf{u}(t) = [(1 + \omega t)\mathbf{u}(0) + t\dot{\mathbf{u}}(0)]e^{-\omega t} \dots\dots\dots(41)$$

Elle est présentée sur **la figure (9)**. La réponse ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers **0** au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations.

**Le programme code avec MATLAB proposé est :**

```
%( 'script sur vibration libre amortie critique ' );
m=input('m=');
c=input('c=');
k=input('k=');
u0=input('u0=');
v0=input('v0=');
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
w=sqrt(k/m);
ccr=2*w*m;
psi=c/ccr;
if psi==1
u=((1+w*t)*u0+t*v0).*exp(-psi*w*t);
plot(t,u);
title('vibration libre systeme amorti critique');
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');
end
```

**Programme N°04 :représentation graphique d'un système a un seul degré de liberté en vibration libre amortie critique**

Utilisons la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variant avec leur types et valeurs.

**Exemple 03:**

Données :

M=20 kg ;

C=200 N/m;

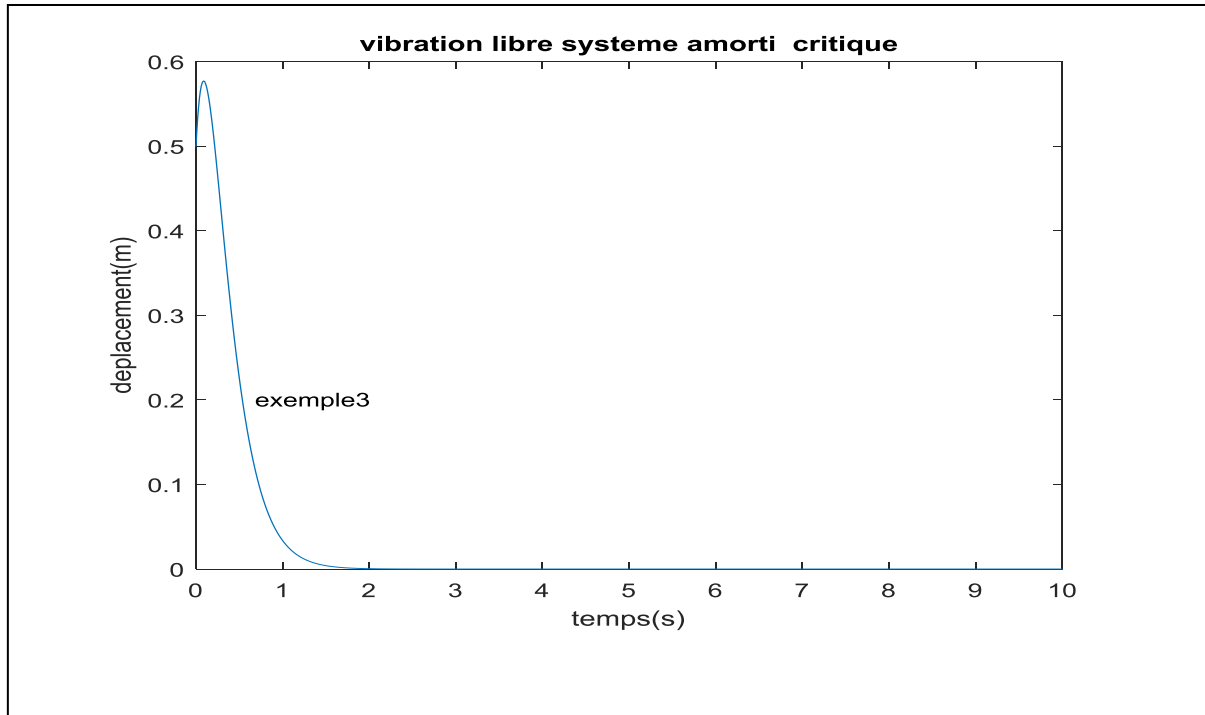
K=500 N/m ;

U0=0.50 m ;

V0=2 m/s ;

Tf=10 s .

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°09**



**Figure (09) : SYSTEME A AMORTISSEMENT CRITIQUE**

#### **II.6.4. Système a amortissement sur critique**

Ce cas correspond à  $\xi > 1$  et  $C > 2M\omega$  La solution s'écrit :

$$u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \varepsilon\omega u(0)}{\hat{\omega}} \text{sh}(\hat{\omega}t) + u(0) \text{ch}(\hat{\omega}t) \right] e^{-\varepsilon\omega t} \dots\dots\dots(42)$$

$$\text{Avec } \hat{\omega} = \omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \dots\dots\dots(43)$$

On notera que la vibration libre d'un système sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que le système revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

**Le programme code avec MATLAB proposé est :**

```
%(script sur vibration libre amortie sur critique ');
m=input('m=');
c=input('c=');
k=input('k=');
u0=input('u0=');
v0=input('v0=');
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
w=sqrt(k/m);
ccr=2*w*m;
psi=c/ccr;
ws=w*sqrt(psi.^2-1);
if psi>1

u((((v0+psi*w*u0)/ws).*sin(ws*t)+u0*cos(ws*t))).*exp(-psi*w*t);
plot(t,u);
title('vibration libre systeme amorti sur critique');
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');

end
```

**Programme N°05: représentation graphique d'un système a un seul degré de liberté en vibration libre amortie sur critique**

**Exemple 04:**

Donnons :

M=50 kg ;

C=15 N/m ;

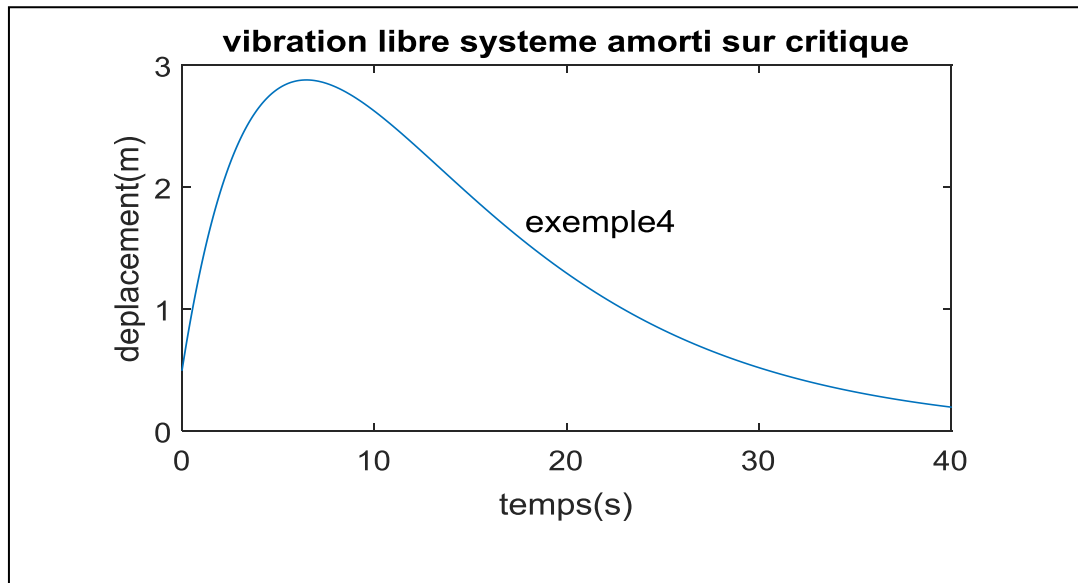
K=1 N/m ;

U0=0.50 m;

V0=1m/s ;

Tf=40s

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°10**



**Figure (10) : Vibration libre d'un système à amortissement sur critique**

Une proposition d'un programme MATLAB qui montre graphiquement le déplacement au cours du temps pour **une vibration libre avec ou sans amortissement** présenté comme suit :

```

%('script sur vibration libre amortie ');
m=input('m=');
c=input('c=');
k=input('k=');
u0=input('u0=');
v0=input('v0=');
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
w=sqrt(k/m);
ccr=2*w*m;
psi=c/ccr;
wd=w*sqrt(1-psi.^2);
ws=w*sqrt(psi.^2-1);

elseif psi>1

u=(((v0+psi*w*u0)/ws).*sin(ws*t)+u0*cos(ws*t)).*exp(-
psi*w*t);
plot(t,u);
title('vibration libre systeme amorti ');
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');
gtext('sur critique')
elseif psi<1

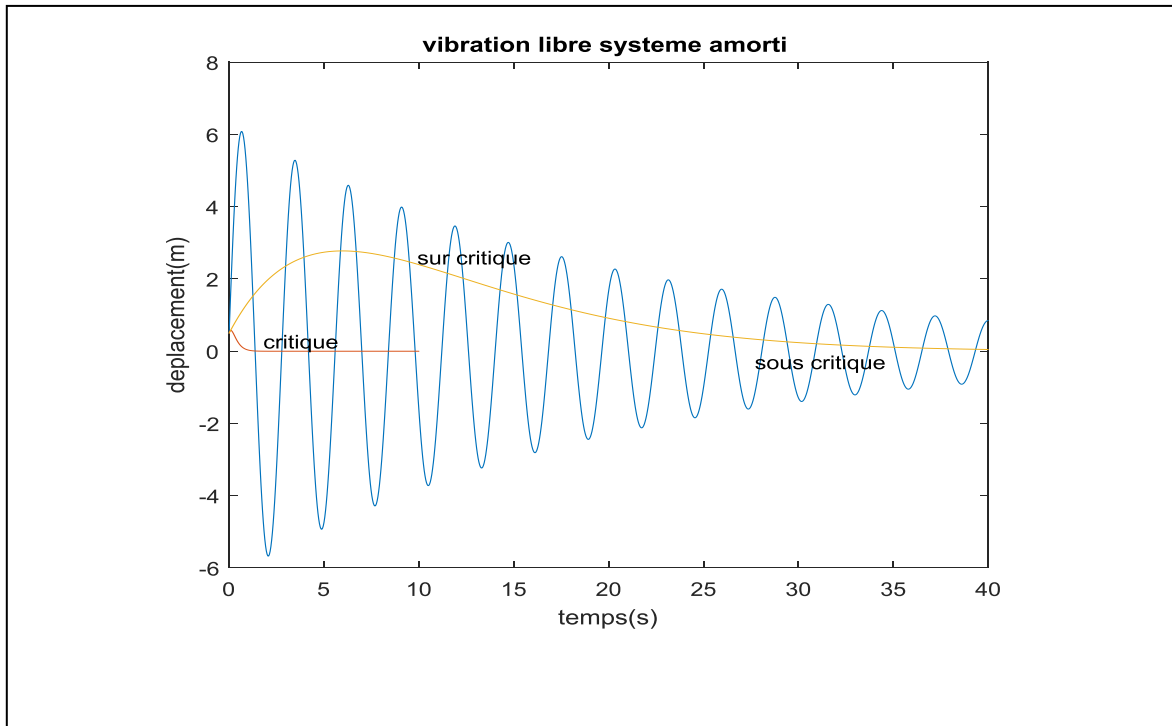
u=(((v0+psi*w*u0)/wd).*sin(wd*t)+u0*cos(wd*t)).*exp(-
psi*w*t);
plot(t,u);
title('vibration libre systeme amorti ');
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');
gtext('sous critique')
elseif psi==1

u=((1+w*t)*u0+t*v0).*exp(-psi*w*t);
plot(t,u);
title('vibration libre systeme ');
xlabel('temps(s)');
ylabel('deplacement(m)');
gtext('critique')
end
hold on

```

**Programme (06) : représentation graphique des 03 cas d'un système a un seul degré de liberté en vibration libre**

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°11**



**Figure (11): présentation des trois exemple de la Vibration libre amortie**

## II.7. Vibrations forcées

Dans ce paragraphe, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation  $\mathbf{P}(t)$  directement appliquée à la masse  $\mathbf{M}$ . On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique.

### II.7.1. Sollicitation harmonique

#### II.7.1.1. Oscillation forcée sans amortissement ( $c=0, P(t) \neq 0$ )

En l'absence d'amortissement l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \dots \dots \dots (44)$$

Supposons que l'oscillateur est soumis à un chargement harmonique

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \sin(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (45)$$

Avec  $\mathbf{P}_0$  comme amplitude de ce chargement et  $\bar{\omega}$  sa fréquence circulaire.



L'Eq. (44) devient alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{P}_0 \sin(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(46)$$

La solution  $\mathbf{u}(t)$  de cette équation différentielle du second degré hétérogène est composée de deux solutions à savoir :

1. Une fonction complémentaire  $\mathbf{u}_c(t)$  avec

$$\mathbf{u}_c(t) = \mathbf{A} \sin(\omega t) + \mathbf{B} \cos(\omega t) \dots\dots\dots(47)$$

2. Une intégral particulier  $\mathbf{u}_p(t)$

$$\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{C} \sin(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(48)$$

Où  $\mathbf{C}$  est une constante à déterminer.

En substituant l'Eq. (48) dans (46) on obtient :

$$-\mathbf{M}\bar{\omega}^2 \mathbf{C} \sin(\bar{\omega}t) + \mathbf{k}\mathbf{C} \sin(\bar{\omega}t) = \mathbf{P}_0 \sin(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(49)$$

Après simplification par  $\sin(\bar{\omega}t)$  et par  $\mathbf{k}$ , et mettant en facteur  $\mathbf{C}$  (à gauche de l'équation) on obtient :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{C} \left( \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} + 1 \right) \dots\dots\dots(50)$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \dots\dots\dots(51)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{p}_0}{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) \dots\dots\dots(52)$$

$\beta$  est connue comme le rapport de la fréquence du chargement et de la fréquence circulaire du système où encore le rapport des fréquences.

**La solution générale** de l'équation d'un système non amorti, mis en oscillation forcée est donnée par :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \sin(\omega t) + \mathbf{B} \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{p}_0}{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) \sin(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(53)$$

Où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont déterminés par les conditions initiales. Supposons que le système soit initialement au repos, c'est-à-dire à  $t = 0$ ,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$  on obtient

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_0}{\mathbf{k}} \beta \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right)$$

En substituant ces valeurs dans **la solution générale** alors on obtient:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{p_0}{k} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) [ \sin(\bar{\omega}t) - \beta \sin(\omega t) ] \dots\dots\dots(54)$$

Un programme MATLAB est proposé pour montrer graphiquement le déplacement au cours du temps pour **une vibration forcée du système non amorti** :

```

%('SCRIPT VIBRATION FORCEE sollicitation harmonique');
m=input('m=');
k=input('k=');
P0=input('P0=');      %charge harmonique
psi=input('psi=');
wfexi=input('wfexi='); % frequence dexcitation
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
w=sqrt(k/m);
beta =(wfexi/w)
u=(P0/k/(1-beta^2))*(sin(wfexi*t)-beta*sin(w*t))
plot(t,u,'b')

```

**Programme N°07: programme pour la représentation graphique d'un oscillateur forcée sans amortissement**

Utilisant la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variants avec leur types et valeurs.

**Exemple 01:**

Données :

M=10 kg ;

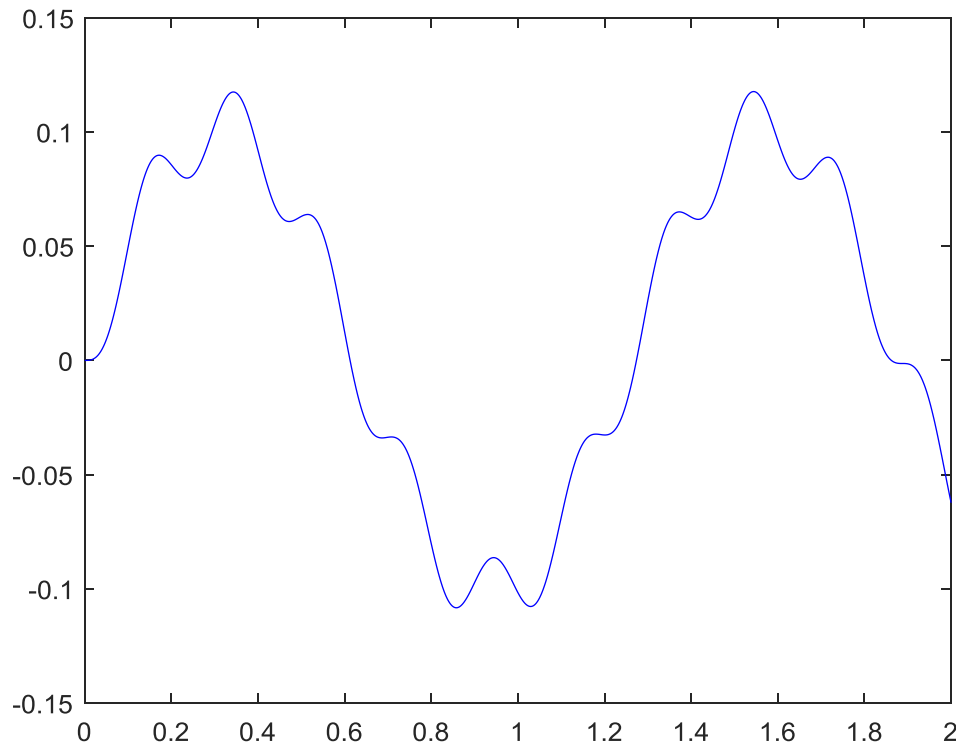
C=0 N/m;

K=10000 N/m ;

$\bar{\omega} = 25$  rad/s

Tf=20 s .

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°12**



**Figure (12): présentation graphique d'un oscillateur forcé sans amortissement**

### **II.7.1.2. Oscillation forcée avec amortissement ( $c \neq 0, P(t) \neq 0$ )**

Dans ce cas, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \dots \dots \dots (55)$$

Si  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \sin(\bar{\omega}t)$  et en divisant l'Eq.(55) par  $\mathbf{M}$  et en remplaçant  $\frac{c}{M}$  par  $2\varepsilon\omega$  on obtient :

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\varepsilon\omega + \omega^2\mathbf{u} = \frac{p_0}{M} \sin(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (56)$$

La solution de cette équation différentielle hétérogène du second degré est encore une fois composée d'une fonction complémentaire et d'une intégrale particulière.

La solution de la **fonction complémentaire** est :

$$\mathbf{u}_c(t) = e^{-\varepsilon\omega t}(\mathbf{A}_1 \sin(\omega_d t) + \mathbf{A}_2 \cos(\omega_d t)) \dots \dots \dots (57)$$

Du fait qu'un système amorti n'est pas nécessairement en phase avec la charge appliquée, alors l'intégrale particulière sera de la forme suivante :

$$\mathbf{u}_p(t) = [C1 \sin(\bar{\omega}t) + C2 \cos(\bar{\omega}t)] \dots \dots \dots (58)$$

En substituant l'Eq. (58) dans l'Eq. (57) et en séparant les termes en sinus et en cosinus, et on divisant par  $\omega^2$  on obtient :

$$C1 = \frac{P_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2} \dots \dots \dots (59)$$

$$C2 = \frac{P_0}{k} \frac{(2\varepsilon\beta)^2}{(1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2} \dots \dots \dots (60)$$

En reportant les Eqs. (49) et (60) dans l'Eq. (58) et en combinant celle-ci avec la solution particulière on obtient :

- **La solution particulière**

$$\mathbf{u}_p(t) = \left[ \frac{P_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2} \sin(\bar{\omega}t) + \frac{P_0}{k} \frac{(2\varepsilon\beta)^2}{(1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2} \cos(\bar{\omega}t) \right] \dots \dots \dots (61)$$

- **La solution générale**

$$\mathbf{u}(t) = e^{-\varepsilon\omega t} [A1 \sin(\omega_d t) + A2 \cos(\omega_d t)] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \dots \dots \dots (62)$$

Dans cette équation, le premier terme représente la réponse des oscillations transitoires, c'est-à-dire qui disparaît avec le temps, ce qui a peu d'intérêt. Mais le second terme, représentant la réponse des oscillations permanentes ou stationnaires, est intéressant du fait que, sa fréquence est celle de la charge, avec un léger déphasage.

La réponse des oscillations permanentes ou stationnaire peut alors s'écrire :

$$\mathbf{U}(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \dots \dots \dots (63)$$

Comme  $\rho$  étant la résultante de l'amplitude des oscillations permanentes, elle est égale à :

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{((1-\beta^2) + (2\varepsilon\beta)^2)^{1/2}} \dots \dots \dots (64)$$

L'angle de phase  $\theta$  est égal à :

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2\varepsilon\beta}{1-\beta^2} \right) \dots \dots \dots (65)$$

Le facteur d'amplification dynamique dans ce cas, **FAD**, qui est le rapport de l'amplitude des oscillations permanentes et du déplacement statique qui serait produit la force P0

$$\mathbf{FAD} = \frac{1}{((1-\beta^2)+(2\epsilon\beta^2))^{1/2}} \dots \dots \dots (66)$$

Pour un système même faiblement amorti ( $\xi \approx 5\%$ ), dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période de vibration propre de l'oscillateur ( $t/T=2$ ), la contribution de la réponse transitoire peut être négligée.

Un programme MATLAB est proposé pour montrer graphiquement le déplacement au cours du temps pour **une vibration forcée du système amorti** :

```
%('SCRIPT VIBRATION FORCEE sollicitation harmonique avec amortissement');
m=input('m=');
k=input('k=');
P0=input('P0=');           % charge harmonique
tf=input('tf=');
t=0:tf/1000:tf;
psi=input('psi=');
v0=input('v0=');
u0=input('u0=');
w=sqrt(k/m);
wfexi=input('wfexi=');     % frequence d'excitation
wd=w*sqrt(1-psi^2)
beta=wfexi/w
A1=(v0+psi*w*u0)/wd       ;
A2=u0;
uc=exp(-psi*w*t).*(A1*sin(wd*t)+A2*cos(wd*t))
up=(P0/k)*((1-beta^2)/((1-beta^2) + (2*psi*w)^2) * sin(wfexi*t) + (P0/k) *
((2*psi*w)^2 / ((1-beta^2) + (2*psi*w)^2)) *cos(wfexi*t))
u=uc+up
plot(t,u)
```

**Programme N°08: programme pour la représentation graphique d'un Oscillateur forcée avec amortissement**

Utilisant la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variants avec leurs types et valeurs.

**Exemple 01:**

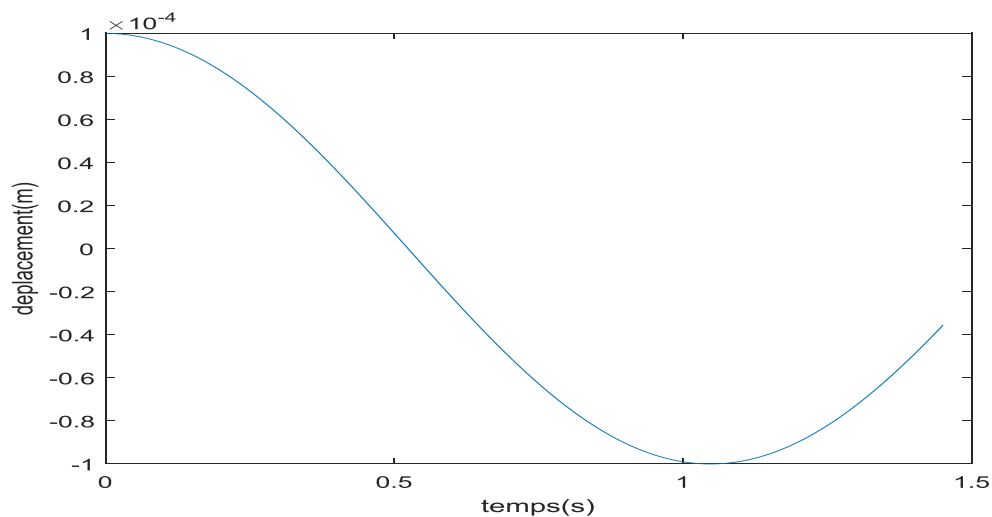
Données :

$M=10 \text{ kg}$  ;  $k=100000 \text{ N/m}$  ;  $P_0=1000 \text{ N}$  ;

$T_f=10 \text{ s}$  ;  $v_0=0 \text{ m/s}$  ;  $u_0=0 \text{ m}$  ;

$\varepsilon = 5 \%$  ;  $\bar{\omega}=3 \text{ rad/s}$

Le résultat obtenu est présenté sur la **figure N°13**



**Figure (13): présentation graphique d'un oscillateur forcée avec amortissement**

**Exemple 02:**

Données :

$M=150 \text{ kg}$  ;

$k=500 \text{ N/m}$  ;

$P_0=25 \text{ N}$

$T_f=50 \text{ s}$  ;

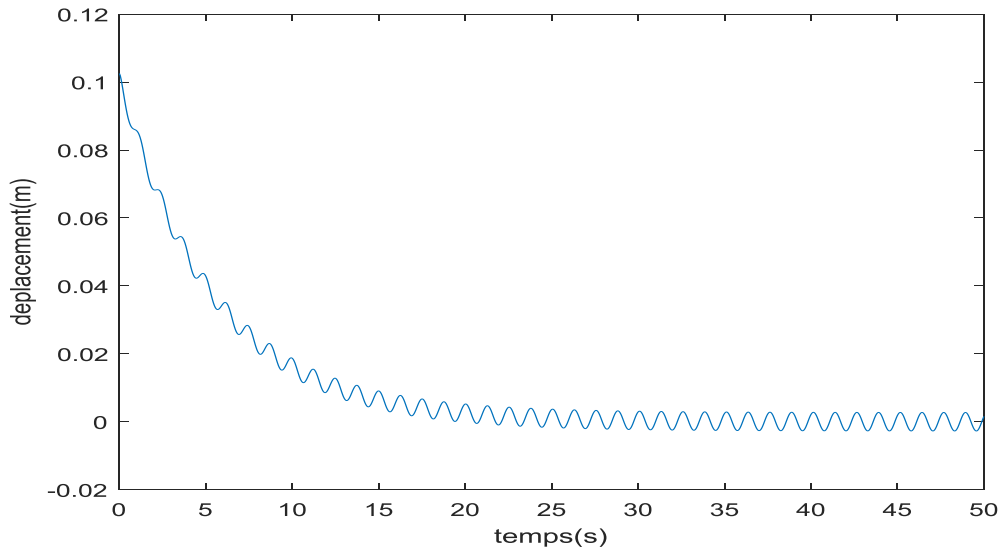
$v_0=0 \text{ m/s}$  ;

$u_0=0.1 \text{ m}$  ;

$\varepsilon = 5 \%$  ;

$\bar{\omega}=3 \text{ rad/s}$

Le résultat affiché est présenté sur la **figure N°14**



**Figure 14: présentation graphique d'un oscillateur forcée avec amortissement**

### **II.7.2. Etude de la résonance $\beta = 1$**

Lorsque la pulsation de la sollicitation **coïncidait** avec la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse, en termes de déplacement, passait par un maximum qui pouvait être infini si l'amortissement de l'oscillateur était nul.

Le facteur d'amplification **FAD**, passe par un maximum, c'est le phénomène de résonance.

Ce maximum est égal à :

$$\mathbf{FAD}_{\beta=1} = \frac{1}{2\varepsilon} \dots\dots\dots(67)$$

Dans le cas où l'amortissement est nul, alors le **FAD** devient infini. Bien que l'on en soit proche de la réponse maximum exacte des systèmes amortis, le rapport des fréquences à la réponse maximum s'obtient en annulant la dérivée de **l'Eq. (67)** par rapport à  $\beta$

- **Dangers de la résonance :**

Par l'accroissement considérable de l'amplitude des vitesses du résonateur, la résonance présente de graves inconvénients; en voici quelques exemples:

- les irrégularités de la route produisent secousses sur une voiture, à des intervalles concordant avec l'une de ses périodes d'oscillation propre sur ses ressorts d'où risques de rupture.
- Rupture d'arbres de machines: une machine mal équilibrée peut, en rotation, fonctionner comme système exciteur.

- Une pièce de machine ne doit pas vibrer à une fréquence trop proche de sa fréquence de résonance (sinon il peut y avoir rupture).

### **II.8. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons passé en revue des notions de dynamique des structures la vibration libre et la vibration forcée d'un système amorti et non amorti .

Dans une deuxième partie nous avons établis une représentation graphique du système amorti ou non amorti utilisant Un programme code Matlab.



**CHAPITRE III:  
ANALYSE SISMIQUE PAR LA  
METHODE DYNAMIQUE MODALE SPECTRALE**

---

### **III.1- Introduction :**

Un séisme est une libération brutale de l'énergie potentielle accumulée dans les roches par le jeu des mouvements relatifs des différentes parties de l'écorce terrestre. Lorsque les contraintes dépassent un certain seuil, une rupture d'équilibre se produit et donne naissance aux ondes sismiques qui se propagent dans toutes les directions et atteignent la surface du sol. Ces mouvements du sol excitent les ouvrages par déplacement de leurs appuis et sont plus ou moins amplifiés dans la structure. Le niveau d'amplification dépend essentiellement de la période de la structure et de la nature du sol.

### **III.2- Objectifs de l'étude dynamique:**

L'objectif initial de l'étude dynamique d'une structure est la détermination de ses caractéristiques dynamiques propres. Ceci est obtenu en considérant son comportement en vibration libre non- amortie. Cela nous permet de calculer les efforts et les déplacements maximums lors d'un séisme.

L'étude dynamique d'une structure telle qu'elle se présente réellement, est souvent très complexe et demande un calcul très fastidieux voire impossible. C'est pour cette raison qu'on fait souvent appel à des modélisations (**programme code MATLAB**) qui permettront de simplifier suffisamment le problème pour pouvoir l'analyser.

### **III.3- Choix de la méthode de calcul**

#### **A- Méthodes utilisables**

Le calcul des forces sismiques peut être mené suivant trois méthodes :

- par la méthode statique équivalente
- par la méthode d'analyse modale spectrale
- par la méthode d'analyse dynamique par accélérographes

---

## **B - Conditions d'application de la méthode statique équivalente**

La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :

a) Le bâtiment ou bloc étudié, satisfaisait aux conditions de régularité en plan et en élévation prescrites au chapitre III, paragraphe 3.5 avec une hauteur au plus égale à

65m en zones I et IIa et à 30m en zones IIb et III.

b) Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration irrégulière tout en respectant, autres les conditions de hauteur énoncées en a), les conditions complémentaires suivantes :

### **Zone I :**

- tous groupes

### **Zone II<sub>a</sub> :**

- groupe d'usage 3
- groupe d'usage 2, si la hauteur est inférieure ou égale à 7 niveaux ou 23
- groupe d'usage 1 B, si la hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17 m.
- groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10 m.

### **Zone II<sub>b</sub> et III :**

- groupes d'usage 3 et 2, si hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.
- groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10 m.
- groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 2 niveaux ou 08 m.

## **C - Conditions d'application de la Méthodes dynamiques**

a) La méthode d'analyse modale spectrale peut être utilisée dans tous les cas, et en particulier, dans le cas où la méthode statique équivalente n'est pas permise.

b) La méthode d'analyse dynamique par accélérographes peut être utilisée au cas par cas par un personnel qualifié, ayant justifié auparavant les choix des séismes de calcul et des lois de comportement utilisées ainsi que la méthode d'interprétation des résultats et les critères de sécurité à satisfaire.

---

## **III.4 - Methode dynamique modale spectrale**

### **III.4.1. – Principe**

Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets engendrés dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure.

L'analyse modale est le processus de détermination des caractéristiques dynamiques inhérentes des systèmes en forme de fréquences naturelles, de facteurs d'amortissement et de formes de mode ainsi que des facteurs de participation, afin de les utiliser pour formuler un modèle mathématique pour son comportement dynamique. Les données du modèle mathématique est appelé la méthode modale du système et l'information pour les caractéristiques sont ses données modales.

Les modes propres de vibration sont inhérentes à un système dynamique et sont entièrement déterminée par ses caractéristiques physiques (masse, raideur, amortissement) et leur répartition spatiale.

Pour chaque mode propre est décrit en termes de paramètres modaux :

- Période et fréquence naturelle
- Facteur d'amortissement modal
- Facteur de participation modale suivant les directions X, Y, Z
- La masse modale participante (pourcentage) suivant les directions X, Y, Z

### **III.4.2. – Modélisation**

- Pour les structures régulières en plan comportant des planchers rigides, l'analyse est faite séparément dans chacune des deux directions principales du bâtiment. Celui-ci est alors représenté dans chacune des deux directions de calcul par un modèle plan, encastré à la base et où, les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec un seul DDL en translation horizontale.

a) Pour les structures irrégulières en plan, sujettes à la torsion et comportant des planchers rigides, elles sont représentées par un modèle tridimensionnel, encastré à la base et où les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec **trois degré de liberté, deux translations horizontales et une rotation d'axe vertical.**

c) Pour les structures régulières ou non comportant des planchers flexibles, elles sont représentées par des modèles tridimensionnels les encastrés à la base et à plusieurs DDL par plancher.

d) La déformabilité du sol de fondation doit être prise en compte dans le modèle toutes les fois où la réponse de la structure en dépend de façon significative.

e) Le modèle de bâtiment à utiliser doit représenter au mieux les distributions des rigidités et des masses de façon à prendre en compte tous les modes de déformation significatifs dans le calcul des forces d'inertie sismiques (ex : contribution des zones nodales et des éléments non structuraux à la rigidité du bâtiment).

f) Dans le cas des bâtiments en béton armé ou en maçonnerie, la rigidité des éléments porteurs doit être calculée en considérant les sections non fissurées. Si les déplacements sont critiques particulièrement dans le cas de structures associées à des valeurs élevées du coefficient de comportement, une estimation plus précise de la rigidité devient nécessaire par la prise en compte de sections fissurées.

### III.4.3. - Spectre de réponse de calcul

L'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant :

$$\text{Sa/g} = \begin{cases} 1.25 * A \left( 1 + \frac{T}{T_1} (2.5 * \eta \frac{Q}{R} - 1) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5 * \eta (1.25 * A) \frac{Q}{R} & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5 * \eta (1.25 * A) \frac{Q}{R} \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & 2 \leq T \leq 3.S \\ 2.5 * \eta (1.25 * A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} \left( \frac{Q}{R} \right) & 3.S > T \end{cases}$$

**A** : coefficient d'accélération de zone (tableau N° 4).

**v**: facteur de correction d'amortissement (quant l'amortissement est différent de 5%)

$$v = \sqrt{7/(2 + \varepsilon)} \geq 0.7 \dots \dots \dots (68)$$

$\xi$ : pourcentage d'amortissement critique donné par le tableau suivant :

Remplissage	Portiques		Voiles ou murs
	Béton armé	Acier	Béton armé/maçonnerie
Léger	6	4	10
Dense	7	5	

**Tableau N°01 : pourcentage d'amortissement critique  $\xi$**

**R** : coefficient de comportement de la structure donné par le tableau suivant :

<b>A Béton armé</b>		
<b>1a</b>	Portiques auto stables sans remplissages en maçonnerie rigide	<b>5</b>
<b>1b</b>	Portiques auto stables avec remplissages en maçonnerie rigide	<b>3,5</b>
<b>2</b>	Voiles porteurs	<b>3,5</b>
<b>3</b>	Noyau	<b>3,5</b>
<b>4a</b>	Mixte portiques/voiles avec interaction	<b>5</b>
<b>4b</b>	Portiques contreventés par des voiles	<b>4</b>
<b>5</b>	Console verticale à masses réparties	<b>2</b>
<b>6</b>	Pendule inverse	<b>2</b>
<b>B Acier</b>		
<b>7</b>	Portiques auto stables ductiles	<b>6</b>
<b>8</b>	Portiques auto stables ordinaires	<b>4</b>

<b>9a</b>	Ossature contreventée par palées triangulées en X	<b>4</b>
<b>9b</b>	Ossature contreventée par palées triangulées en V	<b>3</b>
<b>10a</b>	Mixte portiques/palées triangulées en X	<b>5</b>
<b>10b</b>	Mixte portiques/palées triangulées en V	<b>4</b>
<b>11</b>	Portiques en console verticale	<b>2</b>
<b>C Maçonnerie</b>		
<b>12</b>	Maçonnerie porteuse chaînée	<b>2,5</b>
<b>D Autres systèmes</b>		
<b>13</b>	Ossature métallique contreventée par diaphragme	<b>2</b>
<b>14</b>	Ossature métallique contreventée par noyau en béton armé	<b>3</b>
<b>15</b>	Ossature métallique contreventée par voiles en béton armé	<b>3,5</b>
<b>16</b>	Ossature métallique avec contreventement mixte comportant un noyau en béton armé et palées ou portiques métalliques en façades	<b>4</b>
<b>17</b>	Systèmes comportant des transparences (étages souples)	<b>2</b>

**Tableau N°02: valeurs du coefficient de comportement R**

**T1, T 2** : périodes caractéristiques associées à la catégorie de site donné par le tableau suivant :

Site	S1	S2	S3	S4
<b>T1</b>	<b>0,15</b>	<b>0,15</b>	<b>0,15</b>	<b>0,15</b>
<b>T2</b>	<b>0,3</b>	<b>4</b>	<b>0,5</b>	<b>0,7</b>

**Tableau N°03: Valeurs de T1et T2**

Groupe	I	Iia	Iib	III
1A	0,15	0,25	0,3	0,4
1B	0,12	0,2	0,25	0,3
2	0,1	0,15	0,2	0,25
3	0,07	0,1	0,14	0,18

**Tableau N°04: coefficient d'accélération de zone A**

- Q : facteur de qualité

Le facteur de qualité de la structure est fonction de :

- la redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent
- la régularité en plan et en élévation
- la qualité du contrôle de la construction

La valeur de **Q** est déterminée par la formule :

$$Q = 1 + \sum_1^5 p_q \dots \dots \dots (69)$$

$p_q$  : est la pénalité à retenir selon que le critère de qualité q "est satisfait ou non". Sa valeur est donnée par tableau suivant :

N°	Critère q	Observé	N/observé
1	Conditions minimales sur les files de contreventement	0	0,05
2	Redondance en plan	0	0,05
3	Régularité en plan	0	0,05
4	Régularité en élévation	0	0,05
5	Contrôle de la qualité des matériaux	0	0,05
6	Contrôle de la qualité de l'exécution	0	0,1

**Tableau N°5: critère de qualité q**



Dans la détermination de la valeur de  $\mathbf{Q}$ , il y a lieu de tenir compte du fait que les irrégularités en plan et en élévation ont déjà été prises en charge par le modèle. Par ailleurs, en cas d'analyse tridimensionnelle il y a lieu de prendre, comme valeur de  $\mathbf{Q}$ , la plus pénalisante des valeurs calculées suivant les deux directions orthogonales de référence.

L'action sismique doit être appliquée dans toutes les directions jugées déterminantes pour le calcul des forces sismiques ainsi que les directions qui leur sont perpendiculaires, compte tenu de la configuration en plan de la structure. Pour les structures ayant leurs éléments de contreventement distribués le long de deux directions orthogonales, ces deux directions sont à retenir comme Directions d'excitation.

#### **III.4.4. Calcul de la réponse sismique**

##### **➤ Analyse modale**

Le but de cette analyse est la détermination :

##### **➤ Fréquences propres et modes propres**

Les équations du mouvement sont matricielles et couplées. C'est pourquoi les mécaniciens (plus précisément, les spécialistes de la dynamique des structures) ont proposé une méthode nommée analyse modale, qui consiste à changer de base pour se placer dans la base des vibrations propres du système, où les équations sont généralement plus simples.

En vibration libre non amortie l'équation de mouvement est:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{k} \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

Pour un mode  $i$  on a:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \phi_i \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \phi_i (\mathbf{A}_i \cos(\omega_i \mathbf{t}) + \mathbf{B}_i \sin(\omega_i \mathbf{t}))$$

Les inconnues sont le mode propre  $\phi_i$  et la pulsation propre  $\omega_i$

Remplaçons  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$  ;  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  dans l'équation de mouvement :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} \phi_i + \mathbf{k} \phi_i) \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

$$\omega^2 \mathbf{M} \phi_i = \mathbf{k} \phi_i \quad \text{avec } \mathbf{q}_i(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$$

Cette relation algébrique est nommée problème **les valeurs et vecteurs propres**.

Les  $\omega^2_i$  Sont réelles et positives car **les matrices K et M** sont symétriques et définies positives.

La plus faible pulsation est notée  $\omega_1$

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_n$$

**Matrice** =

$\omega_1$	.	.	.	.
.	$\omega_2$	<b>0</b>	.	.
.	.	$\omega_3$	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	$\omega_n$

$$\omega^2 M \phi_i = k \phi_i \quad (k - \omega^2 M) \phi_i = 0$$

C'est un système d'équations homogène Il n'admet pas de solution unique (triviale) seulement si:

$$\text{Det} ((k - \omega^2 M) \phi_i = 0)$$

C'est un polynôme de degré N en variable  $\omega^2_i$ , Il est nommé équation caractéristique sa résolution permet d'obtenir les N valeurs de  $\omega^2_i$  ( $\omega^2_1, \omega^2_2, \dots, \omega^2_n$ ).

Pour l'analyse dynamique d'un élément structural (ou d'une structure) il y a lieu de connaître:

- Sa masse **M**
- Son élasticité ou sa raideur **K**
- Le matériau constituant cet élément /structure
- Son degré d'amortissement

#### 4.4.1. Systèmes à plusieurs degrés de Liberté (SPPDL)

Mise en équation comme dans le cas des systèmes à seul degré de liberté les systèmes à plusieurs degrés de liberté (PSDDL), l'équation du mouvement s'écrit comme suit:

$$[M] \ddot{u} + [c] \dot{u} + [K] u = P(T).$$

Avec  $[M]$  matrice de masse,  $[c]$  matrice d'amortissement et  $[K]$  matrice de rigidité  $\ddot{u}$  le vecteur l'accélération,  $\dot{u}$  la vitesse et  $u$  le déplacement du mouvement Et  $\{P(T)\}$  Le vecteur force.

La matrice masse et la matrice rigidité, peuvent être définie comme suit:

$$[M] = \begin{vmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & , & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & , & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_n \end{vmatrix}$$

Et -----

$$[C] = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & , & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & , & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix}$$

Ces deux matrices symétriques sont carrées (nxn)

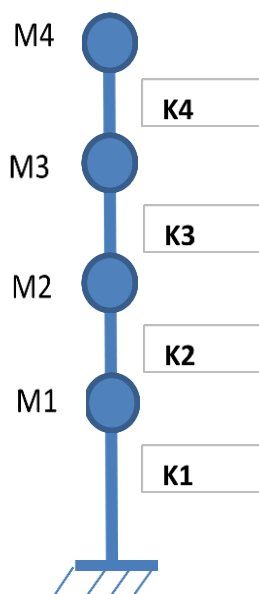
Par contre la matrice k est une matrice qui s'écrit comme suit:

$$[ K ] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{n-1,n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{n,n-1} & k_{n,n} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est symétrique (NxN)

### III.5.Exemple traité :

Soit une structure à quatre niveaux qui peut être modélisé comme suit:



Dans ce cas, les équations du mouvement en vibration libre sans amortissement des 4 masses égaux sont les suivants:

En premier lieu il faut définir au **MATLAB** la **matrice de rigidité** et la **matrice de masse** .

### 1- Un code MATLAB permis de Déterminer la matrice de masse et de rigidité

$K_{\text{etage}}=12EI/h$  section du poteau carre (0.3\*0.3) m<sup>2</sup>

Avec  $E=2*10^6$ KN/m

$I_1= I_2=I_3=I_4=I=a^4/12=0.0108$ m<sup>4</sup>

$h_1=h_2=h_3=h=3.06$  m

Donc :  $k_1=k_2=k_3=k_4$

$$[K]= \begin{vmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & K_1+K_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & K_2+K_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & K_3+K_4 \end{vmatrix}$$

$$[M] = \begin{vmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{vmatrix}$$

**% définir la matrice de masse, de rigidité avec un Code MATLAB**

**bouras\essai.xlsx')**

**K = xlsread('c:\Users\POWER\_PC\Desktop\mr bouras\essai.xlsx',3,'a1:d4')**

## 2-Un code MATLAB permis de Calcul les fréquences, les modes propres et les périodes .

Correspondante à chaque mode de vibration est déterminées par la résolution de l'équation suivante :

$$[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}]\phi=0$$

```

%Matlab Cod (MODEPROPRE, OMEGA)= eig (inv (M) *K)

n = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\ mr bouras \essai.xlsx')

K = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\ mr bouras \essai.xlsx',3,'a1:d4')
M = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\ mr bouras \essai.xlsx',2,'a1:d4')

psi = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\ mr bouras \essai.xlsx',4)

[MODEPROPRE, OMEGA]= eig (inv (M) *K);

Freq = zeros(n) ;

for i=1:n
Freq(i,i) = OMEGA(i,i)^0.5;
end

%Matlab Codr Periode

Periode = zeros(n);

for i=1:n
Periode(i,i) = 2 * pi/Freq(i,i);
end

disp(OMEGA);

disp(Freq);

disp(MODEPROPRE);

disp(Periode);

```

**Exemple 07 :**

Utilisant la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variants avec leur types et valeurs.

$$M_1=M_2=M_3=M_4=100 \text{ kg}$$

$$k_1=k_2=k_3=k_4=15000 \text{ N/m}$$

Nombre d'étage:4

Coefficient d amortissement **ksi = 7%**

Les résultats obtenus sont comme suit :

**Pour :**

$$\text{Matrice masse} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice rigidité} = \begin{pmatrix} 15000 & -15000 & 0 & 0 \\ -15000 & 30000 & -15000 & 0 \\ 0 & -15000 & 30000 & -15000 \\ 0 & 0 & -15000 & 30000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Omega} = \begin{pmatrix} 18,0922138 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 352,094453 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 529,813333 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fréquences} = \begin{pmatrix} 4,2534943 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12,2474487 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18,7641801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23,0176744 \end{pmatrix}$$

$$\text{modes propre} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ -0,6565385 & 0,57735027 & 0,42852507 & 0,22801343 \\ - & - & - & - \\ 0,57735027 & -1,52E-16 & 0,57735027 & 0,57735027 \\ - & - & - & - \\ 0,42852507 & 0,57735027 & 0,22801343 & -0,6565385 \\ - & - & - & - \\ 0,22801343 & 0,57735027 & 0,6565385 & 0,42852507 \end{pmatrix}$$

$$\text{Période} = \begin{pmatrix} 1,47718202 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,13E-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33484998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2729722 \end{pmatrix}$$



---

### 3-Un code MATLAB permis de déterminer les accélérations (Sa) correspondantes à chaque période :

suitant les même condition précédentes l'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant (RPA99/version 2003) .

Pour le calcul de l'accélération **Sa** en a fait appel à un programme MATLAB se défini comme ci-dessous:

```
%(' Détermination des accélérations (Sa) correspondantes à chaque période');
n = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\mr bouras\essai.xlsx')
K = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\mr bouras\essai.xlsx',3,'a1:d4')
M = xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\mr bouras\essai.xlsx',2,'a1:d4')
psi= xlsread('c:\Users\POWER_PC\Desktop\mr bouras\essai.xlsx',4,'a1')
S= input('type de sol :');
%T1 = input('periode T1(s):');
%T2 = input('periode T2(s):');
R = input('Coefficient de comportement R :');
Z = input('Zone, Z ='); % zone
g = input('groupe d usage, G = '); % Groupe d'usage
eta=sqrt(7/(2+psi)); % suivant équation N°68
if S==1
T1= 0.15;
T2=0.3;
elseif S==2
T1= 0.15;
T2=0.4;
```

---

```
elseif S==3
T1= 0.15;
T2=0.5;
elseif S==4
T1= 0.15;
T2=0.7;
end
A = input ('coefficient A =');           % suivant tableau N°04
Q = input ('facteur de qualité Q =');    % suivant équation N°69
[MODEPROPRE, OMEGA]= eig (inv (M) *K);
Freq = zeros(n) ;
for i=1:n
Freq(i,i) = OMEGA(i,i)^0.5;
end
%Matlab Code Periodes
Periode = zeros(n);
for i=1:n
Periode(i,i) = 2 * pi/Freq(i,i);
end
% Definirla Matrice d'Acceleration Spectrale suivant "RPA2003"
Sa = zeros(n);
for i=1:n
if 0 <=Periode(i,i) <= T1
Sa(1,i) = 1.25*A*9.81*(1+(T1/Periode(i,i))^(2.5*eta*(Q/R)-1));
```

---

```
elseif T1 <Periode(i,i) <= T2
```

```
Sa(i,i) = 1.25*A*9.81*(2.5*eta*(Q/R));
```

```
elseif T2 <Periode(i,i) >3
```

```
Sa(i,i) = 1.25*A*9.81*(2.5*eta*(Q/R))*(T2/T1)^(2/3);
```

```
elseif Periode(i,i) <= 3
```

```
Sa(i,i) = 1.25*A*9.81*(2.5*eta*(Q/R))*(T2/3)^(2/3)*(3/Periode(i,i))^(5/3);
```

```
end
```

```
end
```

```
disp(Freq);
```

```
disp(Periode);
```

```
disp(Sa);
```

```
-----
```

Utilisant la fenêtre\_<< workspace >> pour indiquer toutes les variantes avec leurs types et valeurs.

#### **Pour une structure portique en béton armé avec remplissage dense de 04 niveaux**

- Le coefficient d'amortissement =**7%**
- Zone **IIa** ;
- Type de sol : **S3**
- Coefficient de comportement **R :3.5**
- groupe d usage, **G = 2**
- coefficient **A =0.15**
- facteur de qualité **Q =1.10**

les résultats obtenus sont comme suit :

$\eta =$

**0.8819**

**T1 =**

**0.1500**

**T2 =**

**0.3000**

**1-le calcul des fréquence f**

$$\begin{pmatrix} 4,2534943 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12,2474487 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18,7641801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23,0176744 \end{pmatrix}$$

**2-le calcul des périodes pour chaque mode**

$$\begin{pmatrix} 1,47718202 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,13E-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33484998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2729722 \end{pmatrix}$$

**3-Le calcul de l'accélération Sa correspond a chaque période**

$$\begin{pmatrix} 1,25720837 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,33E+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,9180992 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20,9700713 \end{pmatrix}$$

**Pour une structure portique en béton armé avec remplissage dense de 02 niveaux**

- Le coefficient d'amortissement =7%
- Zone **IIa** ;
- Type de sol : **S2**
- Coefficient de comportement **R :3.5**
- groupe d usage, **G = 2**
- coefficient **A =0.15**
- facteur de qualité **Q =1.10**

**Les résultats obtenus sont comme suit :**

**1-le calcul des fréquence f**

$$\begin{pmatrix} 7,56933958 & 0 \\ 0 & 19,8167883 \end{pmatrix}$$

**2-le calcul des périodes pour chaque mode**

$$\begin{pmatrix} 0,83008369 & 0 \\ 0 & 0,31706375 \end{pmatrix}$$

**3-Le calcul de l'accélération Sa correspond a chaque période**

$$\begin{pmatrix} 2,83131036 & 0 \\ 0 & 14,0803336 \end{pmatrix}$$

**III.6. Conclusion :**

L'analyse modale est importante car elle permet de comprendre le comportement vibratoire de la structure.

Dans ce dernier chapitre en a fait appel à un programme MATLAB permis de Calcul les fréquences, les modes propres , les périodes et l'accélération **Sa** correspond a chaque période.

## **Conclusion générale**

Le projet de fin d'étude vient ponctuer une formation universitaire de cinq ans , il permet de mettre en application les connaissances théoriques acquises le long de notre cursus .Notre travail consiste en une contribution de numérisation du calcul dynamique des structures en utilisant le code de calcul MATLAB ce travail à pour but de simplifier les calculs manuels qui se sont avérés très compliqués et **ardus** pour se faire , nous avons traités certains problèmes en dynamique de structures et proposés des codes de calcul simple et efficaces.

La réalisation de ce projet m'a permis de :

-parfaire mes connaissances en dynamique des structures.

**-Me familiariser** avec un nouveau code de calcul qui est le MATAB

**-Traiter** quelques problèmes de dynamique des structures, il s'agit pour un oscillateur simple de comportement en vibration libre et vibration forcés, avec ou sans amortissement.

**-Aborder** le comportement sismique des structures par l'application de la méthode de l'analyse modale et proposer un programme qui calcule certaines réponses telles que les fréquences, les périodes, les accélérations ....

Les résultats sont présentés le plus souvent sous forme de graphes et matrices.

## **Perspectives :**

**-Terminer** cette étude par la détermination des forces, déplacement, et facteur de participation modale.

**-Traiter** d'autres problèmes en dynamique de structures comme par exemple les structures soumises à des forces impulsives....

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

[1] **Document technique réglementaire D.T.R-B.C.-2.48** ; règles parasismiques algériennes RPA 99/version 2003.

[2] **Cours Dynamique des structures** ; Pr. A.BEN MARES ; université 08 mai 1945 Guelma.

[3] **Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed oudiaf**  
Polycopié Le calcul scientifique appliqué au Génie Civil sous MATLAB  
Préparé par BABA HAMED Fatima Zohra.

[4] **Dynamique des structures et des ouvrages** ;Alain PECKER  
Ecole nationale des ponts et chaussées

[5] **Introduction à MATLAB et Simulink** ; Pr. Abdellah Mechaqrane  
Universite sidi mohammed ben abdallah faculté des sciences et techniques FES  
département génie électrique licence ETI électronique télécommunications et informatique.