

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique
Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Domaine : Sciences et Techniques Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Génie Mécanique et Matériaux Avancés

Présentée par

GHERDAOUI HEMZA

Intitulée

**Calcul dynamique des plaques rectangulaires reposant sur la surface du
milieu élastique de propriétés inertielles**

Soutenue le : 12 octobre 2021

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
Mr BEZAZI Abderrezak	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Président
Mr GUENFOUD Salah	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Rapporteur
Mr BOUTABBA Smail	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Examineur
Mr AMRANE Mohamed Nadir	Professeur	Univ. Mohamed Khider Biskra	Examineur
Mr REZAIGUIA Abdelouahab	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Invité

Année Universitaire : 2020/2021

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance. Aussi, c'est tout simplement que je dédie ce modeste travail à :

À la mémoire de mon très cher père, (رحمه الله). Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, la lumière qui illumine mon chemin. Puisse Dieu vous avoir en sa sainte miséricorde, et que ce travail soit la fierté de votre sacrifice mon très cher père.

À ma très chère mère, aucune dédicace très chère maman, ne pourrait exprimer la profondeur des sentiments que j'éprouve pour vous, vos sacrifices innombrables et votre dévouement firent pour moi un encouragement.

Vous m'avez soutenu durant toutes mes années d'études, vos prières m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études et pour atteindre ce but. Puisse Dieu, tout puissant vous combler de santé, de bonheur et vous procurer une longue vie.

À tous mes proches de la famille Ghuerdaoui, et plus particulièrement, mon frère Je trouve en toi le conseil du frère et le soutien de l'ami.

À mes sœurs, leurs enfants et leurs conjoints tout à son nom.

À toute ma famille surtout mon oncle Brahime, et mon oncle Zizou.

A mes amis, à tous les membres du Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux (LMANM), et à ceux qui sont proches de mon cœur.

Gherdaoui Hamza..

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier notre **DIEU**, notre créateur pour nous avoir donné la force et le courage pour accomplir ce travail.

Ce travail s'est inspiré d'une idée du Professeur **Guenfoud Salah**, le directeur de cette thèse de doctorat. C'est pourquoi, je voudrais lui exprimer toute ma profonde gratitude d'avoir accepté de m'encadrer, de fournir les conseils et les orientations avec lesquels ce travail a pris sa forme finale. Donc, merci encore pour votre grande disponibilité et dévouement pendant toute la durée de ma formation doctorale. Je tiens à remercier aussi Professeur **Bosakov S.V.** pour sa collaboration et ses recommandations échangées avec mon directeur de thèse pour enrichir ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **BEZAZI Abderrezak** Professeur et directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux (LMANM) de l'Université 8 Mai 1945 de Guelma qui m'a fait le plaisir et l'honneur de présider le jury de ma thèse.

J'exprime aussi ma gratitude à Messieurs **BOUTABBA Smail**, Professeur à l'Université de Guelma, département de Génie Mécanique, et **Amrane Mohamed Nadir**, Professeur à l'Université Mohamed Khider Biskra, qui m'ont fait un grand honneur en acceptant de siéger parmi les membres de jury de cette thèse.

J'adresse également mes chaleureux remerciements et ma gratitude à Monsieur **Rezaiguia Abdelouahab**, Professeur à l'Université de Guelma, département de Génie Mécanique pour m'avoir aidé, encouragé et accepté de participer au jury de ma thèse.

Je tiens à préciser que les calculs les plus difficiles de cette thèse de doctorat ont été exécutés sur le Plateau Technique des Calculs Intensifs de l'université 8 Mai 1945 Guelma. A cet égard, je tiens à remercier vivement Professeur **Zanat Kamel** responsable du Plateau Technique, pour son soutien et son aide.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les membres, les thésards et l'ingénieur du Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux (LMANM) pour leurs soutiens moraux en vue de finir ma thèse.

Enfin, toute ma reconnaissance s'adresse également à ma mère, mon frère, mes sœurs, ma grande famille, mes amis, doctorants, tous les enseignants et les personnels administratifs du département de Génie Mécanique de l'Université 8 Mai 1945 de Guelma, et à ceux qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

Résumé :

L'étude statique ou dynamique des poutres et des plaques reposant sur la surface ou à l'intérieur des milieux élastiques reste un sujet d'actualité vu l'utilisation accrue de ce genre de structures dans les différents domaines de construction, notamment celui du génie civil, génie mécanique, secteur naval, secteur aéronautique etc. Ce genre d'étude à réaliser doit être accomplie de façon authentique afin d'aboutir, d'une manière rationnelle et précise, au maximum du comportement réel statique et dynamique des structures en interaction avec des milieux élastiques. Dans ce contexte, ce travail de thèse de doctorat est focalisé sur une approche semi-analytique, basant sur le couplage de deux études essentielles relatives à la structure et au milieu élastique, permettant l'analyse dynamique des plaques rectangulaires reposant sur la surface d'un semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb).

L'approche utilisée est basée sur une méthode de calcul connue dans la théorie d'élasticité sous le nom 'la méthode mixte', et connue aussi dans certaines littératures sous le nom 'la méthode de Zhemochkin'. Le principe de cette méthode pour notre étude consiste à discrétiser le système étudié (plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles) en un nombre fini d'éléments rectangulaires identiques. Le contact continu entre la plaque et la surface du semi-infini élastique est donc remplacé par un contact partiel assuré par des liaisons se trouvant au niveau des centres des éléments de discrétisation.

L'application de l'approche proposée, basée sur la méthode mixte, aboutit finalement à un système d'équations canoniques linéaire contenant plusieurs paramètres relatifs à la structure étudiée. Les deux paramètres essentiels du système d'équations canoniques représentent les déplacements verticaux de la plaque et les déplacements de la surface du semi-infini élastique sur laquelle la plaque se repose. La méthode énergétique de Ritz est utilisée pour déterminer les déflexions de la plaque étudiée, alors que les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique sont déterminés par l'étude de la fonction de Green pour le modèle de Lamb. L'étude de la fonction de Green est la tâche la plus compliquée et la plus difficile mathématiquement de ce travail de doctorat. Sa complexité mathématique réside dans la détermination de plusieurs intégrales dont certaines sont associées au problème de singularité ce qui représente de plus le grand challenge à surmonter de cette étude. Ce challenge est surmonté grâce à une attention particulière investie pour l'évaluation de ces intégrales analytiquement ou semi analytiquement en jouant sur certains changements de variable et sur certains remplacements des fonctions spéciales par des séries polynomiales. Le second grand défi rencontré dans cette étude est la détermination des déflexions de la plaque qui surmonté par l'application de la méthode énergétique de Ritz en adoptant le principe de la solution de Clebsch pour la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles des déflexions de la plaque étudiée. Enfin, le couplage de ces deux études essentielles avec d'autres études auxiliaires relatives aux caractéristiques géométriques et mécanique de la structure étudiée est accompli par la méthode de Zhemochkin. Après plusieurs simplifications et transformations mathématiques, la méthode de résolution finale est présentée sous une forme matricielle permettant la détermination des efforts de liaison dans la zone de contact et puis par

l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité, les autres entités physiques sont déterminées à savoir les valeurs des fréquences propres de la plaque, les modes propres de la plaque, sa réponse dynamique à différents types d'excitations extérieures etc.

Afin de s'assurer de la fiabilité, l'authenticité et la précision des résultats de calcul donnés par cette approche, une comparaison des valeurs des fréquences propres de la plaque et de sa réponse dynamique due à une excitation harmonique avec le modèle du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) est faite. Aussi les valeurs des fréquences propres de la plaque sont vérifiées et authentifiées par l'application du principe de superposition de la méthode modale. Finalement, les fréquences d'excitation de la plaque sont aussi localisées en utilisant l'analyse (FFT) des spectres obtenus à partir des signaux de la réponse dynamique de la plaque.

Mots-clés : Problèmes de Contact ; Plaque ; Modèle de Lamb ; Fonction de Green ; Méthode de Ritz ; Fréquences propres ; Modes propres ; Réponse dynamique.

Abstract :

The static or dynamic study of beams and plates resting on the surface or inside elastic foundation is a topical subject given the large use of this kind of structures in the various construction fields like civil engineering, mechanical engineering, naval sector, aeronautical sector etc. The researched study must be authentic in order to achieve and predict with a rational and precise manner as much as possible the real static and dynamic behavior of structures in interaction with elastic foundation.

This doctoral thesis focuses on a semi-analytical approach, based on the coupling of two essential studies relating the structure and the elastic foundation, thereby allowing the dynamic analysis of a rectangular plate resting on the surface of an elastic half-space with inertial properties (Lamb's model).

The coupling method used is known in elasticity theory as the mixed method, also referred to as Zhemochkin's method. The principle of this method for consists of discretizing the studied system (i.e. the rectangular plate resting on the surface of the elastic half-space with inertial properties) into a number of identical rectangular elements. The continuous contact between the plate and the surface of the elastic half-space is replaced by a partial contact provided by connections located at the centers of the elements. The application of the proposed approach, based on the mixed method, leads to a linear canonical system of equations containing several parameters relating to the studied structure. The two essential parameters of the canonical system represent the vertical deflections of the plate and the vertical displacements of the elastic half-space surface on which the plate rests. The energy method of Ritz's is used to determine the deflections of the studied plate, while the vertical displacements of the surface of the elastic half-space are determined by the study of Green's function for the Lamb's model. The study of Green's function is the most complicated and the most mathematically difficult task of this doctoral work. Its mathematical complexity resides in the determination of several integrals, some of which are associated with the singularity phenomena. The singularity problem represents the greatest challenge to be overcome in this study.

This challenge is overcome through special attention to the evaluation of these integrals analytically or semi-analytically by playing on certain points like changes of variable systems and certain approximations of special functions by polynomial series. The second major challenge encountered in this study is the determination of the plate deflections. This is addressed by the application of the energy method of Ritz after adopting Clebsch's solution of partial differential equation concerning the deflections of the studied plate. Finally, these two essential studies are coupled with other auxiliary studies relating to the geometrical and mechanical characteristics of the studied structure. This is accomplished with Zhemochkin's method. After several simplifications and mathematical transformations, the final resolution is presented in a matrix form, thereby allowing the determination of the reactive forces in the contact zone. Next, through the application of various formulations of the theory of elasticity, other physical magnitudes are determined including the plates' Eigen-frequencies, Eigen-shapes, and dynamic response under various external excitations.

To ensure the reliability and the precision of the computational results, a comparison of the values of the Eigen-frequencies of the plate and its dynamic response due to a harmonic external excitation are accomplished through a comparison with Boussinesq's model of the distributive properties of an elastic half-space of. Additionally, the values of the Eigen-frequencies of the plate are authenticated by applying the superposition principle of the modal method. Finally, the excitation frequencies of the plate are localized using a Fast Fourier Transform analysis of the spectra obtained from the signals of the dynamic response of the plate.

Keywords : Contact Problems ; Plate ; Lamb's model ; Green's function ; Ritz's method ; Eigen-frequencies ; Eigen-shapes ; Dynamic response.

ملخص :

تعتبر الدراسة الساكنة أو الديناميكية للعوارض والصفائح المستندة على السطح أو داخل الأوساط المرنة موضوعاً مهماً نظراً لزيادة استخدام هذا النوع من الهياكل في مجالات البناء المختلفة، ولا سيما مجال الهندسة المدنية، والهندسة الميكانيكية، والقطاع البحري، قطاع الطيران إلخ. يجب إجراء الدراسة المطلوبة بشكل أصلي من أجل التحقق والتنبؤ قدر الإمكان بالسلوك الحقيقي الثابت والديناميكي للهياكل في التفاعل مع الأوساط المرنة. في هذا السياق، يركز هذا العمل لأطروحة الدكتوراه على طريقة حساب نصف تحليلي، مبنياً على اقتران دراستين أساسيتين تتعلقان بالهيكل والوسط المرن، مما يسمح بالحساب الديناميكي للصفائح المستطيلة التي تستند على سطح مرن. نصف اللامتناهي ذو خصائص العطالة (نموذج لامب).

تُعرف طريقة الاقتران المستخدمة في نظرية المرونة بالطريقة المزدوجة، كما تُعرف أيضاً في بعض المراجع باسم طريقة جيموشكين. يتمثل مبدأ هذه الطريقة في دراستنا في تقسيم النظام المدروس (الصفحة المستطيلة المستندة على سطح مرن نصف اللامتناهي ذو خصائص العطالة) إلى عدد محدود من العناصر المستطيلة المتطابقة. وبالتالي، يتم استبدال الاتصال المستمر بين الصفحة وسطح الوسط المرن بلامسة جزئية يتم توفيرها بواسطة وصلات موجودة على مستوى مراكز العناصر. يؤدي تطبيق الطريقة المقترحة، المبنية على الطريقة المزدوجة، في النهاية إلى نظام من المعادلات الكنسية الخطية التي تحتوي على العديد من المعطيات المتعلقة بالبنية المدروسة. المعطيان الأساسيان للنظام الكنسي للمعادلات يمثلان الانحرافات العمودية للصفحة والانحرافات العمودية للسطح المرن نصف اللامتناهي الذي تستند عليه الصفحة يتم استخدام الطريقة الطاقوية لريدرز لتحديد انحرافات الصفحة المدروسة، بينما يتم تحديد الانحرافات العمودية للسطح المرن نصف اللامتناهي من خلال دراسة دالة قرين لنموذج لامب. تعد دراسة دالة قرين هي المهمة الأكثر تعقيداً وصعوبة من الناحية الرياضية في عمل الدكتوراه هذا. يكمن تعقيدها الرياضي في تحديد عدة تكاملات، يرتبط بعضها بمشكلة التفرد، والتي تمثل التحدي الأكبر الذي يجب التغلب عليه في هذه الدراسة. تم التغلب على هذا التحدي بفضل الاهتمام الخاص المستثمر في حساب هذه التكاملات بشكل تحليلي أو نصف تحليلي من خلال اللعب على تغييرات معينة في المجاهيل وعلى بعض الاستبدالات للدوال الخاصة بسلاسل متعددة الحدود. التحدي الثاني الكبير الذي تمت مواجهته في هذه الدراسة هو تحديد انحرافات الصفحة التي تم التغلب عليها من خلال تطبيق الطريقة الطاقوية لريتر من خلال اعتماد مبدأ حل كليش لحل المعادلة التفاضلية الجزئية لانحرافات الصفحة المدروسة.

أخيراً، تم تحقيق اقتران هاتين الدراستين الأساسيتين مع الدراسات المساعدة الأخرى المتعلقة بالخصائص الهندسية والميكانيكية للبنية المدروسة بواسطة طريقة جيوشكين. بعد عدة تبسيطات وتحولات رياضية يتم تقديم طريقة الحل النهائية في شكل مصفوفة تسمح بتحديد قوى الاتصال في منطقة التلامس ومن ثم من خلال تطبيق القوانين المختلفة لنظرية المرونة، يتم تحديد المقادير الفيزيائية الأخرى وهي قيم الترددات الذاتية للوحة، والانحناءات الذاتية للصفحة، واستجابتها الديناميكية لأنواع مختلفة من الإثارات الخارجية، وما إلى ذلك.

من أجل ضمان الموثوقية، وأصالة ودقة النتائج الحسابية التي تقدمها هذه الطريقة، تم إجراء مقارنة بين قيم الترددات الذاتية للصفحة واستجابتها الديناميكية بسبب الإثارة التوافقية مع نموذج نصف اللامتناهي المرن ذو خصائص التوزيع (نموذج بوسينيسك). كما يتم التحقق والمصادقة من قيم الترددات الذاتية للصفحة من خلال تطبيق مبدأ التراكب للطريقة المشروطة. أخيراً، يتم أيضاً تحديد ترددات الإثارة للصفحة باستخدام تحليل (FFT) للأطياف التي تم الحصول عليها من إشارات الاستجابة الديناميكية للوحة.

كلمات مفتاحية: مشاكل الاتصال؛ صفيحة؛ نموذج لامب؛ دالة قرين؛ طريقة ريدز؛ الترددات الذاتية؛ الانحناءات الذاتية؛ استجابة ديناميكية.

Table des matières :

Dédicaces

Remerciements

Résumé :	i
Abstract :	iii
ملخص :	v
Table des matières :	vii
Liste des figures :	xi
Liste des tableaux :	xvi
Introduction générale :	1
CHAPITRE I : Etat de l'art et étude bibliographique de la thématique de la thèse	3
I.1. Introduction :	3
I.2. Synthèse des références bibliographiques :	3
I.3. Généralités sur les plaques :	9
I.3.1. Définition des plaques :	9
I.3.2. Les déflexions des plaques :	9
I.3.3. Comportement général des plaques :	10
I.3.4. Champs des déformations (Relations cinématiques) :	10
I.3.5. Equations d'équilibre d'une plaque :	13
I.4. Modèles des milieux élastiques :	14
I.4.1. Modèle de Winkler :	14
I.4.2. Modèle de milieu élastique à deux paramètres :	16
I.4.2.1. Modèle de Filonenko Borodich :	16
I.4.2.2. Modèle de Pasternak :	17
I.4.2.3. Modèle de Hetenyi :	18
I.4.3. Modèle du semi-infini élastique ou modèle de Boussinesq :	18
I.4.3.1. Modèle de semi-infini élastique non homogène :	20
I.4.3.2. Modèle du semi-infini élastique transversalement anisotrope :	21
I.4.3.3. Modèle du semi-infini élastique en couches :	21
I.4.3.4. Modèle du semi-infini élastique avec une cavité cylindrique :	23
I.4.3.5. Modèle du semi-infini élastique homogène à deux tunnels :	24
I.4.3.6. Modèle du quart-infini élastique :	26
I.4.4. Modèle de Lamb :	27
I.5. Différents types de structures reposant sur milieux élastique :	29
I.6. Méthodes de solution :	29

I.6.1. Méthodes analytiques :	29
I.6.2. Méthodes numériques :	30
I.7. Applications pratiques :	30
I.7.1. Applications pour les structures utilisées dans le domaine du génie mécanique ou du génie civil :	30
I.6.2. Applications aérospatiales :	30
I.6.3. Applications biomécaniques :	30
I.7. Conclusion :	31
CHAPITRE II : Détermination des déflexions de la plaque	32
II.1 Introduction :	32
II.2. Problématique du chapitre :	32
II.3. Application du principe de la méthode énergétique de Ritz :	35
II.4. Vérification du nombre de termes pris en compte :	42
II.5. Exemple d'application :	43
II.6. Résultats et discussion :	44
II.7. Conclusion :	44
CHAPITRE III : Etude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles	45
III.1. Introduction :	45
III.2. Problématique du chapitre :	45
III.3. Cas (1) :	46
III.3.1 Exemple explicatif :	49
III.3.2 Vérification :	50
III.3.3 Précision de la solution obtenue en considérant seulement cinq termes des séries d'approximation des fonctions :	52
III.4. Cas (2) :	54
III.4.1 Vérification de la précision de l'évaluation numérique des intégrales :	54
III.5. Résultats et discussion :	56
III.5.1 Variation des déplacements de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles :	57
III.5.2 Présentation en 3D des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique dus à deux types de charges extérieures :	58
III.6 Comparaison des résultats obtenus :	58
III.6.1. La surface du semi-infini élastique est sollicitée par une charge statique : ..	59
III.6.2. La surface du semi-infini élastique est sollicitée par une charge dynamique :	60
III.7. Conclusion :	63

CHAPITRE IV : Présentation de l'approche de calcul utilisée dans l'étude dynamique des plaques reposant la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb).....	64
IV.1. Introduction :	64
IV.2. Problématique du chapitre :	64
IV.3. Discrétisation du système étudié (plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles) :.....	65
IV.4. Formulation de l'approche :	67
IV.5. Cas des vibrations libres de la plaque :.....	69
IV.6. Fréquences propres de la plaque étudiée :	71
IV.7. Modes propres de la plaque étudiée :.....	72
IV.8. Réponse dynamique de la plaque étudiée :.....	72
IV.9. Conclusion :	72
CHAPITRE V : Calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb).....	73
V.1 Introduction :	73
V.2. Problématique du chapitre :	73
V.3. Discrétisation du système étudié :	74
V.4. Formulation du système d'équations canoniques :.....	75
V.5. Détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles :.....	75
V.6. Détermination des modes propres de la plaque étudiée :.....	77
V.7. Vérification des valeurs des fréquences propres par le principe de la méthode de superposition modale :.....	82
V.8. Vibrations forcées de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles dues aux différents types de charges extérieures harmoniques :.....	85
V.8.1. Réponse de la plaque étudiée due à une excitation extérieure harmonique : ..	86
.....	86
Cas 8.1.1 : Plaque sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique.....	86
Cas 8.1.2 : Comparaison de la réponse de deux différents points de la plaque :	88
Cas 8.1.2 : Variation de la réponse de la plaque en fonction de l'amplitude de l'excitation extérieure :	89
Cas 8.1.4 : Variation de la réponse de la plaque en fonction de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation extérieure :	90
Cas 8.1.5 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :	90

V.8.2. Réponse de la plaque étudiée due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes et/ou de différentes amplitudes et ayant les mêmes fréquences d'excitation :	91
Cas 8.2.1 : Plaque sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques :	92
Cas 8.2.2 : Visualisation de la réponse de la plaque des points situant sur sa diagonale :	94
Cas 8.2.3 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :	94
V.8.3. Réponse de la plaque étudiée due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation :	95
Cas 8.3.1 : Plaque sollicitée par deux excitations de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation :	96
Cas 8.3.2 : Visualisation de la réponse de la plaque aux points d'application des excitations extérieures :	97
Cas 8.3.3 : Etude comparative de la réponse de la plaque aux points d'application des excitations extérieures.....	98
Cas 8.3.4 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :	101
Cas 8.3.5 : Etude du problème inverse de la réponse dynamique de la plaque :	103
Cas 1 : Signal pris au point d'application de l'excitation de fréquence $\omega = 150$ Hz :.	103
Cas 2 : Signal pris au point d'application de l'excitation de fréquence $\omega = 400$ Hz :.	104
V.9. Comparaison des résultats :	104
V.9.1. Comparaison des valeurs des fréquences propres :	105
V.9.2. Comparaison de la réponse dynamique de la plaque :	107
V.10. Cas particulier :	109
V.11. Conclusion :	110
Conclusion générale :	112
Références bibliographiques :	114
Annexe : 01 :	120
Annexe : 02 :	123
Annexe : 03 :	127

Liste des figures :

Fig. I. 1 : Schéma d'une plaque mince avant et après déformation : (a) avant déformation (b) après déformation	10
Fig. I. 2 : Schéma de déformation d'une plaque mince : (a) avant déformation (b) après déformation	11
Fig. I. 3 : Illustration du modèle de Winkler sur une plaque mince reposant sur la surface d'un milieu élastique	15
Fig. I. 4 : Modèle de Filonenko Borodich	17
Fig. I. 5 : Déformation de la surface du semi-infini élastique: a) selon le modèle de Winkler ; b) selon le modèle de Boussinesq	18
Fig. I. 6 : déformation de la surface du semi-infini élastique : 1- sous l'effet d'une charge concentrée ; 2- sous l'effet d'une charge uniformément répartie.....	19
Fig. I. 7 : Modèle du semi-infini élastique en couches [42]	22
Fig. I. 8 : Propriétés mécaniques et géométriques de la première couche du semi infini élastique [42]	23
Fig. I. 9 : semi-infini élastique avec une cavité cylindrique [43]	24
Fig. I. 10 : Modèle du semi-infini élastique à deux tunnels parallèles de sections circulaires [44]	25
Fig. I. 11 : Modèle du quart-infini élastique [45]	26
Fig. II.1 : Plaque carrée reposant sur la surface d'un semi-infini élastique	33
Fig. II. 2 : Plaque carrée de contour libre et encastree au niveau de son centre.....	34
Fig. II. 3 : Comparaison des résultats obtenus en tenant compte de différents nombres de termes de la solution de Clebsch : a. plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface b. plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre	42
Fig. II. 4 : Formes des déflexions de la plaque dues à deux types de charges extérieures : a- plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface ; b- plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre..	43
Fig. II. 5 : Présentation de la projection des déflexions de la plaque (isovaleurs) sur le plan oxy dues à deux types de charges extérieures : a- plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface ;	

b- plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre	43
Fig. III. 1 : Géométrie discrétisée de la zone de contact de la surface du semi-infini élastique	46
Fig. III. 2 : Géométrie de l'élément chargé montrant la zone sur laquelle l'intégration doit être effectuée	48
Fig. III. 3 : Comparaison de la fonction hypergéométrique ${}_1F_2$ avec sa série d'approximation en fonction de ;	
(a) fréquences d'excitation ω lorsque $c_2 = 0.1 m$	
(b) distance c_2 lorsque $\omega = 250 Hz$	52
Fig. III. 4 : Division de l'élément chargé en 16 sous-éléments	54
Fig. III. 5 : Numérotation des sous-éléments de l'élément chargé	55
Fig. III. 6 : Variation des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique en fonction de :	
a- fréquence d'excitation ω et dimensions de l'élément carré chargé b (3D)	
b- fréquence d'excitation ω	
c- dimensions de l'élément carré chargé b	57
Fig. III. 7 : Distribution des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique causés par :	
a- une force ponctuelle appliquée sur la surface du semi-infini élastique	
b- deux forces ponctuelles appliquées sur la surface du semi-infini élastique.....	58
Fig. III. 8 : Les épures des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique données par :	
I- modèle de Lamb	
II- modèle de Boussinesq.....	60
Fig. III. 9 : Caractère ondulatoire des déplacements de la surface du semi-infini élastique à $t = 0.19 s$:	
a- causés par une charge dynamique	
b- causés par deux charges dynamiques	61
Fig. III. 10 : Présentation de la projection des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique (isovaleurs) sur le plan Oxy causés par :	
a- une charge dynamique ;	
b- deux charges dynamiques	61
Fig. III. 11 : Allure des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique due à une charge dynamique donnée par :	
I- modèle de Lamb	
II- modèle de Boussinesq	62

Fig. IV. 1 : Plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles..	65
Fig. IV. 2 : Plaque discrétisée en un nombre d'éléments rectangulaires identiques reposant sur la surface du semi-infini élastique.....	66
Fig. IV. 3: Choix de la numérotation des éléments de la plaque discrétisée	66
Fig. IV. 4 : Discrétisation du système étudié (plaque en interaction avec la surface du semi-infini élastique).....	67
Fig. V. 1 : Numérotation des éléments de la plaque discrétisée	74
Fig. V. 2 : Les formes des modes propres de la plaque étudiée correspondant à ses seize premières fréquences propres	81
Fig. V. 3 : Signal des amplitudes modales en un point de la plaque donné par la formule (V.5)	83
Fig. V. 4 : Spectre localisant les seize premières fréquences propres de la plaque étudiée	83
Fig. V. 5 : Zoom spectral pour la localisation des fréquences propres de la plaque sur différentes bandes de fréquences	84
Fig. V. 6: Zoom spectral pour la localisation de la fréquence propre $\omega_{10} = 451 \text{ Hz}$	85
Fig. V. 7 : Numérotation des éléments de discrétisation d'une plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique verticale	86
Fig. V. 8 : Réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure durant un intervalle de temps de son excitation	88
Fig. V. 9 : Comparaison de la réponse du point où l'excitation extérieure est appliquée avec un autre point de la plaque durant un intervalle de temps de son excitation.....	89
Fig. V. 10 : Variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction du changement de l'amplitude de l'excitation	89
Fig. V. 11 : Variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction de deux paramètres : l'amplitude de l'excitation et la fréquence de l'excitation	90
Fig. V. 12 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à une seule excitation harmonique appliquée au centre de l'élément portant numéro 205	91
Fig. V. 13 : Plaque carrée discrétisée en 900 éléments identiques reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques verticales.....	92
Fig. V. 14 : Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures en fonction du temps de l'excitation	93
Fig. V. 15 : Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de mêmes fréquences et de différentes amplitudes en fonction du temps de l'excitation.....	94

- Fig. V. 16 :** Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à deux charges extérieures harmoniques appliquées aux centres de deux différents éléments..... **95**
- Fig. V. 17 :** Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences en fonction du temps de l'excitation **97**
- Fig. V. 18 :** Comparaison de la réponse de la plaque au niveau des points d'application des deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences en fonction du temps de l'excitation **98**
- Fig. V. 19 :** Comparaison de la réponse de la plaque au niveau des deux points d'application des excitations extérieures pour différents types d'excitations de la plaque :
- A.1 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- A.2 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- A.3 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- A.4 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
 - (III) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- B.1 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- B.2 :** Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :
- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683
 - (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

B.3 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :	
(I) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683	
(II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683	
B.4 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :	
(I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683	
(II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683	
(III) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683	
.....	99
Fig. V. 20 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation.....	101
Fig. V. 21 : Projection instantanée de la réponse de la plaque sur le plan O_{xy} (isovaleurs) due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation	102
Fig. V. 22 : Spectre fréquentiel obtenu par la transformée de Fourier (FFT) du signal de réponse de la plaque au point portant le numéro 218	103
Fig. V. 23 : Spectre fréquentiel obtenu par la transformée de Fourier (FFT) du signal de réponse de la plaque au point portant le numéro 683	104
Fig. V. 24 : Comparaison de la variation du déplacement vertical de la plaque au point d'application de l'excitation extérieure sur un intervalle de temps de son excitation donnée par :	
I- semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) ;	
II- semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq)...	108
Fig. V. 25 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque étudiée due à deux excitations harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation..	110

Liste des tableaux :

- Tab. III. 1 :** Comparaison des résultats donnés par (III.8) et (III.9) pour différentes valeurs des dimensions de l'élément chargé c et b **56**
- Tab. V. 1 :** Convergence des valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée vers des valeurs stables..... **77**
- Tab. V. 2 :** Les valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée pour différents maillages..... **106**
- Tab. V. 3 :** Comparaison des valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée trouvées par le modèle de Lamb et le modèle de Boussinesq **107**

Introduction générale :

Les études dynamiques ou statiques de poutres, plaques et autres types de structures reposant sur les surfaces des milieux élastiques de différents types appartiennent au domaine des problèmes du contact. Ce vaste domaine des problèmes de contact est défini comme étant l'interaction d'au moins deux systèmes physiques de caractéristiques mécaniques et géométriques différentes. Son importance réside dans son vaste domaine d'application comme le cas des plaques et poutres représentant des éléments structuraux de base de différentes structures notamment dans le domaine du génie mécanique, génie civil et autres.

Cependant, l'analyse statique ou dynamique de ce genre de structures n'est pas achevée complètement à nos jours, car elle est liée à de très grandes difficultés mathématiques. Ceci est expliqué par leur nature compliquée ce que l'on peut exprimer par les facteurs suivants : la diversité des hypothèses simplificatrices ; le nombre important de paramètres géométriques et mécaniques entrant dans le calcul ; les difficultés de modélisation des différentes parties de la structure étudiée ; les difficultés de couplage des différentes études liées à ce genre de structures etc. Pour ces raisons essentielles, l'analyse dynamique plus précisément des structures en interaction avec milieux élastiques n'est pas accomplie d'une manière satisfaisante et définitive jusqu'à présent. Dans ce contexte, la nécessité de développer les approches de calculs déjà existantes ou de proposer de nouvelles approches plus précises et plus efficaces est indispensable et s'impose fortement.

Dans ce contexte, ce travail préparé dans le cadre de la thèse de doctorat est accompli par une approche semi-analytique permettant le calcul dynamique des plaques rectangulaires reposant sur la surface d'un milieu élastique de propriétés inertielles. L'approche proposée se base sur la méthode de calcul des structures hyperstatiques connue dans la théorie d'élasticité par la méthode mixte et connue aussi dans certaines références bibliographiques par la méthode de Zhemochkin. L'approche proposée est aménagée de telle sorte de déterminer en premier lieu les forces de réaction dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles. Dès que les forces de réaction sont déterminées, l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité faisant relation entre différentes entités physiques de la structure étudiée permettra la détermination des restes des entités physiques à savoir : les fréquences propres et les modes propres de la plaque, sa réponse dynamique due à de différents types de charges harmoniques extérieures etc.

Pour alléger un peu la tâche de calcul très compliquée, l'amortissement et les forces de frottement dans la zone de contact entre la plaque et la surface du milieu élastique sont négligés et que la plaque étudiée est considérée de forme carrée.

Le travail préparé dans le cadre de cette thèse de doctorat est structuré en : un sommaire, un résumé en français, un résumé en anglais et un résumé en arabe, une introduction générale, cinq chapitres, une conclusion générale, des références bibliographiques et quelques annexes.

Chapitre 1 est consacré à l'étude bibliographique sur la thématique de la thèse couvrant beaucoup plus les problèmes de contact. Une synthèse bibliographique des différents travaux de recherche effectuée dans ce domaine, ainsi que certains rappels de base concernant la théorie des plaques sont aussi apportés dans ce chapitre. Aussi bien ce chapitre est enrichi par une description de quelques modèles des milieux élastiques connus dans la littérature et une conclusion du chapitre.

Chapitre 2 est consacré à la détermination des déflexions de la plaque de forme carrée en utilisant la solution de Clebsch de l'équation différentielles des déflexions de la plaque et la méthode énergétique de Ritz.

Chapitre 3 est consacré à l'évaluation des intégrales lors de l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb). Certaines de ces intégrales sont associées à des problèmes de singularité ce qui a nécessité des efforts particuliers pour surmonter ce challenge et obtenir l'évaluation appropriée de ces intégrales pour qu'elles puissent être appliquées à la structure étudiée.

Chapitre 4 est consacré à la description en détail de l'approche utilisée pour le calcul dynamique des plaques rectangulaires reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles.

Chapitre 5 est consacré à l'application de l'approche proposée pour l'analyse dynamique d'une plaque de forme carrée reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles. La modélisation finale de la structure étudiée a abouti à un système matriciel permettant la détermination des forces de réaction dans la zone de contact ce qui a permis ensuite de déterminer les fréquences propres et les modes propres de la plaque et sa réponse dynamique due à plusieurs types de charges harmoniques extérieures. Ce chapitre contient aussi la vérification des valeurs des fréquences propres de la plaque en utilisant le principe de superposition de la méthode modale. La comparaison des valeurs des fréquences propres de la plaque et la comparaison de sa réponse dynamique sont effectuées en considérant la même structure reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq).

CHAPITRE I : Etat de l'art et étude bibliographique de la thématique de la thèse**I.1. Introduction :**

De nombreux sujets de grande importance dans la pratique industrielle ou civile peuvent être liés à l'utilisation des plaques et des poutres en interaction avec des milieux élastiques. Les chaussées en béton armé des autoroutes et des pistes des aéroports, les tôles des différentes structures mécaniques et les coques réservoirs etc. ce sont parmi des centaines d'autres applications bien connues. L'analyse statique ou dynamique des plaques et d'autres types de structures en interaction avec des milieux élastiques est également basée sur l'étude de la fonction de Green qui décrit en détail le type et la nature du milieu élastique considéré.

Dans ce contexte, ce chapitre est consacré aux trois volets essentiels suivants : (i) synthèse de références bibliographiques des travaux de recherche relatifs à ce sujet ; (ii) certains rappels de base concernant la théorie des plaques et poutres ; (iii) la description détaillée des modèles des milieux élastiques connus dans la littérature. Les modèles les plus utilisés sont : le modèle des ressorts (Winkler), le modèle du semi-infini élastique de propriétés distributives (Boussinesq), le modèle du semi-infini élastique de propriétés inertielles (Lamb), le modèle du semi-infini élastique en couches etc. La description de chaque modèle est accompagnée, non seulement, par la définition des propriétés mécaniques du modèle et sa conception pratique, mais aussi avec des expressions mathématiques du noyau essentiel définissant le problème et les difficultés de solution qui se résultent avec quelques recommandations et orientations de solution.

I.2. Synthèse des références bibliographiques :

L'étude statique ou dynamique de n'importe quelle structure reposant sur la surface d'un milieu élastique est liée à des difficultés mathématiques majeures. Ce challenge est expliqué par plusieurs facteurs qui entrent dans l'analyse de telles structures. La diversité des hypothèses liées à ce domaine des problèmes de contact est un enjeu important et bien évidemment plus que le nombre des hypothèses prises est grand, plus que l'erreur de la solution trouvée du problème étudié se réduit, mais avec un effort de calcul plus important. La diversité des paramètres géométriques et mécaniques, ainsi que la combinaison de plusieurs différentes études entrant dans le calcul de ce genre de structures influe considérablement sur la complexité de sa solution. Par exemple, le couplage des études d'au moins deux différents types de structures comme le cas de la plaque reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles s'impose. C'est pourquoi, il est impératif de faire une lecture approfondie de la littérature dans ce vaste domaine des problèmes de contact.

Une solution proche de la forme exacte est donné dans le travail de X. Feng et al [1] concernant la détermination du déplacement de la surface d'un semi-infini élastique de modèle de Lamb causé par une charge se trouvant à une profondeur de la surface du milieu élastique. Cette étude représente dans son ensemble l'analyse de la fonction de Green pour le modèle de Lamb en 3D et la solution proposée est bien vérifiée par la comparaison de ses résultats numériques avec la

solution de Johnson. Les formules apportées dans cette étude peuvent constituer une solution précieuse qui servira comme référence aux autres solutions numériques pour comparaison. Kh. Kh. Il'yasov et al [2] ont étudié la solution du problème de Lamb concernant le cas d'une charge extérieure harmonique uniformément répartie agissant sur la surface du semi-infini élastique. Ce type de charge tient en considération aussi le paramètre de Poisson du noyau du semi-infini élastique faisant partie des paramètres de la structure étudiée en vue de trouver une solution avec beaucoup d'exactitude. La solution finale est obtenue sur la base des transformations des intégrales et aussi avec l'utilisation de la méthode des éléments finis ce qui a abouti à une solution analytique du problème des vibrations en régime permanent sous une forme simple.

Le travail de V. V. Nishawala et al apporté dans la référence [3] rapporte une généralisation du problème de Lamb à un semi-infini élastique en considérant les champs aléatoires (RFs) de densité de masse, soumis à une charge linéaire normale. Les deux champs RFs corrélées et non corrélées sont considérés, sans aucune restriction de bruit faible. Les automates cellulaires (CA) sont utilisés pour simuler la propagation des ondes. CA est définie comme étant une méthode de calcul local pour la discrétisation rectangulaire du domaine spatial ce qui équivaut à appliquer la méthode des différences finies pour résoudre les équations différentielles de l'élasticité classique. Enfin, les auteurs de cette étude ont déterminé dans quelle mesure la fractale ou le paramètre de Hurst est un facteur significatif dans la modification de la solution du problème de Lamb concernant le cas stochastique planaire par l'évaluation du coefficient de variation de la réponse par rapport au coefficient de variation des champs aléatoires RFs. La réponse de la surface du semi-infini élastique dû à l'impact d'un pénétrateur normal à cette surface est considérée dans le travail de I. Argatov et al [4]. Les déplacements des points situant sur la surface du semi-infini élastique éloignés du point où le pénétrateur est appliqué sont décrits en résolvant le problème de Lamb pour ce problème. Dans le cas où les chocs par un pénétrateur sont transférés à la surface du semi-infini élastique par une plaque flexible, un modèle asymptotique du premier ordre est appliqué qui tient compte des propriétés dissipatives élastique dues au transfert d'énergie élastique vers le semi-infini élastique. Les principaux résultats de ce travail sont obtenus sous forme approchée. L'article publié par L. A Khajiyeva et al [5] est focalisé essentiellement à dériver le modèle asymptotique pour la propagation des ondes de surface du semi-infini élastique incompressible précontraint, soumis à une charge de surface bien définie. Dans cette étude de modèle dérivé, la désintégration de la surface est régie par une équation elliptique pseudo-statique, tandis que la propagation des ondes est décrite par une équation hyperbolique sur la surface et l'effet de la précontrainte, à savoir la contrainte de Cauchy principale σ_2 , est étudié aussi. Enfin, un exemple illustratif du problème de Lamb est considéré, démontrant l'efficacité de l'approche apportée.

L'étude des vibrations libres d'une plaque rectangulaire isotrope avec des conditions aux limites arbitraires basées sur le principe de la matrice de rigidité dynamique est présentée dans le travail M. Nefovska-D et al [6]. Dans ce travail, la méthode de superposition de Gorman est exploitée pour obtenir la solution des équations de mouvement dominantes et la matrice de rigidité dynamique est dérivée à l'aide de la méthode de projection. Les résultats obtenus dans cette étude sont en bonne concordance avec les résultats obtenus en utilisant des solutions exactes pour certains cas particuliers, ainsi qu'avec des solutions données par la méthode des éléments

finis. Le calcul des plaques flexibles reposant sur la surface des milieux élastiques en utilisant les équations généralisées de la méthode des différences finies est donné par M. Sali et al [7]. L'algorithme utilisé permet de prendre en compte, non seulement, les discontinuités finies de la fonction recherchée, mais aussi de sa première dérivée et de la partie droite de l'équation différentielle sans l'introduction des points fictifs et aussi d'un resserrement particulier du maillage. Les exemples présentés montrent la précision des résultats et la simplicité de l'algorithme utilisé. Les réponses dynamiques des plaques orthotropes reposant sur la surface des milieux élastiques modélisées numériquement à l'aide de la méthode de quadrature différentielle sont étudiées par M.-H. Hsu [8]. Dans cette étude, la technique de quadrature différentielle est utilisée pour transformer des équations différentielles partielles en un problème de valeurs propres discrètes. Les résultats numériques obtenus démontrent que la rigidité de la fondation a un impact significatif sur le comportement dynamique des plaques orthotropes.

Une solution exacte est établie dans le travail de M. A. Foyouzat et al [9] concernant le problème de la vibration libre non amortie d'une plaque mince circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de type de Winkler. La procédure de résolution est démontrée par un exemple illustratif, dans lequel l'équation de fréquence générale est dérivée pour deux conditions aux limites différentes. La solution est également vérifiée à l'aide des résultats disponibles dans la littérature et la méthode de solution proposée est directement applicable aux problèmes des plaques circulaires reposant sur les surfaces des milieux élastiques de type Pasternak à module variable. L'étude apportée par Z. Lu et al. [10] concerne les caractéristiques vibratoires d'une plaque reposant sur la surface d'un milieu élastique à deux paramètres et soumise à des charges rectangulaires mobiles avec des vitesses variables. Dans cette étude, la solution générale pour les déflexions dynamiques de la plaque est dérivée en utilisant la transformée double de Fourier. Les effets de la vitesse de charge initiale, de l'accélération de la charge, de la décélération de la charge et de la résistance horizontale au fond de la plaque sur la déflexion dynamique sont discutés. La vitesse initiale, l'accélération et la décélération de la charge rectangulaire influencent sur la réponse dynamique, et en plus la déflexion dynamique de la plaque à la vitesse critique diminue considérablement. Dans l'article de M. Dehghan et al [11] une analyse des vibrations et de la stabilité de plaques rectangulaires épaisses reposant sur la surface des milieux élastiques est donnée. Dans cette étude, un modèle à deux paramètres (Pasternak) est considéré pour décrire la fondation élastique. Le problème des valeurs propres dans le domaine 3-D est résolu numériquement par une combinaison de la méthode des éléments finis et de la quadrature différentielle (DQM). La précision des résultats obtenus est validée en comparant avec quelques solutions analytiques de la littérature. Dans le travail de B. Akgoz et al [12], l'analyse des vibrations libres géométriquement non linéaires des plaques minces stratifiées reposant sur la surface des milieux élastiques non linéaires est faite. Le modèle de milieu élastique considéré est de Winkler-Pasternak. La méthode de convolution singulière discrète est utilisée pour obtenir les équations discrétisées du mouvement des plaques. Les effets de la géométrie des plaques, des conditions aux limites, des propriétés des matériaux et des paramètres du milieu élastique sur le comportement vibratoire non linéaire des plaques sont présentés aussi dans cette étude.

Une solution sous forme de série pour l'étude de la vibration transversale des plaques rectangulaires Mindlin avec des supports ponctuels élastiques autour de son contour est apportée dans le travail de F. Pang et al [13]. Dans cette étude, la solution en série du problème est obtenue en utilisant une méthode améliorée de série de Fourier, dans laquelle les déplacements de vibration et les rotations transversales du plan médian sont représentés par une double série de cosinus de Fourier et quatre fonctions supplémentaires. La convergence, la précision, la stabilité et l'efficacité de la méthode proposée ont été examinées à travers une série d'exemples numériques. Quelques exemples numériques sur la fréquence non dimensionnelle et les formes de mode de plaques rectangulaires Mindlin avec différentes conditions aux limites sont donnés. Le problème de contact concernant l'action de deux plaques de Kirchhoff semi-infinies reposant sur la surface de milieu élastique de type multicouches élastiques est considéré dans le travail de V. Babeshko et al [14]. Le problème est d'étudier les concentrations de contraintes de contact entre les plaques et la couche sur laquelle se repose la plaque. Cette étude permet aussi d'induire le paramètre de la destruction des matériaux au cas du séisme. M. Sobhy [15] a traité la vibration et le comportement au flambage d'une plaque sandwich de matériau à gradient exponentiel (EGM) reposant sur la surface des milieux élastiques avec diverses conditions aux limites. Le milieu élastique est modélisé comme type de Pasternak qui peut être isotrope ou orthotrope et si le cisaillement est négligé, la solution converge vers le type de Winkler. Les équations régissant la réponse dynamique des plaques composites non homogènes sont déduites en utilisant diverses théories des plaques de déformation par cisaillement. Les résultats numériques pour les fréquences propres et les charges de flambement critiques des plaques sandwich symétriques sont présentés. La validité de la solution est démontrée par comparaison avec les solutions disponibles dans la littérature. Dans l'article de E. V. Barmenkova et al [16], il est donné le calcul des plaques reposant sur la surface d'un milieu élastique de type Winkler d'un coefficient de réaction de fondation variable et constant. Le calcul des déflexions des plaques est fait par la méthode des éléments finis. Les résultats du calcul obtenus sont comparés avec ceux de la même plaque reposant sur milieux élastiques de différents modèles.

La réponse dynamique d'une plaque élastique mince, isotrope et linéaire reposant sur la surface du semi-infini élastique et sollicitée par une charge mouvante sur sa surface est obtenue analytiquement dans le travail Y. Chen et al. [17]. Dans cette étude, il a supposé que la charge est répartie sur une longueur finie et se déplace à vitesse constante et la charge mobile est considérée sous une forme complexe de séries de Fourier impliquant la coordonnée horizontale, le temps et la vitesse. La solution trouvée est validée en comparant ses résultats à d'autres solutions analytiques se référant à des cas plus simples. Enfin, des études paramétriques sont menées pour évaluer l'effet d'anisotropie sur la réponse du système au chargement du mouvement pour différentes valeurs de porosité, perméabilité et vitesse de charge. L'instabilité dynamique due aux résonances paramétriques de plaques rectangulaires minces reposant sur la surface d'un milieu élastique sous l'effet des masses mobiles successives est étudiée dans le travail de E. Torkan et al [18] et considéré comme un problème linéaire périodique. Dans cette étude, l'équation différentielle partielle est transformée en un ensemble d'équations différentielles ordinaires en utilisant la méthode de Galerkin. Il a conclu que les résultats de son

étude sont utiles pour la conception de chaussées routières reposant sur des sols, des fondations des ponts et des chaussées des aéroports. La réponse dynamique des plaques à gradation fonctionnelle (FG) dans un environnement thermique sous une charge mobile est étudiée dans le travail de P. Malekzadeh et al [19]. La formulation est dérivée sur la base de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), qui inclut les effets des contraintes thermiques initiales induites par l'environnement thermique, ainsi que du milieu élastique. La formulation et la méthode de solution sont validées par l'étude de leur comportement de convergence et par comparaison avec les résultats existants dans la littérature. Enfin, les influences de l'élévation de température, de l'indice gradué du matériau, de la vitesse de la charge mobile, des paramètres de fondation élastiques et des conditions aux limites sur le comportement dynamique des plaques FG dans un environnement thermique et soumises à une charge mobile sont présentées aussi dans cette étude. Le problème des réponses dynamiques d'un semi-infini poroélastique insaturé et soumis à une charge rectangulaire mobile est étudié de manière analytique et numérique dans le travail de Z. Lu et al [20]. En utilisant la transformée de Fourier, la solution générale des équations est dérivée dans le domaine transformé, puis un problème de valeurs limites correspondant est formulé. Les résultats numériques révèlent que les effets de paramètres comme saturation du sol, vitesse de chargement et fréquence d'excitation sur la réponse dynamique du sol non saturé sont significatifs.

Le semi-infini élastique de modèle de Pasternak est utilisé par R. Buczkowski et al [21] pour étudier des plaques épaisses en statique et pour déterminer ses fréquences propres en utilisant la méthode des éléments finis. Dans le cas de l'analyse des fréquences propres, l'équation du mouvement est dérivée par l'application du principe de Hamilton impliquant la variation de l'énergie cinétique et potentielle de la plaque et du semi-infini élastique. La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre de la plaque est utilisée. Les résultats numériques de cette analyse sont vérifiés par l'utilisation des éléments minces basés sur la théorie classique de Kirchhoff et des éléments de plaques épaisses. La solution exacte concernant la vibration libre de la plaque circulaire élastique multicouches reposant sur la surface d'un milieu élastique de n'importe quel modèle est donnée dans le travail de A. Ghannadial et al [22]. L'effet de la translation de la plaque sur la surface du milieu élastique, ainsi que le coefficient du milieu élastique de type de Winkler et d'autres paramètres sont tenus en compte. Quelques exemples numériques sont présentés dans ce travail afin de présenter l'efficacité et la simplicité de la fonction de Green utilisée dans la formulation finale. Dans le travail de A. E. Musa et al [23] est présentée l'application de la méthode de Ritz pour déterminer les déflexions d'une plaque mince reposant sur la surface d'un milieu élastique non homogène. Une approche est élaborée aussi pour dériver des fonctions d'essai de Ritz qui satisfont les conditions aux limites de ce type de structures. Trois problèmes sont résolus numériquement pour vérifier l'exactitude de la méthode proposée. Dans le travail de S. A. Eftekhari et al [24] est présenté une application combinée de la méthode de Ritz et de la méthode de quadrature différentielle (DQ) pour étudier les vibrations des plaques rectangulaires. Dans cette étude, les dérivées partielles spatiales sont discrétisées à l'aide de la méthode de Ritz et ensuite le système résultant des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites associées est discrétisé sous forme forte en utilisant la méthode DQ. Des comparaisons sont faites avec des solutions analytiques et

numériques existantes dans la littérature et les résultats numériques prouvent que cette méthode convient très bien au problème considéré en raison de sa simplicité et de sa grande précision. L'étude apportée dans le travail de Q. Wang et al [25] présente une procédure de solution unifiée basée sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre pour l'analyse des vibrations libres de plaques rectangulaires orthotropes moyennement épaisses reposant sur la surface d'un milieu élastique. Tous les coefficients de dilatation inconnus sont traités comme coordonnées généralisées et sont déterminés en utilisant la méthode de Raleigh-Ritz. L'excellente précision et la fiabilité de la solution trouvée sont démontrées par des exemples numériques et des comparaisons avec les résultats disponibles dans la littérature. L'article de M. Dehghany et al [26] présente la solution exacte pour l'analyse des vibrations libres de plaques rectangulaires reposant sur la surface d'un milieu élastique. Le milieu élastique est décrit par le modèle Pasternak (à deux paramètres). Les résultats numériques obtenus sont comparés avec des résultats disponibles dans la littérature et aussi les paramètres importants concernant les théories des plaques rectangulaires reposant sur les surfaces des milieux élastiques sont discutés.

Le comportement vibratoire de grandes amplitudes des vibrations libres d'une plaque carrée isotrope mince reposant sur la surface d'un milieu élastique de type Winkler est donné dans le travail de J. B. Gunda [27]. Ce travail est exprimé sous la forme de plusieurs solutions simples en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz (R-R) basée sur les champs des déplacements couplés (CDF). La précision et la robustesse des solutions proposées sont comparées avec les résultats de base de la méthode des éléments finis disponibles. Une analyse des vibrations libres des plaques orthotropes non homogènes reposant sur la surface d'un milieu élastique de type Pasternak est investie dans le travail de A. Rahbar-Ranji et al [28]. L'exactitude et l'applicabilité de la méthode sont examinées par comparaison des résultats pour différentes conditions aux limites et différents types de matériaux avec ceux disponibles dans la littérature. Ils ont conclu que la fréquence propre des plaques est plus sensible au coefficient de couche de cisaillement plutôt qu'au coefficient de Winkler. Il est investigué dans le travail de V. C. Hacıyev et al [29] les effets de l'inhomogénéité d'une plaque orthotrope reposant sur la surface d'un milieu élastique sur les valeurs de ses fréquences propres. L'équation de base est dérivée en appliquant la théorie de Donnell-Mushtari et elle est résolue en utilisant la méthode de Galerkin. Les effets de l'inhomogénéité de la plaque et du milieu élastique de type de Winkler sur les fréquences propres sont étudiés avec détail.

L'objectif principal de l'étude apportée dans le travail de A. I. Karakas et al [30] est d'appliquer le modèle de fondation Vlasov modifié pour analyser les vibrations libres des tours de refroidissement de forme hyperbolique reposant sur la surface de milieux élastiques. Les paramètres des fréquences propres circonférentiels, latéraux et extensifs des tours de refroidissement sont présentés sous forme de tableaux et graphiques pour évaluer les effets des paramètres géométriques et de l'interaction sol-structure. Des exemples numériques sont considérés, où il est conclu que le comportement interactif sol-structure conduit à une diminution remarquable du paramètre des fréquences du système par rapport à la condition de base fixe. Dans l'article de B. F. Apostol [31], il est apporté une solution générale formelle des vibrations générées dans un semi-infini élastique homogène et isotrope de modèle de Lamb

causées par des forces concentrées. La méthode utilisée est basée sur les transformées de Fourier temporelles, les transformées de Fourier spatiales par rapport aux coordonnées parallèles à la surface et les équations des ondes généralisées incluant les valeurs de surface des fonctions et leurs dérivées. Des résultats explicites sont donnés pour le cas d'une force surfacique perpendiculaire à la surface du semi-infini élastique en un point de la surface. Enfin, dans le travail de M. Emami et al. [32], un tableau résumant quelques articles relatifs à des solutions des différents problèmes de contact liés au problème de Lamb est donné.

I.3. Généralités sur les plaques :

Les plaques minces ou épaisses de n'importe quelle forme géométrique font partie des éléments structurels les plus utilisés dans plusieurs domaines tels que : les structures aéronautiques et automobiles, d'ingénierie navale et civile, etc. De ce fait, leurs importances et leurs rôles ne cessent de grandir avec le développement technologique. Pour de meilleures performances de conception, de résistance, de légèreté etc., il est nécessaire d'investir d'avantage dans le domaine des études approfondies des plaques afin d'aboutir à une meilleure structure soit sur le plan de sécurité soit sur le plan économique ou autre.

I.3.1. Définition des plaques :

La plaque est une structure tridimensionnelle solide ou flexible limitée par deux plans parallèles (les faces de la plaque) et par un bord perpendiculaire aux faces (l'épaisseur de la plaque). La surface moyenne située à mi-distance entre le plan inférieur et le plan supérieur de la plaque, est connue sous le nom de la surface moyenne ou "feuillet moyen". L'épaisseur de la plaque est définie comme étant la distance entre ses faces. L'épaisseur de la plaque notée généralement par le symbole h est supposée petite devant ses autres dimensions qui représentent sa longueur et sa largeur. Les plaques peuvent être classées en trois groupes [33] : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses à déformations négligeables. Le critère souvent utilisé pour définir une plaque mince est le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension transversale. Pour qu'une plaque soit considérée comme mince, ce rapport ne doit pas dépasser $1/20$

I.3.2. Les déflexions des plaques :

Les déflexions des plaques se réfèrent aux déplacements de leur plan moyen perpendiculairement à leurs plans inférieurs et supérieurs causés par l'action de forces et de moments extérieurs [33]. La quantité de ces déflexions peut être déterminée en résolvant les équations différentielles appropriées à la plaque étudiée. Les contraintes dans la plaque peuvent être calculées à partir de ces déflexions et une fois les contraintes sont connues, les théories de rupture peuvent être utilisées pour déterminer si une plaque en mesure de supporter les charges agissant sur elle.

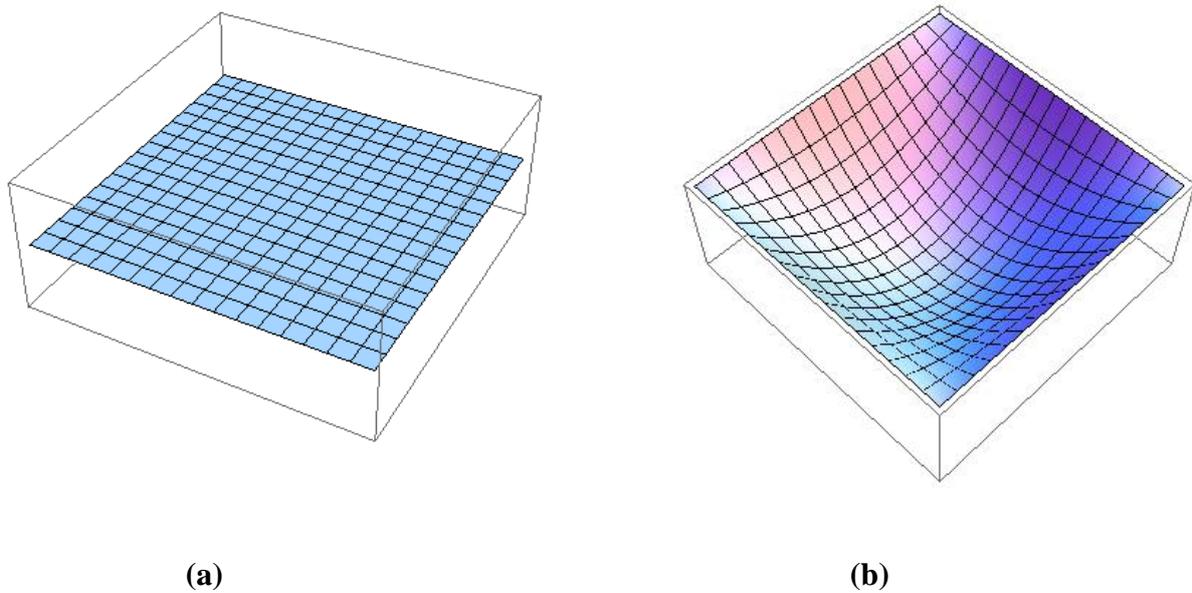


Fig. I. 1 : Schéma d'une plaque mince avant et après déformation :

(a) avant déformation (b) après déformation

I.3.3. Comportement général des plaques :

Les hypothèses fondamentales (ou hypothèses de Kirchhoff) [33] de la théorie de flexion des plaques minces avec petites déformations sont : plaques isotropes, plaques homogènes et plaques élastiques et qui ce sont toutes basées sur la géométrie des déformations. Ces hypothèses peuvent s'énoncer en détail comme suit :

- 1- La flèche de la surface médiane w est très faible par rapport à l'épaisseur de la plaque h . La pente de la surface fléchie est par conséquent très petite et le carré de la pente est une quantité négligeable ;
- 2- Le plan moyen reste indéformée latéralement pendant la flexion, c'est-à-dire : $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$;
- 3- Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les déformations du cisaillement vertical ε_{xz} et ε_{yz} sont négligeables ;
- 4- La contrainte normale σ_z sur tout plan parallèle au plan moyen peut être négligée.

I.3.4. Champs des déformations (Relations cinématiques) :

Considérons maintenant l'état de contrainte dans une plaque avec une petite flexion arbitraire $w(x, y)$, figure I.2.

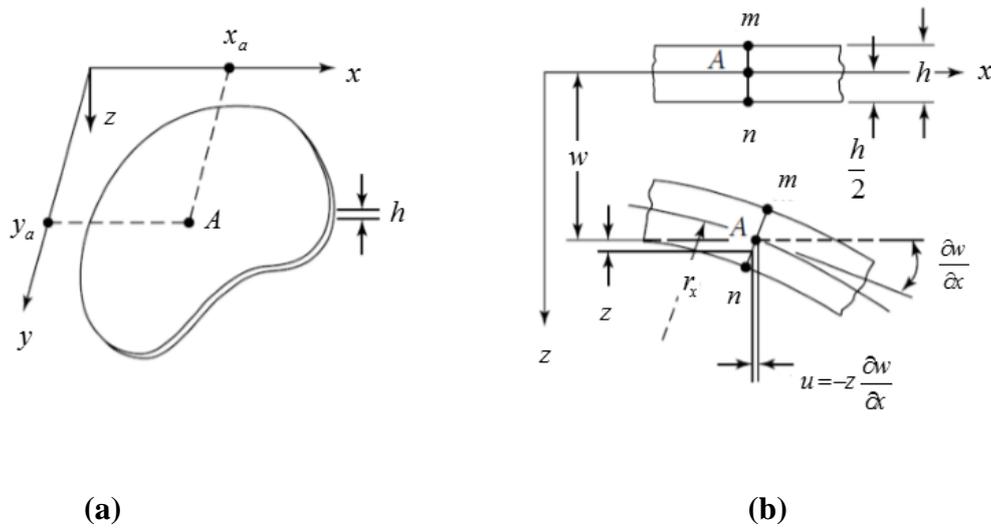


Fig. I. 2 : Schéma de déformation d'une plaque mince [33]

(a) avant déformation (b) après déformation

Le plan médian se trouvant équitablement entre le plan inférieur et le plan supérieur de la plaque est un plan neutre et donc nous nous concentrerons sur l'état de déformation d'un plan situant à une distance z par rapport à ce plan médian. Les pentes dans un plan (x, y) situant à une distance z du plan médian ce sont donc : $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ les déplacements u et v de ce plan (x, y) sont donnés par [33], [34] :

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Donc les déformations dans le plan (x, y) sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Un état de contrainte existant dans le plan (x, y) est considéré de sorte que les déformations $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$ sont liées aux contraintes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ par les relations suivantes [33], [34] :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}; \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Les équations (I.2) et (I.3) peuvent être combinées pour donner (I.4)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Ces contraintes varient linéairement par rapport à la distance z et sont équivalentes à des moments par unité de longueur agissant sur un élément de la plaque, comme le montre la figure II.1. (b). Donc ;

$$\begin{cases} M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Ici le paramètre D est défini comme étant la rigidité cylindrique de la plaque et donnée par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

Avec E, ν : module d'élasticité et coefficient de Poisson de la plaque respectivement.

Les composantes de contraintes peuvent s'écrire en fonction des moments de la manière suivante :

$$\sigma_x = \pm \frac{M_x}{I_x} z; \quad \sigma_y = \pm \frac{M_y}{I_y} z; \quad \tau_{xy} = \tau_x + \tau_y;$$

I_x et I_y : moments d'inertie de la section de la plaque par rapport aux axes x et y respectivement ;

τ_x et τ_y : contraintes de cisaillement. Généralement ces contraintes de cisaillement sont négligeables devant les contraintes normales σ_x et σ_y .

I.3.5. Equations d'équilibre d'une plaque :

Les composantes de différentes contraintes varient généralement d'un point de la section de la plaque chargée à un autre point de la même section. Ces variations sont gouvernées par les équations d'équilibre statique de la plaque. Considérons un élément de la plaque uniformément chargée de dimensions dx et dy , figure I.2 :

Puisque l'élément est en équilibre statique, alors la somme des forces dans la direction z est nulle ce qui permet d'écrire [33], [34] :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0; \quad (\text{I.6.a.1})$$

La formule (I.6.a.1) se simplifie en :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q; \quad (\text{I.6.a.2})$$

De la même manière pour les moments autour de l'axe x on trouve :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0; \quad (\text{I.6.a.3})$$

La formule (I.6.a.3) se simplifie en :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y; \quad (\text{I.6.a.4})$$

De la même manière pour les moments autour de l'axe y on trouve :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x; \quad (\text{I.6.a.5})$$

Finalement, nous introduisons les expressions des efforts tranchants Q_x et Q_y données par les formules (I.6.a.4) et (I.6.a.5) dans la formule (I.6.a.2), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (\text{I.7})$$

Cette expression représente l'équation différentielle de l'équilibre statique des plaques minces. Les expressions des forces de cisaillement peuvent alors s'écrire en fonction de la déflexion w , en se basant sur les équations (I.6.a.4) et (I.6.a.5) :

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w); \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Avec

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Rapportons l'équation (I.8) dans l'équation (I.6.a.2) on obtient l'équation (I.9)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}; \quad (\text{I.9})$$

Cette expression représente l'équation différentielle des déflexions de la plaque rectangulaire trouvée par la savante française Sophie Germain en (1812).

I.4. Modèles des milieux élastiques :

Quand on parle des problèmes de contact, c'est-à-dire interaction entre structure et un milieu élastique, il faut distinguer deux parties différentes, la structure et le milieu élastique.

Dans les différentes études relatives au domaine des problèmes de contact, la structure est toujours modélisée séparément, alors que le milieu élastique est modélisé aussi séparément par différents modèles, dont le modèle le plus simple est celui de Winkler. Ensuite, l'analyse finale de la structure étudiée se fait par le couplage des deux différentes modélisations faites séparément.

I.4.1. Modèle de Winkler :

Ce modèle est proposé par le savant allemand Winkler en (1867).

Le modèle de Winkler repose sur les trois hypothèses suivantes [35] :

1. La charge appliquée à la surface du milieu élastique produit des déplacements de la surface du milieu uniquement sous la charge appliquée et ne produit pas de déplacements ni de contraintes en dehors de la zone chargée.
2. Le milieu élastique peut résister aux contraintes de la compression, ainsi qu'aux contraintes de la traction.
3. La forme et la taille de la structures en interaction avec le milieu élastique n'affectent pas le déplacement de la surface du milieu élastique.

Ces hypothèses ne sont pas toujours exactes et ne reflètent pas la réalité, car il est bien remarqué que dans de nombreux cas une charge appliquée, par exemple au sol, produit des déplacements non seulement sous la charge appliquée, mais également aux alentours de la zone chargée. En plus, les déplacements de la surface du milieu élastique ne dépendent pas seulement du type du milieu élastique, mais aussi des caractéristiques géométriques et mécanique de la structure.

Le principe de ce modèle de Winkler prévoit que la relation entre la pression exercée sur la surface du milieu élastique et son déplacement résultant est exprimée par la formule [35] :

$$w_o(x, y) = P(x, y) / k_o \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$w_o(x, y)$: déplacement de la surface du milieu élastique (m) au point d'application de la charge extérieure ;

$P(x, y)$: charge extérieure (N), appliquée sur la surface du milieu élastique ;

k_o : coefficient de proportionnalité qui dépend uniquement des caractéristiques physiques du milieu élastique (N/m^3) ;

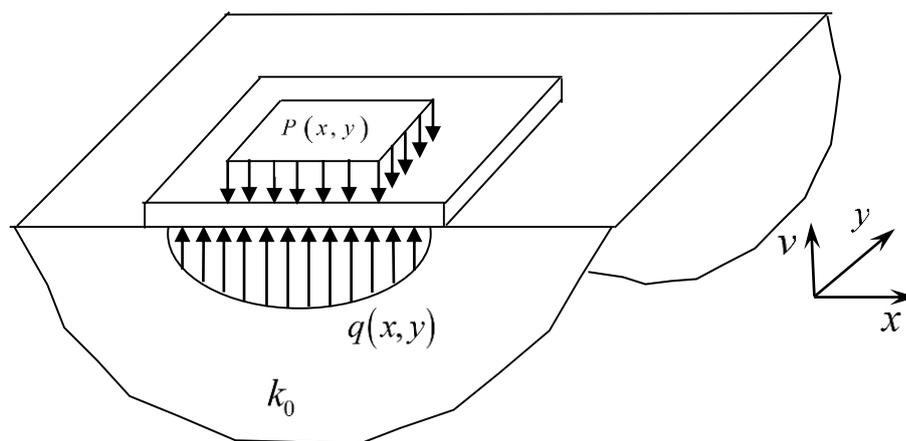


Fig. I. 3 : Illustration du modèle de Winkler sur une plaque mince reposant sur la surface d'un milieu élastique

$q(x, y)$: réaction du milieu élastique (N/m^2), due à l'action de la charge extérieure $P(x, y)$;

L'équation différentielle des flèches verticales $w(x, y)$ d'une plaque mince de rigidité cylindrique D et soumise à une charge verticale uniformément répartie sur toute la plaque $P(x, y)$ est donnée par [35] :

$$D\nabla^4 w(x, y) = q(x, y) - P(x, y) \quad (\text{I.11})$$

En combinant (I.10) et (I.11), on obtient l'équation différentielle du quatrième ordre des déflexions des plaques reposant sur la surface du milieu élastique de type Winkler sous la forme suivante :

$$D\nabla^4 w(x, y) + k_0 w_0(x, y) = q(x, y) \quad (\text{I.12})$$

Certaines études dans le domaine de l'interaction sol-structure ont été menées sur la base de l'hypothèse de Winkler pour sa simplicité. Le problème fondamental de l'utilisation de ce modèle est de déterminer la rigidité des ressorts élastiques utilisés pour remplacer le sol sous les fondations. Le problème se double puisque la valeur numérique du coefficient de réaction de la structure étudiée dépend non seulement de la nature de cette dernière, mais également des dimensions de la zone chargée.

En effet, les chercheurs ont commencé à insérer plus de paramètres et d'éléments dans le modèle de Winkler afin de présenter un comportement de la structure plus précis et plus proche de la réalité.

I.4.2. Modèle de milieu élastique à deux paramètres :

Comme le milieu élastique peut présenter une action d'interaction considérable entre ses différentes zones, les ressorts considérés par le modèle de base de Winkler ne tiennent pas compte cette interaction entre différents ressorts. Pour surmonter ce problème, des modèles à deux paramètres permettant une interaction entre les ressorts ont été proposés. On peut citer parmi eux, les modèles suivants :

I.4.2.1. Modèle de Filonenko Borodich :

Pour obtenir un certain degré d'interaction entre les éléments des ressorts, les extrémités supérieures des ressorts sont reliées à une membrane élastique étirée soumise à un champ de tension constante T comme le montre la figure I.4. [36] :

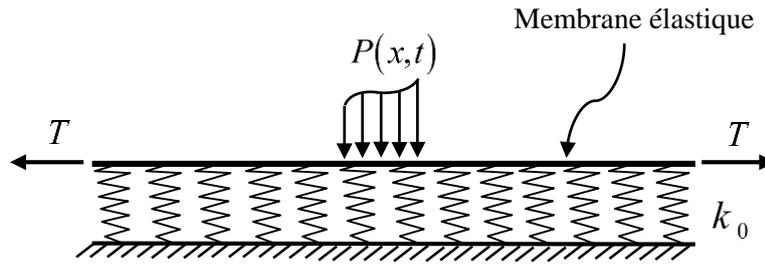


Fig. I. 4 : Modèle de Filonenko Borodich

La condition d'équilibre dans la direction verticale d'un élément de membrane donne la relation de déplacement de la charge [36] :

$$P(x,t) = kw_0(x,y) - T\nabla^2 w_0(x,t) \quad (\text{I.13})$$

Où :

∇^2 : est l'opérateur différentiel de Laplace en coordonnées cartésiennes ;

T : est la force de traction de la membrane.

I.4.2.2. Modèle de Pasternak :

Parmi les modèles du milieu élastique à deux paramètres les plus connus dans la théorie d'élasticité on trouve le modèle de Pasternak [37]. Dans ce modèle, Pasternak suppose l'existence d'interaction de cisaillement entre les éléments des ressorts. Ceci peut être accompli en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque constituée des éléments verticaux incompressibles qui se déforment uniquement par cisaillement transversal.

La relation entre la force extérieure et le déplacement résultant pour ce modèle est donnée par [37] :

$$P(x,y) = k_0 w_0(x,y) - G_p \nabla^2 w_0(x,y) \quad (\text{I.14})$$

Où :

G_p : est le paramètre d'interaction physique.

Ce paramètre représente l'interaction due à l'action de cisaillement entre les ressorts. On peut facilement remarquer que T de l'équation (I.13) est remplacé par G_p dans l'équation (I.14).

L'équation différentielle d'une plaque mince d'épaisseur constante soumise à une charge verticale uniformément répartie sur toute ou sur une partie de la plaque $P(x,y)$ est :

$$\nabla^4 w(x,y) - \frac{G_p}{D} \nabla^2 w_0(x,y) + \frac{k_0}{D} w_0(x,y) = \frac{q(x,y)}{D} \quad (\text{I.15})$$

I.4.2.3. Modèle de Hetenyi :

Ce modèle prévoit que la relation entre la charge extérieure $P(x, y)$ et la déflexion de la plaque $w_0(x, y)$ est donnée par la formule suivante [38] :

$$P(x, y) = k_0 w_0(x, y) - D \nabla^2 w_0(x, y) \quad (\text{I.16})$$

On constate bien la différence entre ce modèle et le modèle de Pasternak réside dans la rigidité cylindrique D et le paramètre d'interaction physique G_p .

De plus, d'autres modèles ont été proposés par Reissner (1958), Kerr (1964) et Vlasov & Leentiev (1966) dans le cadre des modèles à deux paramètres et d'autres modèles que l'on trouve dans le livre de TSUDIK. E (2012) [35].

Comme conclusion concernant cette famille de modèles, c'est que l'inclusion du deuxième paramètre peut améliorer la précision de la modélisation. En contrepartie, les modèles à deux paramètres aboutissent à des formules mathématiques compliquées ce qui rend la détermination des paramètres du milieu élastique plus difficile. Enfin, cette famille de modèles basant sur le principe des ressorts reste encore loin de la réalité par rapport aux autres modèles.

I.4.3. Modèle du semi-infini élastique ou modèle de Boussinesq :

Les charges appliquées sur la surface d'un milieu élastique produisent généralement des déplacements non seulement sous la charge, mais également en dehors de la zone chargée, figure I.5. Le semi-infini élastique, comme le cas du sol, se comporte comme un matériau élastique suivant les règles de la théorie de l'élasticité. On comprend généralement, qu'un semi-infini élastique est un matériau élastique homogène infiniment grand dans les deux directions horizontales (x, y) et aussi dans la direction verticale (z) [35] ($0 \leq z < \infty, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$).

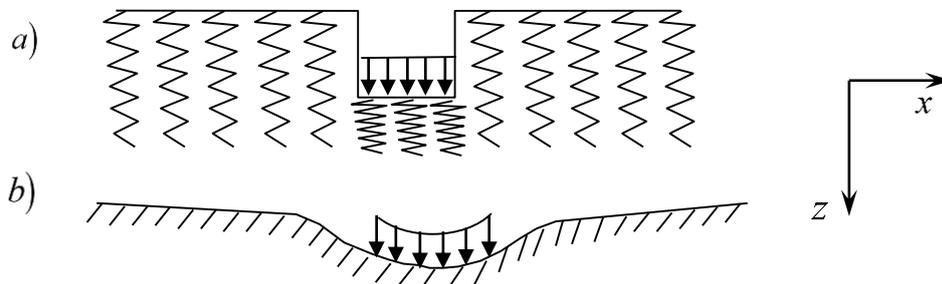


Fig. I. 5 : Déformation de la surface du semi-infini élastique

a) selon le modèle de Winkler ; b) selon le modèle de Boussinesq.

Soit une charge verticale concentrée P est appliquée à la surface du semi-infini élastique, comme le montre la figure I.6.

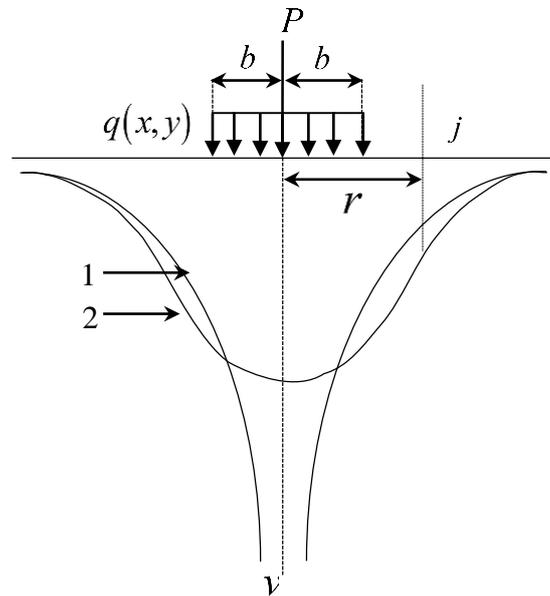


Fig. I. 6 : déformation de la surface du semi-infini élastique :

1-sous l'effet d'une charge concentrée ; 2- sous l'effet d'une charge uniformément répartie

Le déplacement vertical de tout point j appartenant à la surface du semi-infini élastique et situé à une distance r du point d'application de la charge est donné par la formule de base de Boussinesq suivante [39] (proposée en 1885) :

$$v_j = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 r} \quad (\text{I.17})$$

Où

E_0 : module d'élasticité du semi-infini élastique ;

ν_0 : coefficient de Poisson du semi-infini élastique ;

r : distance entre le point où la charge est appliquée et le point où le déplacement se détermine.

On constate bien que mathématiquement, le déplacement donné par (I.17) au point de l'application de la charge P , lorsque $r=0$, est égal à l'infini. Cependant, en réalité les déplacements sous mêmes les charges concentrées sont limités. En plus, généralement les charges appliquées sont toujours considérées appliquées d'une manière uniforme sur une certaine zone de la surface du semi-infini élastique, comme par exemple pour le cas du sol.

Dans ce cas, la formule (I.17) peut être réaménagée sous la forme suivante :

$$v_{i,j} = \frac{(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \frac{P}{bc} \iint_{\eta \xi} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (\text{I.18})$$

Avec :

b et c dimensions de la zone chargée ;

x et y coordonnées du point où se détermine le déplacement ;

ξ et η coordonnées du centre de la zone chargée ;

Le modèle de Boussinesq, présenté par la formule (I.18), concerne un semi-infini élastique linéaire isotrope homogène sollicité par une charge uniformément répartie sur une zone de sa surface. Ce modèle représente la base des autres modèles à savoir : semi-infini élastique anisotrope, semi-infini élastique non homogène et le semi-infini élastique en couches etc.

I.4.3.1. Modèle de semi-infini élastique non homogène :

La non-homogénéité des matériaux est un phénomène courant et très observé dans de nombreux matériaux naturels. Comme exemple, le sol est le milieu élastique ayant de fortes non-homogénéités en raison du processus naturel de sa formation. Le phénomène de non-homogénéité du matériau présent en géomécanique a des applications dans de nombreux secteurs technologiques d'importance comme les constructions du génie mécanique ou du génie civil. De nombreux efforts ont été fournis pour tenter de comprendre l'influence de la non-homogénéité du semi-infini élastique sur son comportement suite à son exposition aux diverses charges extérieures.

Le déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique non homogène est donné par [40] :

$$w(x, y) = \frac{P(x, y)B}{m_E r^{1+\alpha}} \quad (\text{I.19})$$

Avec :

$P(x, y)$: charge extérieure appliquée sur la surface du semi-infini élastique ;

$$B = \frac{b\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} ; b = \frac{1-\nu_s^2}{\alpha} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\beta}{\alpha+1} F_{\alpha\beta} ; \beta = \sqrt{(\alpha+1)\left(1 - \frac{\alpha\nu_s}{1-\nu_s}\right)} ;$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\alpha+2) \frac{\Gamma\left(\frac{3+\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha-\beta}{2}\right)}{\Gamma(3+\alpha)}$$

Γ : la fonction gamma ;

Le module de Young du milieu non homogène peut être donné par [40] :

$$E(z) = m_E z^\alpha \quad (0 < \alpha < 1) \quad (\text{I.20})$$

Où :

m_E : constante égale au module de Young lorsque $z = 1$;

α : indice de non-homogénéité. Quand $\alpha = 1$, le module de Young augmente linéairement avec la profondeur et un tel semi-infini élastique est appelé un semi-infini élastique de Gibson.

Il convient de noter que lorsque $\alpha = 1$, le semi-infini élastique devient homogène et dans ce cas on trouve que $\beta = 1$, $F_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi}$. Lorsque $\alpha = 0$, on trouve que $\nu_s = 0,5$, $\beta = 0$ et $F_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi}$.

I.4.3.2. Modèle du semi-infini élastique transversalement anisotrope :

Selon Nayak [41], le déplacement de la surface du semi-infini élastique transversalement anisotrope $w(x, y)$ dû à une charge ponctuelle P est donné par :

$$w(x, y) = \frac{P}{r} \left(\frac{1 - \mu^2}{\pi E_0} \right) I_w \quad (I.21)$$

Où :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$: distance entre le point où se détermine le déplacement et le point de l'application de la charge ;

$$I_w = \frac{(m_1 + m_2 s_2^2)(1 - a s_1^2) - (m_1 + m_2 s_1^2)(1 - a s_2^2)}{2n(1 - \mu^2) \left[s_1(c - d s_1^2)(1 - a s_2^2) - s_2(c - d s_2^2)(1 - a s_1^2) \right]} \quad (I.22)$$

$$m_1 = -cn - (1+b)\mu_{rz}; \quad m_2 = dn + 2a\mu_{rz};$$

$$s_1 = \left\{ \frac{(a+b) + \left[(a+c)^2 - 4d \right]^{\frac{1}{2}}}{2d} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad s_2 = \left\{ \frac{(a+b) - \left[(a+c)^2 - 4d \right]^{\frac{1}{2}}}{2d} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad a = -\frac{\mu_{rz}(1 + \mu_{rr})}{n - \mu_{rz}^2};$$

$$b = \frac{(1 - 2\beta)\mu_{rz}^2 - \beta(1+n)\mu_{rz} + n\mu_{rr}}{n - \mu_{rz}^2}; \quad c = \frac{(2\beta - 1)\mu_{rz} - \mu_{rr}\mu_{rz} + \beta(1+n)}{n - \mu_{rz}^2}; \quad d = \frac{1 - \mu_{rr}^2}{n - \mu_{rz}^2}$$

I.4.3.3. Modèle du semi-infini élastique en couches :

Le modèle du semi-infini élastique en couches horizontales ayant une large utilisation dans les problèmes de contact. Ce modèle permet d'avoir la réponse du semi-infini élastique à de différents niveaux de sa profondeur comme illustré sur la figure I.7.

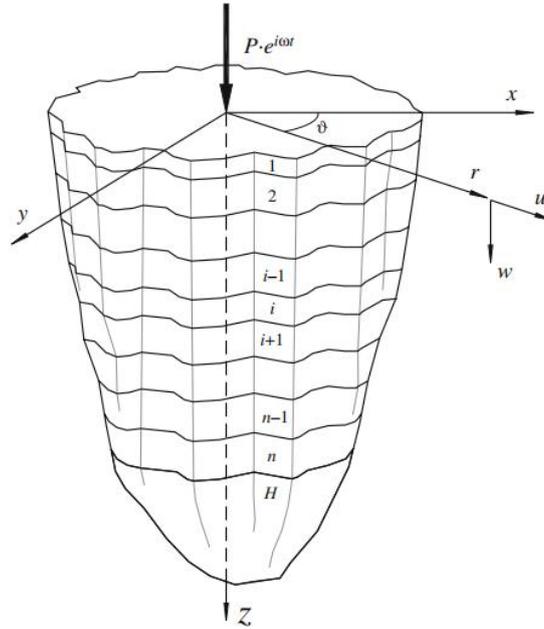


Fig. I. 7 : Modèle du semi-infini élastique en couches [42]

Solon Strukelj et al. [42], l'expression des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique en couches $w_1(a, 0)$ est donnée par :

$$w_1(a, 0) = \frac{P(\omega)}{2\pi\mu} \frac{1-\nu_1}{r} \left[1 - \frac{a}{1-\nu} I_w \right] \quad (\text{I.23})$$

$w_1(a, 0)$: déplacements de la surface de la première couche du semi-infini dus à la force ponctuelle verticale P ;

a : coordonnée sans dimension et donnée par : $a = \frac{\omega r}{c_T}$ avec $c_{Ti} = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$;

ρ_i : masse volumique de la couche i du semi-infini élastique ;

ν_1 : coefficient de Poisson de la première couche (couche superficielle) ;

r : distance entre le point où se détermine le déplacement et le point où la charge est appliquée ;

μ : rapport du module de cisaillement ;

ω : fréquence d'excitation ;

ν : rapport du coefficient de Poisson entre la dernière couche et le semi-infini élastique.

$$I_w = \int_0^{\infty} B_w(\eta) J_0(a\eta) d\eta \quad (\text{I.24})$$

$$B_w(\eta) = \eta \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + \gamma_1^2}}{|A|} (|A_1| + |A_2|) + \frac{\eta}{|A|} (|A_3| + |A_4|) \right] + (1 - \nu_1)$$

Où :

$$\gamma_i = \frac{k_{Li}}{k_{Ti}} ;$$

$J_0(a\eta)$ fonction de Bessel d'ordre 0.

η : coordonnée radiale sans dimension ;

$|A|$ déterminant de la matrice $[A]$ définissant les paramètres du modèle utilisé.

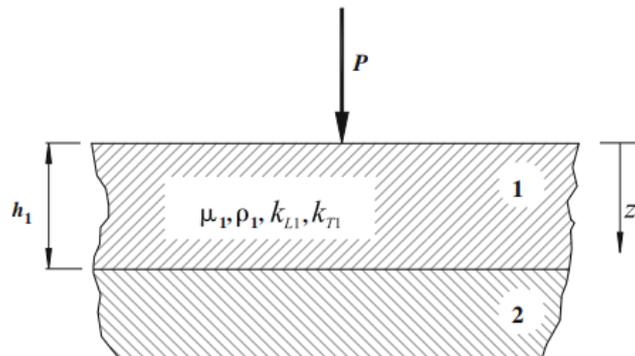


Fig. I. 8 : Propriétés mécaniques et géométriques de la première couche du semi infini élastique [42]

Plus de détails concernant la définition des autres paramètres utilisés par ce modèle du semi-infini élastique en couches pour la détermination des déplacements verticaux de la surface supérieure dus à l'application d'une force ponctuelle verticale sont donnés dans la référence [42].

I.4.3.4. Modèle du semi-infini élastique avec une cavité cylindrique :

Le modèle du semi-infini élastique contenant une cavité doit être présenté d'une manière différente. De ce fait, de nombreuses études ont fait l'objet de ce cas de semi-infini élastique que l'on trouve principalement dans certains secteurs comme le cas de : pipelines souterrains, tunnels et les pipelines sous-marins etc. La réponse dynamique du modèle de semi-infini élastique homogène et isotrope avec une cavité cylindrique avec section circulaire à une profondeur donnée est analysée dans le travail [43]. La cavité est supposée infiniment longue et placée horizontalement de façon parallèle à la surface et soumise à une pression harmonique uniformément répartie sur sa surface intérieure en contact avec le semi-infini élastique.

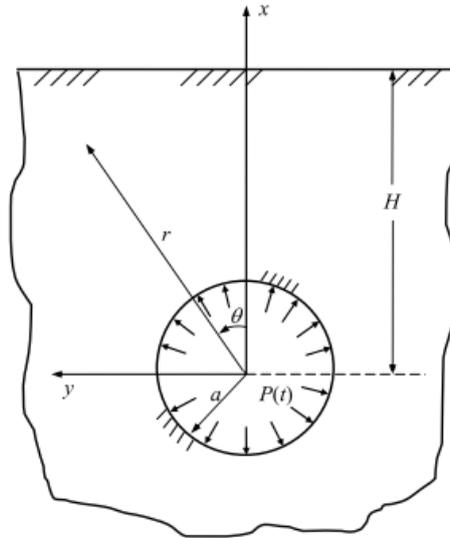


Fig. I. 9 : semi-infini élastique avec une cavité cylindrique [43]

La charge harmonique appliquée sur la paroi intérieure de la cavité est donnée par [43] :

$$P(t) = P_0 e^{-i\omega t} ;$$

La réponse dynamique de la surface libre du semi-infini élastique est donnée par :

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (\text{I.26})$$

Avec

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_1 r) - k_1 J_{n+1}(k_1 r) \right) + B_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r) \right) + C_n \frac{n}{r} J_n(k_2 r) + D_n \frac{n}{r} Y_n(k_2 r) \right] \cos n\theta$$

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-A_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) - B_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - C_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) - D_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \sin n\theta$$

Où :

J_n et Y_n : fonctions de Bessel du premier et du second type et d'ordre n ;

A_n , B_n , C_n et D_n : constantes arbitraires à déterminer à partir des conditions aux limites ;

$k_1 = \omega \sqrt{\rho / (\lambda + 2\mu)}$ et $k_2 = \omega \sqrt{\rho / \mu}$: paramètres définissant les ondes longitudinales et transversales respectivement ;

ω : fréquence circulaire ;

λ et μ : constantes de Lamé ;

ρ : masse volumique du semi-infini élastique.

I.4.3.5. Modèle du semi-infini élastique homogène à deux tunnels :

Ce modèle de semi-infini élastique est largement utilisé pour l'analyse des vibrations du sol et les bruits induits par le trafic des véhicules et de chemins de fer souterrains. Dans le travail [44], il est présenté le modèle du semi-infini élastique homogène à deux tunnels circulaires parallèles se trouvant à une profondeur donnée de la surface extérieure.

Dans cette étude, le semi-infini élastique homogène avec deux cavités cylindriques est simulé comme un solide élastique, isotrope, homogène et tridimensionnel (3D), figure I.10.

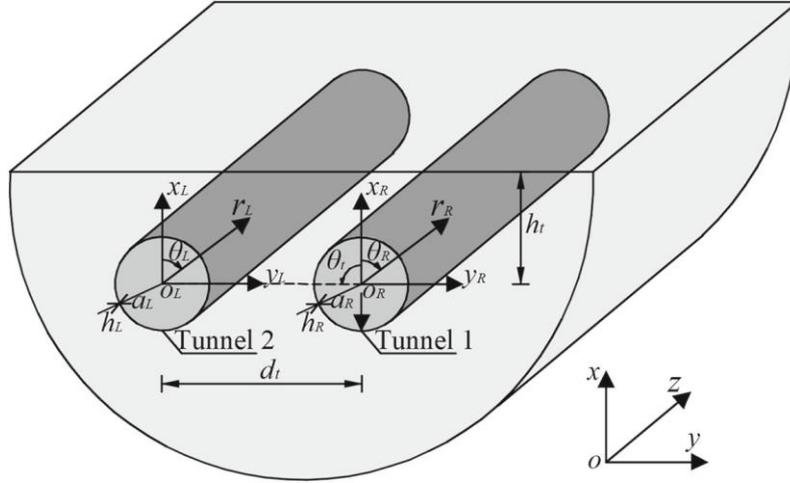


Fig. I. 10 : Modèle du semi-infini élastique à deux tunnels parallèles de sections circulaires [44]

Les déplacements du sol dans le repère cylindrique local (r_R, θ_R, z) du tunnel 1 sont donnés par [44] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^R &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^3 \left[B_{m_j}^R \hat{\mathbf{x}}_{m_j}^R + \sum_{n=-N}^N B_{nj}^L G_{mnj}^{L,R} \text{Re} \hat{\mathbf{x}}_{m_j}^R + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{mj}^R \text{Re} \hat{\mathbf{x}}_{mj}^R \sum_{j=1}^3 \frac{K_{jj}}{k_{xj}} \sum_{n=-N}^N (T_{nj}^R B_{nj}^R + T_{nj}^L B_{nj}^L) dk_y \right] \\ &= \sum_{m=-N}^N S_m^R \hat{\mathbf{U}}_m^R(r_R, m, k_z, \omega) \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Les déplacements du sol dans le repère cylindrique local (r_L, θ_L, z) du tunnel 2 peuvent être exprimés par [44] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^L &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^3 \left[B_{m_j}^L \hat{\mathbf{x}}_{m_j}^L + \sum_{n=-N}^N B_{nj}^R G_{mnj}^{L,R} \text{Re} \hat{\mathbf{x}}_{m_j}^L + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{mj}^L \text{Re} \hat{\mathbf{x}}_{mj}^L \sum_{j=1}^3 \frac{K_{jj}}{k_{xj}} \sum_{n=-N}^N (T_{nj}^R B_{nj}^R + T_{nj}^L B_{nj}^L) dk_y \right] \\ &= \sum_{m=-N}^N S_m^L \hat{\mathbf{U}}_m^L(r_L, m, k_z, \omega) \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

$$\hat{\mathbf{U}}_m^{R,L} = \left[\hat{\mathbf{U}}_{m_m}^{R,L} \hat{\mathbf{U}}_{0m}^{R,L} \hat{\mathbf{U}}_{zm}^{R,L} \right]^T ; \hat{\mathbf{U}}_m^{R,L} = \hat{\mathbf{U}}_{zm}^{R,L}, \hat{\mathbf{V}}_m^{R,L} = \hat{\mathbf{U}}_{0m}^{R,L}, \hat{\mathbf{W}}_m^{R,L} = -\hat{\mathbf{U}}_{m_m}^{R,L} ;$$

$$S_m^{R,L} = \begin{bmatrix} e^{im\theta_{R,L}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{im\theta_{R,L}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{im\theta_{R,L}} \end{bmatrix} ;$$

\hat{u} , \hat{v} et \hat{w} composantes de déplacement de la coque cylindrique dans les directions : z , θ et r respectivement, figure .I.10.

I.4.3.6 Modèle du quart-infini élastique :

Le modèle du quart-infini élastique trouve certaines applications dans différents domaines de l'ingénierie et de la physique. Certains cas des problèmes de contact font recours à ce type de modèle pour étudier certains cas spécifiques où le milieu élastique est effectivement décrit par le quart-infini élastique plutôt que le semi-infini élastique. Les études apportées dans les références [guenfoud et al [45], Hanson et Keer [46], Aleksandrov et Pozharskogo [47]] font la lumière sur ce modèle et ses applications que l'on peut trouver dans le domaine des problèmes de contact. Le principe du quart-infini est également utilisé dans la science du cosmos. Par exemple, Schultz et Finn-Foley [48] ont décrit les utilisations, les avantages et les inconvénients des expériences du quart-infini par rapport aux expériences de semi-infini lors de l'examen de la dynamique d'impact.

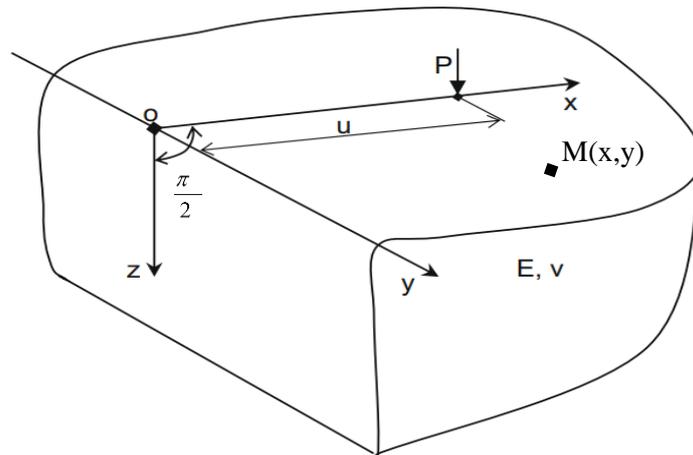


Fig. I. 11 : Modèle du quart-infini élastique [45]

Dans le domaine des problèmes de contact, l'expression des déplacements de la surface du quart-infini élastique due à l'action d'une force concentrée P, est donnée par [45] :

$$V(x, y) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{R_1} + B_0 \frac{1}{R_2} - (1-2\nu) \left[B_1 \frac{(u+x) \left(\sqrt{2} - \frac{u+x}{R_1} \right)}{y^2 + R_2^2} - B_2 \frac{ux}{R_2^2} - B_3 \pi \frac{ux(u^2 - 7ux + x^2 + y^2)}{R_2^5} \right] \right\} \quad (I.29)$$

$$R_1 = \sqrt{(u-x)^2 + y^2} \quad ; \quad R_2 = \sqrt{(u+x)^2 + y^2} \quad ; \quad B_0 = \frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} \quad ; \quad B_1 = 1,59991 \quad ; \quad B_2 = 1,14597 \quad ; \quad B_3 = 0,00812$$

Où :

E : module d'élasticité du quart-infini élastique ;

ν : coefficient de Poisson du quart-infini élastique ;

P : force extérieure appliquée sur la surface du quart-infini élastique ;

x et y : coordonnées du point M où se détermine le déplacement de la surface du quart-infini élastique ;

u : distance entre l'origine et le point d'application de la force, figure I.11.

I.4.4. Modèle de Lamb :

Le modèle de Lamb concerne la réponse du milieu élastique due à une excitation extérieure verticale ou horizontale appliquée sur la surface ou à l'intérieur d'un milieu élastique remonte au début du XXe siècle. L'article relatif à ce modèle est apparu pour la première fois en 1904 dans la revue scientifique « Philosophical Transactions of the Royal Society of London ». Dans ce travail, il a tenu en compte du phénomène ondulatoire des déplacements générés sur la surface du semi-infini élastique, isotrope et homogène dus à une charge appliquée sur la surface ou à l'intérieur du semi-infini élastique. Le principe de ce travail s'est rapidement propagé et appliqué dans plusieurs domaines à savoir les sciences de : tremblement de terre, géomécanique, fondations, anisotropie générale, problèmes de contact, géodynamique, mécanique de contact, élasto-dynamique et autres sciences des problèmes complexes de la physique des solides [32]. Le problème de Lamb ensuite est considéré comme référence essentielle pour de nombreuses recherches scientifiques vu sa large application dans différents domaines d'ingénierie puisque il reflète presque la réalité des problèmes étudiés.

La fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, modèle de Lamb, est donnée par [49] :

$$v = \frac{-P e^{i\omega t}}{2\pi G_0} \left[I_\xi + i\pi\chi K J_0(\chi r) \right] \quad (I.30)$$

Où :

v : déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles ;

P : amplitude de la charge harmonique ;

ω : fréquence d'excitation ;

r : distance entre le point où la force dynamique est appliquée et le point où le déplacement de la surface du semi-infini élastique est déterminé ;

χ : paramètre ayant la valeur : 1,07236 ;

$$K = \frac{2k^2 \alpha_1 (2\chi^2 - k^2)^2}{-F(\chi) f(\chi)} ;$$

$$I_\xi = \int_0^\infty \frac{k^2 \xi \alpha}{F(\xi)} J_0(\xi r) d\xi ;$$

$$F(\chi) = (2\xi^2 - K^2)^2 - 4\xi^2 \alpha \beta ;$$

$J_0(\xi r)$: fonction de Bessel du premier type ;

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 - h^2} .$$

Selon Guenfoud et al. [50], la formule (I.30) devient :

$$v = \frac{-k P e^{i\omega t}}{2\pi G_0} \left\{ (I_{21} + I_3) + i \left[(I_1 + I_{22}) + \frac{\pi \chi K J_0(\chi r)}{k} \right] \right\} \quad (\text{I.31})$$

Où :

k : paramètre définissant le caractère ondulatoire des déplacements et donné par :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 \times \rho}{G_0}}$$

ρ : masse volumique du semi- infini élastique ;

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \text{ avec } E_0 \text{ et } \nu_0 \text{ module d'élasticité coefficient de Poisson du semi-infini}$$

élastique, respectivement.

I_{21}, I_3, I_1, I_{22} : intégrales définies dans la référence [50].

Considérons que la charge extérieure $P e^{i\omega t} = P \cos(\omega t)$ et en tenant compte que de la partie réelle de l'équation (I.31), cette dernière prend la forme suivante [50] :

$$v = \frac{-k P \cos(\omega t)}{2\pi G_0} (I_{21}(r) + I_3(r)) \quad (\text{I.32})$$

Les expressions des intégrales $I_{21}(r)$ et $I_3(r)$ sont données avec plus de détail dans le chapitre III.

I.5. Différents types de structures reposant sur milieux élastique :

Les différentes structures (1D, 2D ou 3D) utilisées dans ce vaste domaine des problèmes de contact trouvent leurs applications dans plusieurs domaines d'ingénierie, de physique, secteur de l'aéronautique etc. Le choix du modèle du milieu élastique avec lequel la structure est en interaction dépend de plusieurs paramètres à savoir : la complexité de la solution, la couverture au maximum de la nature du problème étudié, la précision des résultats recherchés et leur impact lors de la mise en service de la structure étudiée etc.

I.6. Méthodes de solution :

L'analyse statique ou dynamique des poutres, plaques et coques en interaction avec des milieux élastiques est basée sur différentes méthodes de résolution. Ces dernières sont issues du développement d'anciennes méthodes déjà existantes depuis longtemps et certaines sont nouvellement proposées pour répondre aux différentes carences remarquées des méthodes déjà existantes, ainsi que pour surmonter certains défis rencontrés lors de leurs applications. En vue d'une tendance vers une analyse plus parfaite, plus rationnelle et plus proche de la réalité, le besoin du développement de ces méthodes existantes ou de la proposition de nouvelles méthodes s'impose.

En effet, malgré les hypothèses adoptées et les exigences imposées, certaines simplifications sont inévitables pour aboutir à la formulation des différentes équations mathématiques pour que leurs solutions soient possibles et réalisables. De ce fait, les deux types de résolution connus sont bien évidemment la résolution analytique (généralement limitée) et la résolution approximative.

I.6.1. Méthodes analytiques :

Les méthodes analytiques sont préférables, car elles fournissent des solutions exactes et plus proche à la réalité exprimée par le modèle approprié et sélectionné. Néanmoins, les méthodes analytiques sont généralement très limitées et difficiles à appliquer pour des structures de formes compliquées et constituées de matériaux non-homogène. De ce fait, plusieurs hypothèses simplificatrices sont nécessaires. C'est pourquoi, un autre type de méthodes est apparu appelées analytiques approximatives ou méthodes semi-analytiques. Ce nouveau type de méthodes a réussi à offrir certains avantages par rapport aux méthodes purement analytiques. Ces méthodes semi-analytiques généralement présentent la réponse du problème étudié sous forme d'une série qui converge vers la solution exacte. Dans cette catégorie de méthodes semi-analytiques, on peut citer : méthodes itératives variationnelles (VIM) décrite dans la référence [51] ; méthode d'analyse par Homotopie (HAM) utilisée dans l'analyse des structures viscoélastiques décrite dans la référence [48] ; méthode de décomposition Adomienne (ADM) utilisée pour l'étude des structures immergées dans les fluides décrite dans la référence [49] ; techniques de perturbation et la méthode de transformation différentielle sont introduites décrites dans les référence [50, 51] respectivement.

I.6.2. Méthodes numériques :

Les différentes méthodes numériques connues sont utilisées pour résoudre les problèmes complexes lorsque la solution analytique ou semi-analytique est difficile à exploiter ou lorsqu'elle n'existe pas. À cet égard, les différentes méthodes numériques sont employées et leurs applications sont inévitables. Les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées dans le calcul des problèmes de l'ingénierie et de la physique sont : la méthode des différences finies ; la méthode des éléments finis ; la méthode des éléments aux frontières ; la méthode des volumes finis. Le détail de ces différentes méthodes numériques utilisées dans le domaine des problèmes de contact est donné dans la référence [52].

I.7. Applications pratiques :

Dans la section précédente, de nombreuses applications pratiques des problèmes de contact comme structures en interaction avec des milieux élastiques ont été présentées.

I.7.1. Applications pour les structures utilisées dans le domaine du génie mécanique ou du génie civil :

Les applications les plus connues des problèmes de contact concernent le domaine du génie mécanique et génie civil. Les voies ferrées, les ponts, les chaussées, les réservoirs d'eau et les interactions de quelques pièces de machines entre-elles ce sont quelques applications parmi des dizaines d'autres que l'on trouve dans ce domaine où la structure est en interaction avec le sol ou en interaction avec une autre structure de matériau différent. Plus de détail concernant les structures de ce domaine se trouve dans la référence [35].

I.6.2. Applications aérospatiales :

Les autres applications des problèmes de contact se trouvent dans le domaine aérospatial où des éléments de structures secondaires s'ajoutent pour la suppression des grandes vibrations et leurs effets pour prévenir les phénomènes indésirables sur les structures aérospatiales comme le mouvement de flottement et le flambage thermique. Ces structures subissent une combinaison de forces élastiques, de forces thermiques et des forces aérodynamiques où la nécessité d'introduire des éléments de structures légers et rigides en flexion comme le cas des plaques et des poutres sandwich ou en matériaux composites. Plus de détail concernant les structures de ce domaine se trouve dans la référence [35].

I.6.3. Applications biomécaniques :

L'analyse des vibrations du corps humain est importante du point de vue Hygiène, Sécurité et Environnement (HSE). Il est également très nécessaire pour la conception d'organes artificiels pour remplacer certaines parties du corps humain malades d'être représentées par les modèles mentionnés précédemment. Par exemple, le crâne humain peut être modélisé par une

membrane, les tissus et les vaisseaux sont modélisés par une ficelle et la peau est modélisée par une couche mince sur un substrat mou. Plus de détail concernant les structures de ce domaine se trouve dans la référence [53].

I.7. Conclusion :

Ce chapitre est consacré aux trois points essentiels sur lesquels se base ce travail entrant dans le cadre de la préparation de cette thèse de doctorat. Ces points essentiels représentent : (i) l'état de l'art de cette thèse, y compris une synthèse bibliographique ; (ii) des généralités et des notions de base sur les plaques ; (iii) des généralités et des définitions de base des différents modèles des milieux élastiques. Il est indispensable d'effectuer la recherche bibliographique pour mettre la lumière sur les différents travaux de recherche similaires et surtout réalisés récemment liés à ce domaine pour savoir les différentes réalisations et innovations apportées à ce vaste domaine des problèmes de contact. Les définitions de base des différentes structures qui peuvent être, lors de leur mise en service, en interaction avec des milieux élastiques de différents types sont aussi si importantes, non seulement, pour faciliter leurs études statiques ou dynamiques, mais aussi de les concevoir de manière plus rationnelle pour être plus sécurisées, plus économiques, plus esthétiques etc. Les définitions de base des différents modèles définissant les milieux élastiques sont aussi si importantes pour faciliter l'accomplissement des études statiques ou dynamiques des problèmes de contact. Le savoir de de ces trois points essentiels apportés avec plus de détail dans ce chapitre est la base de ce travail de thèse de doctorat pour faire face aux différents défis de modélisation et de calcul que nous définissons dans les chapitres qui suivent ce chapitre.

CHAPITRE II : Détermination des déflexions de la plaque

II.1 Introduction :

Les plaques de différentes formes, de différentes dimensions et de différents matériaux font partie des éléments structurels les plus utilisés dans différents domaines de : construction, industrie, aéronautique etc. et leur utilisation ne cesse de grandir avec le développement technologique. Cependant, leur étude n'est pas faite complètement à nos jours ce qui nécessite l'élaboration de nouvelles méthodes de calcul plus précises ou d'améliorer certaines méthodes approchées déjà existantes. Dans ce contexte, on propose une méthode semi analytique basant sur la solution générale de Clebsch des équations différentielles des déformées des plaques et complétée par l'application du principe de la méthode énergétique de Ritz pour déterminer les déflexions d'une plaque mince isotrope de forme rectangulaire et de conditions aux limites : libre sur tout son contour et reposant sur la surface d'un milieu élastique.

Pour déterminer les déflexions de la plaque étudiée, l'équation différentielle des déformées de cette dernière est résolue par l'adoption de la solution générale de Clebsch. Cette solution est accompagnée de constantes qui se déterminent selon la spécificité de la plaque, à savoir sa forme géométrique, ses conditions aux limites, type de son matériau etc. Pour notre cas, on a choisi l'application du principe de la méthode énergétique de Ritz pour déterminer ces constantes. Ce principe se base sur la combinaison de la variation de l'énergie de déformation de la plaque avec le travail de déformation de la plaque lors du passage de cette dernière de l'état déformé à l'état initial. Ce principe nous a permis de déterminer les constantes associées à la solution de Clebsch et par conséquent avoir la formule mathématique finale représentant la solution de l'équation différentielle de la plaque étudiée. La précision des résultats obtenus est très satisfaisante et la formule finale est donnée sous une forme très cohérente afin d'être compatible lors de son application dans le système général étudié qui est la plaque reposant sur la surface d'un milieu élastique (problèmes de contact).

II.2. Problématique du chapitre :

Ce chapitre est focalisé sur la détermination des déflexions d'une plaque mince de forme carrée, plaque de Kirchhoff, faisant partie du système général étudié, figure. II.1, qui est plaque reposant sur la surface d'un semi-infini élastique (problèmes de contact).

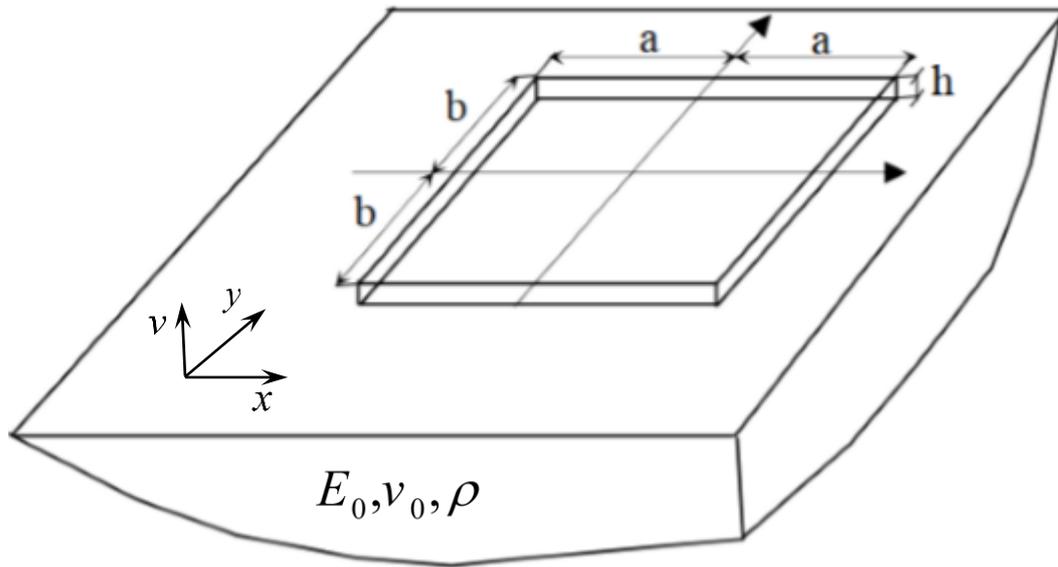


Fig. II.1 : Plaque carrée reposant sur la surface d'un semi-infini élastique

L'équation différentielle des déflexions d'une plaque en coordonnées cartésiennes est donnée par [54], [33], [34] :

$$\Delta\Delta W(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (\text{II.1})$$

Avec,

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) : \text{Opérateur de Laplace ;}$$

En tenant compte de l'expression de l'opérateur de Laplace, l'équation (II.1) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (\text{II.2})$$

$W(x, y)$: Fonction définissant les déplacements verticaux de la plaque ;

$q(x, y)$: Fonction définissant la charge extérieure appliquée sur la plaque ;

$$D = \frac{E \times h^3}{12(1-\nu^2)} ; \text{Rigidité cylindrique de la plaque ;}$$

(x, y) : Les coordonnées d'un point de la plaque où se détermine le déplacement ;

Pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 4, donnée par la formule (II.2), nous adoptons la solution générale de Clebsch donnée par la formule suivante [55], [45], [56] :

$$W(x, y) = W_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Pour pouvoir étudier ce problème de contact, une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique, on propose une approche faisant combinaison de trois différentes études. La première étude qui fait l'objet de ce chapitre II est la détermination des déflexions de la plaque carrée ; la deuxième étude qui fait l'objet du chapitre III est l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique et la troisième étude qui fait l'objet du chapitre IV est la combinaison des deux premières études. La plaque étudiée sera remplacée par une plaque de contour libre avec un encastrement fictif en un point quelconque de la plaque, fig. II.2. Pour faciliter la présente tâche, on a choisi l'emplacement de l'encastrement fictif en un point coïncidant avec son centre.

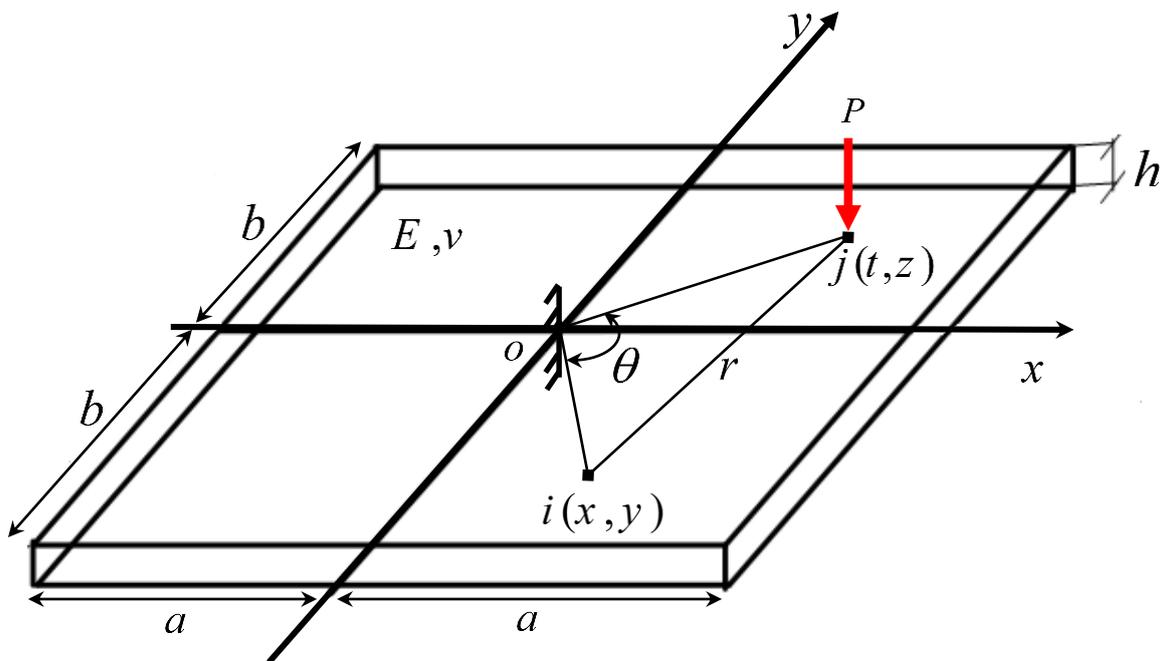


Fig. II. 2 : Plaque carrée de contour libre et encastree au niveau de son centre

Par conséquent, les termes de l'expression (II.3) satisfaisant les nouvelles conditions aux limites de la plaque sont [57], [56], [58] :

$$W(x, y) = W_0(x, y) + A_{22}W_1(x, y) + B_{22}W_2(x, y) + A_{31}W_3(x, y) + B_{31}W_4(x, y) + \dots \quad (\text{II.4})$$

Avec,

$W_0(x, y)$: Solution particulière appropriée à la plaque considérée. Elle est donnée par [59], [56], [58] :

$$\begin{aligned}
W_0(x, y, t, z) = \frac{Pab}{16\pi D} & \left\{ \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x-t}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-z}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + \right. \\
& + 4 \left(\frac{xt}{a^2} + \frac{yz}{b^2} \right) \left(1 + \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{ab} \right] \right) - \\
& \left. - \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right] - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] \right\}; \tag{II.5}
\end{aligned}$$

P : Charge extérieure ponctuelle appliquée en un point de la plaque ;

a et b : demi-longueur et demi-largeur de la plaque respectivement ;

t et z : coordonnées du point (j) où la charge extérieure est appliquée ;

x et y : coordonnées du point (j) où se détermine le déplacement vertical de la plaque causé par la charge appliquée au point (j) ;

Selon [60], [45], [61] :

$$\left\{ \begin{aligned}
W_1(x, y) &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}; \\
W_2(x, y) &= \frac{2xy}{ab}; \\
W_3(x, y) &= \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \\
W_4(x, y) &= \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).
\end{aligned} \right. \tag{II.6}$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: rigidité cylindrique de la plaque ;

E, ν : module d'élasticité et coefficient de Poisson du matériau de la plaque ;

A_{22}, B_{22}, A_{31} et B_{31} : coefficients à déterminer par l'application du principe de la méthode énergétique de Ritz.

II.3. Application du principe de la méthode énergétique de Ritz :

Les coefficients A_{22}, B_{22}, A_{31} et B_{31} associés à la solution de Clebsch sont déterminés par l'application du principe de la méthode énergétique de Ritz. Autrement-dit, à partir de la

fonctionnelle totale de l'énergie composant de la variation de l'énergie de déformation de la plaque et du travail de déformation de la plaque lors de son passage de l'état déformé à l'état initial [62], [45], [56].

L'énergie de déformation de la plaque U est donnée par [63], [45], [61] :

$$U = \frac{D}{2} \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} \psi(W(x, y)) dx dy \quad (\text{II.7})$$

Avec,

$$\psi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - \beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right];$$

$$\beta = 2(1 - \nu);$$

ν : coefficient de Poisson du matériau de la plaque.

Le travail de déformation de la plaque lors de son passage de l'état déformé à l'état initial est donné par [45], [64], [65] :

$$\Pi = -A_{22}W_1(t, z) - B_{22}W_2(t, z) - A_{31}W_3(t, z) - B_{31}W_4(t, z) - \dots \quad (\text{II.8})$$

Avec,

$W_1(t, z)$, $W_2(t, z)$, $W_3(t, z)$ et $W_4(t, z)$ fonctions définies par les mêmes formules des fonctions : $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$, $W_3(x, y)$ et $W_4(x, y)$ (expressions II.6) où les variables (x, y) sont remplacés par les variables (t, z) .

La fonctionnelle totale de l'énergie de déformation de la plaque est la combinaison des formules (II.7) et (II.8) :

$$\vartheta = U(x, y) + \Pi(t, z) \quad (\text{II.9})$$

Enfin, les coefficients A_{22} , B_{22} , A_{31} et B_{31} sont déterminés par le système suivant [56], [66] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial A_{22}} = 0; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial B_{22}} = 0; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial A_{31}} = 0; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial B_{31}} = 0; \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

La résolution du système matriciel (II.10) permet de déterminer les expressions des coefficients A_{22} , B_{22} , A_{31} , B_{31} . Par conséquent, la formule finale donnant les déflexions de la plaque étudiée est déterminée. Mais néanmoins, on veut apporter ici quelques détails concernant les étapes de cette résolution pour montrer sa complexité mathématique et les efforts importants fournis et à l'aide de Mathematica nous avons surmonté cette difficulté mathématique pour arriver enfin à la formule des déflexions de la plaque étudiée sous sa forme la plus simplifiée.

Pour but de simplification des formules mathématiques finales, on considère que la plaque est carrée ($a=b$) et après une série de différents calculs, transformations et simplifications mathématiques nous nous sommes arrivés au système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{16D\beta}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16D\beta}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-32D(\beta-8)}{3a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-32D(\beta-8)}{3a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} \\ B_{22} \\ A_{31} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_1(x, y, t, z) dx dy + \left(\frac{t^2 - z^2}{a^2} \right) \\ -\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_2(x, y, t, z) dx dy + \left(\frac{2tz}{a^2} \right) \\ -\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_3(x, y, t, z) dx dy + t \left(\frac{t^2 + z^2}{a^3} \right) \\ -\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a Q_4(x, y, t, z) dx dy + z \left(\frac{t^2 + z^2}{a^3} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Où :

$$Q_1 = \frac{1}{8a^2\pi} \beta \left(2xz + 2x(-2t+x) \arctan \left[\frac{x}{y} \right] - 2y(y-2z) \arctan \left[\frac{y}{x} \right] + 2x(-2t+x) \arctan \left[\frac{t-x}{y-z} \right] - \left(t^2 + (y-z)^2 \right) \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + \left(t^2 + (y-z)^2 \right) \arctan \left[\frac{-y+z}{t-x} \right] \right);$$

$$Q_2 = \frac{1}{8a^2\pi} \beta \left(y^2 - (y-z)^2 + 2x(-it+z) \arctan \left[\frac{x}{y} \right] + 2x(it+z) \arctan \left[\frac{x}{y} \right] + 4xz \arctan \left[\frac{y}{x} \right] - \right. \\ \left. - x^2 \log [x^2 + y^2] - y(y-2z) \log [x^2 + y^2] + x(t-iz) \log [x^2 + y^2] + x(t+iz) \log [x^2 + y^2] + \right. \\ \left. + (t-x)^2 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + (y-z)^2 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] \right);$$

$$Q_3 = -\frac{1}{24a^3\pi} \left(-16txy - 32txz + 16x^2z + 4txy\beta + 8txz\beta - 4x^2z\beta - 2(-4x^3(-4+\beta) + 3t(x^2+y^2)(-8+3\beta)) \arctan \left[\frac{x}{y} \right] + \right. \\ \left. + 2x(3tx(8-3\beta) + 4x^2(-4+\beta) + 6t^2\beta) \arctan \left[\frac{t-x}{y-z} \right] + 16t^3 \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 48ty^2 \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 96tyz \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - \right. \\ \left. - 48tz^2 \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 2t^3\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 18ty^2\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 36tyz\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 18tz^2\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - \right. \\ \left. - 16y^3 \log \left[1 + \frac{x^2}{y^2} \right] + 4y^3\beta \log \left[1 + \frac{x^2}{y^2} \right] + 24y^3 \log [x^2 + y^2] - 24x^2z \log [x^2 + y^2] - 24y^2z \log [x^2 + y^2] - \right. \\ \left. - 6y^3\beta \log [x^2 + y^2] + 9x^2z\beta \log [x^2 + y^2] + 9y^2z\beta \log [x^2 + y^2] + 24x^2y \log \left[\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right] - 6x^2y\beta \log \left[\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right] + \right. \\ \left. + 24t^2y \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 8y^3 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 24t^2z \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + \right. \\ \left. + 24x^2z \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + 24y^2z \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 24yz^2 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + \right. \\ \left. + 8z^3 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 6t^2y\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + 2y^3\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + \right. \\ \left. + 3t^2z\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + 6txz\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 9x^2z\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - \right. \\ \left. - 9y^2z\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + 12yz^2\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 5z^3\beta \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - \right. \\ \left. - 24x^2y \log \left[\frac{t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2}{a^2} \right] + 6x^2y\beta \log \left[\frac{t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2}{a^2} \right] \right);$$

$$Q_4 = \frac{1}{24a^3\pi} \left(-16t^2x - 8tx^2 + 16xyz + 16xz^2 + 10t^2x\beta + 2tx^2\beta - 4xyz\beta + 2xz^2\beta + 2(3x^2z(8-3\beta) + 3y^2z(8-3\beta) + 4y^3(-4+\beta)) \times \right. \\ \left. \times \arctan \left[\frac{x}{y} \right] + 6(2t-x)xz(-8+3\beta) \arctan \left[\frac{t-x}{y-z} \right] + 32y^3 \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 48t^2z \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 48y^2z \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + \right. \\ \left. + 16z^3 \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 8y^3\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 18t^2z\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 18y^2z\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] - 12yz^2\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + \right. \\ \left. + 2z^3\beta \arctan \left[\frac{y-z}{t-x} \right] + 24tx^2 \log [x^2 + y^2] - 8x^3 \log [x^2 + y^2] + 24ty^2 \log [x^2 + y^2] - 9tx^2\beta \log [x^2 + y^2] + \right. \\ \left. + 2x^3\beta \log [x^2 + y^2] - 9ty^2\beta \log [x^2 + y^2] - 24xy^2 \log \left[\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right] + 6xy^2\beta \log \left[\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right] - \right. \\ \left. - 8t^3 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + 24t^2x \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] - 24tx^2 \log [t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +8x^3 \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - 24ty^2 \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + 24tz^2 \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - \\
& - 24xz^2 \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + 5t^3 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - 12t^2 x \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + \\
& + 9tx^2 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - 2x^3 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + 9ty^2 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - \\
& - 6tyz \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] - 3tz^2 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + 6xz^2 \beta \log \left[t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2 \right] + \\
& + 24xy^2 \log \left[\frac{t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2}{a^2} \right] - 6xy^2 \beta \log \left[\frac{t^2 - 2tx + x^2 + (y-z)^2}{a^2} \right] \Bigg];
\end{aligned}$$

La détermination des expressions des coefficients A_{22} , B_{22} , A_{31} et B_{31} nécessite la résolution du système d'équations matricielle (II.11). Lors de cette procédure de résolution, on s'est trouvé face à un autre grand challenge mathématique représenté dans la complexité des intégrales de ce système matriciel. Après plusieurs approches de solutions et aussi à l'aide de l'utilisation du logiciel de calcul formel Mathematica, ce nouveau challenge a été surmonté et par conséquent, les formules des coefficients ont été trouvées sous les formes les plus simples suivantes :

$$\begin{aligned}
A_{22} = & \frac{1}{16D\beta} a^2 \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{4a^2\pi} \beta \left(-a(a-2t) \text{ArcTan} \left[\frac{a-t}{a-z} \right] - a(a+2t) \text{ArcTan} \left[\frac{a+t}{a-z} \right] + (t^2 + (a-z)^2) \right. \right. \\
& \times \text{ArcTan} \left[\frac{a-z}{a-t} \right] + (t^2 + (a-z)^2) \text{ArcTan} \left[\frac{a-z}{a+t} \right] - a^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + 2at \text{ArcTan} \left[\frac{a-t}{a+z} \right] - \\
& - a^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - 2at \text{ArcTan} \left[\frac{a+t}{a+z} \right] + a^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + t^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 2az \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + \\
& \left. \left. + z^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + a^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + t^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 2az \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + z^2 \text{ArcTan} \left[\frac{a+z}{a+t} \right] \right) \Bigg);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{22} = & \frac{1}{16D\beta} a^2 \left(\frac{2tz}{a^2} - \frac{1}{8a^2\pi} \beta \left(-(2a^2 + t^2 + 2a(t-z) + z^2) \text{Log} \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - \right. \right. \\
& - (2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2) \text{Log} \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + (2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z)) \times \\
& \left. \left. \times \text{Log} \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + (2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z)) \text{Log} \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] \right) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{31} = & -\frac{1}{32D(-8+\beta)}3a^2 \left(t \left(\frac{t^2+z^2}{a^2} \right) - \frac{1}{24a^3\pi} \left(4a^2t(16-24\pi-4\beta+9\pi\beta) + 4a(12at+2a^2\beta+3t^2\beta) \arctan \left[\frac{a-t}{a-z} \right] + 2a^2(16a+9t\beta) \arctan \left[\frac{-a+t}{a-z} \right] - \right. \right. \\
 & -2a(4a^2(-4+\beta)+6t^2\beta+3at(-8+3\beta)) \arctan \left[\frac{a+t}{a-z} \right] + 2t(48az+9(a^2+z^2)\beta+t^2(8+\beta)) \arctan \left[\frac{a-z}{a-t} \right] - 48a^2t \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + \\
 & +16t^3 \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + 96atz \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] - 48tz^2 \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + 18a^2t\beta \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + 2t^3\beta \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] - 36atz\beta \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + \\
 & +18tz^2\beta \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] + 48a^2t \arctan \left[\frac{-a+z}{a-t} \right] + 48tz^2 \arctan \left[\frac{-a+z}{a-t} \right] + 36atz\beta \arctan \left[\frac{-a+z}{a-t} \right] - 32a^3 \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + \\
 & +48a^2t \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + 8a^3\beta \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] - 18a^2t\beta \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + 12at^2\beta \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + 32a^3 \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] + 48a^2t \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - \\
 & -8a^3\beta \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - 18a^2t\beta \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - 12at^2\beta \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - 48a^2t \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 16t^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 96atz \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - \\
 & -48tz^2 \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 18a^2t\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 2t^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 36atz\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 18tz^2\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - \\
 & -48a^2t \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 16t^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 96atz \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 48tz^2 \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 18a^2t\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 2t^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + \\
 & +36atz\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 18tz^2\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 8a^3 \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + 24at^2 \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + \\
 & +48a^2z \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 24t^2z \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 24az^2 \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + \\
 & +8z^3 \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + 2a^3\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 6at^2\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - \\
 & -18a^2z\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 6atz\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + 3t^2z\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] + \\
 & +12az^2\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 5z^3\beta \log \left[a^2+2at+t^2+(a-z)^2 \right] - 24a^3 \log \left[\frac{a^2+2at+t^2+(a-z)^2}{a^2} \right] + \\
 & +6a^3\beta \log \left[\frac{a^2+2at+t^2+(a-z)^2}{a^2} \right] + 8a^3 \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - 24at^2 \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + \\
 & +48a^2z \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - 24t^2z \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + 24az^2 \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + \\
 & +8z^3 \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - 2a^3\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + 6at^2\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - \\
 & -18a^2z\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + 6atz\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + 3t^2z\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - \\
 & -12az^2\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] - 5z^3\beta \log \left[2a^2-2at+t^2+2az+z^2 \right] + 24a^3 \log \left[\frac{2a^2-2at+t^2+2az+z^2}{a^2} \right] - \\
 & -6a^3\beta \log \left[\frac{2a^2-2at+t^2+2az+z^2}{a^2} \right] + 8a^3 \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - \\
 & -24at^2 \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - 48a^2z \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + 24t^2z \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + \\
 & +24az^2 \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - 8z^3 \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - 2a^3\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + \\
 & +6at^2\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + 18a^2z\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - 6atz\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - \\
 & -3t^2z\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] - 12az^2\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + 5z^3\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2-2a(t+z) \right] + \\
 & +24a^3 \log \left[\frac{2a^2+t^2+z^2-2a(t+z)}{a^2} \right] - 6a^3\beta \log \left[\frac{2a^2+t^2+z^2-2a(t+z)}{a^2} \right] - 8a^3 \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + \\
 & +24at^2 \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] - 48a^2z \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 24t^2z \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] - \\
 & -24az^2 \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] - 8z^3 \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 2a^3\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] - \\
 & -6at^2\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 18a^2z\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 6atz\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] - \\
 & -3t^2z\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 12az^2\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + 5z^3\beta \log \left[2a^2+t^2+z^2+2a(t+z) \right] + \\
 & +6a^3(-4+\beta) \log \left[\frac{2a^2+t^2+z^2+2a(t+z)}{a^2} \right] \Bigg) \Bigg);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{31} = & -\frac{1}{32D(-8+\beta)}3a^2 \left(\frac{z \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right)}{a} - \frac{1}{24a^3\pi} \left(4a^2z(16+24\pi-4\beta-9\pi\beta) + 6a(a-2t)z(-8+3\beta) \arctan \left[\frac{a-t}{a-z} \right] + \right. \right. \\
 & + 6a(a+2t)z(-8+3\beta) \arctan \left[\frac{a+t}{a-z} \right] + 2(3a^2z(8-3\beta) + 4a^3(-4+\beta) + 6az^2\beta - z(z^2(8+\beta) + 3t^2(-8+3\beta))) \arctan \left[\frac{a-z}{a-t} \right] + \\
 & + 2(3a^2z(8-3\beta) + 4a^3(-4+\beta) + 6az^2\beta - z(z^2(8+\beta) + 3t^2(-8+3\beta))) \arctan \left[\frac{a-z}{a+t} \right] - 48a^2z \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + 96atz \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] + \\
 & + 18a^2z\beta \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] - 36atz\beta \arctan \left[\frac{a-t}{a+z} \right] - 48a^2z \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] - 96atz \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] + 18a^2z\beta \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] + \\
 & + 36atz\beta \arctan \left[\frac{a+t}{a+z} \right] + 32a^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 48a^2z \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 48t^2z \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 16z^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 8a^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - \\
 & - 18a^2z\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 18t^2z\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 12az^2\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] - 2z^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a-t} \right] + 32a^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 48a^2z \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + \\
 & + 48t^2z \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 16z^3 \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 8a^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 18a^2z\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 18t^2z\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - 12az^2\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] - \\
 & - 2z^3\beta \arctan \left[\frac{a+z}{a+t} \right] + 8a^3 \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + 48a^2t \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + 24at^2 \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + \\
 & + 8t^3 \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - 24az^2 \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - 24tz^2 \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - 2a^3\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - \\
 & - 18a^2t\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - 12at^2\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] - 5t^3\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + \\
 & + 6atz\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + 6az^2\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + 3tz^2\beta \log \left[a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2 \right] + \\
 & + 24a^3 \log \left[\frac{a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2}{a^2} \right] - 6a^3\beta \log \left[\frac{a^2 + 2at + t^2 + (a-z)^2}{a^2} \right] - 8a^3 \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + \\
 & + 48a^2t \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - 24at^2 \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + 8t^3 \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + \\
 & + 24az^2 \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - 24tz^2 \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + 2a^3\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - \\
 & - 18a^2t\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + 12at^2\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - 5t^3\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - \\
 & - 6atz\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - 6az^2\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] + 3tz^2\beta \log \left[2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2 \right] - \\
 & - 24a^3 \log \left[\frac{2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2}{a^2} \right] + 6a^3\beta \log \left[\frac{2a^2 - 2at + t^2 + 2az + z^2}{a^2} \right] + 8a^3 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - \\
 & - 48a^2t \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + \\
 & + 24at^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - 8t^3 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - 24az^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + \\
 & + 24tz^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - 2a^3\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + 18a^2t\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - \\
 & - 12at^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + 5t^3\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - 6atz\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + \\
 & + 6az^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] - 3tz^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z) \right] + 24a^3 \log \left[\frac{2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z)}{a^2} \right] - \\
 & - 6a^3\beta \log \left[\frac{2a^2 + t^2 + z^2 - 2a(t+z)}{a^2} \right] - 8a^3 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] - 48a^2t \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] - \\
 & - 24at^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] - 8t^3 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 24az^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + \\
 & + 24tz^2 \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 2a^3\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 18a^2t\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + \\
 & + 12at^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 5t^3\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 6atz\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] - \\
 & - 6az^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] - 3tz^2\beta \log \left[2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z) \right] + 6a^3(-4+\beta) \log \left[\frac{2a^2 + t^2 + z^2 + 2a(t+z)}{a^2} \right] \Bigg) \Bigg);
 \end{aligned}$$

II.4. Vérification du nombre de termes pris en compte :

Pour justifier le nombre des termes de la solution de Clebsch retenus pour notre cas, nous procédons à la vérification suivante :

Premier cas, tenons compte de la solution particulière appropriée à la plaque étudiée et uniquement les deux premiers termes de la solution de Clebsch. Deuxième cas, tenons compte de la solution particulière et uniquement les quatre premiers termes de la solution de Clebsch. Les graphes des déplacements des points situant sur la diagonale de la plaque de caractéristiques géométriques et mécaniques suivantes ($a = b = 1\text{ m}$; $\nu = 1/3$; $E = 2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$; $h = 0.01\text{ m}$) pour les deux cas sont présentées sur la figure II.3.

(i) Lorsque la plaque est sollicitée par une charge, d'intensité $q = 1\text{ kN/m}^2$, uniformément répartie sur toute sa surface ;

(ii) Lorsque la plaque est sollicitée par une charge concentrée, d'intensité $P = 1\text{ kN}$, appliquée au niveau de son centre.

Il est bien clair et d'après les graphes, les déplacements des points situant sur la diagonale de la plaque des deux cas les valeurs des deux cas se convergent bien entre eux. Autrement dit, la différence entre les valeurs des deux cas est pratiquement négligeable. Ceci justifie bien le nombre de termes de solution pris pour déterminer les déflexions de la plaque étudiée.

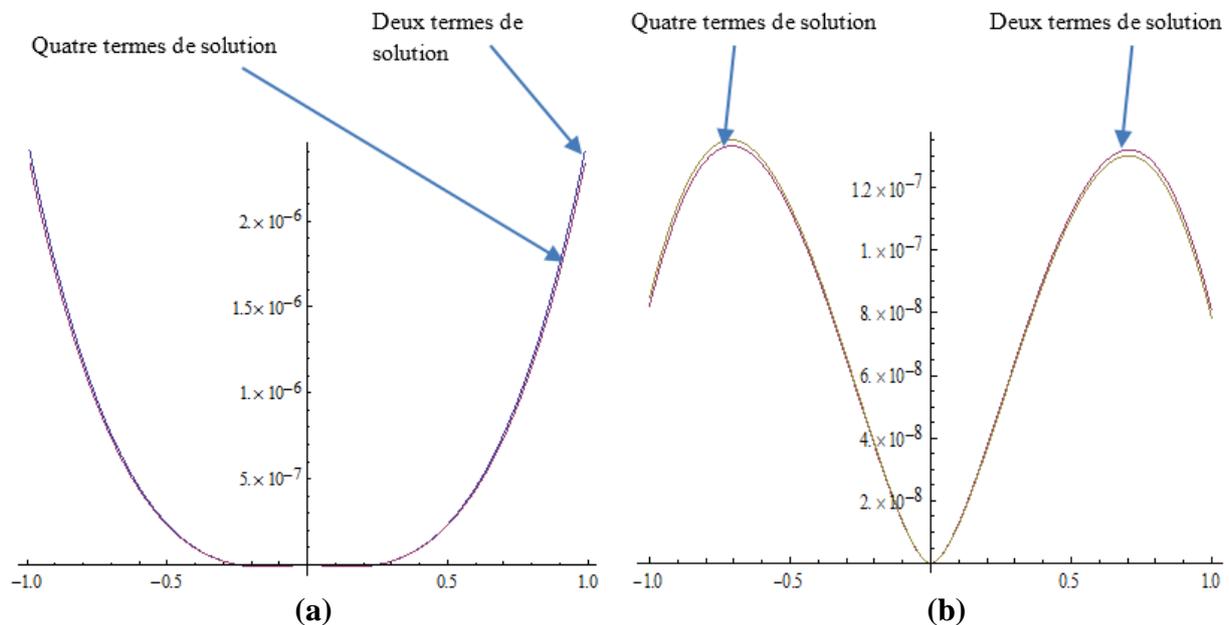


Fig. II. 3 : Comparaison des résultats obtenus en tenant compte de différents nombres de termes de la solution de Clebsch

- a.** Plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface
- b.** Plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre

II.5. Exemple d'application :

Comme exemple d'application, prenons une plaque de caractéristiques géométriques et mécaniques suivantes :

$$(a = b = 1 \text{ m}; \nu = 1/3; E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2; h = 0.01 \text{ m} ;).$$

Les formes générales des déflexions de la plaque en 3D dues à deux types de charges extérieures sont illustrées sur la figure II.4. Il s'agit des types de chargements suivants : cas1, plaque sollicitée par une charge, d'intensité $q = 1 \text{ N/m}^2$, uniformément répartie sur toute sa surface ; cas2, plaque sollicitée par une charge concentrée, d'intensité $P = 1 \text{ kN}$, appliquée au niveau de son centre.

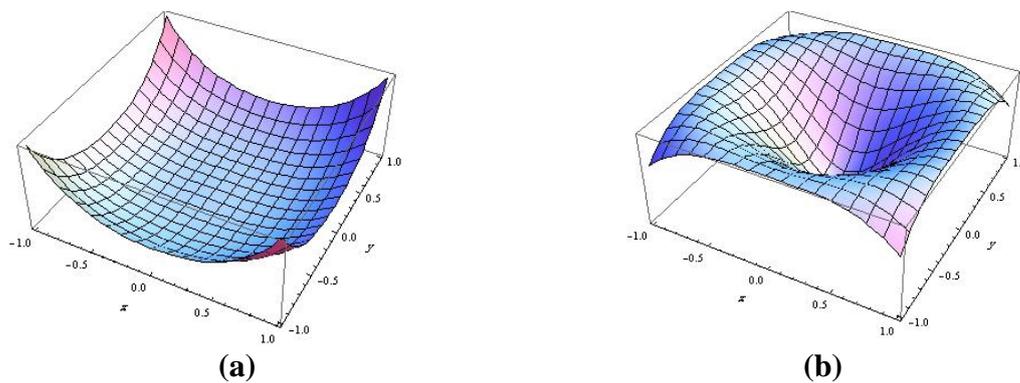


Fig. II. 4 : Formes des déflexions de la plaque dues à deux types de charges extérieures :
a. Plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface ;
b. Plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre.

Les projections des graphes de la figure II.4 sur le plan Oxy , ce qu'on appelle aussi les schémas isovaleurs, sont illustrées sur la figure II.5.

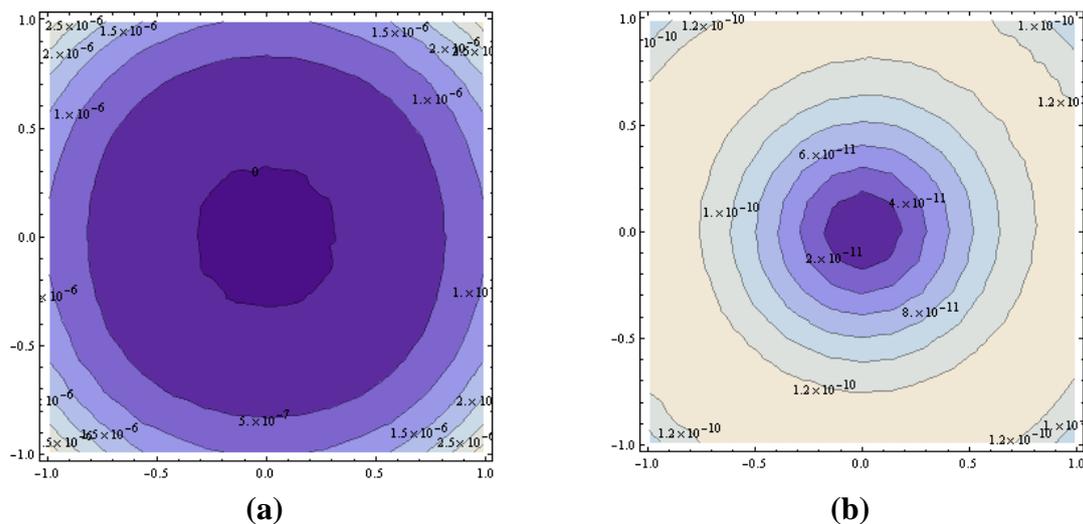


Fig. II. 5 : Présentation de la projection des déflexions de la plaque (isovaleurs) sur le plan Oxy dues à deux types de charges extérieures :

- a. Plaque sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute sa surface
- b. Plaque sollicitée par une charge concentrée appliquée au niveau de son centre

II.6. Résultats et discussion :

L'illustration des résultats de calcul, concernant les déflexions de la plaque étudiée donnés par la formule finale (II.4) représentant la résolution de son équation différentielle, est faite sur les figures II.4 et II.5. Il est montré clairement, que les déplacements de la plaque sont en parfaite concordance avec les déflexions naturelles de la plaque étudiée sous l'effet de ces types de chargement. Pour le cas où la plaque est sollicitée par une charge concentrée appliquée en son centre, il est bien remarqué que le déplacement maximal se trouve au centre de la plaque et plus on s'éloigne du centre de la plaque, les déplacements se minimisent. Il est aussi bien clair que les déplacements deviennent un peu plus grands aux niveaux des coins de la plaque, puisque la plaque est libre sur tout son contour. Pour le cas où la plaque est sollicitée par une charge uniformément répartie, on remarque bien que les coins de la plaque possèdent les déplacements les plus faibles. Ceci est en parfaite concordance avec l'état naturel de ce type de chargement pour la plaque étudiée.

II.7. Conclusion :

L'étude apportée dans ce chapitre est consacrée à la détermination des déflexions d'une plaque mince de forme carrée de n'importe quelles conditions aux limites en partant de l'équation différentielle générale des plaques en coordonnées cartésiennes. Parmi les solutions connues dans la littérature de cette équation différentielle d'une manière générale, on note celle de Clebsch qu'on a adopté. L'introduction des conditions aux limites appropriées à notre cas nous a permis de spécifier et simplifier la solution recherchée sous forme de combinaison de plusieurs termes respectant les conditions aux limites de la plaque étudiée et qui sont aussi accompagnés de coefficients à déterminer (II.4). La détermination de ces coefficients nécessite encore l'application du principe de la méthode énergétique de Ritz qui a abouti à un processus de calcul mathématique très compliqué. Cette complexité est surmontée grâce aux efforts de calcul importants fournis, ainsi qu'à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica et finalement la solution est donnée sous une forme simplifiée permettant son application aisément dans les calculs ultérieurs. Il est démontré aussi que le nombre de termes de la solution de Clebsch pris pour notre cas est largement suffisant, car la différence entre les résultats trouvés avec trois termes et ceux trouvés avec cinq termes est au voisinage de zéro.

CHAPITRE III : Etude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre on présente une approche semi-analytique pour l'évaluation de certaines intégrales de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) sur lequel repose une plaque rectangulaire qui fait l'objet d'une étude dynamique. Le grand challenge de cette étude dynamique de la plaque est de surmonter le problème de singularité associée à ce problème de contact très compliqué.

L'approche semi analytique proposée pour résoudre ce problème de contact compliqué se base sur la discrétisation du système étudié (plaque rectangulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles) ce qui conduit à une solution numérique finale sous forme matricielle. Bien évidemment, tous les termes de la matrice sont doublement indicés et la singularité se présente seulement au niveau des termes ayant le même indice. C'est pourquoi, une attention particulière est tournée vers les termes de la matrice de mêmes indices, c'est-à-dire les termes diagonaux où la singularité apparaisse. Cette situation nous a imposé à surmonter ce problème de singularité par n'importe quel moyen et il s'est avéré que le seul moyen possible est l'évaluation analytique ou semi-analytique des intégrales de la fonction de Green associées à ce problème. Par contre, les intégrales de la fonction de Green des autres termes de la matrice d'indices différents sont évaluées par de méthodes numériques aboutissant à de solutions approchées de très bonne précision.

III.2. Problématique du chapitre :

Ce chapitre est focalisé sur l'étude de la fonction de Green. Autrement-dit, la détermination des déplacements verticaux de la surface du semi-infinie élastique de propriétés inertielles que l'on trouve aussi dans la littérature sous le nome modèle de Lamb.

L'approche proposée consiste à discrétiser le système étudié, plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, en un nombre d'éléments de dimensions identiques. Donc l'étude dynamique sera accomplie sur un système discret et par conséquent, le point d'application de la force causant les déplacements verticaux de la surface

du semi-infini élastique et le point de détermination de l'un de ces déplacements sont considérés au niveau des centres des éléments. De ce fait, on se trouve devant deux cas de situations : cas (1) lorsque le point d'application de la force coïncide avec le point de détermination du déplacement, fig. III.1 ; cas (2) lorsque le point d'application de la force et le point de détermination du déplacement sont différents, fig. III.2. La singularité concerne uniquement le cas (1) et donc tous les efforts de résolution s'accroissent sur ce cas (1) afin de surmonter ce challenge de singularité qui s'est avéré ni possible que par la résolution analytique ou semi-analytique de toutes les intégrales de la fonction de Green de ce problème de contact compliqué. En revanche, les intégrales de la fonction de Green concernant le cas (2) ne nécessitent pas une résolution analytique, juste une évaluation numérique avec une précision très suffisante.

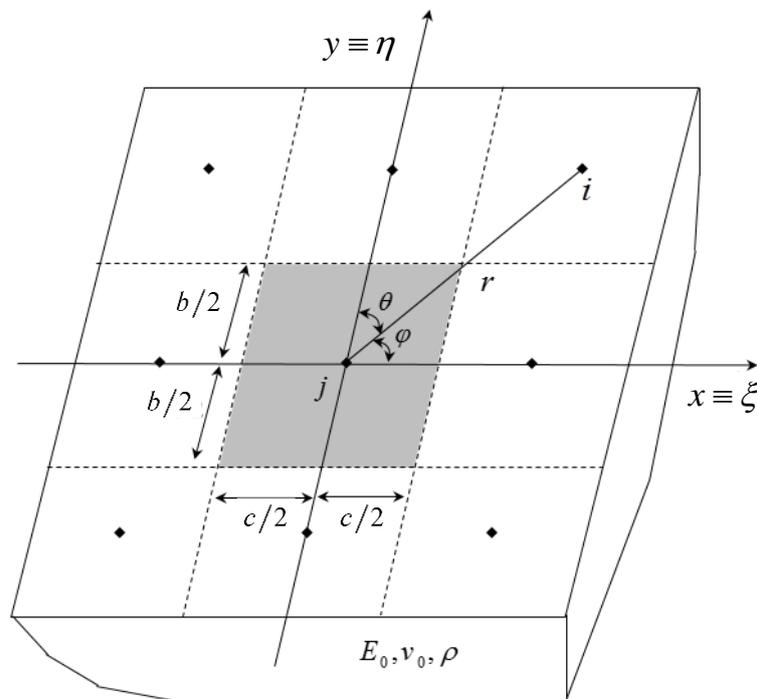


Fig. III. 1 : Géométrie discrétisée de la zone de contact de la surface du semi-infini élastique

III.3. Cas (1) :

La fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) due à l'action de la charge externe est donnée par [49], [67] :

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2\pi G_0} (I_{21}(r) + I_3(r)) \quad (\text{III.1})$$

k : paramètre définissant le caractère ondulatoire des déplacements et donné par :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 \times \rho}{G_0}}$$

ω : fréquence d'excitation ;

t : temps d'excitation ;

ρ : densité du semi-infini élastique ;

G_0 : module d'élasticité transversale du semi-infini élastique : $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$;

E_0 et ν_0 : module d'élasticité et coefficient de Poisson du semi-infini élastique respectivement ;

r : distance entre le point d'application de la charge et le point où se détermine le déplacement ;

Les expressions de $I_{21}(r)$ et $I_3(r)$ sont données par [50] :

$$I_{21} = \sum_{m=1}^{11} \frac{b_{2m-1}}{2m} \left({}_1F_2(m; 1, m+1; -k^2 r^2 / 4) - 4^{-m} {}_1F_2(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16}) \right) \quad (\text{III.2})$$

$$\begin{aligned} I_3 = & d_0 \left\{ (k^2 r^2)^{-1/2} - {}_1F_2(1/2; 1, 3/2; -k^2 r^2 / 4) \right\} + \\ & + d_1 \left\{ (\pi / 2) [Y_0(\chi kr) + H_0(\chi kr)] - \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{\infty} [(1+m) \chi^{m+1}]^{-1} {}_1F_2((1+m)/2; 1, (3+m)/2; -k^2 r^2 / 4) \right\} + \\ & + d_2 \left\{ 128^{-1} \left[-k^4 r^4 {}_2F_3(1, 1; 2, 3, 3; -k^2 r^2 / 4) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 16(4 - k^2 r^2 (2 - 2\gamma + \ln 4) + k^2 r^2 \ln(k^2 r^2)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où :

$d_0, d_1, d_2, b_1, b_3, \dots, b_{21}$: coefficients déterminés par la méthode des moindres carrés, Demidovich et al [68] ;

$H_0(\alpha)$ et $Y_0(\alpha)$: fonction Struve et fonction de Bessel du second type, Gradshteyn et Ryzhik [69],

${}_pF_q(a; b; d)$: fonction hypergéométrique généralisée, Gradshteyn et Ryzhik [69] ;

$\gamma \approx 0.577216$, constante d'Euler ;

selon [50], $\chi = 1.07236$, pour $\nu = 1/3$.

Il est important de noter que l'application de l'approche proposée nécessite l'intégration de la formule (III.1) sur toute la surface de l'élément chargé de dimensions : $b = 2 \times b_2$ et $c = 2 \times c_2$ (figure III.1). Donc, la variable r devient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \int_{y=-b_2}^{y=b_2} \int_{x=-c_2}^{x=c_2} \left[I_{21}(\sqrt{x^2 + y^2}) + I_3(\sqrt{x^2 + y^2}) \right] dx dy \quad (III.4)$$

L'expression (III.4) est divisée sur la surface de l'élément chargé bc , car le chargement est considéré comme étant uniformément réparti sur toute la surface de l'élément chargé.

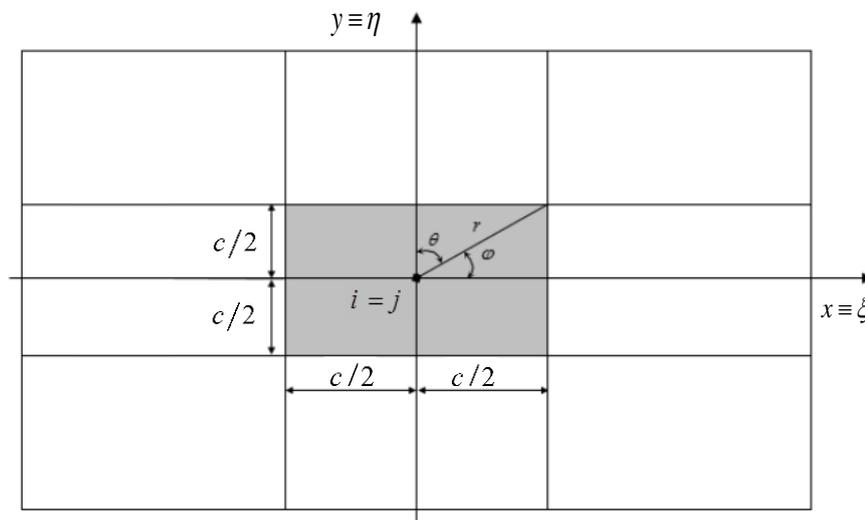


Fig. III. 2 : Géométrie de l'élément chargé montrant la zone sur laquelle l'intégration doit être effectuée

Dans le cas (1), le point i coïncide avec le point j (Fig. III.2), alors l'équation (III.4) doit être intégrée sur la toute la surface de l'élément chargé par une charge considérée uniformément répartie. C'est-à-dire :

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-c_2}^{c_2} \left[I_{21}(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) + I_3(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) \right] d\xi d\eta \quad (III.5)$$

Où :

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} .$$

x et y : coordonnées du point i où se détermine le déplacement ;

ξ et η : coordonnées du point j où la charge est appliquée ;

Certaines intégrales de I_{21} et I_3 de la formule (III.5) sont évaluées sans difficulté, mais d'autres intégrales où apparaissent les fonctions spéciales ne sont pas évaluées en raison de leur complexité. Pour faire face à ce challenge, l'approche de Johnson [70] est appliquée, dans laquelle un changement de variables du système de coordonnées cartésiennes en un système de coordonnées polaires est exécuté. Cette technique permet l'évaluation de toutes les intégrales de la formule (III.5), et par conséquent la détermination de l'expression finale du déplacement v .

Après avoir introduit l'approche de Johnson, l'expression (III.5) prend la forme suivante :

$$v = 8 \times \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \left\{ \int_0^{\arctan\left(\frac{b}{c}\right) \frac{c}{2\cos\phi}} \int_0^{\frac{c}{2\cos\phi}} [I_{21}(r, \phi) + I_3(r, \phi)] \right\} r dr d\phi \quad (\text{III.6})$$

III.3.1 Exemple explicatif :

Pour plus de détail concernant cette technique de changement de variable utilisée, principe de Johnson, pour évaluer les intégrales de la formule (III.6) du cas (1), une intégrale de I_{21} est choisie pour expliquer la manière utilisée pour évaluer ces intégrales compliquées :

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} ;$$

$$\int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} (I_{21}) d\xi d\eta = \sum_{m=1}^{11} \frac{b_{2m-1}}{2m} \left(\int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} ({}_1F_2(m; 1, m+1; -k^2 r^2 / 4)) d\xi d\eta - 4^{-m} \int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} ({}_1F_2(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16})) d\xi d\eta \right)$$

Choisissons cette intégrale,

$$\int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} ({}_1F_2(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16})) d\xi d\eta = 8 \times \int_{\phi=0}^{\phi=\arctan\left(\frac{b}{c}\right)} \int_{r=0}^{r=\frac{c/2}{\cos(\phi)}} ({}_1F_2(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16})) r dr d\phi$$

A l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on trouve :

On calcule l'intégrale par rapport à r , on trouve :

$$\int_{r=0}^{r=\frac{c/2}{\cos(\phi)}} ({}_1F_2(m; 1, m+1; \frac{-k^2 r^2}{16})) r dr = \frac{(c/2)^2}{2} {}_1F_2(m; 2, m+1; \frac{-k^2 (c/2)^2}{16(\cos \phi)^2}) \frac{1}{(\cos \phi)^2}$$

On calcule l'intégrale par rapport à ϕ , on trouve :

Faisons encore le changement de variable suivant : $t = \frac{1}{\cos \phi}$, on trouve :

$${}_1F_2\left(m; 2, m+1; \frac{-k^2(c2)^2}{16(\cos\varphi)^2}\right) \frac{1}{(\cos\varphi)^2} = {}_1F_2\left(m; 2, m+1; \frac{-k^2(c2)^2}{16}t^2\right) t^2$$

Faisons approcher la fonction ${}_1F_2\left(m; 2, m+1; \frac{-k^2(c2)^2}{16}t^2\right) t^2$ sous forme d'une série à cinq termes, on trouve :

$${}_1F_2\left(m; 2, m+1; \frac{-k^2(c2)^2}{16}t^2\right) t^2 \approx t^2 - \frac{((c2)^2 k^2 m) t^4}{32(1+m)} + O[t]^6$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{(c2)^2}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\arctan\left(\frac{b2}{c2}\right)} \left({}_1F_2\left(m; 2, m+1; \frac{-k^2(c2)^2}{16(\cos\varphi)^2}\right) \frac{1}{(\cos\varphi)^2} \right) d\varphi &\approx \frac{(c2)^2}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\arctan\left(\frac{b2}{c2}\right)} \left(\frac{1}{(\cos\varphi)^2} - \frac{((c2)^2 k^2 m) \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^4}{32(1+m)} \right) d\varphi \\ &= \frac{b2(96 - (-96 + ((b2)^2 + 3(c2)^2)k^2)m)c2}{192(m+1)} \end{aligned}$$

Le résultat final de cette intégrale est donc :

$$\begin{aligned} \int_{\eta=-b2}^{\eta=b2} \int_{\xi=-c2}^{\xi=c2} \left({}_1F_2\left(m; 1, m+1; \frac{-k^2((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}{16}\right) \right) d\xi d\eta &\approx 8 \times \frac{b2(96 - (-96 + ((b2)^2 + 3(c2)^2)k^2)m)c2}{192(m+1)} \\ &= \frac{b2(96 - (-96 + ((b2)^2 + 3(c2)^2)k^2)m)c2}{24(m+1)} \end{aligned}$$

Enfin, cette procédure d'évaluation de l'intégration est suivie pour le reste des intégrales de la formule (III.6), ce qui a permis de définir la formule finale du déplacement d'un point de la surface du semi-infini élastique lorsque la charge coïncide avec ce même point, le cas (1).

III.3.2 Vérification :

Pour montrer la fiabilité et l'exactitude de la méthode d'évaluation utilisée de ces intégrales, on procède à la vérification suivante :

Prenons une intégrale de la formule (III.6) dont son évaluation ordinaire est possible, c'est-à-dire on peut l'évaluer classiquement, sans recours à l'approche de Johnson :

$$\int_{y=-b2}^{y=b2} \int_{x=-c2}^{x=c2} (r) dx dy = \int_{y=-b2}^{y=b2} \int_{x=-c2}^{x=c2} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(4b2c2\sqrt{b2^2 + c2^2} - b2^3 \log[b2^2] - c2^3 \log[c2^2] + 2c2^3 \log[b2 + \sqrt{b2^2 + c2^2}] + 2b2^3 \log[c2 + \sqrt{b2^2 + c2^2}] \right)$$

Si on utilise l'approche, décrite ci-dessus, on trouve :

$$\int_{\eta=-b2}^{\eta=b2} \int_{\xi=-c2}^{\xi=c2} \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta = 8 \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=\arctan\left(\frac{b2}{c2}\right)} \int_{r=0}^{r=\frac{c2}{\cos(\varphi)}} (r) r dr d\varphi$$

On calcule l'intégrale par rapport à r , et à l'aide du logiciel Mathematica, on trouve :

$$\int_{r=0}^{r=\frac{c2}{\cos(\varphi)}} r^2 dr = \frac{c2^3}{3(\cos \varphi)^3}$$

On calcule l'intégrale par rapport à φ , et à l'aide du logiciel Mathematica, on trouve :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\arctan\left(\frac{b2}{c2}\right)} \left(\frac{c2^3}{3(\cos \varphi)^3} \right) d\varphi = \frac{1}{6} c2^2 \left(b2\sqrt{1 + \frac{b2^2}{c2^2}} + 2c2 \operatorname{arctanh} \left[\tan \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{b2}{c2} \right] \right] \right] \right)$$

Le résultat final de cette intégrale est donc :

$$\int_{\eta=-b2}^{\eta=b2} \int_{\xi=-c2}^{\xi=c2} \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta = 8 \times \left(\frac{1}{6} c2^2 \left(b2\sqrt{1 + \frac{b2^2}{c2^2}} + 2c2 \operatorname{arctanh} \left[\tan \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{b2}{c2} \right] \right] \right] \right) \right)$$

$$= \frac{4}{3} c2^2 \left(b2\sqrt{1 + \frac{b2^2}{c2^2}} + 2c2 \operatorname{arctanh} \left[\tan \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{b2}{c2} \right] \right] \right] \right)$$

En tenant compte des valeurs suivantes : $b2 = 0.1$; $c2 = 0.1$, les deux formules obtenues par l'application de deux différentes méthodes d'évaluation des intégrales donnent le même résultat. C'est-à-dire :

$$\int_{y=-0.1}^{y=0.1} \int_{x=-0.1}^{x=0.1} (r) dx dy = \frac{1}{3} \left(4b2c2\sqrt{b2^2 + c2^2} - b2^3 \log[b2^2] - c2^3 \log[c2^2] + \right.$$

$$\left. + 2c2^3 \log[b2 + \sqrt{b2^2 + c2^2}] + 2b2^3 \log[c2 + \sqrt{b2^2 + c2^2}] \right) = 0.00306078$$

$$\int_{y=-0.1}^{y=0.1} \int_{x=-0.1}^{x=0.1} (r) dx dy = \frac{4}{3} c2^2 \left(b2\sqrt{1 + \frac{b2^2}{c2^2}} + 2c2 \operatorname{arctanh} \left[\tan \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{b2}{c2} \right] \right] \right] \right) = 0.00306078$$

III.3.3 Précision de la solution obtenue en considérant seulement cinq termes des séries d'approximation des fonctions :

Pour s'assurer de la précision des résultats obtenus en appliquant l'approche proposée pour l'évaluation des intégrales, apportons comme exemple la comparaison graphique de la fonction hypergéométrique ${}_1F_2$ avec son approximation sous forme d'une série de seulement cinq termes. Considérons les caractéristiques mécaniques du semi-infini élastique de propriétés inertielles suivantes :

$$E_0 = 250 \times 10^6 \text{ N / m}^2;$$

$$\nu_0 = 0.3;$$

$$\rho = 1500 \text{ Kg / m}^3;$$

$$t = \frac{1}{\cos(\varphi)};$$

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{4}; \forall m \in [1;11].$$

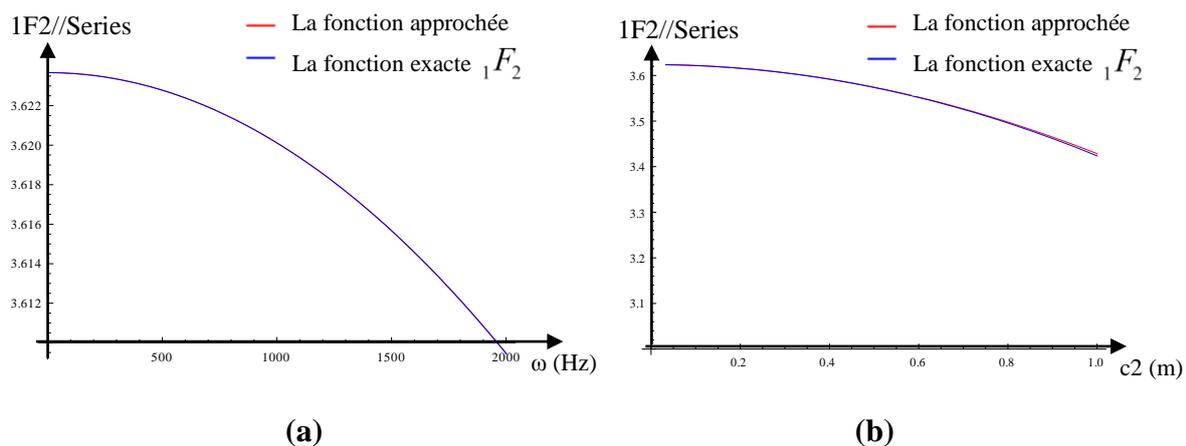


Fig. III. 3 : Comparaison de la fonction hypergéométrique ${}_1F_2$ avec sa série d'approximation de seulement cinq termes en fonction de :

- (a) fréquences d'excitation ω lorsque $c_2 = 0.1 \text{ m}$
- (b) distance c_2 lorsque $\omega = 250 \text{ Hz}$

La distance c_2 , définit la moitié de la longueur de l'élément chargé, varie en fonction des dimensions de la zone de contact étudiée et aussi en fonction de la taille du maillage de sa discrétisation. Pour notre cas, nous avons choisi une zone de contact carrée de côtés de 2 m et de maillage moyen. Donc la valeur de c_2 ne dépassera pas 0.1 m pour un gros maillage.

D'après les graphes (a) et (b) de la fig. III.3, on remarque bien que l'erreur entre la fonction ${}_1F_2$ et la série de cinq termes de son approximation est pratiquement zéro. Cela signifie que

l'approche de résolution proposée basant sur le principe de Johnson aboutit, sans aucun doute, à une solution exacte.

Enfin, et par la même manière on trouve l'évaluation des restes des intégrales de la formule (III.6) ce qui conduit à la formule finale de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb), lorsque le point de l'application de la force j coïncide avec le point i où se détermine le déplacement, le cas(1).

$$v = \left(\frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \right) \times \Delta$$

$$\Delta = 8 \int_0^{\arctan\left(\frac{b^2}{c^2}\right) \frac{c}{2\cos\varphi}} \int_0^{\arctan\left(\frac{b^2}{c^2}\right) \frac{c}{2\cos\varphi}} [I_{21}(r, \varphi) + I_3(r, \varphi)] r dr d\varphi =$$

$$= \sum_{m=1}^{11} b_{2 \times m-1} \times \left(\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{b^2 c^2 (24 - (-24 + (b^2 + 3c^2) k^2) m)}{6(1+m)} \right) - 4^{-m} \left(\frac{b^2 c^2 (96 - (-96 + (b^2 + 3c^2) k^2) m)}{24(1+m)} \right) \right) \right) +$$

$$+ d_0 \times \left(\frac{1}{k} \times \left(\frac{16\sqrt{b^2 + c^2} \operatorname{arctanh} \left[\tan \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{b^2}{c^2} \right] \right] \right]}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}} \right) + \left(\frac{b^2 c^2}{18} (-72 + (b^2 + 3c^2) k^2) \right) \right) +$$

$$+ (d_1) \times \left\{ \frac{\pi}{2} \times \left(\left(-\frac{(2 + c^2 k \pi \chi)}{36c^2 k^3 \pi^2 \chi^3} \right) \left(24(24 - 12c^2 k^2 \chi^2 + c^2 k^4 \chi^4) \operatorname{arctan} \left[\frac{b^2}{c^2} \right] + b^2 c^2 k^2 \chi^2 \times \right. \right. \right.$$

$$\times \left[12\gamma (-24 + (b^2 + 3c^2) k^2 \chi^2) + 144(3 + \log[4]) - k^2 \chi^2 \times (b^2 (19 + \log[4096]) + \right.$$

$$\left. \left. + 3c^2 (23 + \log[4096]) \right) + 6(-24 + (b^2 + 3c^2) k^2 \chi^2) \log \left[1 + \frac{b^2}{c^2} \right] + 12(-24 + (b^2 + 3c^2) k^2 \chi^2) \log [c^2 k \chi] \right) \right\} +$$

$$+ \left(\frac{2c^2 k \chi}{45\pi} \left[b^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}} (60 - (2b^2 + 5c^2) k^2 \chi^2) + 3c^2 (-20 + c^2 k^2 \chi^2) \times \left(\log \left[\cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{b^2}{c^2} \right] \right] - \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{b^2}{c^2} \right] \right] \right) \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \log \left[\cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{b^2}{c^2} \right] \right] + \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{b^2}{c^2} \right] \right] \right] \right) \right) - \sum_{n=0}^5 \left(\frac{b^2 c^2 ((b^2 + 3c^2) k^2 (1+n) - 24(3+n))}{6(3+n)} \right) \left. \right\} +$$

$$+ (d_2) \times 128^{-1} \times \left\{ \left(\frac{b^2 c^2 k^4}{2721600} \left[-241920(3b^2 + 10b^2 c^2 + 15c^2) + 1080(5b^2 + 21b^2 c^2 + 35b^2 c^2 + 35c^2) k^2 - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - (35b^2 + 180b^2 c^2 + 378b^2 c^2 + 420b^2 c^2 + 315c^2) k^4 \right] \right) + 16 \left[4 - \left(\frac{2c^2}{3} (b^2 + 3b^2 c^2) k^2 \right) (2 - 2\gamma + \log[4]) + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{1}{9} k^2 \left(24c^2 \operatorname{arctan} \left[\frac{b^2}{c^2} \right] + b^2 c^2 (-7b^2 - 33c^2 + 6(b^2 + 3c^2) \log[(b^2 + c^2) k^2]) \right) \right) \right] \right\}$$

Avec, selon [50] :

$$\chi = 1.0723562676808107 ;$$

$$d_0 = -0.638753325488385 ; d_1 = 0.14255586708614507 ; d_2 = -0.45897252064027794 .$$

III.4. Cas (2) :

Dans ce cas le point d'application de la charge j et le point où se détermine le déplacement i sont différents, fig. III.1. Ce cas (2) est caractérisé par l'absence totale de la singularité puisque la distance r entre les points i et j est différente du zéro, c'est-à-dire $r \neq 0$. Donc la formule finale des déplacements de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles pour ce cas (2) est évaluée numériquement et elle est donnée tout simplement par l'expression suivante :

$$v = \frac{-k \cos(\omega t)}{2bc\pi G_0} \left\{ \frac{1}{s_n} \sum_{n=1}^{s_n} \left[I_{21} \left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + (y-\eta_n)^2} \right) + I_3 \left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + (y-\eta_n)^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{III.7})$$

Le paramètre s_n paru dans l'équation (III.7) exprime le nombre de sous-éléments auxquels l'élément chargé est divisé. Pour une précision testée très suffisante, on a opté pour un nombre de sous-éléments égale à 16, c'est-à-dire $s_n = 16$, (fig. III.4).

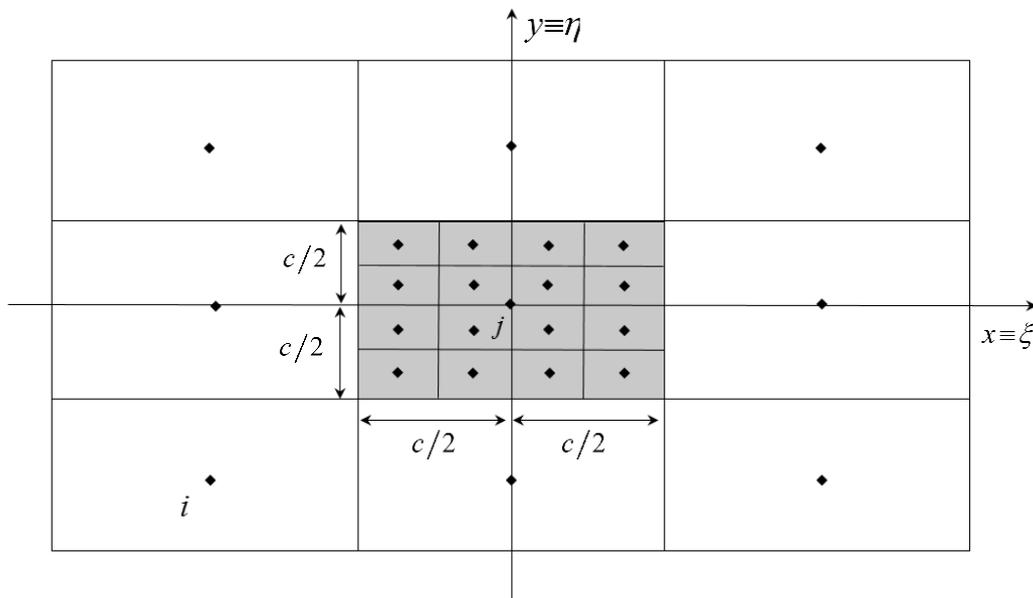


Fig. III. 4 : Division de l'élément chargé en 16 sous-éléments

III.4.1 Vérification de la précision de l'évaluation numérique des intégrales :

L'évaluation numérique des intégrales de la fonction de Green (eq. III.7) concernant le cas (2) nécessite impérativement de tester sa précision en comparant les résultats numériques trouvés

avec les résultats analytiques disponibles. Pour ce faire, on procède au processus de comparaison de l'intégrale suivante :

$$\left(\frac{1}{bc}\right) \int_{y=-b/2}^{y=b/2} \int_{x=-c/2}^{x=c/2} (r) dx dy = \left(\frac{1}{bc}\right) \int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) d\xi d\eta =$$

$$= \left(\frac{1}{bc}\right) \left(\frac{1}{6} \left(2(c/2-x) \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/2-y)^2} (b/2-y) + 2(-c/4+x) \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/2-y)^2} \times \right. \right.$$

$$\times (b/2-y) - 2(c/2-x) \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/4-y)^2} (b/4-y) + 2(c/4-x) \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/4-y)^2} (b/4-y) - (b/2-y)^3 \times$$

$$\times \log \left[-c/2+x + \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/2-y)^2} \right] + (b/2-y)^3 \log \left[-c/4+x + \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/2-y)^2} \right] + (b/4-y)^3 \times$$

$$\times \log \left[-c/2+x + \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/4-y)^2} \right] + (-b/4+y)^3 \log \left[-c/4+x + \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/4-y)^2} \right] +$$

$$+ (-c/2+x)^3 \log \left[-b/2 + \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/2-y)^2} + y \right] + (c/4-x)^3 \log \left[-b/2 + \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/2-y)^2} + y \right] +$$

$$\left. \left. + (c/2-x)^3 \log \left[-b/4 + \sqrt{(c/2-x)^2 + (b/4-y)^2} + y \right] + (-c/4+x)^3 \log \left[-b/4 + \sqrt{(c/4-x)^2 + (b/4-y)^2} + y \right] \right) \right); \quad (III.8)$$

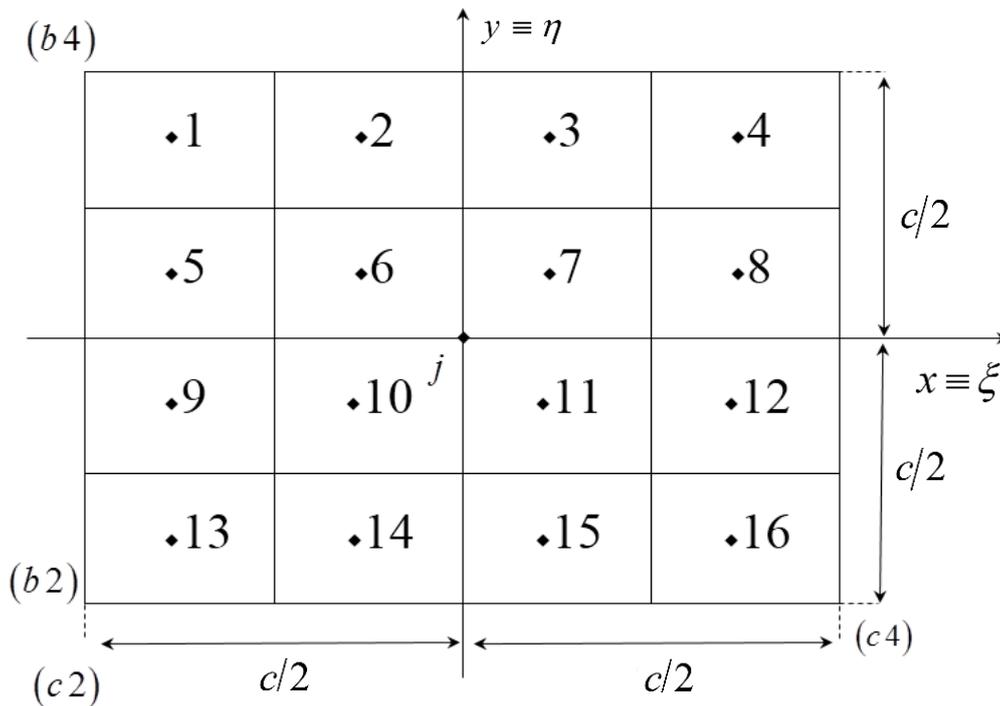


Fig. III. 5 : Numérotation des sous-éléments de l'élément chargé

L'application de l'équation (III.7), en choisissant 16 sous-éléments numérotés comme la montre la figure III.5, aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{bc}\right) \int_{\eta=-b/2}^{\eta=b/2} \int_{\xi=-c/2}^{\xi=c/2} \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) d\xi d\eta &\approx \left(\frac{1}{bc}\right) \left\{ \frac{1}{s_n} \sum_{n=1}^{s_n} \left[\left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + (y-\eta_n)^2}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{bc}\right) \left\{ \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{16} \left[\left(\sqrt{(x-\xi_n)^2 + (y-\eta_n)^2}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{bc}\right) \left(\frac{bc}{16} \left(\sqrt{\left(\frac{c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \right. \right. \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b/2 - y\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} + c/2 - x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\left(\frac{c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b/4 + y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3c}{8} - c/4 + x\right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b/4 + y\right)^2} \right) \right\}; \end{aligned} \tag{III.9}$$

Le tableau III.1 compare les résultats donnés par les deux formules (III.8) et (III.9), ainsi que l'erreur du calcul entre elles en fonction des valeurs de b et c :

Valeurs de c et b	Résultats donnés par (III.8)	Résultats donnés par (III.9)	Erreur du calcul
$c = b = 0.2m$	3.3946035676	3.3945728732	3×10^{-5}
$c = b = 0.1m$	1.6973017838	1.6972864366	1.5×10^{-5}
$c = b = 0.0666667m$	1.1315345225	1.1315242910	1.02×10^{-5}

Tab. III. 1 : Comparaison des résultats donnés par (III.8) et (III.9) pour différentes valeurs des dimensions de l'élément chargé b et c

III.5. Résultats et discussion :

Pour plus de détails concernant le domaine d'application de la solution trouvée dans le domaine des problèmes de contact en général, deux exemples sont présentés.

III.5.1 Variation des déplacements de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles :

Les formules finales trouvées par cette étude montrent que les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique de propriétés inertielles causés par une charge ponctuelle sont obtenues en fonction de deux paramètres : les fréquences d'excitation ω et les dimensions de l'élément chargé supposé carré de côté b respectivement.

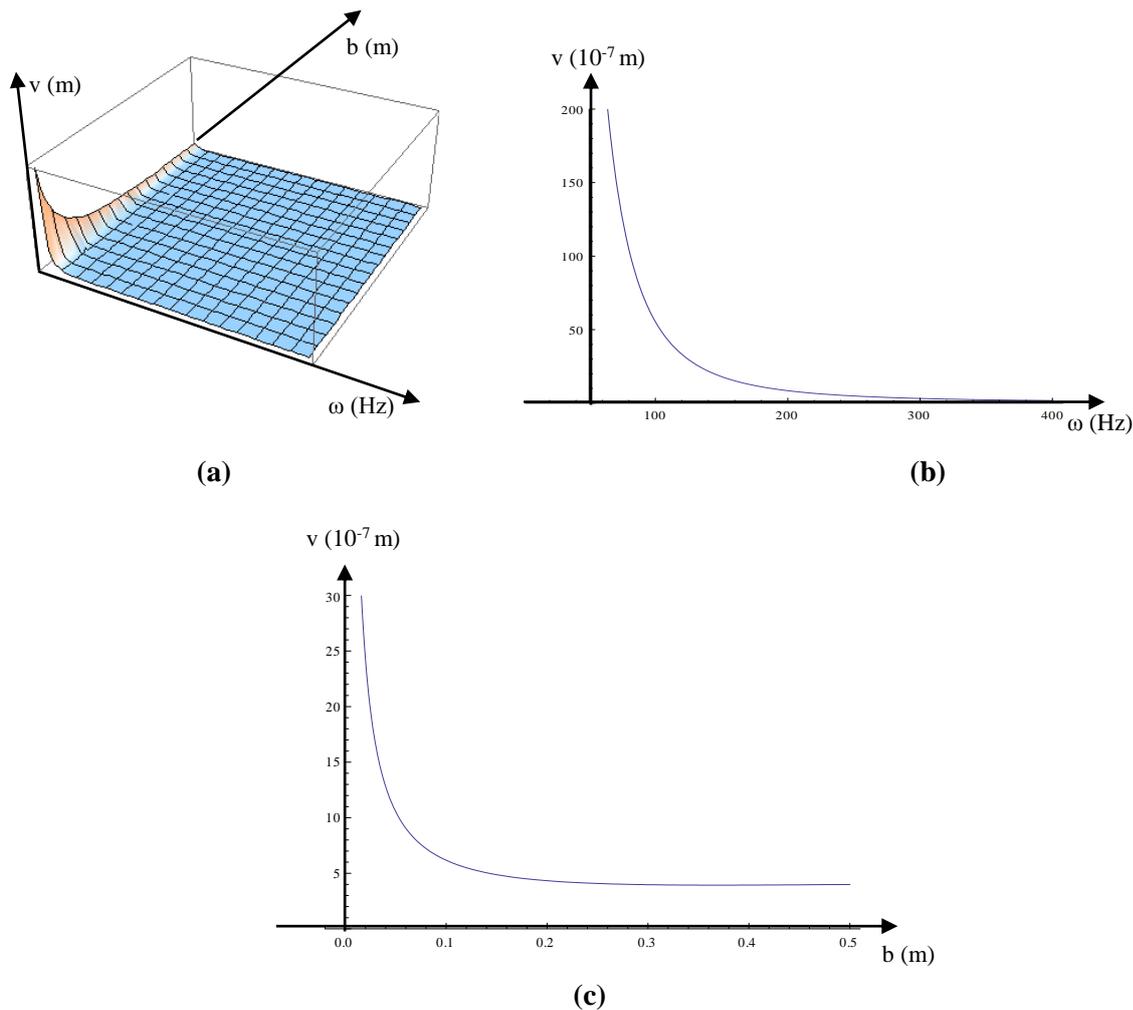


Fig. III. 6 : Variation des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique en fonction de:

- (a) fréquence d'excitation ω et dimensions de l'élément carré chargé b (3D) ;
- (b) fréquence d'excitation ω ;
- (c) dimensions de l'élément carré chargé b .

On constate bien que les graphes (a), (b) et (c) de la figure III.6 sont en proportionnalité inverse. C'est à dire les déplacements de la surface de la zone contact du semi-infini élastique de propriétés inertielles tendent vers zéro lorsque les valeurs des fréquences d'excitation et les dimensions de l'élément chargé augmentent.

III.5.2 Présentation en 3D des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique dus à deux types de charges extérieures :

La présentation graphique des solutions trouvées des cas (1) et cas (2) apportée sur la figure (III.7) en 3D illustre la distribution des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles dus à deux types de charges extérieures.

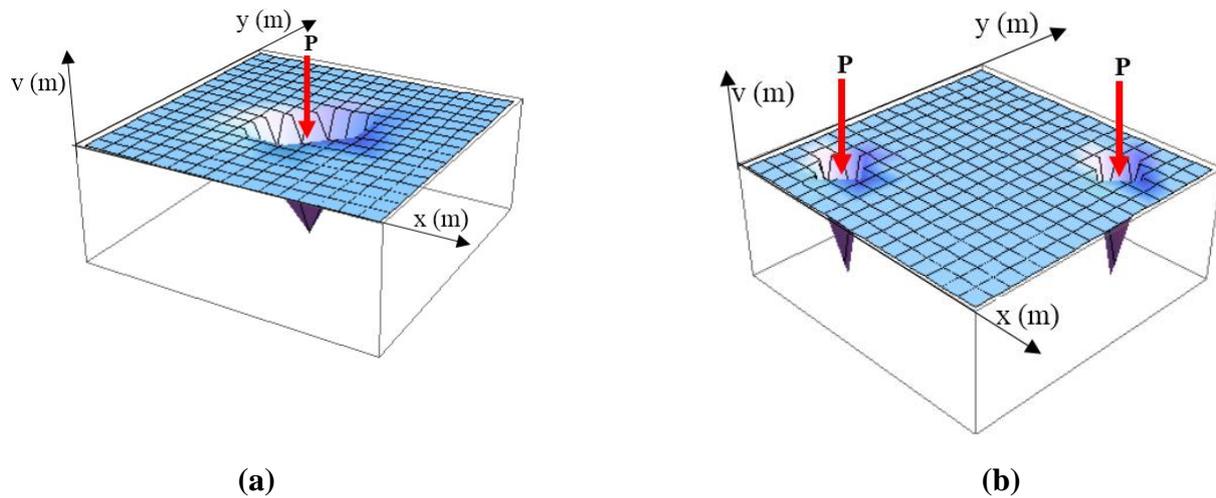


Fig. III. 7 : Distribution des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique causés par :
 a) une force ponctuelle appliquée sur la surface du semi-infini élastique ;
 b) deux forces ponctuelles appliquées sur la surface du semi-infini élastique.

On constate bien de la figure (III.7) et pour les deux cas de chargement, que la valeur maximale du déplacement est obtenue au point où la force ponctuelle est appliquée. En outre, plus on s'éloigne du point d'application de la force ponctuelle, les valeurs des déplacements diminuent et convergent vers zéro, $v \rightarrow 0|_{r \rightarrow \infty}$. Ceci est en parfaite concordance avec la logique et avec la réalité des choses dans ce domaine des problèmes de contact.

III.6 Comparaison des résultats obtenus :

Pour valider les résultats obtenus via cette étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb), alors une étude comparative s'impose. Pour ce faire, on considère un milieu élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) défini par la formule suivante [71] :

$$v_i = \left(\frac{1-\nu_0^2}{bc\pi E_0} \right) F_{i,j} \quad (III.10)$$

$$F_{i,j} = \int_{\eta=-b2\xi=-c2}^{\eta=b2 \quad \xi=c2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (III.11)$$

Avec:

E_0 : module d'élasticité du semi-infini élastique de propriétés distributives ;

ν_0 : coefficient de Poisson du semi-infini élastique de propriétés distributives ;

b et c longueur et largeur de l'élément chargé respectivement.

III.6.1. La surface du semi-infini élastique est sollicitée par une charge statique :

Considérons un élément carré de dimensions, $b2 = c2$ (Fig. III.1), chargé entièrement par une charge uniformément répartie. L'évaluation de l'intégrale de la formule (III.11) définissant l'expression du déplacement vertical en un point i de la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) $F_{i,j}$ est :

$$\begin{aligned}
 F_{i,j} = & (b2 - y) \log \left[b2 + x + \sqrt{b2^2 + 2b2x + x^2 + (b2 - y)^2} \right] - \\
 & - (b2 + x) \log \left[-b2 + \sqrt{b2^2 + 2b2x + x^2 + (b2 - y)^2} + y \right] - \\
 & - (b2 + y) \log \left[-b2 + x + \sqrt{b2^2 - 2b2x + x^2 + (b2 + y)^2} \right] + \\
 & + (b2 - x) \log \left[b2 + y + \sqrt{b2^2 - 2b2x + x^2 + (b2 + y)^2} \right] + \\
 & + (b2 + y) \log \left[b2 + x + \sqrt{b2^2 + 2b2x + x^2 + (b2 + y)^2} \right] + \\
 & + (b2 + x) \log \left[b2 + y + \sqrt{b2^2 + 2b2x + x^2 + (b2 + y)^2} \right] + \\
 & + (-b2 + y) \log \left[-b2 + x + \sqrt{2b2^2 + x^2 + y^2 - 2b2(x + y)} \right] + \\
 & + (-b2 + x) \log \left[-b2 + y + \sqrt{2b2^2 + x^2 + y^2 - 2b2(x + y)} \right]
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

Pour pouvoir comparer les valeurs des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique donnés par les deux modèles (Lamb et Boussinesq), on fixe la valeur de la fréquence d'excitation pour le modèle de Lamb à une valeur moyenne $\omega = 250$ Hz et on utilise les mêmes caractéristiques mécaniques du semi-infini élastique pour les deux modèles :

$$E_0 = 250 \times 10^6 \text{ N/m}^2; \nu_0 = 0.3; \rho = 1500 \text{ Kg/m}^3;$$

Après le calcul des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique par les formules des deux modèles comme il est illustré graphiquement sur la figure III.8, on constate bien que l'allure des déplacements des deux modèles est la même, mais celle de Lamb donne

une valeur de déplacement assez grande au point d'application de la force par rapport à celle de Boussinesq.

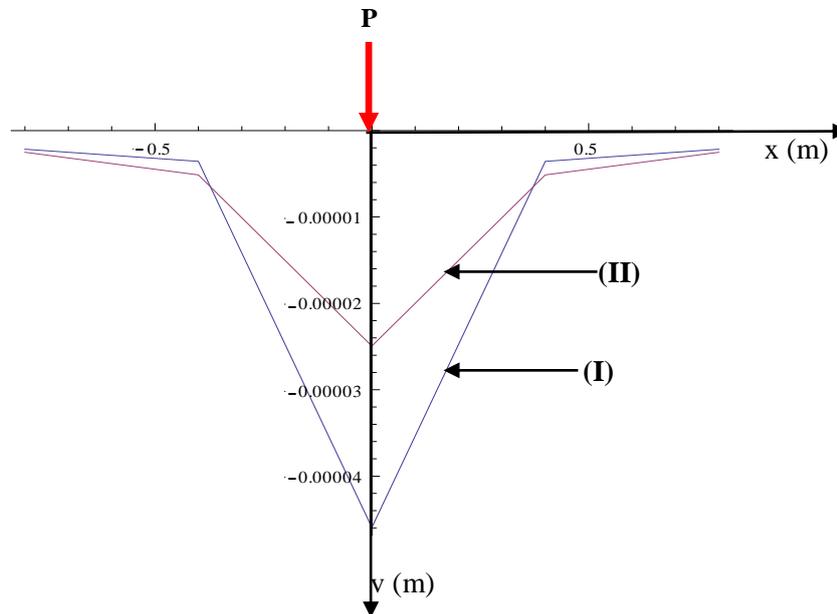


Fig. III. 8 : Les épures des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique données par :
(I) modèle de Lamb
(II) modèle de Boussinesq

III.6.2. La surface du semi-infini élastique est sollicitée par une charge dynamique :

Comme indiqué précédemment que les expressions finales des déplacements de la surface du semi-infini élastique de modèle de Lamb pour le cas (1) ou pour le cas (2) sont trouvées en fonctions de deux variables qui sont la fréquence d'excitation et les dimensions de l'élément chargé. Cela indique bien que ce modèle tient compte du caractère ondulatoire des déplacements de la surface du milieu élastique sous l'effet d'une charge dynamique ce qui le rend le modèle le plus proche de la réalité. Les schémas (a) et (b) de la fig. III.9 montrent la propagation des déplacements sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles dans toutes les directions, causés par l'effet de : (a) une charge dynamique ; (b) deux charges dynamiques de même intensité.

Les valeurs des caractéristiques mécaniques du semi-infini élastique et celles des charges dynamiques prises sont :

$$E_0 = 250 \times 10^6 \text{ N} / \text{m}^2; \nu_0 = 0.3; \rho = 1500 \text{ Kg} / \text{m}^3; P = F \cos(\omega t); F = 1000 \text{ N}; \omega = 250 \text{ Hz};$$

$$t = 0.19 \text{ s};$$

P : charge dynamique extérieure appliquée sur la surface du semi-infini élastique ;

F : amplitude de la charge dynamique appliquée ; ω : fréquence d'excitation ; t : temps d'excitation.

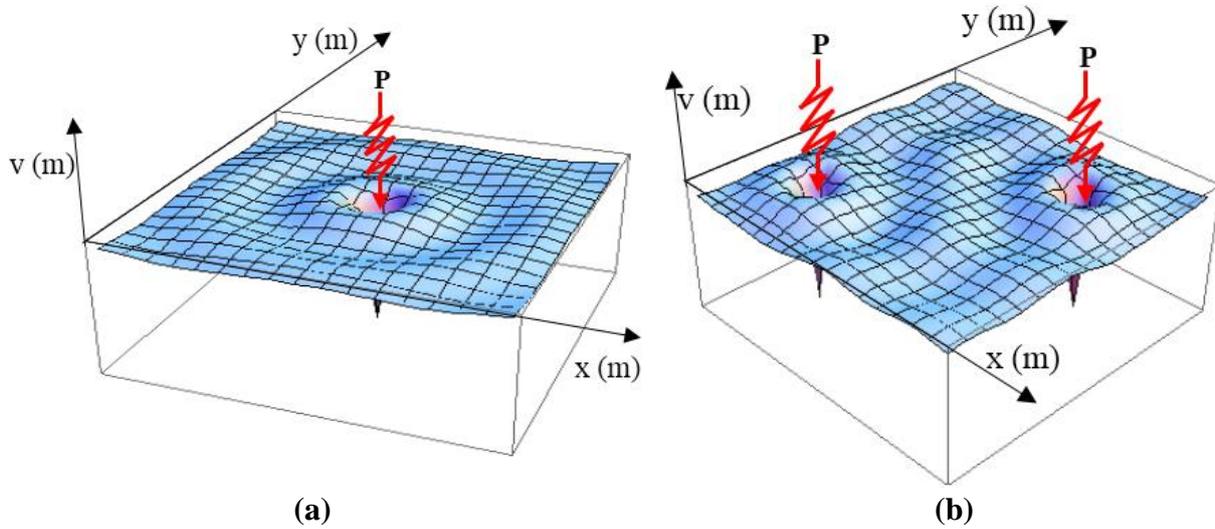


Fig. III. 9 : Caractère ondulatoire des déplacements de la surface du semi-infini élastique à $t=0.19s$
 a) causés par une charge dynamique ;
 b) causés par deux charges dynamiques.

Grace au logiciel du calcul formel Mathematica, on peut même présenter la projection instantanée du caractère ondulatoire des déplacements de la surface du semi-infini élastique de modèle de Lamb causés par une charge dynamique et par deux charges dynamiques. Cette présentation est illustrée sur la figure III.10.

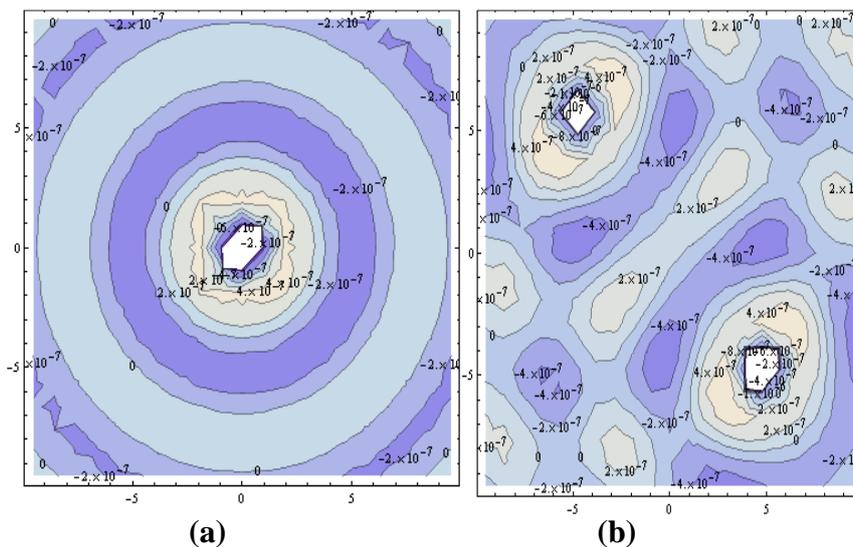


Fig. III. 10 : Présentation de la projection des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique (isovaleurs) sur le plan Oxy causés par :
 a) une charge dynamique
 b) deux charges dynamiques

Enfin, la figure III.11 montre une superposition des formes et des amplitudes des déplacements de la surface du semi-infini élastique données par le modèle de Lamb et par le modèle de Boussinesq causées par une charge dynamique extérieure $P = F \cos(\omega t)$, où :

$$E_0 = 250 \times 10^6 \text{ N/m}^2; \nu_0 = 0.3; \rho = 1500 \text{ Kg/m}^3; F = 1000 \text{ N}; \omega = 250 \text{ Hz}.$$

En comparant l'allure des déplacements donnés par les deux modèles, on constate clairement qu'uniquement le modèle de Lamb tient compte du caractère ondulatoire des déplacements causés par la charge dynamique. Cette qualité possédée uniquement par le modèle de Lamb le rend le modèle le plus proche de la réalité.

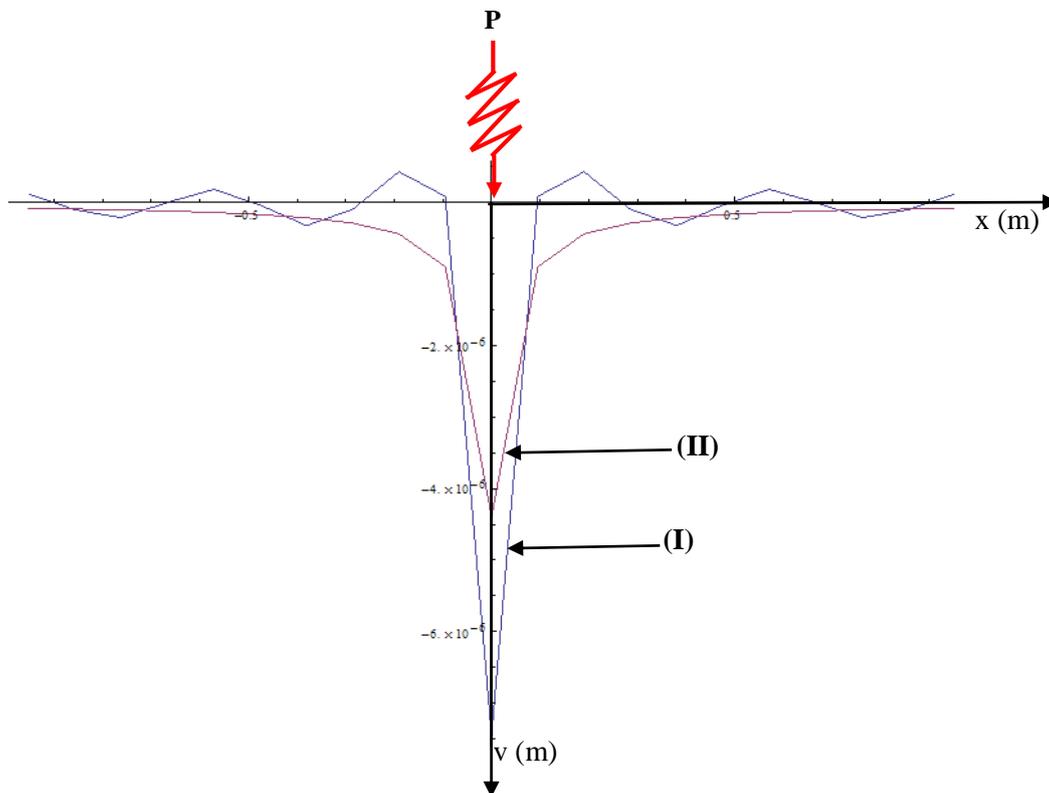


Fig. III. 11 : Allure des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique due à une charge dynamique donnée par :

- (I) modèle de Lamb
- (II) modèle de Boussinesq

III.7. Conclusion :

Ce chapitre est consacré à l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) causés par une charge statique ou dynamique. L'étude de la fonction de Green est essentielle pour l'étude dynamique des différents problèmes de contact. Cette étude de la fonction de Green vise en particulier l'étude dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles qui sera apportée dans les chapitres qui suivent ce chapitre. A noter que le problème traité dans ce chapitre représente le plus grand challenge de cette thèse de doctorat puisqu'il est lié à des difficultés mathématiques majeures. La difficulté de l'étude de la fonction de Green s'est compliquée encore lors de l'apparition du problème de singularité lors de l'évaluation de certaines intégrales associées à cette étude. Cette situation nous a obligé en premier lieu à surmonter ce problème de singularité qui s'est avéré n'est possible que par la solution analytique ou semi-analytique de certaines intégrales contenant des fonctions spéciales. Ensuite, exécuter le reste des calculs mathématiques et surmonter aussi leurs difficultés et enfin de compte construire des codes de calcul appropriés pour arriver aux résultats recherchés. Tous les efforts fournis ont abouti à la résolution des différents problèmes rencontrés et finalement les résultats trouvés sont très satisfaisants et de très bonne précision et qui sont tous en totale concordance avec la réalité des choses dans ce domaine. En outre, les formules finales obtenues ont été arrangées de façon être plus compatibles pour différentes applications d'ingénierie, non seulement dans le domaine des problèmes de contact, mais aussi dans d'autres domaines comme le cas de la propagation des ondes dans différents milieux continus due à plusieurs facteurs extérieurs.

Enfin, la comparaison des résultats obtenus effectuée avec un autre modèle a montré que le modèle de Lamb étudié est le modèle le plus proche de la réalité en raison de certaines qualités qu'il possède. Par exemple, il est le seul modèle qui tient en compte du caractère ondulatoire des déplacements ce qui lui classe comme étant le meilleur parmi les autres modèles existants dans ce domaine.

CHAPITRE IV : Présentation de l'approche de calcul utilisée dans l'étude dynamique des plaques reposant la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle (modèle de Lamb)

IV.1. Introduction :

L'étude des problèmes de contact comme le calcul des plaques en interaction avec des milieux élastique en statique ou en dynamique est liée à de difficultés mathématiques majeures.

Ce chapitre est donc consacré à la présentation d'une approche de calcul proposée pour l'étude dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle (modèle de Lamb). L'approche proposée se base sur la méthode des forces connue dans le domaine des sciences liées à la résistance des matériaux RDM qui est connue aussi dans certaines littératures sous le nom de la méthode de Zhemochkin[72]. L'application de cette approche nécessite en premier lieu la discrétisation du système étudié plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle en un nombre fini d'éléments identiques. Donc le contact continu entre la plaque et la surface du semi-infini élastique est remplacé par un contact partiel assuré par des liaisons se trouvant au niveau des centres des éléments de discrétisation. Cette opération aboutit à un système d'équations canoniques avec plusieurs paramètres. Certains de ces paramètres sont connus a priori (généralement les caractéristiques mécaniques et géométriques du système étudié) et d'autres sont à déterminer par différents calculs. Les deux paramètres du système d'équations canoniques à définir et qui représentent le défi de cette étude sont : l'étude de la fonction de Green, représentant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique, et la détermination des déflexions de la plaque.

Enfin, la résolution du système d'équations canoniques résultant permet la détermination des forces réactives dans la zone de contact située entre la plaque flexible et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle. Ceci permettra ensuite de déterminer le reste des autres différentes entités physique, à savoir, les déplacements verticaux de la zone de contact, les efforts internes dans les sections de la plaque, les valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque étudiée, la réponse dynamique de la plaque etc.

IV.2. Problématique du chapitre :

Le problème posé de cette étude est la formulation de l'approche proposée qui sera utilisée dans l'étude dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle (modèle de Lamb). Cette étude dynamique comporte la détermination des valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse dynamique due à de différents types de charges extérieures harmoniques appliquées sur la plaque. La méthode de résolution choisie, nécessite la discrétisation du système étudié, c'est-à-dire le passage du continu au discret est inévitable puisque la résolution continue est

pratiquement impossible pour ce genre de problèmes de contact. La structure étudiée est donc discrétisée en un nombre d'éléments rectangulaires identiques dont le nombre est proportionnel à la précision des résultats souhaitée. Cette opération de résolution, basée sur la discrétisation du système étudié, aboutit enfin de compte à un système d'équations canoniques de plusieurs paramètres à déterminer a priori avant sa résolution finale. La détermination des différents paramètres du système d'équations canoniques nécessite la combinaison de plusieurs études séparées liées à chaque paramètre et qui sont enfin de compte couplées pour formuler le système final. On a choisi que le système final soit formulé de telle sorte que la première solution donne les valeurs des forces réactives dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles et ensuite la détermination des fréquences propres et les modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse dynamique.

IV.3. Discrétisation du système étudié (plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles) :

Soit une plaque mince de masse m et de rigidité cylindrique D repose sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles comme la montre la figure IV.1 suivante :

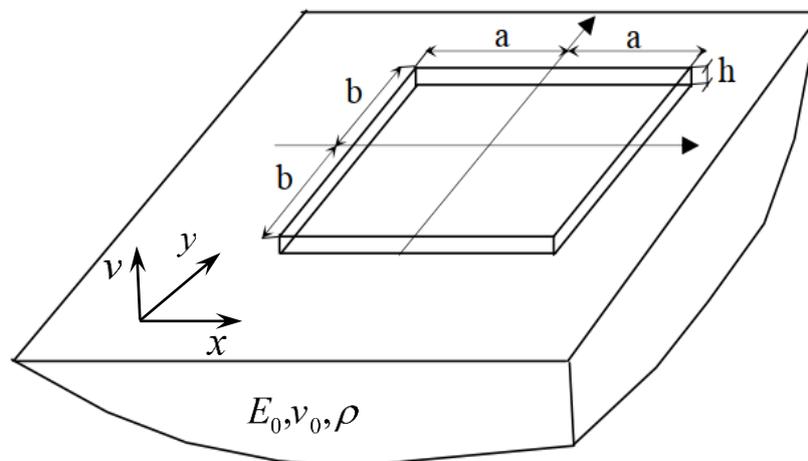


Fig. IV. 1 : Plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles

Divisons la plaque en un nombre n d'éléments rectangulaires de dimensions identiques, et au centre de chaque élément on met une liaison rigide à travers laquelle se réalise le contact de la plaque avec la surface du semi-infini élastique. C'est-à-dire, le contact continu entre la plaque et la surface du semi-infini élastique est remplacé par un contact partiel accompli au niveau des liaisons se trouvant aux centres des éléments. Admettons que la masse de chaque élément est concentrée en son centre (fig. IV.2).

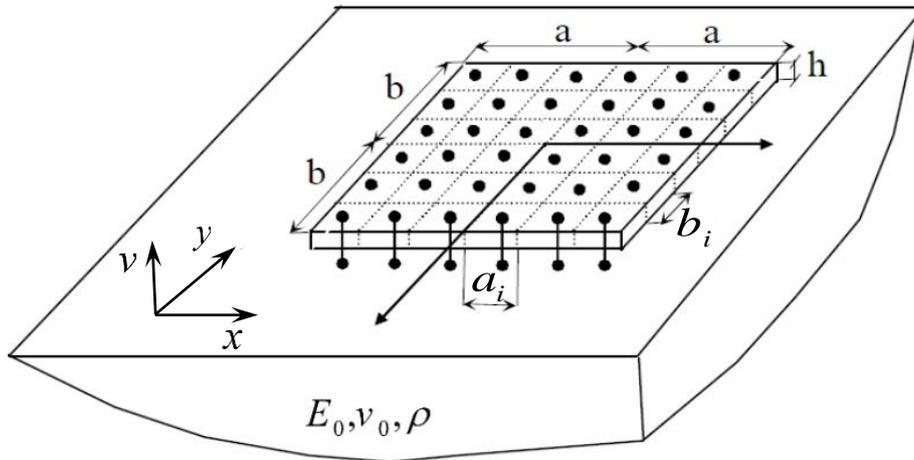


Fig. IV. 2 : Plaque discrétisée en un nombre d'éléments rectangulaires identiques reposant sur la surface du semi-infini élastique

Pour des raisons de simplification du calcul, la numérotation des éléments de la plaque discrétisée est choisie de la manière suivante :

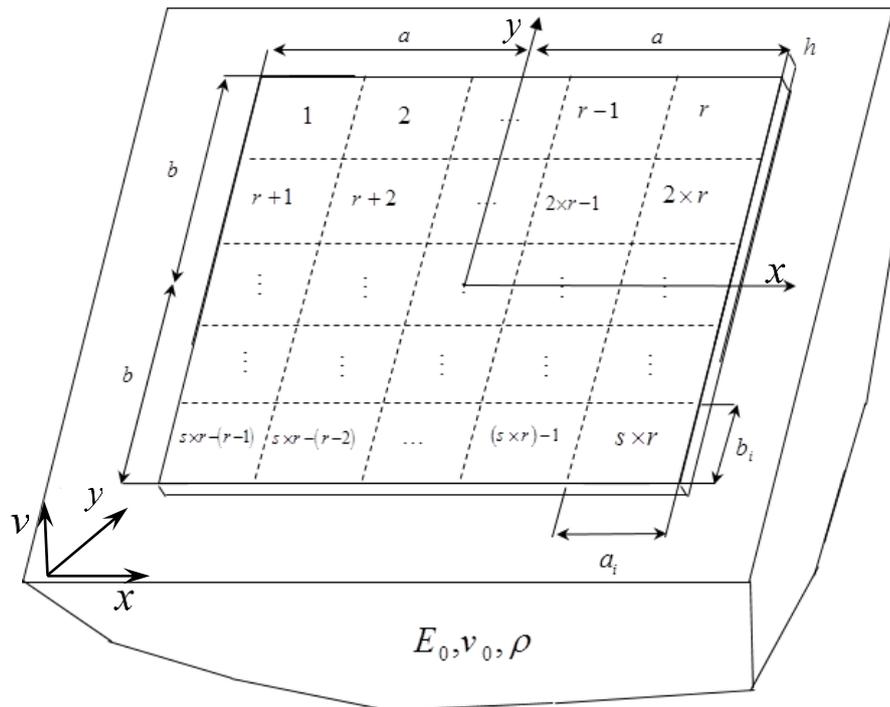


Fig. IV. 3: Choix de la numérotation des éléments de la plaque discrétisée

Où :

r : nombre d'éléments selon l'axe Ox ;

s : nombre d'éléments selon l'axe Oy .

IV.4. Formulation de l'approche :

L'approche proposée pour l'étude dynamique de la plaque de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles se base sur le principe de la méthode des forces connue dans la science de la RDM. Cette méthode connue aussi sous le nom de la méthode de Zhemochkin, et son principe est illustré sur la figure IV.4.

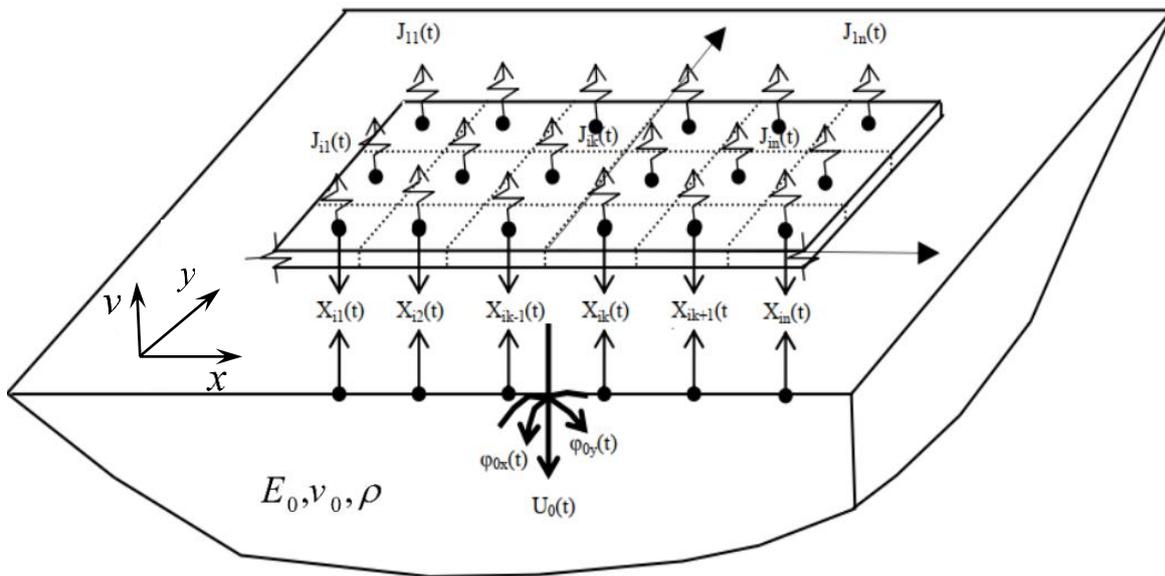


Fig. IV. 4 : Discretisation du système étudié (plaque en interaction avec la surface du semi-infini élastique)

A noter que notre approche suppose que les forces d'inertie $J_i(t)$ vibrant les masses sont appliquées uniquement sur la plaque, alors que les efforts de liaisons $X_i(t)$ sont appliqués sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique [73], [72], [67], [74].

Le système d'équations canoniques permettant l'étude dynamique de la plaque de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles est le suivant [75], [76], [72], [2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{j=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j(t) - \sum_{j=1}^n W_{ij} J_j(t) + \ell_{ix} \phi_{0x}(t) + \ell_{iy} \phi_{0y}(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{jx} = I_{0x} \ddot{\phi}_{0x}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{jy} = I_{0y} \ddot{\phi}_{0y}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] = m \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (IV.1)$$

Les définitions détaillées de différents paramètres du système d'équations canonique (IV.1) sont les suivantes :

v_{ij} : fonction définissant le déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique au point i dû à la force $X_j = 1$ appliquée au point j de la même surface. Pour sa détermination, on doit étudier la fonction de Green ayant comme modèle le cas du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb). Cette fonction représente le premier grand défi en matière de complexité de cette étude dynamique. Le chapitre III est complètement consacré à la détermination de ce paramètre ;

W_{ij} : fonction définissant la déflexion de la plaque au point i due à la force $X_j = 1$ appliquée au point j de la plaque. Pour sa détermination, on doit appliquer la méthode énergétique de Ritz adoptant la solution de Clebsch de l'équation différentielle des déformées de la plaque. Cette fonction considérée comme étant le second grand défi de cette étude dynamique. Le chapitre II est complètement consacré à la détermination de ce paramètre ;

$X_j(t)$: effort de liaison appliqué sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique (inconnue). Ces efforts de liaison représentent les forces éactives dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles ;

Δ_{ip} : fonction représentant la déflexion de la plaque au point i due à l'action de la charge extérieure appliquée au point p coïncidant avec l'un des centres de gravité des éléments de discrétisation de la plaque. Donc, ce paramètre n'est tenu en compte que pour le cas des vibrations forcées de la plaque;

$J_j(t)$: force d'inertie vibrant la structure étudiée, elle est supposée appliquée uniquement sur la plaque ;

ℓ_{ix} : bras de levier du centre de gravité de l'élément i par rapport à l'axe Ox ;

ℓ_{iy} : bras de levier du centre de gravité de l'élément i par rapport à l'axe Oy ;

$\phi_{0x}(t), \phi_{0y}(t)$: angles de rotation de la plaque par rapport aux axes Ox et Oy (inconnues) ;

$u_0(t)$: déplacement vertical initial de la plaque toute entière, considérée comme étant un seul bloc rigide (inconnue) ;

I_{Ox}, I_{Oy} : moments d'inertie de la plaque par rapport aux axes Ox et Oy ;

m : masse totale de la plaque ;

$\ddot{\phi}_{0x}(t)$: accélération angulaire de la plaque par rapport à l'axe Ox ;

$\ddot{\phi}_{0y}(t)$: accélération angulaire de la plaque par rapport à l'axe Oy ;

$\ddot{u}_0(t)$: accélération verticale de la plaque par rapport à l'axe Oy ;

Les accélérations angulaires et verticales de la plaque peuvent être exprimées par [74] :

$$\ddot{\phi}_{0x}(t) = \frac{d^2\phi_{0x}}{dt^2} ; \ddot{\phi}_{0y}(t) = \frac{d^2\phi_{0y}}{dt^2} ; \ddot{u}_0(t) = \frac{d^2u_0}{dt^2} .$$

IV.5. Cas des vibrations libres de la plaque :

La vibration libre de la plaque est supposée sous forme harmonique, alors on pourra écrire [77], [78] :

$$\begin{aligned} v_j(t) &= v_j e^{i\omega t} ; \\ W_j(t) &= W_j e^{i\omega t} ; \\ X_j(t) &= X_j e^{i\omega t} ; \\ \phi_{0x}(t) &= \phi_{0x} e^{i\omega t} ; \\ \phi_{0y}(t) &= \phi_{0y} e^{i\omega t} ; \\ u_0(t) &= u_0 e^{i\omega t} ; \\ J_j(t) &= J_j e^{i\omega t} . \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Du fait que la plaque est réellement en parfait contact avec la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, alors le déplacement de ce dernier est considéré égal à la déflexion de la plaque ($W_{ij} = v_{ij}$). Donc, la force d'inertie (J_j) peut être donnée par l'expression suivante [79] :

$$J_j = -M_j \frac{d^2 W_j(t)}{dt^2} = -M_j \frac{d^2 v_j(t)}{dt^2} = M_j \omega^2 v_j e^{i\omega t} \quad (\text{IV.3})$$

Reportons (IV.2) et (IV.3) dans le système (IV.1) et considérons $\Delta_{ip} = 0$, ce dernier devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{i=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j - \sum_{i=1}^n W_{ni} J_i + \ell_{ix} \phi_{0x} + \ell_{iy} \phi_{0y} + u_0 = 0; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jx} = I_{0x} \ddot{\phi}_{0x}; \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jy} = I_{0y} \ddot{\phi}_{0y}; \\ \sum_{i=1}^n [X_j - J_j] = m \ddot{u}_0, \end{array} \right. \quad (\text{IV.4})$$

En tenant compte de toutes les définitions précédentes de tous les paramètres du système d'équations canonique (IV.3) apportées dans ce chapitre ou dans les chapitres II et III, et après plusieurs transformations et simplifications mathématiques, le système peut être représenté sous la forme matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{cccccc} \kappa_{11} & \cdots & \kappa_{1n} & \ell_{1x} & \ell_{1y} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \cdots & \kappa_{nn} & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \kappa_{n+1,1} & \cdots & \kappa_{n+1,n} & \lambda_x & 0 & 0 \\ \kappa_{n+2,1} & \cdots & \kappa_{n+2,n} & 0 & \lambda_y & 0 \\ \kappa_{n+3,1} & \cdots & \kappa_{n+3,n} & 0 & 0 & m\omega^2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \phi_{0x} \\ \phi_{0y} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Les différentes transformations et simplifications mathématiques effectuées et grâce à l'utilisation du logiciel Mathematica, les termes de la matrice du système (IV.5) peuvent être définis par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{i,j} = W_{i,j} + \alpha \left(F_{i,j} - M \omega^2 \times \sum_{p=1}^n (F_{p,j} \times W_{i,p}) \right) \quad i \in [1, n]; j \in [1, n]; \\ \kappa_{n+1,j} = \ell_{jx} - M \alpha \omega^2 \times \sum_{p=1}^n (\ell_{px} \times F_{p,j}) \quad j \in [1, n]; \\ \kappa_{n+2,j} = \ell_{jy} - M \alpha \omega^2 \times \sum_{p=1}^n (\ell_{py} \times F_{p,j}) \quad j \in [1, n]; \\ \kappa_{n+3,j} = 1 - M \alpha \omega^2 \times \sum_{p=1}^n (F_{p,j}) \quad j \in [1, n]; \\ \lambda_x = \frac{1}{3} a^2 m \omega^2; \\ \lambda_y = \frac{1}{3} a^2 m \omega^2; \end{array} \right.$$

m : la masse total de la plaque ;

M : la masse élémentaire correspondant à l'élément i ;

$$\alpha = \frac{-k}{2\pi G_0} \times \frac{1}{\Omega_i};$$

Ω_i : la surface de l'élément i ;

k : paramètre définissant le caractère ondulatoire des déplacements est donné dans le chapitre III ;

G_0 : module d'élasticité transversale du semi-infini élastique et défini par : $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$;

E_0 et ν_0 : module d'élasticité et coefficient de Poisson du semi-infini élastique respectivement ;

IV.6. Fréquences propres de la plaque étudiée :

Le système d'équation sous la forme matricielle (IV.5) issu du système d'équations canonique (IV.1) après avoir subi plusieurs transformations mathématiques permet de déterminer les fréquences propres de la plaque étudiée. Le processus de détermination des fréquences propres de la plaque nécessite la détermination des racines de l'équation du déterminant de la matrice [A] en égalant son expression à zéro, c'est-à-dire :

$$\det[A] = 0 \quad (IV.6)$$

La détermination des racines de l'équation du déterminant est l'opération de calcul de cette étude dynamique de la plaque la plus compliquée et la plus lente vu la complexité de son expression ce qui nécessite beaucoup de temps de calcul et aussi une machine de calcul très puissante surtout lorsque la taille de discrétisation est grande. Plus de détail sur cette opération de calcul sera apporté dans le chapitre V.

IV.7. Modes propres de la plaque étudiée :

Après avoir déterminé les valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée, on passe automatiquement à la détermination de ses modes propres. Chaque mode propre correspond à une valeur de fréquence propre. Plus de détail sur cette opération de détermination des modes propres de la plaque sera apporté dans le chapitre V. Enfin, le but de détermination des fréquences propres et des modes propres de la plaque étudiée est de savoir ses propriétés approfondies et par conséquent éviter l'apparition des phénomènes de résonance lors de sa mise en application.

IV.8. Réponse dynamique de la plaque étudiée :

L'étape finale de cette étude dynamique de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini de propriétés inertielles est la détermination de sa réponse dynamique due à l'action de plusieurs types de charges extérieures harmoniques. Autrement-dit, savoir son comportement et les déplacements verticaux de la plaque étudiée au moment de l'action de la charge extérieure. Plus de détail sur la détermination de la réponse dynamique de la plaque due aux différents types de charges harmoniques extérieures sera apporté dans le chapitre V.

IV.9. Conclusion :

L'approche proposée, dans le cadre de la préparation de ce travail de thèse de doctorat, pour l'étude dynamique d'une plaque de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) a finalement permis la détermination de la solution recherchée. En se basant sur la discrétisation du système étudié et en application du principe de la méthode des forces connue dans la littérature et après introduction de plusieurs études intermédiaires définissant certains paramètres, l'étude finale s'est formulée sous forme d'un système d'équations sous forme matricielle. Ce système matriciel final a permis l'étude dynamique comportant le calcul des forces réactives dans la zone de contact et puis la détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque, la détermination de ses modes propres et de sa réponse dynamique due aux différents types de charges harmoniques extérieures.

CHAPITRE V : Calcul dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb).

V.1 Introduction :

Les plaques de n'importe quelle forme et constituées de n'importe quel matériau ce sont des éléments structurels très utilisés dans de nombreux domaines du génie mécanique, du génie civil, de l'aéronautique, de l'industrie automobile etc. Donc, leur utilisation ne cesse de grandir avec le développement technologique, chose qui impose la bonne maîtrise de leur comportement en statique ou en dynamique. Les plaques de formes rectangulaire en interaction avec des milieux élastiques fait partie de cette problématique et donc l'approfondissement de leurs études dynamiques est nécessaire pour, non seulement, maîtriser parfaitement leur comportement dynamique, mais aussi pour aboutir à une conception pour une application plus adéquate lors de leur mise en service. Ce type de plaques intervient dans le domaine des problèmes de contact qui n'est pas étudié complètement à nos jours vu sa complexité et son accompagnement de difficultés mathématiques majeures.

Dans ce contexte, ce chapitre sera focalisé sur le calcul dynamique d'une plaque de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb). En vue de contribuer à résoudre ce problème de contact non traité suffisamment, une approche semi-analytique, bien décrite dans les chapitres précédents, sera utilisée pour son analyse dynamique. Cette étude dynamique se base sur la discrétisation de la structure étudiée, plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, en un nombre d'éléments identiques fini. Les deux études auxiliaires essentielles faisant partie de cette étude dynamique sont : la méthode énergétique de Ritz et l'étude de la fonction de Green. Le couplage de ces deux études auxiliaires essentielles avec d'autres études secondaires est accompli par la méthode des forces connue dans la littérature et connue aussi sous le nom la méthode de Zhemochkin.

L'application de l'approche sous sa forme finale permet la détermination des forces réactives dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique ce qui permettra ensuite de déterminer les valeurs des fréquences propres de la plaque, ses modes propres appropriés à chaque fréquence propre, ainsi que sa réponse dynamique due à l'action de différents types de charges extérieures harmoniques.

V.2. Problématique du chapitre :

Le problème posé de cette étude dynamique est de discrétiser la structure étudiée, une plaque mince isotrope de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb), pour déterminer les valeurs de ses fréquences propres, ses modes propres associés à chaque fréquence propre, ainsi que sa réponse dynamique due à l'application de différents types d'excitations extérieures harmoniques. L'amortissement et les

forces de frottement dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique sont négligés.

V.3. Discrétisation du système étudié :

L'application de l'approche utilisée nécessite le passage du système continu au système discret, c'est-à-dire le système étudié, plaque mince de forme rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) doit être discrétisé en un nombre n d'éléments rectangulaires identiques.

Donc le remplacement du calcul continu par un calcul fini implique la détermination des forces de réaction dans la zone de contact uniquement aux points situant au niveau des centres des éléments auxquels la plaque est divisée. Le calcul des autres entités physique, à savoir les valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse dynamique, se fait par l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité.

Pour simplifier un peu la tâche du calcul très compliqué de ce problème de contact, on considère une plaque mince homogène de forme carrée. La numérotation choisie des éléments de la plaque carrée discrétisée est illustrée sur la figure (V.1). On constate bien que tous les éléments de discrétisation de la plaque sont identiques et leur nombre total considéré est égal à n . Ceci implique automatiquement que le nombre d'éléments dans les deux directions est le même, c'est-à-dire $r = s = \sqrt{n}$.

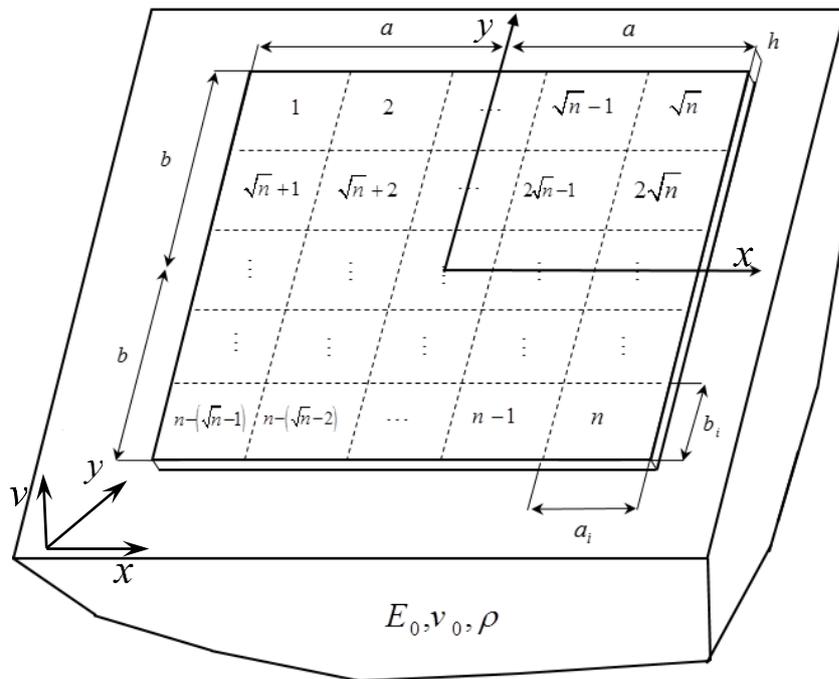


Fig. V. 1 : Numérotation des éléments de la plaque discrétisée

V.4. Formulation du système d'équations canoniques :

Le système d'équations canoniques permettant l'étude des vibrations libres de la plaque mince carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) [72] est bien décrit dans le chapitre (IV). Sa forme matricielle finale vaut :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \cdots & \kappa_{1n} & \ell_{1x} & \ell_{1y} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \cdots & \kappa_{nn} & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \kappa_{n+1,1} & \cdots & \kappa_{n+1,n} & \lambda_x & 0 & 0 \\ \kappa_{n+2,1} & \cdots & \kappa_{n+2,n} & 0 & \lambda_y & 0 \\ \kappa_{n+3,1} & \cdots & \kappa_{n+3,n} & 0 & 0 & m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \phi_{ox} \\ \phi_{oy} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.1})$$

Tous les paramètres du système d'équations sous forme matricielle (V.1) sont définis dans le chapitre (IV).

V.5. Détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles :

La détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque mince de forme carrée reposant sur la surface du milieu élastiques de propriétés inertielles est le point le plus compliqué à réaliser de cette étude toute entière. Vu le long temps de calcul exigé, la nécessité de l'utilisation d'une machine de calcul très puissante est donc inévitable pour accomplir cette tâche de calcul. A noter aussi que plus le maillage de la plaque est fin, plus de le temps de calcul devient important ce qui en parfaite concordance avec le principe général des méthodes numériques. Autrement dit, la précision des résultats de calcul est proportionnelle avec la taille de discrétisation de la structure étudiée. C'est-à-dire, plus la taille de discrétisation de la plaque n est grande, plus la précision elle est bonne, mais au prix d'un effort et de temps de calcul plus importants.

Un autre challenge s'est fait face lors de la détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque, c'est la convergence de la valeur de chaque fréquence propre vers une valeur stable. Pour surmonter ce challenge, on est contraint de finir le maillage de la plaque jusqu'à ce que la stabilité de toutes les valeurs des premières fréquences propres soit observée. Pour atteindre la stabilité recherchée, le calcul donc est accompli pour différentes tailles de maillage allant de 100 éléments jusqu'à 900 éléments. Cette opération est exécutée grâce au développement des codes de calcul spécifiques à l'aide du logiciel de calcul numérique et formel « Mathematica » et grâce aussi au Plateau Technique des Calculs Intensifs de l'université 8 Mai 1945 Guelma.

La détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée se fait par la manière suivante :

Le système étudié, plaque mince carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles, est discrétisé en un nombre n d'éléments carrés identiques, figure (V.1). Tenons compte des valeurs suivantes des propriétés géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini élastique

$a = b = 1\text{ m}$: longueur et largeur de la plaque ;

$\nu = 1/3$: coefficient de Poisson de la plaque

$E = 2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$: module d'élasticité de la plaque ;

$h = 0.01\text{ m}$: épaisseur de la plaque ;

$E_0 = 25 \times 10^7\text{ N/m}^2$: module d'élasticité du semi-infini élastique ;

$\nu_0 = 1/3$: coefficient de Poisson du semi-infini élastique ;

$\rho = 1500\text{ Kg/m}^3$: densité du semi-infini élastique.

Les valeurs des fréquences propres ω de la plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles représentent les racines de l'équation du déterminant de la matrice $[A]$ du système d'équations (V.1) :

$$\det[A] = 0 \quad (\text{V.2}).$$

Vu la complexité et la longueur excessive de l'expression du déterminant de la matrice $[A]$ dépassant plusieurs dizaines de pages, on a fait recours à l'application de la méthode dichotomie (bissection) [66] et à l'aide de l'utilisation du logiciel du calcul numérique et formel « Mathematica » les valeurs recherchées sont finalement trouvées.

Les convergences des valeurs concernant les six premières fréquences propres vers des valeurs stables en Hertz (Hz) sont illustrées dans le tableau (V.1) suivant :

Nbr d'éléments	$\omega 1$	$\omega 2$	$\omega 3$	$\omega 4$	$\omega 5$	$\omega 6$
100	52,30528	64,44392	70,24914	74,16060	126,44535	250,12467
121	52,23230	64,38295	69,99672	73,97944	126,18498	249,61034
144	52,17675	64,34161	69,80591	73,80554	125,71228	249,32589
169	52,13349	64,30583	69,65812	73,69786	125,54611	249,02114
196	52,09916	64,27999	69,54128	73,59239	125,26489	248,82994
225	52,07145	64,25722	69,44730	73,52313	125,15276	248,63502
256	52,04877	64,24002	69,37056	73,45441	124,97232	248,50234
289	52,02996	64,22465	69,30709	73,40721	124,89319	248,37029
324	52,01420	64,21262	69,25398	73,35996	124,77071	248,27514
361	52,00086	64,20176	69,20910	73,32633	124,71281	248,18161
400	51,98946	64,19303	69,17082	73,29247	124,62597	248,11131
441	51,97966	64,18507	69,13792	73,26766	124,58234	248,04268
484	51,97116	64,17854	69,10942	73,24257	124,51859	247,98939
529	51,96374	64,17253	69,08457	73,22374	124,48489	247,93755
576	51,95723	64,16752	69,06278	73,20463	124,43675	247,89626
625	51,95068	64,16287	69,04356	73,19001	124,41018	247,85615
676	51,94638	64,15894	69,02653	73,17512	124,37294	247,82353
729	51,93584	64,15427	69,01136	73,16353	124,35163	247,79186
784	51,93088	64,14673	68,97479	73,13294	124,28095	247,71898
841	51,93086	64,14668	68,97465	73,13287	124,28135	247,71889
900	51,93084	64,14663	68,97462	73,13283	124,28131	247,71888

Tab. V. 1 : Convergence des valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée vers des valeurs stables

Il est important de mentionner que pour arriver à la convergence des valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée, il nous a fallu environ sept mois de calcul continu sur le Plateau Technique des Calculs Intensifs de l'Université.

V.6. Détermination des modes propres de la plaque étudiée :

La détermination des modes propres de la plaque étudiée se fait de la manière suivante :

Remplaçons dans le système d'équations de forme matricielle (V.1) la fréquence ω par l'une de ses valeurs propres. Ensuite, le système matriciel obtenu sera réduit à la taille $(n+2) \times (n+2)$ au lieu de sa taille initiale $(n+3) \times (n+3)$ par la suppression de la première ligne du système matriciel et le transfert de la première colonne de la matrice au vecteur libre du même système matriciel en normalisant l'inconnue $X_1 = 1$. Le système résultant vaut :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{2,2} & \cdots & \kappa_{2,n} & \ell_{2x} & \ell_{2y} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n,2} & \cdots & \kappa_{n,n} & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \kappa_{n+1,2} & \cdots & \kappa_{n+1,n} & \lambda_x & 0 & 0 \\ \kappa_{n+2,2} & \cdots & \kappa_{n+2,n} & 0 & \lambda_y & 0 \\ \kappa_{n+3,2} & \cdots & \kappa_{n+3,n} & 0 & 0 & m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \phi_{ox} \\ \phi_{oy} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{2,1} \\ \vdots \\ \kappa_{n,1} \\ \kappa_{n+1,1} \\ \kappa_{n+2,1} \\ \kappa_{n+3,1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.3})$$

La résolution du système d'équations sous forme matricielle résultant (V.3) permet de déterminer les valeurs des autres inconnues X_i . Cependant, la détermination des déplacements verticaux de la plaque étudiée définissant la forme propre de la plaque étudiée appropriée à chaque valeur de sa fréquence propre se fait par l'application de la formule (V.4) suivante [67], [72] :

$$v_i = \frac{-k}{2\pi G_0} \times \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j=1}^n X_j F_{i,j} \quad (\text{V.4})$$

v_i : déflexion de la plaque étudiée au point i formant avec ses autres déflexions sa forme propre;

k : paramètre définissant le caractère ondulatoire des déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique, donné par : $k = \sqrt{\frac{\omega^2 \times \rho}{G_0}}$;

ω : fréquence d'excitation ;

ρ : densité du semi-infini élastique ;

G_0 : module d'élasticité transversale, défini par : $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$;

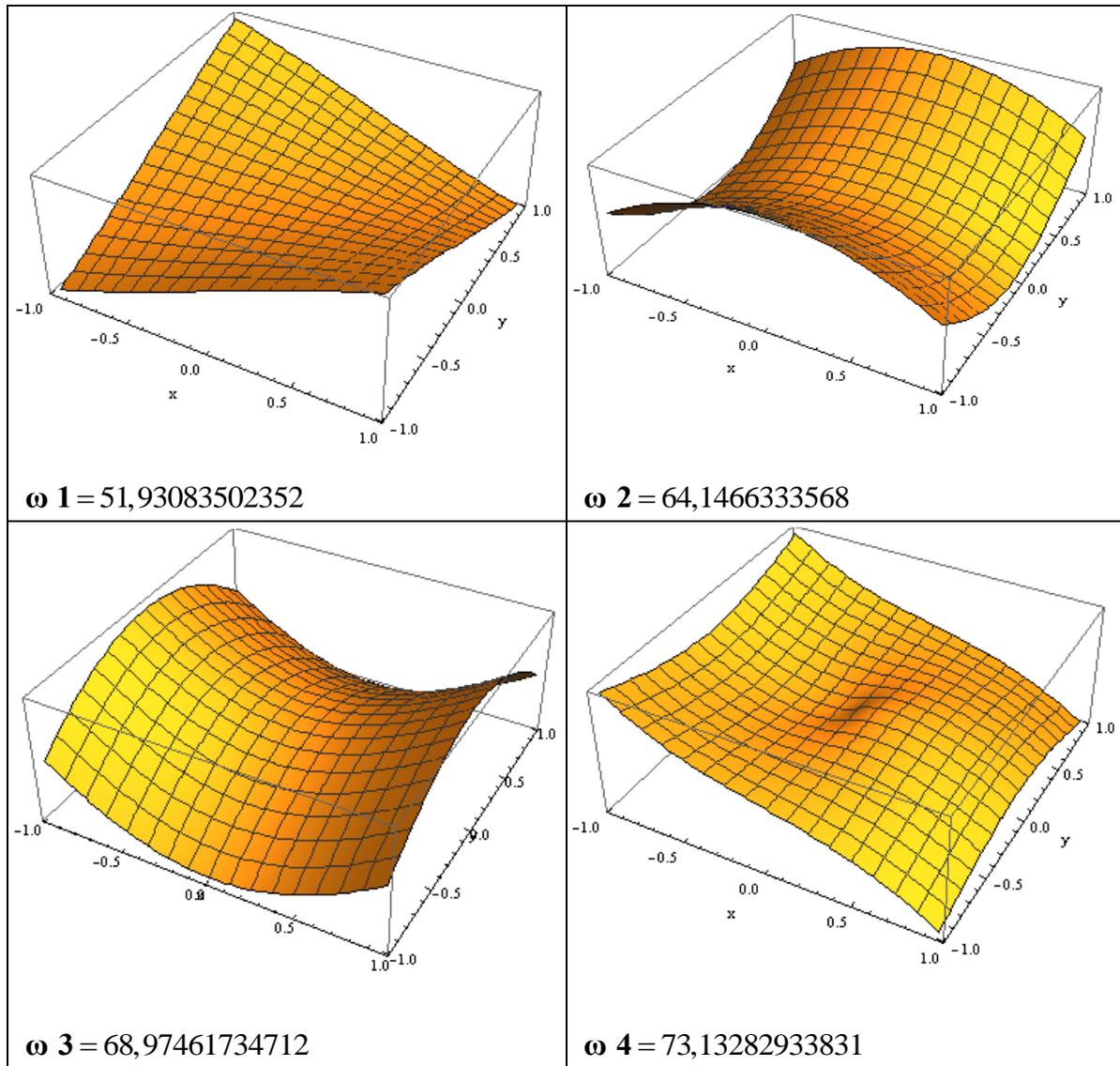
E_0 et ν_0 : module d'élasticité et coefficient de Poisson du semi-infini élastique respectivement ;

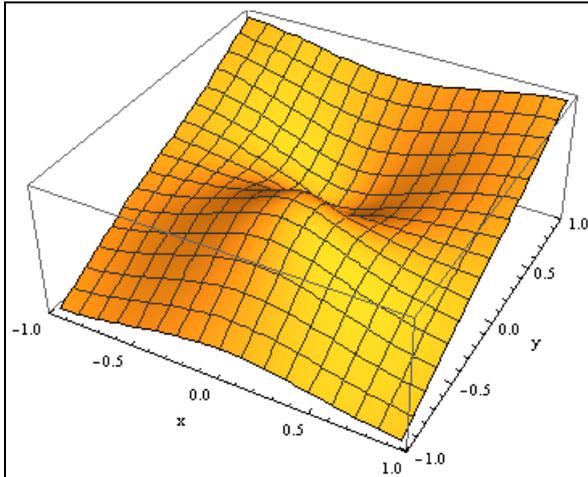
Ω_i : la surface de l'élément i ;

$F_{i,j}$: fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) au point i dû à la force X_j appliquée au point j de la même surface. Le détail de sa détermination est donné dans le chapitre III.

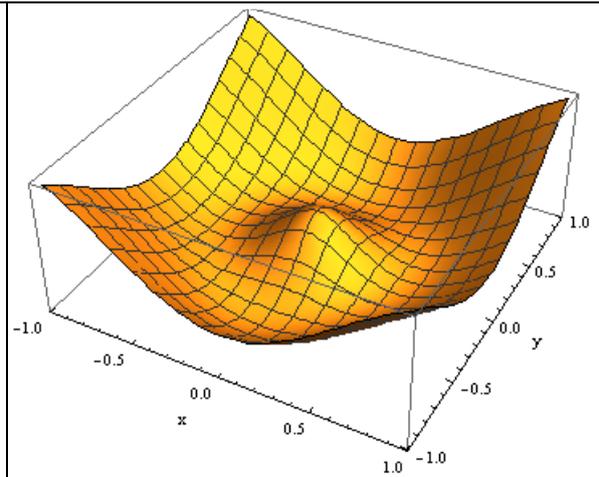
Cette opération de détermination des modes propres de la plaque étudiée est répétée pour chaque valeur de sa fréquence propre, ce qui a permis la détermination du reste de ses autres modes propres.

La figure V.2 tabule les formes des modes propres correspondant aux seize premières valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée. A noter que le maillage de la plaque étudiée pris en compte dans ce calcul est très fin où $n = 900$ éléments.

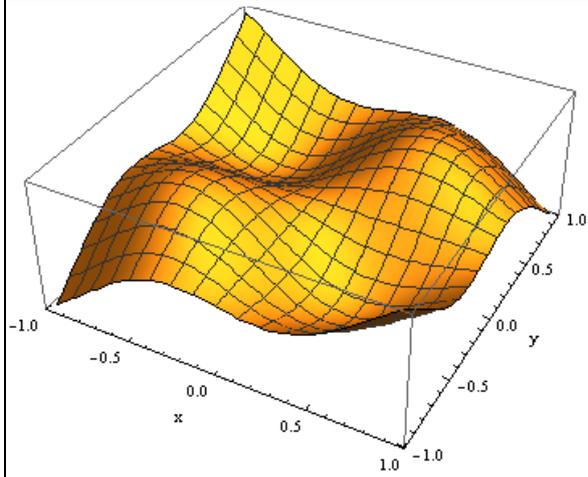




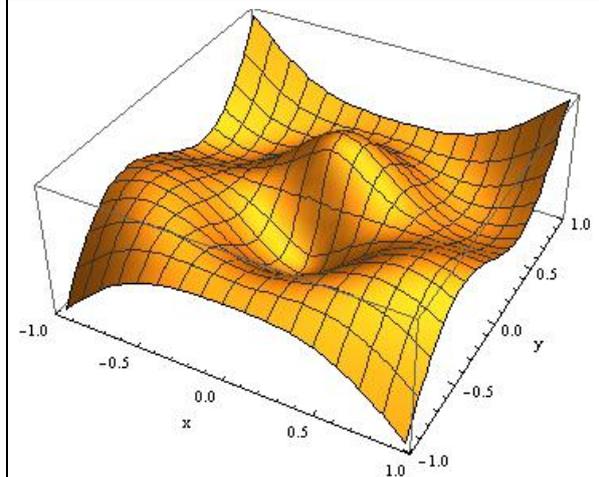
$\omega_5 = 124,28131334483$



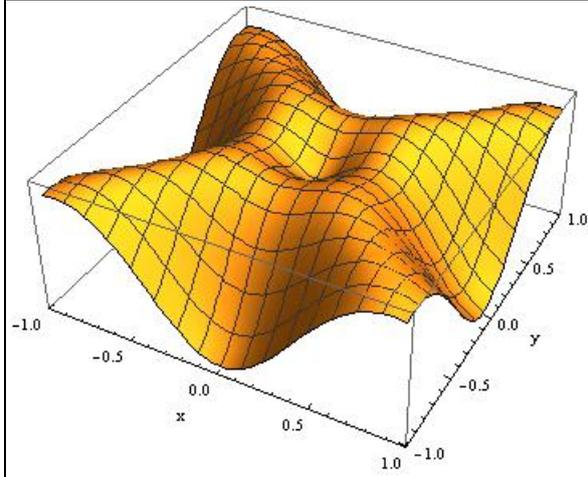
$\omega_6 = 247,71888233721$



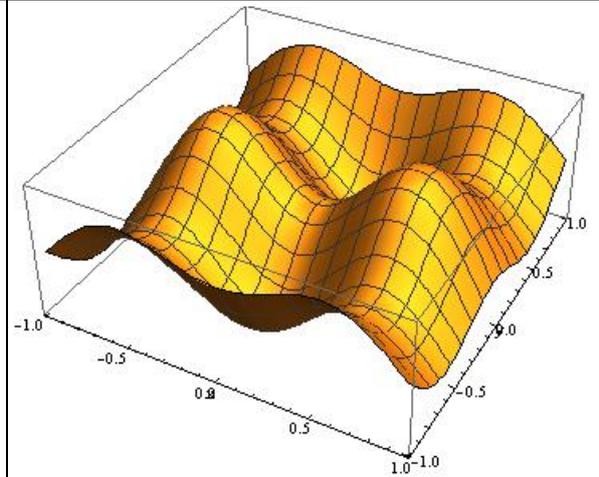
$\omega_7 = 344,12066601216$



$\omega_8 = 360,851501002907$



$\omega_9 = 445,963996723294$



$\omega_{10} = 451,56233813241$

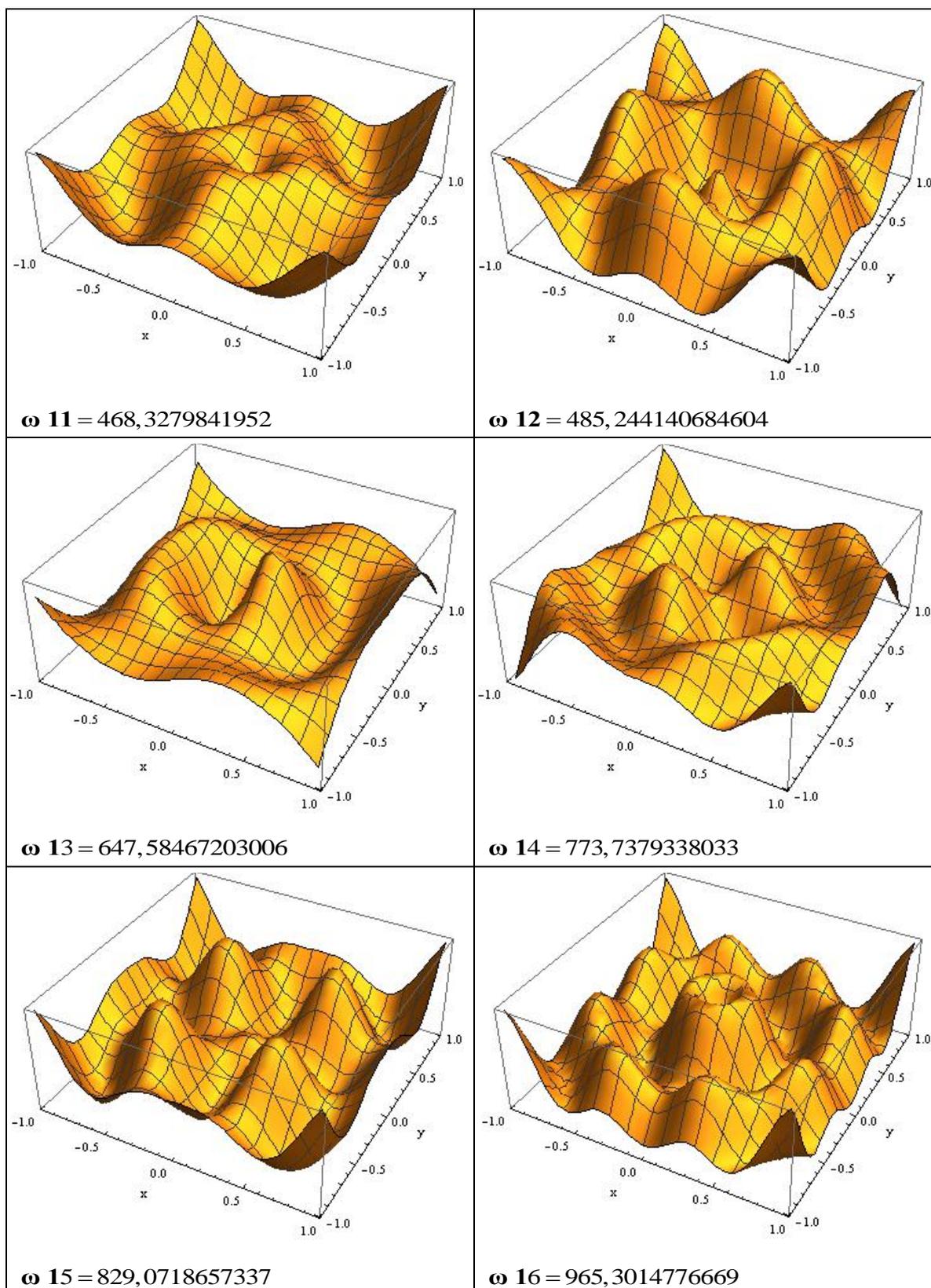


Fig. V. 2 : Les formes des modes propres de la plaque étudiée correspondant à ses seize premières fréquences propres

On constate bien, d'après la figure V.2, que la forme des trois premiers modes propres de la plaque étudiée représentent les phénomènes du pompage (translation de la plaque verticalement) et le tangage (rotation de la plaque par rapport aux axes des coordonnées Ox et Oy). Il est aussi bien clair que les autres formes des modes propres de la plaque changent de signe par rapport au plan de coordonnées Oxy et que ce changement de signe, dans son ensemble, est proportionnel avec l'augmentation de la valeur de la fréquence propre correspondante. Ceci est en parfaite concordance avec la théorie de la dynamique des structures.

V.7. Vérification des valeurs des fréquences propres par le principe de la méthode de superposition modale :

Afin de s'assurer de la certitude des résultats obtenus concernant les valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée, on procède à leur vérification en appliquant le principe de la méthode de superposition modale. Pour ce faire, on doit déterminer le signal $T_j(t)$ représentant la somme des amplitudes des seize premiers modes propres en un point donné j de la plaque. La formule du signal pour notre cas est donnée par [80]:

$$T_j(t) = \sum_{i=1}^{n=16} v_{j,i} \times \cos(2\pi\omega_i t) \quad (\text{V.5})$$

$v_{j,i}$: amplitude du mode propre i de la plaque au point j ;

ω_i : fréquence propre de la plaque ;

t : temps de réponse modale ;

$n = 16$: nombre de modes propres pris ;

L'application de la formule (V.5) sur un intervalle de temps donné permet de tracer le graphe du signal recherché au niveau du centre de l'élément de la plaque portant le numéro $j = 807$ choisi arbitrairement.

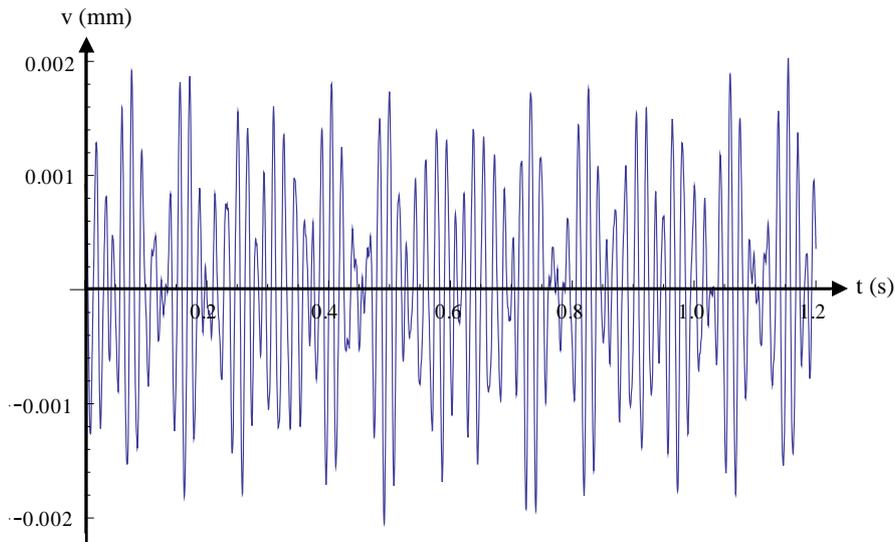


Fig. V. 3 : Signal des amplitudes modales en un point de la plaque donné par la formule (V.5)

L'étude du problème inverse de ce signal, par l'application de la transformée de Fourier via un code de calcul approprié élaboré sur Mathematica, nous a permis d'aboutir au spectre localisant les valeurs des fréquences propres de la plaque en fonction de la magnitude de la FFT.

La figure (V.4) représente la transformée de Fourier du signal des amplitudes modales. La lecture du spectre obtenu permet la localisation des seize premières fréquences propres de la plaque étudiée.

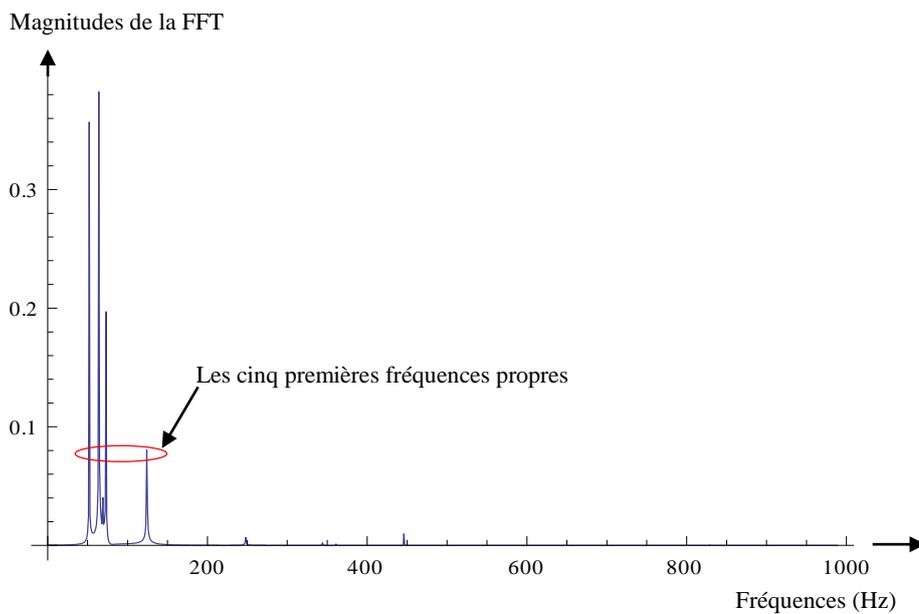


Fig. V. 4 : Spectre localisant les seize premières fréquences propres de la plaque étudiée

Les magnitudes de la FFT des premières fréquences propres de la plaque ayant des amplitudes très grandes par rapport aux autres. De ce fait, les pics des premières fréquences propres de la plaque sont bien clairs, comme le montre la figure (V.4), et donc leur localisation sera facile à faire. Le reste des pics des autres fréquences propres ne figurent pas sur le spectre de la figure (V.4), c'est pourquoi on procède au zoom de tout le spectre sur différentes bandes de fréquences afin de les montrer.

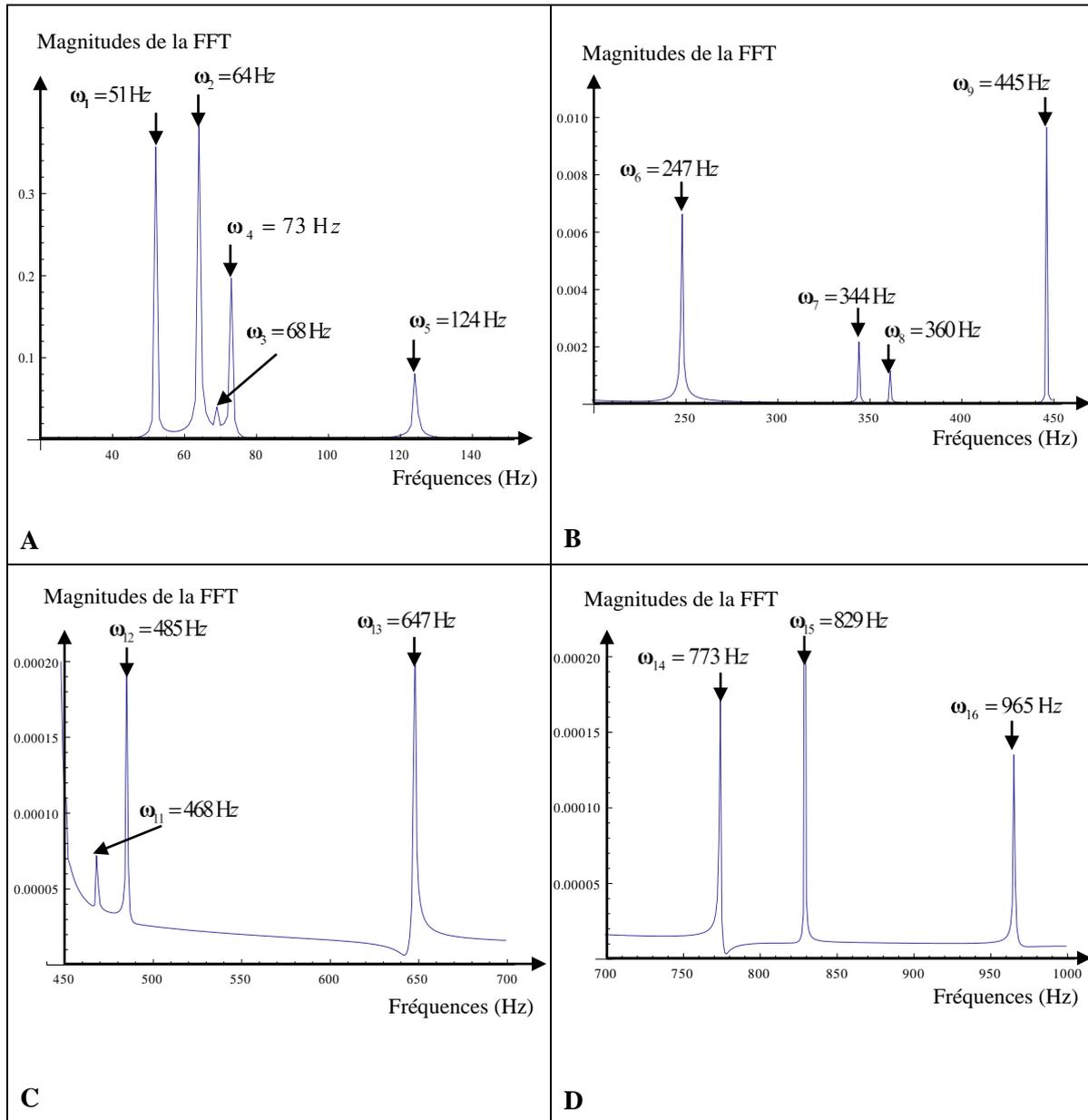


Fig. V.5 : Zoom spectral pour la localisation des fréquences propres de la plaque sur différentes bandes de fréquences

Le zoom du spectre sur différentes bandes de fréquences nous a permis l'illustration de tous les pics des fréquences propres de la plaque et par conséquent la localisation de leurs valeurs. Le pic correspondant à la fréquence propre $\omega_{10} = 451 \text{ Hz}$ est mal apparu sur la figure (V.5.C), du fait que la différence des amplitudes des magnitudes de la FFT des fréquences ω_9 et ω_{10} est très grande ce qui a rendu le pic de la fréquence ω_{10} noyé dans le pic de la fréquence ω_9 .

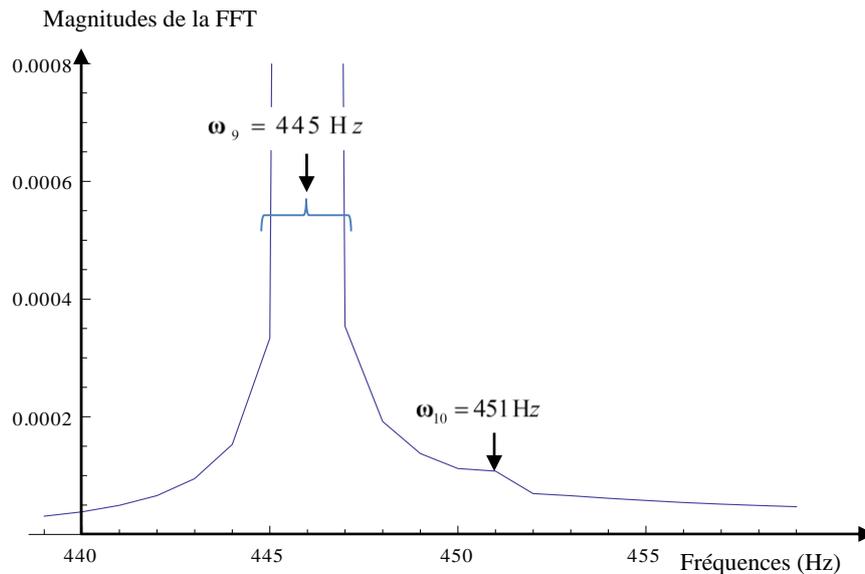


Fig. V. 6: Zoom spectral pour la localisation de la fréquence propre $\omega_{10} = 451 \text{ Hz}$

Enfin, cette vérification des valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée par le principe de la méthode de superposition modale nous a confirmé la fiabilité de l'approche utilisée et par conséquent la certitude des résultats obtenus.

V.8. Vibrations forcées de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles dues aux différents types de charges extérieures harmoniques :

L'approche utilisée permet, non seulement, l'étude des vibrations libres de la plaque qui est la détermination de ses fréquences propres et ses modes propres, mais aussi l'étude de ses vibrations forcées. Donc, la détermination de la réponse dynamique de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles due aux différents types des excitations extérieures harmoniques est accomplie à l'aide de cette approche. La réponse dynamique de la plaque consiste à déterminer ses déplacements verticaux causés par l'action d'une ou de plusieurs excitations extérieures harmoniques durant le temps d'excitation. Autrement dit, les déplacements de la plaque varient avec le temps d'excitation et plusieurs facteurs comme : le nombre d'excitation agissant sur la plaque, l'amplitude et la fréquence

d'excitation etc., influent considérablement sur leur variabilité. Plusieurs cas de la réponse de la plaque ont été étudiés et les détails de quelques cas sont présentés dans les sections suivantes.

V.8.1. Réponse de la plaque étudiée due à une excitation extérieure harmonique :

Considérons les mêmes valeurs des caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini élastique données dans ce chapitre. La plaque étudiée considérée carrée et elle est discrétisée en $n = 900$ éléments carrés identiques.

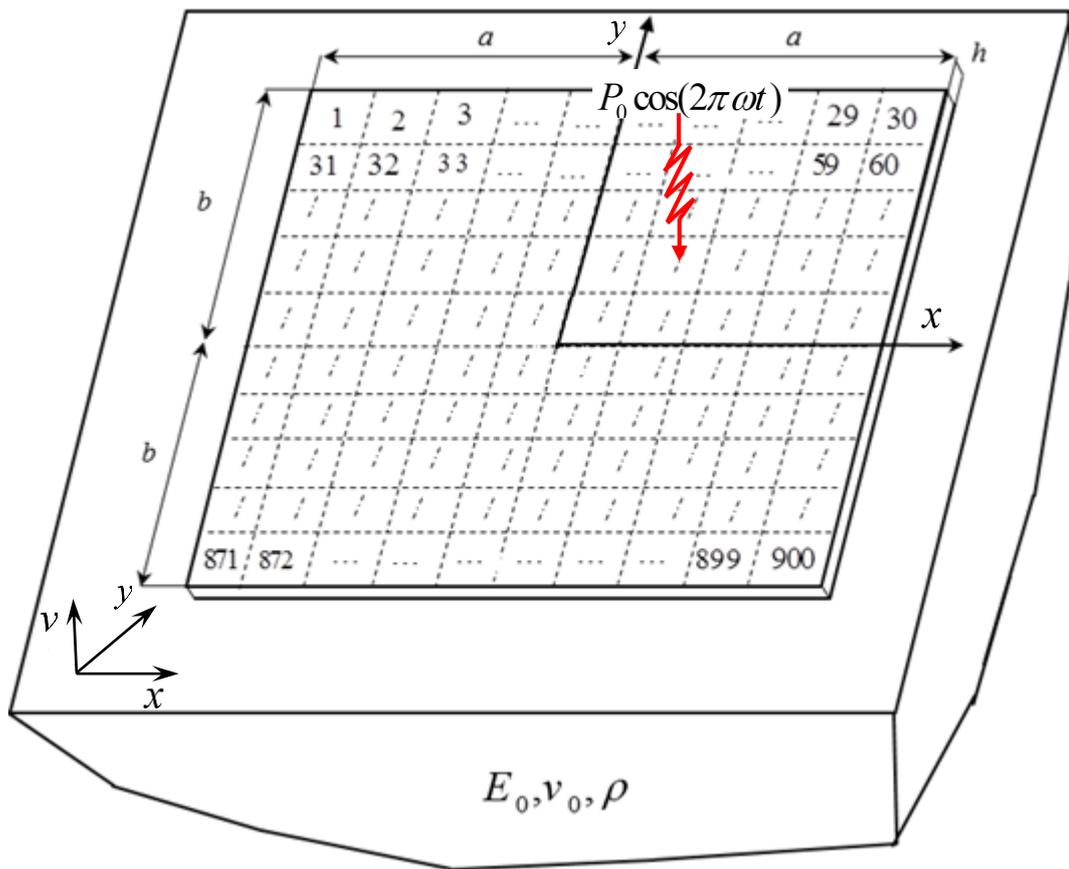


Fig. V. 7 : Numérotation des éléments de discrétisation d'une plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique verticale

Cas 8.1.1 : Plaque sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique

La plaque est sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique verticale appliquée au centre de l'élément portant le numéro 205, figure (V.7). Supposons que l'excitation extérieure harmonique se varie selon la loi suivante :

$$P_p = P_{205} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \quad (\text{V.6})$$

Où :

P_0 : amplitude de l'excitation ;

ω : fréquence de l'excitation ;

$2\pi\omega$: pulsation de l'excitation ;

p : numéro de l'élément où l'excitation extérieure est appliquée, dans ce cas $p = 205$;

t : temps de l'excitation.

L'étude des vibrations forcées de la plaque nécessite la tenue en compte d'un autre paramètre Δ_{ip} dans le système d'équations sous forme matricielle. Ce dernier prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \cdots & \kappa_{1n} & \ell_{1x} & \ell_{1y} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \cdots & \kappa_{nn} & \ell_{nx} & \ell_{ny} & 1 \\ \kappa_{n+1,1} & \cdots & \kappa_{n+1,n} & \lambda_x & 0 & 0 \\ \kappa_{n+2,1} & \cdots & \kappa_{n+2,n} & 0 & \lambda_y & 0 \\ \kappa_{n+3,1} & \cdots & \kappa_{n+3,n} & 0 & 0 & m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \phi_{ox} \\ \phi_{oy} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{1,p} \\ \vdots \\ \Delta_{n,p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

Dans ce cas, le paramètre Δ_{ip} est déterminé par la formule suivante (V.8) [67], [72] :

$$\Delta_{i,p} = \sum_{p=1}^n W_{i,p} P_p \quad (\text{V.8})$$

Dans le cas d'une seule excitation extérieure harmonique appliquée au centre de l'élément

portant le numéro 205, (V.8) devient : $\Delta_{i,p} = \sum_{p=1}^{n=900} W_{i,p} P_p = W_{i,205} P_{205}$

W_{ip} : déflexion de plaque au point i causée par l'excitation extérieure P_p appliquée au point p de la plaque (dans ce cas, $p = 205$, donc l'excitation extérieure P_p est appliquée au centre de l'élément portant le numéro 205). Le détail de détermination des déflexions de la plaque est donné dans le chapitre II.

La résolution du système d'équations sous forme matricielle (V.7) permet la détermination des valeurs des inconnues X_i , $i = 1, \dots, 900$. Ces inconnues X_i représentent les forces de réaction

dans la zone de contact qui de leur tour varient avec le temps d'excitation. Finalement, la réponse de la plaque à chaque instant d'excitation est déterminée par (V.9) :

$$v_i = \frac{-k}{2\pi G_0} \times \frac{1}{\Omega_i} \sum_{j=1}^{n=900} X_j(t) F_{i,j} ; i=1, \dots, n \quad (\text{V.9})$$

Considérons les valeurs suivantes de l'amplitude d'excitation : $P_0 = 10000 \text{ N}$ et de la fréquence d'excitation : $\omega = 400 \text{ Hz}$.

La figure (V.8) représente la réponse de la plaque en (2D) au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction du temps d'excitation sur un intervalle de temps donné. Le temps d'excitation est exprimé par :

$$t_j = t_0 + j \times \Delta t$$

$t_0 = 0 \text{ s}$: temps initial ;

$\Delta t = 0,000555 \text{ s}$: pas du temps considéré.

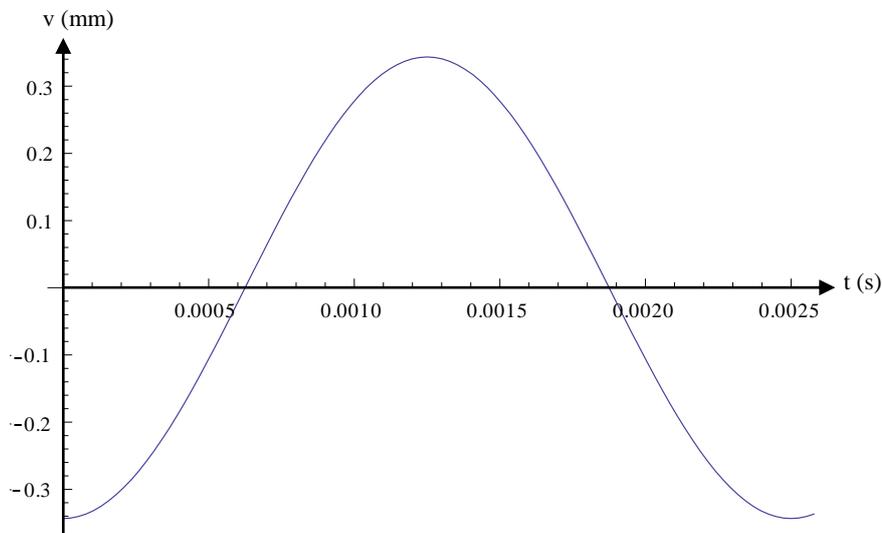


Fig. V. 8 : Réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure durant un intervalle de temps de son excitation

Cas 8.1.2 : Comparaison de la réponse de deux différents points de la plaque :

La figure (V.9) représente la comparaison de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure avec un autre point de la plaque portant le numéro 697 durant un intervalle de temps de son excitation.

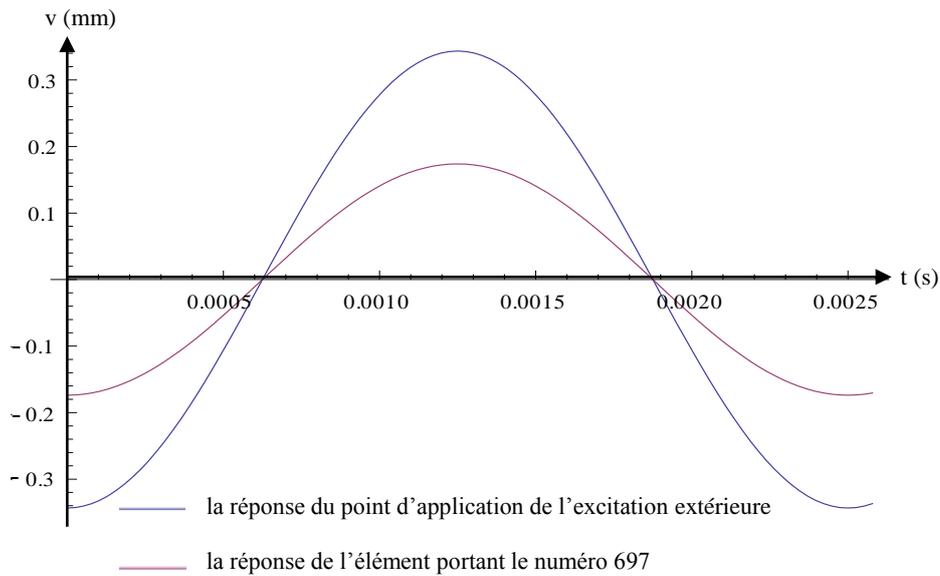


Fig. V. 9 : Comparaison de la réponse du point où l'excitation extérieure est appliquée avec un autre point de la plaque durant un intervalle de temps de son excitation

Cas 8.1.2 : Variation de la réponse de la plaque en fonction de l'amplitude de l'excitation extérieure :

La figure (V.10) représente la variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction de la variation de son amplitude durant un intervalle de temps de sa sollicitation.

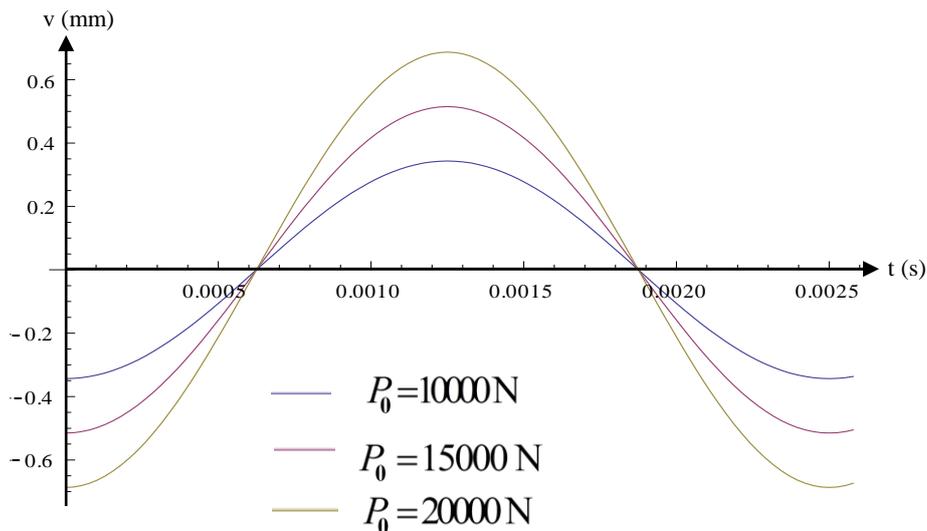


Fig V. 10 : Variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction du changement de l'amplitude de l'excitation

Cas 8.1.4 : Variation de la réponse de la plaque en fonction de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation extérieure :

La figure (V.11) représente la variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction du changement de deux paramètres de l'excitation extérieure qui sont l'amplitude de l'excitation et la fréquence de l'excitation durant un intervalle de temps de son excitation.

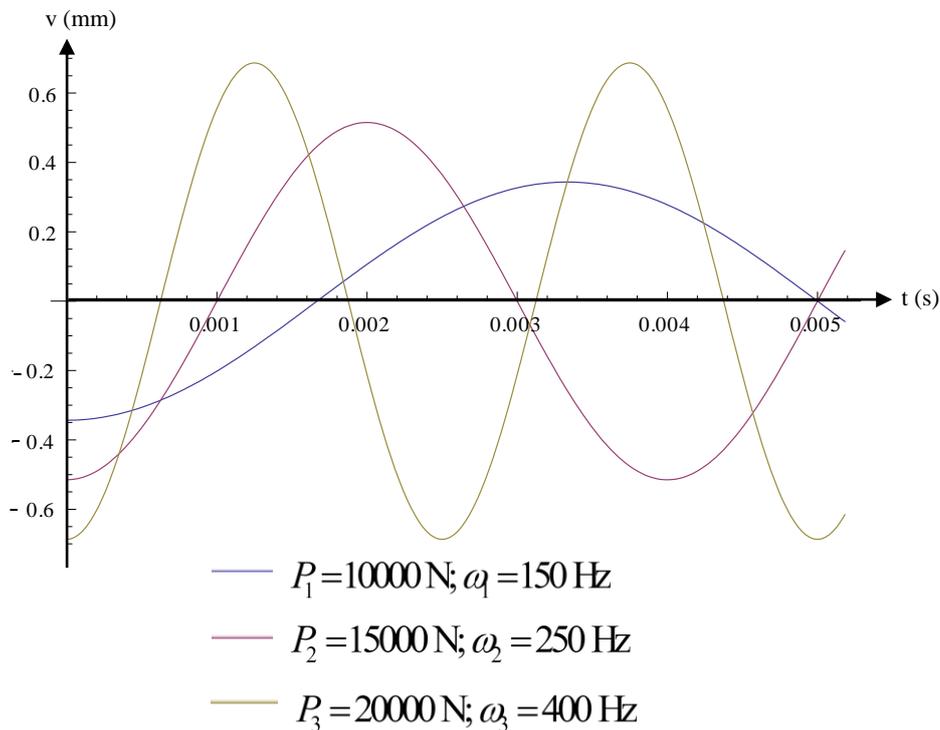


Fig. V. 11 : Variation de la réponse de la plaque au niveau du point d'application de l'excitation extérieure en fonction de deux paramètres : l'amplitude de l'excitation et la fréquence de l'excitation

Cas 8.1.5 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :

La figure (V.12) représente la réponse de la plaque toute entière (3D) sur un intervalle de temps de son excitation en considérant le même pas du temps.

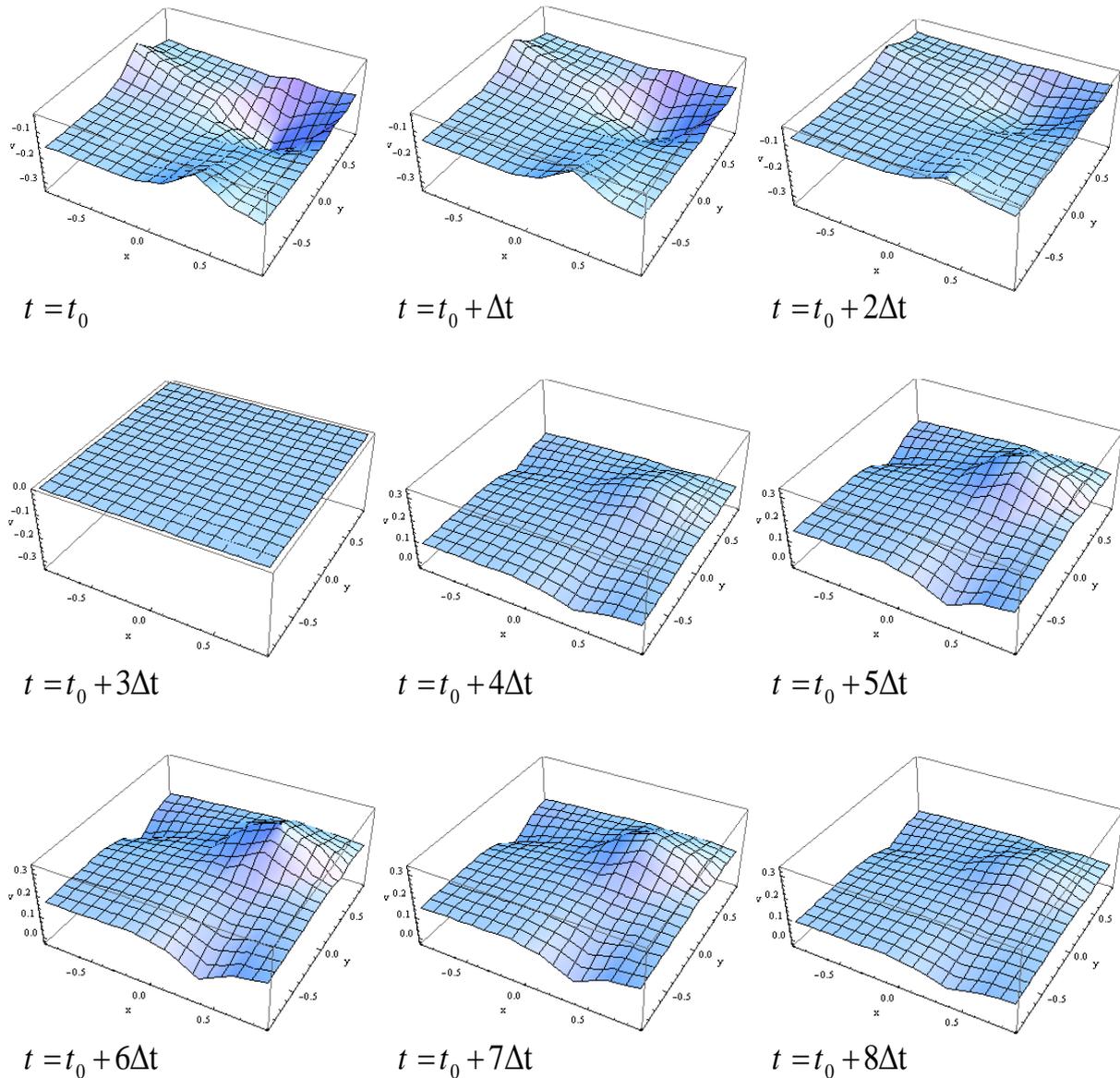


Fig. V. 12 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à une seule excitation harmonique appliquée au centre de l'élément portant numéro 205

V.8.2. Réponse de la plaque étudiée due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes et/ou de différentes amplitudes et ayant les mêmes fréquences d'excitation :

Dans ce cas la plaque est sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques de mêmes et/ou de différentes amplitudes et de mêmes fréquences d'excitation et qui sont appliquées en deux points différents de la plaque, figure (V.13).

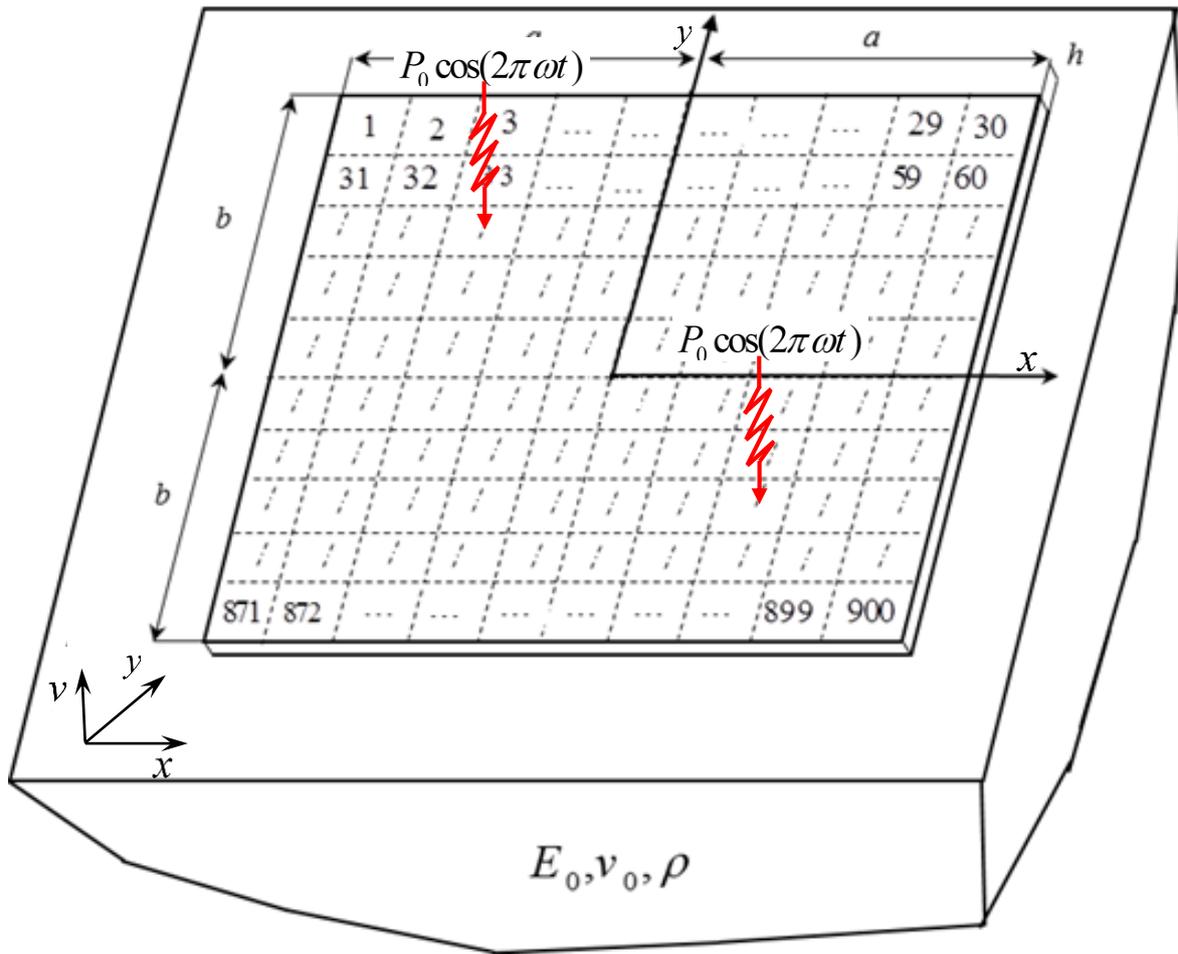


Fig. V. 13 : Plaque carrée discrétisée en 900 éléments identiques reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques verticales

Cas 8.2.1 : Plaque sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques :

Considérons la même structure étudiée dans la section précédente, sauf que la plaque est sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences d'excitation et qui sont appliquées en deux différents points de la plaque portant les numéros 218 et 683. Les deux excitations agissant sur la plaque sont exprimées par :

$$\begin{cases} P_{218} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \\ P_{683} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \end{cases} \quad (V.10)$$

Ici :

P_0 : amplitude de l'excitation ;

ω : fréquence de l'excitation ;

t : temps de l'excitation.

On considère les mêmes valeurs de l'amplitude $P_0 = 10000$ N et de la fréquence d'excitation $\omega = 400$ Hz pour les deux excitations.

Le paramètre $\Delta_{i,p}$ dans ce cas de chargement est déterminé par la formule suivante [67], [72] :

$$\Delta_{i,p} = \sum_{p=1}^{n=900} W_{i,p} P_p = W_{i,218} P_{218} + W_{i,683} P_{683} \quad (V.11)$$

La réponse de la plaque à chaque instant de son excitation est déterminée par la même formule donnée par l'équation (V.9).

La figure (V.14) représente la réponse de la plaque au niveau de tous les points situant tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures ayant les mêmes amplitudes et les mêmes fréquences en fonction du temps d'excitation en (2D) pour différents instants de temps exprimés par : $t_j = t_0 + j \times \Delta t$. Considérons le même pas du temps $\Delta t = 0,000555$ s et le même temps initial $t_0 = 0$.

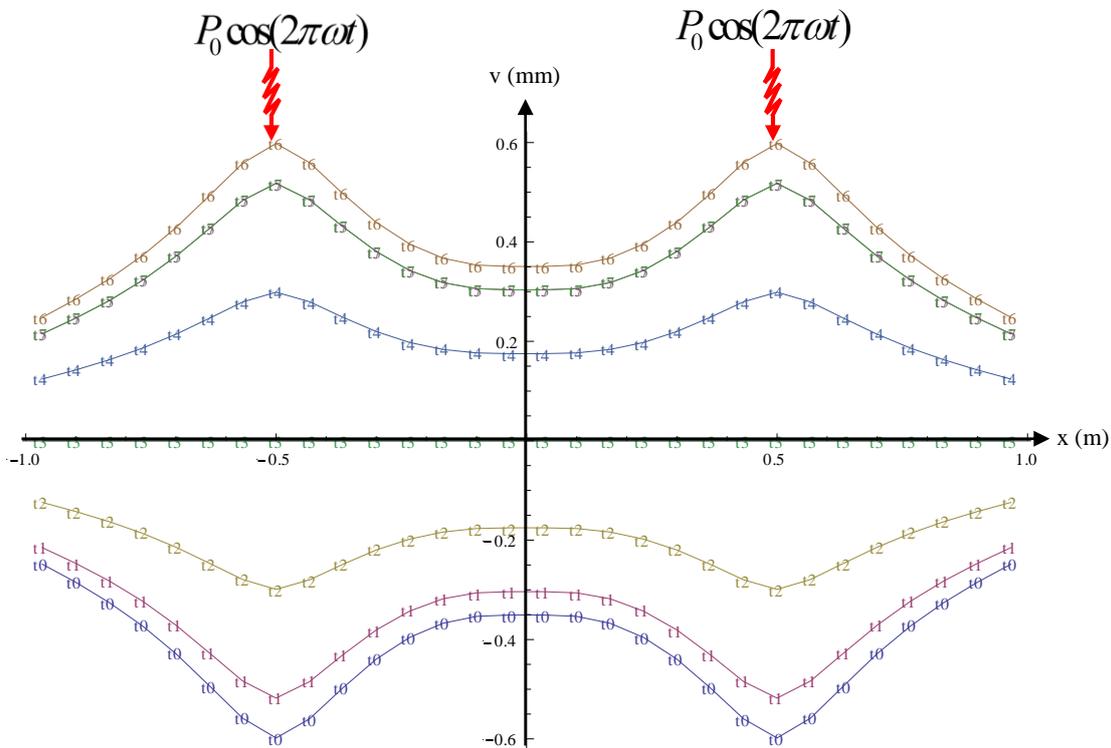


Fig. V. 14 : Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures en fonction du temps de l'excitation

Cas 8.2.2 : Visualisation de la réponse de la plaque des points situant sur sa diagonale :

La figure (V.15) représente la réponse de la plaque au niveau de tous les points situant tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de différentes amplitudes et ayant les mêmes fréquences en fonction du temps d'excitation en (2D) pour différents instants de temps. $P_1 = 10000 N$; $P_2 = 15000 N$.

$$\begin{cases} P_{218} = P_1 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \\ P_{683} = P_2 \cos(2 \times \pi \times \omega \times t) \end{cases} \quad (V.12)$$

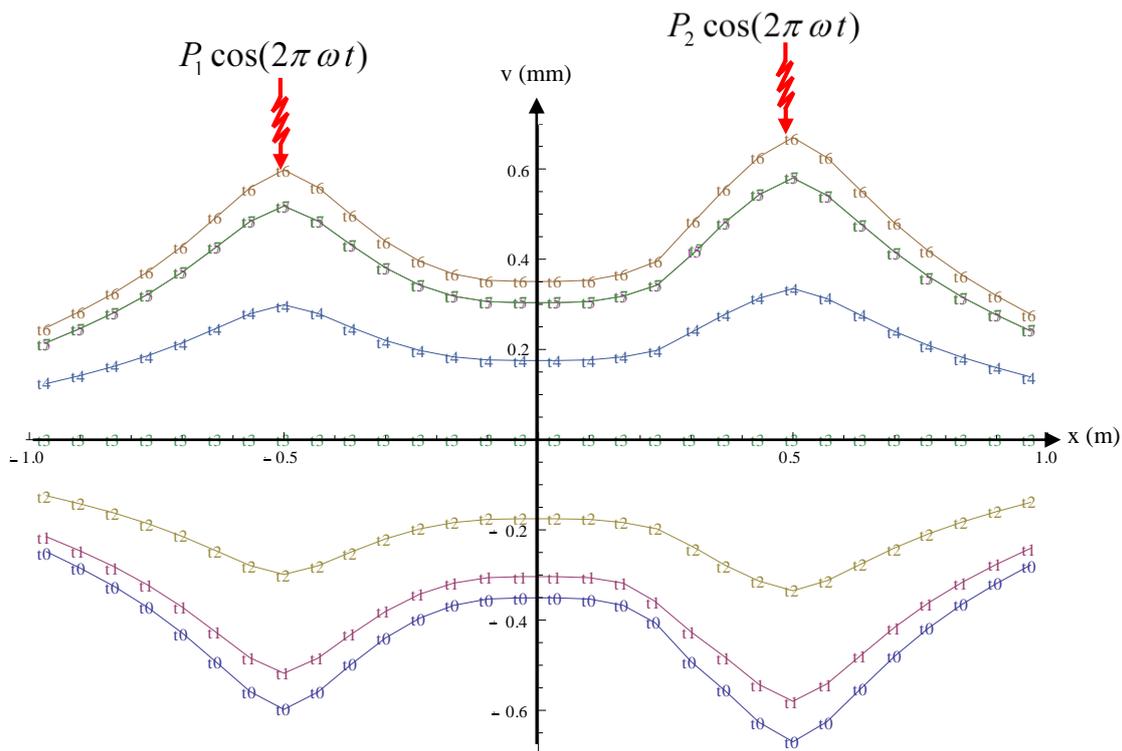


Fig. V. 15 : Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de mêmes fréquences et de différentes amplitudes en fonction du temps de l'excitation

Cas 8.2.3 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :

La figure (V.16) représente la réponse de la plaque toute entière en (3D) due à ce type de chargement extérieur composé de deux excitations harmoniques de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences pour différents instants de temps de son excitation.

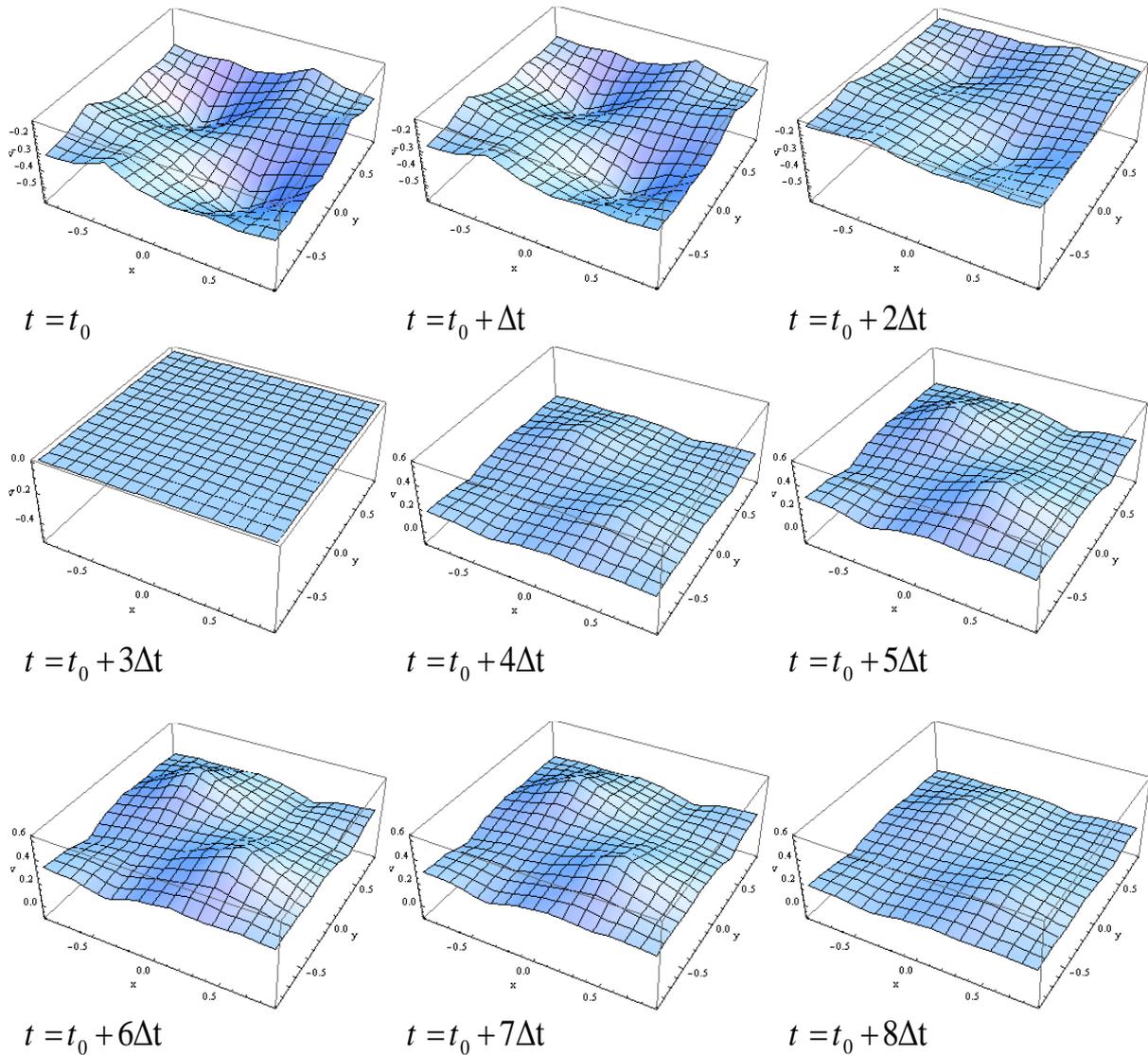


Fig. V. 16 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à deux charges extérieures harmoniques appliquées aux centres de deux différents éléments

V.8.3. Réponse de la plaque étudiée due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation :

Prenons maintenant le cas de la plaque sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation et qui sont appliquées en deux différents points de la plaque portant les numéros 218 et 683. Les deux excitations sont exprimées par :

$$\begin{cases} P_{218} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_1 \times t) \\ P_{683} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_2 \times t) \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

P_0 : amplitude de l'excitation ;

ω_1 : fréquence d'excitation de la charge extérieure appliquée au centre de l'élément de la plaque portant le numéro 218 ;

ω_2 : fréquence d'excitation de la charge extérieure appliquée au centre de l'élément de la plaque portant le numéro 683 ;

ω : fréquence équivalente des deux fréquences de l'excitation des deux charges extérieures.

Elle est exprimée par : $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$;

t : temps de l'excitation.

Cas 8.3.1 : Plaque sollicitée par deux excitations de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation :

Considérons les valeurs suivantes de l'amplitude $P_0 = 10000 \text{ N}$ et des fréquences de l'excitation $\omega_1 = 150 \text{ Hz}$; $\omega_2 = 400 \text{ Hz}$; d'où $\omega = \sqrt{150^2 + 400^2} = 427,2 \text{ Hz}$;

Le paramètre Δ_{ip} est déterminé par la même formule donnée par l'équation (V.11). Tenons compte que les excitations extérieures harmoniques sont appliquées aux centres des éléments de la plaque portant les numéros 218 et 683.

De la même manière on procède à la résolution du système d'équation de forme matricielle (V.7) donnant les valeurs des efforts de liaison $X_i(t)$ dans la zone de contact en fonction du temps de l'excitation et ensuite la réponse de la plaque à chaque instant de l'excitation sera déterminée par la même formule (V.9).

La figure (V.17) représente la réponse de la plaque en (2D) tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de même amplitudes et de différentes fréquences durant un intervalle de temps de son excitation.

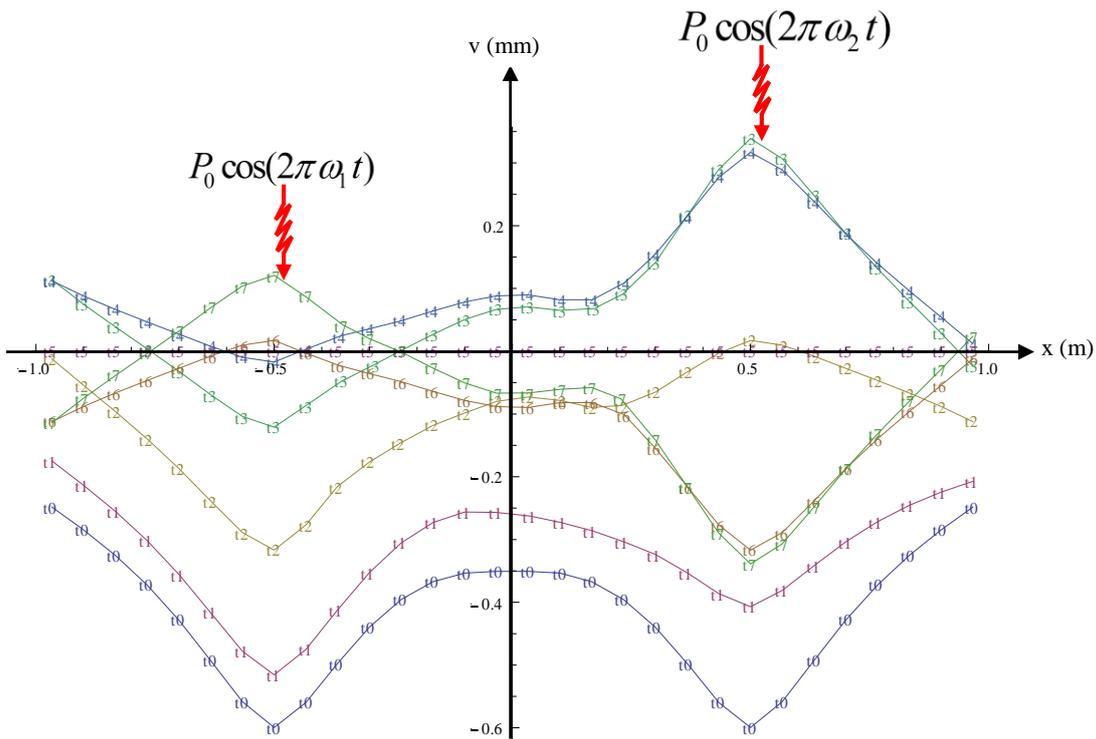


Fig. V. 17 : Réponse de la plaque tout au long de sa diagonale où se trouvent les deux points d'application des excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences en fonction du temps de l'excitation

Cas 8.3.2 : Visualisation de la réponse de la plaque aux points d'application des excitations extérieures :

La figure (V.18) représente la comparaison des réponses de la plaque en (2D) au niveau des deux points d'application des excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences en fonction du temps d'excitation. On constate bien l'influence de différentes valeurs des fréquences d'excitation sur l'amplitude, le signe et la période de la réponse. Autrement dit, une proportionnalité inverse entre la valeur de la fréquence d'excitation et le temps de la période de réponse. C'est-à-dire, plus que la valeur de la fréquence d'excitation est grande, le temps de la période de réponse est court.

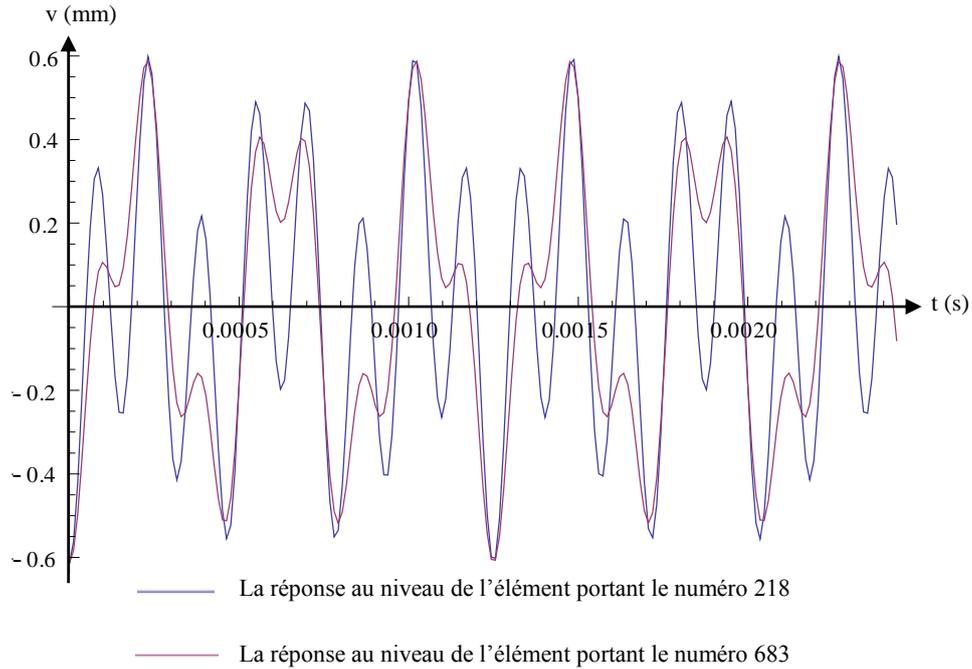
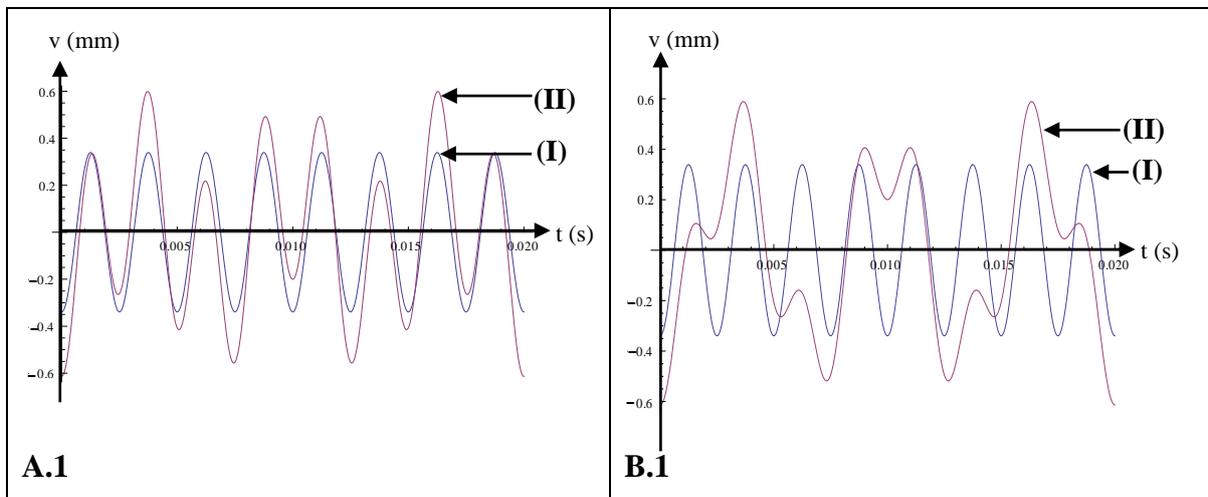


Fig. V. 18 : Comparaison de la réponse de la plaque au niveau des points d'application des deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences en fonction du temps de l'excitation

Cas 8.3.3 : Etude comparative de la réponse de la plaque aux points d'application des excitations extérieures

La figure (V.19) représente une étude comparative de la réponse de la plaque en (2D) au niveau des deux points d'application des excitations extérieures en fonction du temps d'excitation et pour différents types d'excitations appliquées sur la plaque.



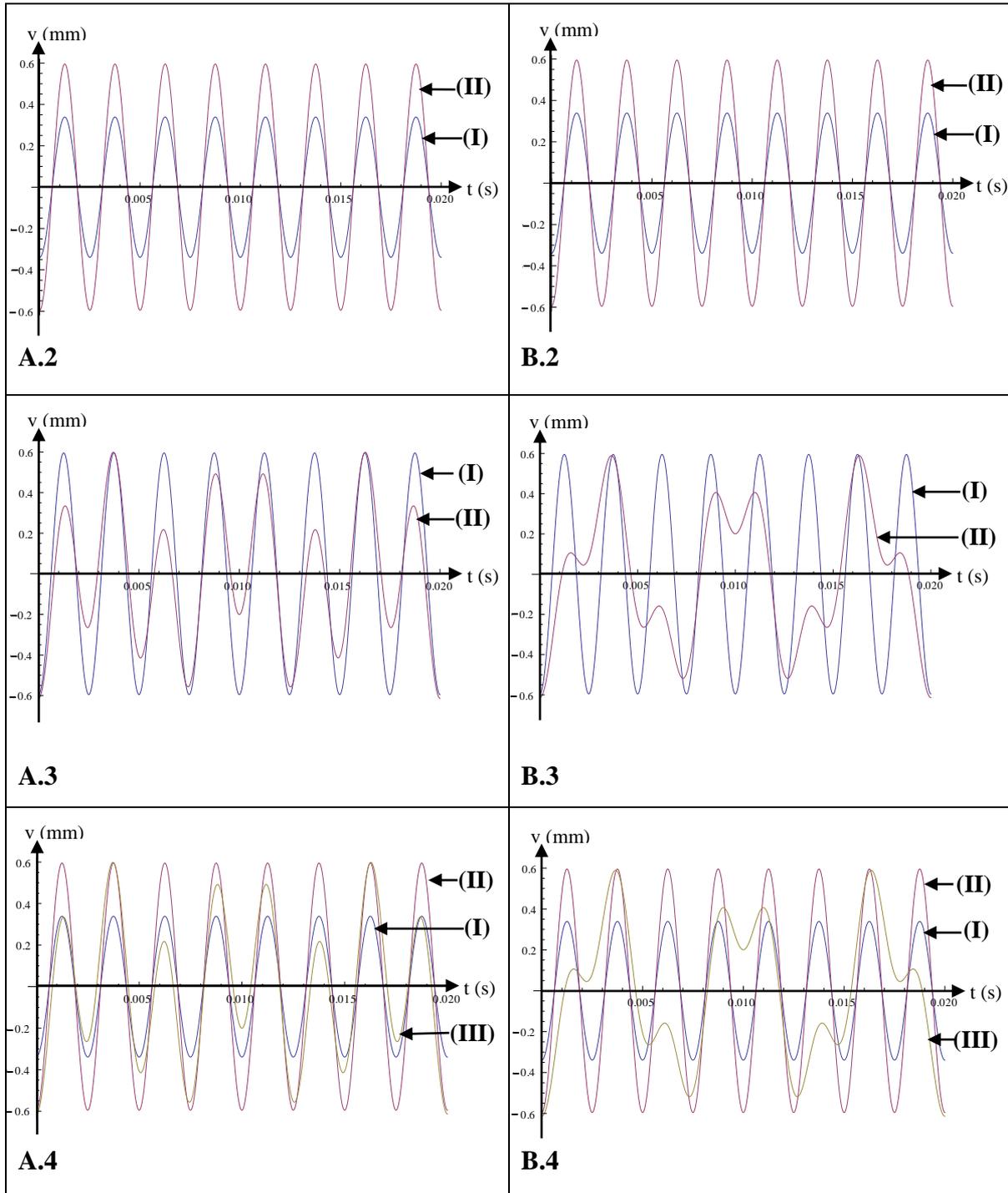


Fig. V. 19 : Comparaison de la réponse de la plaque au niveau des deux points d'application des excitations extérieures pour différents types d'excitations de la plaque :

A.1 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

A.2 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

A.3 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

A.4 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 218 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 218
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- (III) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

B.1 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

B.2 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

B.3 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

B.4 : Réponse de la plaque au niveau du point portant le numéro 683 lorsque la plaque sollicitée par :

- (I) une seule excitation extérieure appliquée au niveau du point portant le numéro 683
- (II) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de mêmes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683
- (III) deux excitations extérieures de mêmes amplitudes et de différentes fréquences appliquées au niveau des points portant les numéros 218 et 683

Cas 8.3.4 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière :

La réponse de la plaque toute entière en (3D) à ce même type de chargement extérieur harmonique est illustrée dans la figure (V.20) à chaque instant de temps de son excitation exprimé par : $t_i = t_0 + i \times \Delta t$. Ici le temps initial $t_0 = 0$ s et le pas du temps $\Delta t = 0.0002$ s.

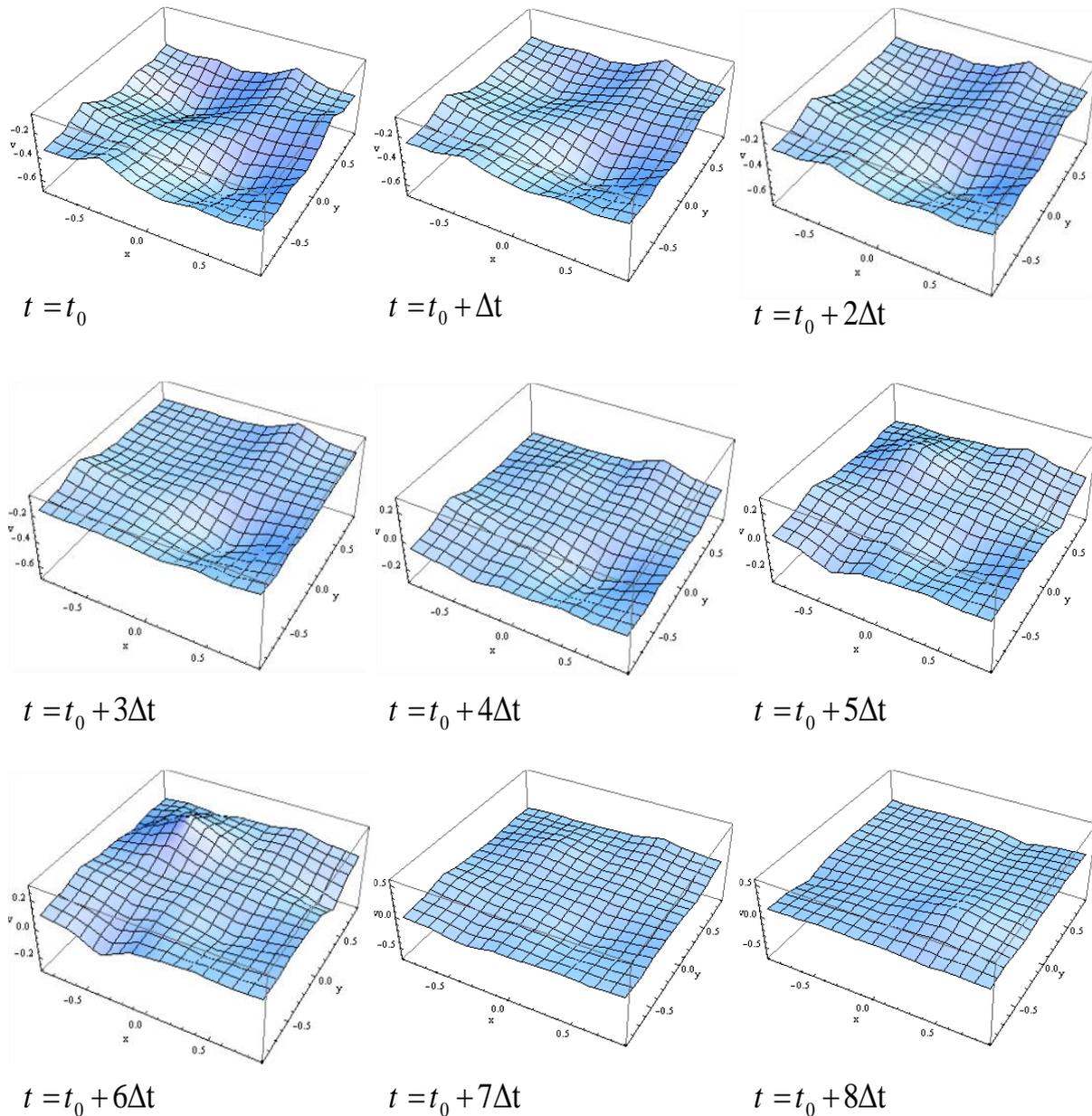


Fig. V. 20 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque toute entière due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation

Enfin, la projection instantanée de la réponse de la plaque sollicitée par ce type de chargement extérieur harmonique sur le plan Oxy (isovaleurs) est illustrée sur la figure (V.21).

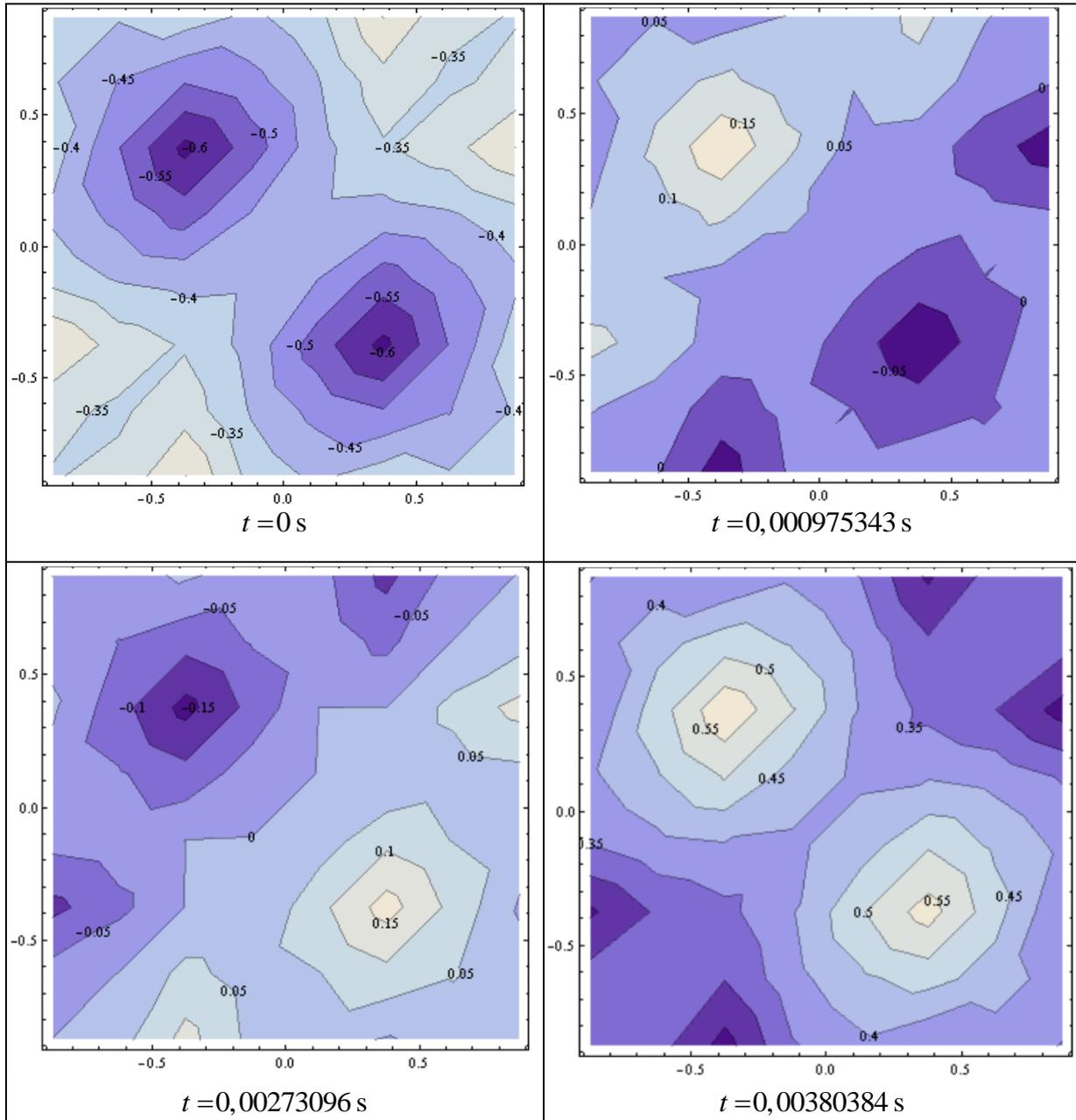


Fig. V. 21 : Projection instantanée de la réponse de la plaque sur le plan Oxy (isovaleurs) due à deux excitations extérieures harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation

D'après la figure (V.20) on constate bien que les déplacements maximaux de la plaque sont obtenus au niveau des points d'application des excitations extérieures à l'instant initial. Ensuite, à chaque instant de l'excitation de la plaque, ces deux points de plaque manifestent de déplacements de différentes valeurs de l'amplitude et de différents signes. Ceci explique l'importance que peut jouer la valeur de la fréquence d'excitation sur le signe, l'amplitude et la période de la réponse de la plaque à chaque instant de son excitation.

Cas 8.3.5 : Etude du problème inverse de la réponse dynamique de la plaque :

L'étude du problème inverse nous permet de déterminer les valeurs des fréquences des excitations extérieures agissant sur la plaque étudiée à partir de sa réponse. En effet, lorsque on ignore les valeurs des fréquences des excitations harmoniques extérieures et en connaissant la réponse de la plaque due à ce type d'excitations extérieures auxquelles la plaque est sollicitée, on fait recours à l'étude du problème inverse de ce problème. Cette étude du problème inverse nous permet de savoir les valeurs de ces fréquences d'excitations extérieures. Il faut juste faire la transformée de Fourier du signal des déplacements de la plaque, à l'aide des logiciels de calcul Mathematica ou Matlab, ce qui aboutit à un spectre fréquentiel. L'analyse du spectre fréquentiel obtenu permet la localisation des pics correspondant aux valeurs des fréquences des excitations extérieures.

Les deux spectres présentés concernent les cas suivants :

Cas 1 : Signal pris au point d'application de l'excitation de fréquence $\omega = 150$ Hz :

L'application de la transformée de Fourier (FFT) pour ce cas 1 est effectuée pour un signal représentant la réponse de la plaque au centre de l'élément portant le numéro 218 lorsque la plaque est sollicitée par deux excitations extérieures de différentes fréquences. Le spectre fréquentiel obtenu de cette FFT, à l'aide du logiciel Matlab, est présenté sur la figure (V.22) où l'on voit clairement deux pics de différentes amplitudes. La lecture des fréquences où les pics apparaissent indique clairement les valeurs suivantes : $\omega = 150$ Hz et $\omega = 400$ Hz. Ces valeurs des fréquences représentent évidemment les valeurs des fréquences des excitations extérieures agissant sur la plaque étudiée.

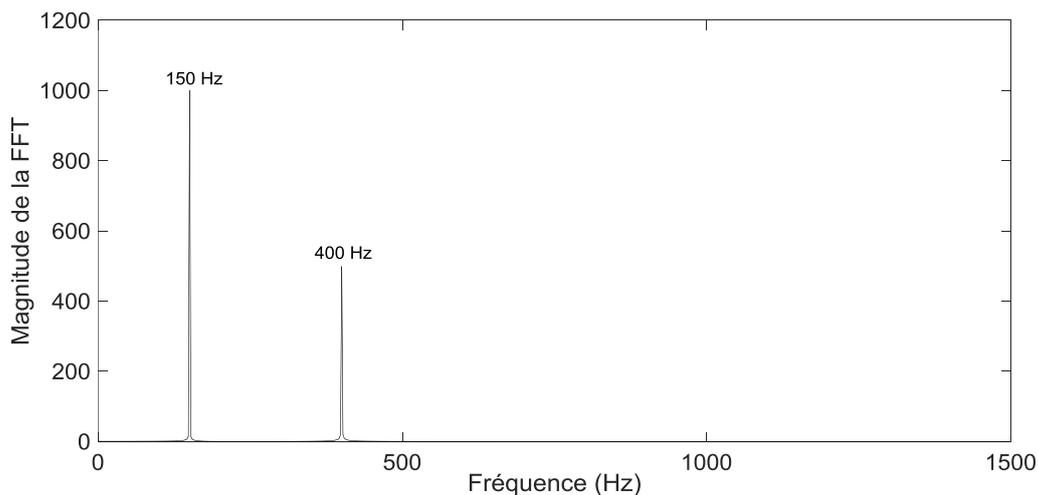


Fig. V. 22 : Spectre fréquentiel obtenu par la transformée de Fourier (FFT) du signal de réponse de la plaque au point portant le numéro 218

Cas 2 : Signal pris au point d'application de l'excitation de fréquence $\omega = 400$ Hz :

De la même manière décrite au cas 1, on effectue la transformée de Fourier du signal représentant la réponse de la même plaque au centre de l'élément portant le numéro 683. Le spectre fréquentiel obtenu de cette FFT, à l'aide du logiciel Matlab, est présenté sur la figure (V.23) où l'on voit clairement deux pics de différentes amplitudes. La lecture des fréquences où les pics apparaissent indique aussi clairement les valeurs suivantes : $\omega = 150$ Hz et $\omega = 400$ Hz. Ces valeurs des fréquences représentent évidemment les valeurs des fréquences des excitations extérieures agissant sur la plaque étudiée.

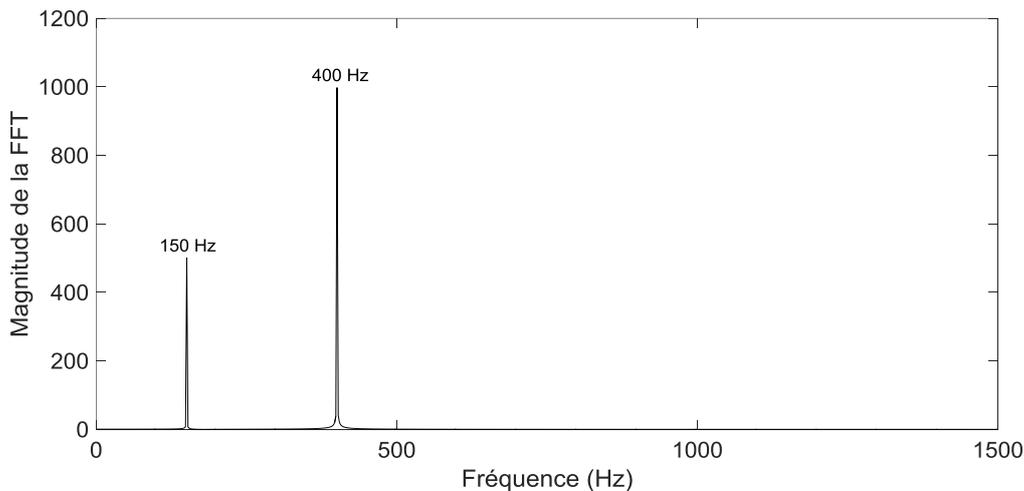


Fig V. 23 : Spectre fréquentiel obtenu par la transformée de Fourier (FFT) du signal de réponse de la plaque au point portant le numéro 683

L'analyse spectrale effectuée sur les deux signaux de réponses choisis au niveau des deux points d'application de la charge nous a permis la location des pics des deux fréquences des excitations extérieures qui sont : 150 Hz et 400 Hz. La différence observée pour chaque cas entre les amplitudes de la magnitude de la FFT des deux pics est expliquée par le suivant : le point où le signal de réponse est pris indique automatiquement l'amplitude de pique la plus grande de l'excitation la plus proche à ce point.

V.9. Comparaison des résultats :

La comparaison des résultats est très importante pour s'assurer de la certitude des résultats obtenus et par conséquent la vérification de la fiabilité et l'authenticité de l'approche utilisée. Le domaine des problèmes de contact ayant une grande importance que ce soit dans les sciences de l'ingénierie ou dans les sciences de la physique ou autres, mais ce domaine vaste est relativement peu investigué vu la complexité et la difficulté mathématique que présente, comme le montre la recherche bibliographique. De ce fait, pratiquement aucune autre étude similaire à la nôtre n'est trouvée dans la littérature nous permettant de comparer nos résultats relatifs à cette étude dynamique de la plaque carrée reposant la surface du semi-infini élastique de

propriétés inertielles (modèle de Lamb). C'est pourquoi, la seule possibilité qu'on dispose pour le moment est de faire la comparaison de cette étude avec le cas de la même plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq).

V.9.1. Comparaison des valeurs des fréquences propres :

Le grand avantage de l'approche utilisée est de choisir le modèle du milieu élastique sur lequel la plaque se repose. Pour ce faire, on utilise la même approche, basant sur le principe de la méthode de Zhemochkin décrit avec détail dans le chapitre IV, avec la considération du modèle de Boussinesq (semi-infini élastique de propriétés distributives).

Le paramètre $v_{i,j}$ figurant dans le système d'équations canoniques de l'approche utilisée pour ce modèle est exprimé par l'expression suivante [71] :

$$v_{i,j} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \times \frac{1}{\Omega_i} \int_{\eta=-b}^{b} \int_{\xi=-c}^c \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (\text{V.14})$$

Tous les paramètres de la formule (V.14) sont définis dans le chapitre III.

L'étude de la fonction de Green pour le modèle de Boussinesq nécessite l'évaluation de l'intégrale de la formule (V.14) ce qui aboutit à l'expression donnant les déplacements de la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives. Le détail de cette intégration est donné dans le chapitre (III) où le résultat de l'intégration est donné par la formule (III.12).

Les changements finaux dans le système d'équations linéaires sous forme matricielle finale issus du choix de ce modèle du milieu élastique sont :

$$\alpha = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \times \frac{1}{\Omega_i} : \text{ce paramètre } \alpha \text{ apparu au niveau des termes de la matrice } [A] \text{ et il est issu de plusieurs transformations et simplifications mathématiques ;}$$

$$F_{ij} = \int_{\eta=-b}^{b} \int_{\xi=-c}^c \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} : \text{l'expression finale de ce paramètre } F_{ij} \text{ est donnée dans le chapitre (III).}$$

Enfin, les valeurs des fréquences propres de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) sont déterminées par la même manière que pour le cas du modèle de Lamb.

Considérons les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques pour la plaque et pour le semi-infini élastique. L'utilisation du logiciel Mathematica nous a permis de construire un code de calcul approprié et son exécution a permis de trouver les résultats concernant les valeurs des

six premières valeurs des fréquences propres de la plaque pour différents maillages. Ces résultats sont dans le tableau suivant :

Nombre d'éléments	$\omega 1$	$\omega 2$	$\omega 3$	$\omega 4$	$\omega 5$	$\omega 6$
100	52,37492	64,46812	70,30563	74,19763	126,47649	250,13740
121	52,30285	64,40745	70,05412	74,01713	126,21661	249,62352
144	52,24808	64,36634	69,86407	73,84385	125,74445	249,33940
169	52,20549	64,33076	69,71694	73,73665	125,57864	249,03499
196	52,17173	64,30510	69,60065	73,63165	125,29782	248,84404
225	52,14453	64,28248	69,50715	73,56276	125,18598	248,64936
256	52,12229	64,26542	69,43085	73,49440	125,00585	248,51687
289	52,10389	64,25016	69,36775	73,44748	124,92692	248,38502
324	52,08849	64,23825	69,31499	73,40052	124,80470	248,29001
361	52,07548	64,22747	69,27041	73,36714	124,74696	248,19665
400	52,06437	64,21883	69,23242	73,33352	124,66033	248,12648
441	52,05483	64,21096	69,19975	73,30890	124,61684	248,05797
484	52,04658	64,20450	69,17149	73,28400	124,55325	248,00479
529	52,03938	64,19855	69,14685	73,26534	124,51968	247,95305
576	52,03308	64,19360	69,12525	73,24641	124,47167	247,91184
625	52,02752	64,18901	69,10621	73,23191	124,44520	247,87183
676	52,01260	64,18512	69,08934	73,21717	124,40808	247,83929
729	52,00823	64,18050	69,04432	73,20571	124,35685	247,78768
784	52,00772	64,17341	69,03808	73,17601	124,31760	247,73581
841	52,00768	64,17300	69,03799	73,17544	124,31689	247,73497
900	52,00765	64,17299	69,03797	73,17534	124,31682	247,73490

Tab. V. 2 : Les valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée obtenues pour différents maillages

D'après les résultats apportés au tableau (V.2), on constate bien des convergences des valeurs des différentes fréquences propres vers des valeurs stables pour chaque fréquence propre. Cette convergence est obtenue grâce à l'augmentation de la taille du maillage de la plaque (à $n = 900$ éléments) ce qui est en totale concordance avec le principe général des méthodes numériques.

La comparaison des valeurs des six premières fréquences propres de la plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique des deux modèles considérés est donnée dans le tableau (V.3).

Fréquence propre	$\omega 1$	$\omega 2$	$\omega 3$	$\omega 4$	$\omega 5$	$\omega 6$
Modèle de Lamb	51,93084	64,14663	68,97462	73,13283	124,28131	247,71888
Modèle de Boussinesq	52,00765	64,17299	69,03797	73,17534	124,31682	247,73490

Tab. V. 3 : Comparaison des valeurs des six premières fréquences propres de la plaque étudiée trouvées par le modèle de Lamb et le modèle de Boussinesq

L'analyse des données du tableau (V.3) relatives aux valeurs des fréquences propres de la plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique des deux modèles montre bien une petite différence des valeurs données par les deux modèles. Cette différence doit être existée et elle est expliquée par la nature de chaque modèle. Le modèle de Boussinesq néglige certains facteurs naturels comme le caractère ondulatoire des déplacements que le modèle de Lamb tient en compte. Donc le modèle de Lamb est plus proche de la réalité puisque il tient compte de plusieurs facteurs naturels influençant sur le comportement dynamique des structures en général. De ce fait, les valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée considérées plus réelles et plus naturelles sont celles données par le modèle de Lamb.

V.9.2. Comparaison de la réponse dynamique de la plaque :

Pour s'assurer de la certitude des résultats trouvés concernant la réponse dynamique de la plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles par l'approche proposée, on doit les comparer avec ceux de la même plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives. Pour ce faire, la détermination de la réponse dynamique de la plaque carrée reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) se fait par la même approche proposée et de la même manière décrite pour le modèle de Lamb. Considérons la structure étudiée ayant les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques prises pour le cas du modèle de Lamb et que la plaque est sollicitée par une seule excitation extérieure harmonique :

$$\Delta_{i,p} = \sum_{p=1}^{n=900} W_{i,p} P_p = W_{i,205} P_{205}$$

$P_0 = 10000 \text{ N}$: l'amplitude d'excitation ;

$\omega = 400 \text{ Hz}$: la fréquence d'excitation ;

205 : numéro de l'élément où l'excitation extérieure harmonique est appliquée.

Pour ce cas de modèle, la réponse de la plaque carrée se détermine par la formule suivante [71] :

$$v_i = \left(\frac{1 - \nu_0^2}{bc\pi E_0} \right) \sum_{j=1}^n X_j(t) F_{i,j} ; i = 1, \dots, n \quad (\text{V.15})$$

L'exécution du code de calcul élaboré permet la détermination de la réponse de la plaque représentant les valeurs de ses déplacements verticaux au niveau des centres de tous les éléments de sa discrétisation. Les déplacements verticaux donnés par les deux modèles au point d'application de l'excitation extérieure en fonction du temps de l'excitation sont illustrés sur la figure (V.24).

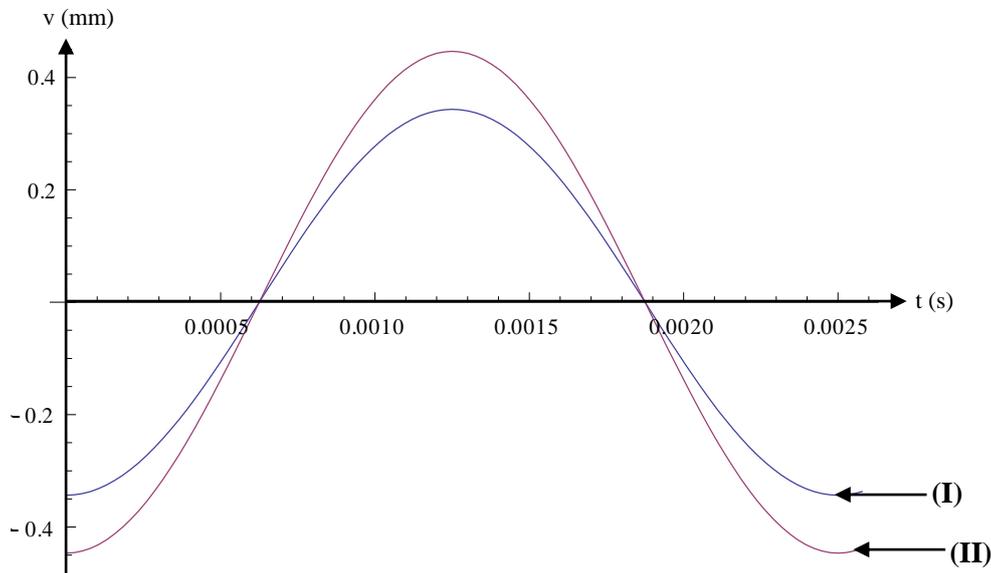


Fig. V. 24 : Comparaison de la variation du déplacement vertical de la plaque au point d'application de l'excitation extérieure sur un intervalle de temps de son excitation donnée par :

- (I) semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb) ;
- (II) semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq).

La remarque que l'on peut soulever via cette comparaison de réponse de la plaque pour les deux modèles est que le modèle de Boussinesq donne des valeurs des déplacements de la plaque un peu élevées par rapport à celles données par le modèle de Lamb. Cette petite différence des valeurs donnée par les deux modèles doit être existée et elle est expliquée par la différence de nature des deux modèles. En outre, cette réduction de valeur du déplacement donnée par le modèle de Lamb est aussi expliquée par la tenue en compte d'un facteur essentiel qui est le caractère ondulatoire des déplacements, ce qui justifie encore la certitude des résultats de ce modèle.

V.10. Cas particulier :

Pour montrer l'importance et l'effet du caractère ondulatoire des déplacements sur l'étude dynamique des structures en général et d'une manière explicite, considérons la structure étudiée précédemment ayant les mêmes caractéristiques mécaniques, mais de différentes caractéristiques géométriques. La zone de contact entre la plaque carrée et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles sera élargie considérablement pour montrer concrètement ce phénomène. Tenons le même maillage de la plaque et considérons qu'elle est sollicitée par deux excitations extérieures harmoniques exprimées par :

$$\begin{cases} P_{218} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_1 \times t) \\ P_{683} = P_0 \cos(2 \times \pi \times \omega_2 \times t) \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

Où :

L'excitation extérieure est appliquée au centre des éléments portant les numéros $p = 218$ et $p = 683$;

L'amplitude des deux excitations est : $P_0 = 10000 \text{ N}$;

Les fréquences d'excitation sont : $\omega_1 = 150 \text{ Hz}$; $\omega_2 = 400 \text{ Hz}$; d'où $\omega = \sqrt{150^2 + 400^2} = 427,2 \text{ Hz}$;

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini élastique sont :

$a = b = 10 \text{ m}$: longueur et largeur de la plaque ;

$h = 0.2 \text{ m}$: épaisseur de la plaque ;

$\nu = 1/3$: coefficient de Poisson de la plaque ;

$E = 2 \times 10^{11} \text{ N} / \text{m}^2$: module d'élasticité de la plaque ;

$E_0 = 25 \times 10^7 \text{ N} / \text{m}^2$: module d'élasticité du semi-infini élastique ;

$\nu_0 = 1/3$: coefficient de Poisson du semi-infini élastique ;

$\rho = 1500 \text{ Kg} / \text{m}^3$: densité du semi-infini élastique.

L'application de l'approche proposée pour cette structure pour le modèle de Lamb a abouti aux résultats présentés graphiquement en (3D) sur la figure (V.25).

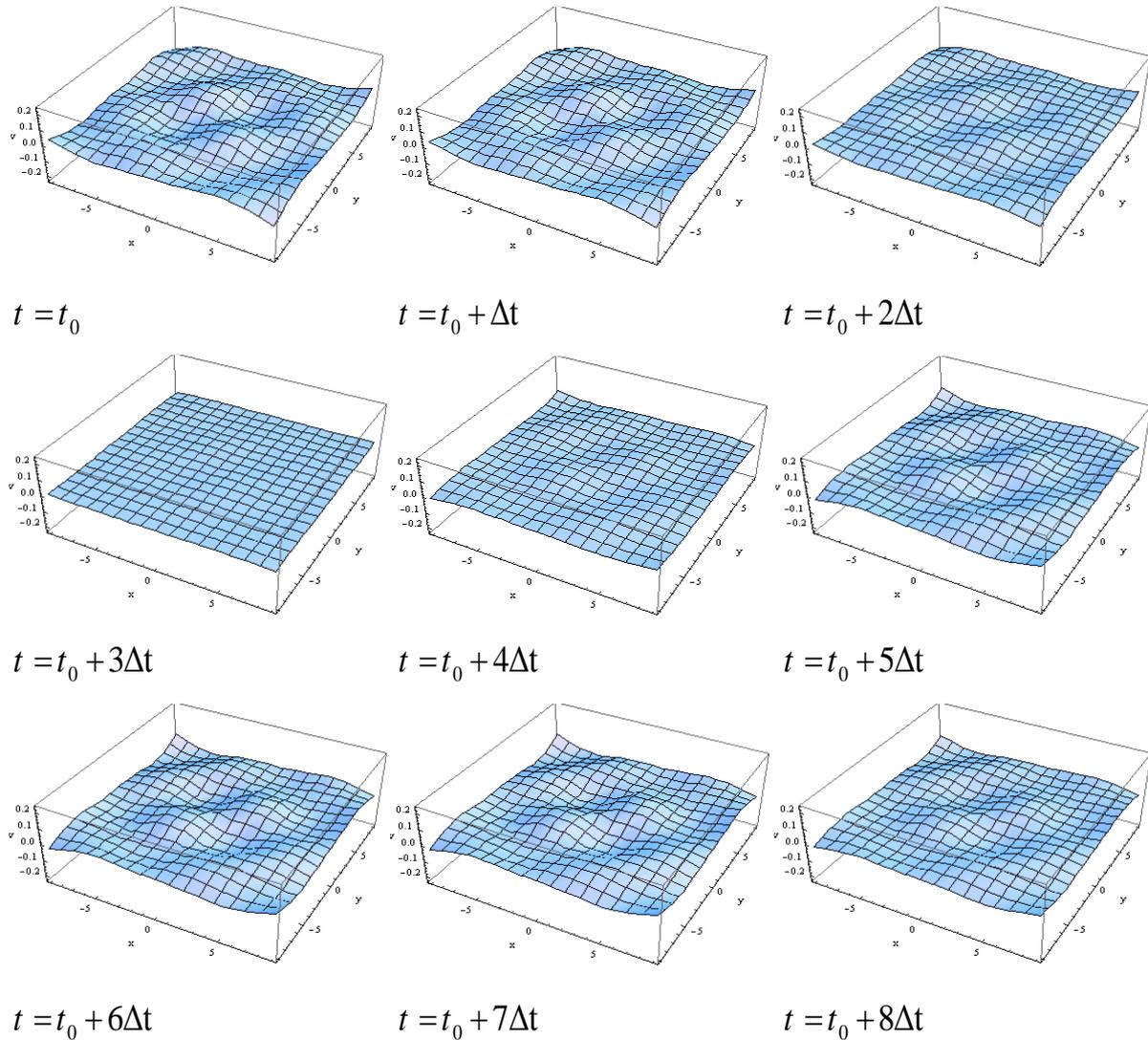


Fig. V. 25 : Visualisation (3D) de la réponse de la plaque étudiée due à deux excitations harmoniques de mêmes amplitudes et de différentes fréquences d'excitation

D'après la figure V.25, nous pouvons voir clairement le phénomène du caractère ondulatoire des déplacements lorsque la structure ayant des dimensions assez grandes. Ceci montre que ce phénomène existe toujours et se présente même pour les structures ayant de petites dimensions. Autrement dit, plus les dimensions de la structure deviennent grandes, plus le phénomène du caractère ondulatoire de ses déplacements devient apparent.

V.11. Conclusion :

Ce chapitre est consacré à l'application de l'approche semi-analytique décrite dans le chapitre (IV) pour l'étude dynamique d'une plaque rectangulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles (modèle de Lamb). L'approche utilisée est formulée de telle sorte qu'elle permette en premier lieu la détermination des forces de réaction dans la zone de

contact qui représentent le phénomène d'interaction entre la plaque et la surface du semi-infini élastique. Ensuite, et de façon numérique elle permet la détermination des autres entités physiques recherchées en appliquant les différentes lois de la RDM connues dans ce domaine. Les entités physiques recherchées dans cette étude dynamique de la plaque en interaction avec le semi-infini élastique de propriétés inertielles sont les valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse dynamique due à l'action de plusieurs types d'excitations harmoniques extérieures.

La formulation finale de l'approche est faite sous forme matricielle et a nécessité la construction des codes de calcul appropriés pour chaque cas de calcul en utilisant le logiciel de calcul formel et numérique Mathematica. La précision des résultats nécessite un maillage de la structure très fin ce qui rend l'exécution du calcul très difficile et très long. Donc, une autre nécessité s'impose, celle d'utilisation des stations de calcul puissantes.

Tous les défis rencontrés dans cette étude dynamiques ont été surmontés grâce au travail laborieux et continu sur l'élaboration des codes de calcul et enfin de compte, cette persévérance a abouti à la détermination des valeurs des fréquences propres de la plaque, ses modes propres et ses réponses dynamiques dues aux différents types des excitations extérieures harmoniques. La comparaison des résultats de calcul avec un autre modèle a montré, non seulement, leurs certitudes, mais aussi la fiabilité de l'approche utilisée. La petite différence trouvée entre les deux modèles doit être existée vu leur différence de nature et de principe. Le jugement que le modèle de Lamb est plus proche de la réalité est fondé sur le fait qu'il tient en compte de plusieurs facteurs comme l'inertie du milieu élastique et le caractère ondulatoire des déplacements. Tous les résultats de calcul obtenus par l'application de cette approche sont en totale cohérence avec la réalité des choses et que leurs précisions sont justifiées et argumentées par le maillage fin utilisé.

Conclusion générale :

L'étude apportée dans ce travail de thèse de doctorat concernant le calcul dynamique de plaques reposant sur la surface d'un milieu élastique de n'importe quel type est effectuée par une approche semi-analytique basant sur la méthode des forces pour le calcul des structures hyperstatiques connue dans les sciences de la résistance des matériaux. Cette étude dynamique comporte la détermination des fréquences propres et des modes propres de la plaque étudiée, ainsi que sa réponse dynamique due à l'action de différents types de charges harmoniques extérieures.

L'application de l'approche proposée pour le calcul dynamique de la structure étudiée (plaque rectangulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles) nécessite en premier lieu sa discrétisation en un nombre d'éléments rectangulaires identiques. Le nombre des éléments de discrétisation de la structure étudiée est inversement proportionnel à l'erreur de calcul et donc proportionnel à la précision des résultats recherchés. Le contact continu entre la plaque et la surface du semi-infini élastique de modèle de Lamb est remplacé par un contact partiel au niveau des points situant aux centres de gravité des éléments de discrétisation de la structure étudiée. Ce contact partiel est assuré par des efforts de liaison qui représentent le phénomène de l'interaction entre la plaque et la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles. Donc, l'approche de calcul proposée est aménagée sous forme matricielle finale dont le vecteur des inconnues représente les valeurs des efforts de liaison dans la zone de contact. Une fois les forces réactives sont connues, le reste des autres entités physiques, à savoir les valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque et sa réponse dynamique etc., se déterminent par l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité. Parmi les avantages de l'approche proposée pour l'étude statique ou dynamique des différentes structures en interaction avec des milieux élastiques, on peut citer l'analyse statique ou dynamique de poutres et de plaques de différentes formes géométrique et de différentes caractéristiques mécaniques reposant sur la surface d'un milieu élastique de n'importe quel modèle.

Les deux grands challenges rencontrés lors de l'élaboration de cette approche sont l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles et la détermination des déflexions de la plaque. Le premier grand challenge est lié au type du modèle du semi-infini élastique choisi qui tient compte de son inertie et du caractère ondulatoire des déplacements ce qui a nécessité l'évaluation de certaines intégrales de complexité mathématique majeure dont certaines intégrales sont associées à de problèmes de singularité. Le second grand challenge est relatif à la résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque étudiée en satisfaisant ses conditions aux limites. Le premier challenge est surmonté grâce au changement de variables passant du système cartésien au système polaire et aussi par l'approximation de certaines fonctions spéciales par de séries, à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, ce qui a abouti à une solution semi-analytique. Le deuxième challenge est surmonté grâce à l'adoption de la solution générale de Clebsch et l'application de la méthode énergétique de Ritz pour satisfaire les conditions aux limites de la plaque étudiée. Après avoir accompli l'étude de ces deux grandes tâches principales, ainsi que d'autres tâches auxiliaires qui sont toutes données sous formes d'algorithmes simplifiés et adaptés pour être éventuellement utilisés par les centres de calcul d'ingénieur et de recherche, l'approche finale est ainsi formulée sous forme matricielle bien adaptée pour différentes applications.

Les résultats du calcul dynamique obtenus par l'application de l'approche proposée, après avoir introduit les caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini

élastique de propriétés inertielles dans le système matriciel final, sont très satisfaisants. A noter, qu'un autre défi s'est apparu lors du lancement du calcul des valeurs des fréquences propres de la plaque, représentant les racines de l'équation du déterminant de la matrice du système final, lié au temps de calcul. Autrement-dit, plus le maillage de la plaque est fin plus le temps d'exécution est important et plus la précision de la valeur de la fréquence propre est bonne. Ce défi est surmonté grâce à l'utilisation du Plateau Technique des Calculs Intensifs de l'université 8 Mai 1945 Guelma ce qui a nécessité plus de sept mois de calcul continu.

Pour s'assurer de l'authenticité et de la certitude des résultats obtenus par l'application de cette approche, on a procédé aux vérifications suivantes :

- I. comparaison des valeurs des fréquences propres de la structure étudiée (plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielle) avec la même plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) ;
- II. vérification des valeurs des fréquences propres de la plaque étudiée en utilisant le principe de superposition de la méthode modale.
- III. Comparaison de la réponse dynamique de la plaque en considérant la même plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq)
- IV. Application du principe des problèmes inverses en vue de localiser les fréquences d'excitation extérieures de la plaque à partir des signaux de sa réponse dynamique.

Toutes les comparaisons et les vérifications faites sont satisfaisantes ce qui témoigne de la certitude des résultats obtenus et par conséquent la fiabilité de l'approche utilisée.

Les résultats de recherche de cette thèse de doctorat ont abouti à une publication internationale de classe A, à trois communications internationales et une autre publication internationale en cours de rédaction.

Enfin, l'étude apportée dans ce travail de thèse de doctorat peut être utilisée comme base pour traiter certains cas plus compliqués qui ne sont pas encore abordés. Il s'agit principalement de la prise en compte de l'amortissement dans la zone de contact ; la tenue en compte des forces de frottement dans la zone de contact ; l'analyse des structures ayant des formes géométriques plus compliquées ; l'analyse des structures constituées de matériaux orthotropes ; l'analyse des structures se trouvant à l'intérieur des milieux élastique (en interaction totale) etc.

Références bibliographiques :

- [1] X. Feng et H. Zhang, « Exact closed-form solutions for Lamb's problem », *Geophys. J. Int.*, vol. 214, n° 1, p. 444-459, juill. 2018.
- [2] Kh. Kh. Il'yasov, A. V. Kravtsov, S. V. Kuznetsov, et S. Ya. Sekerzh-Zen'kovich, « Exterior 3D lamb problem: Harmonic load distributed over a surface », *Mech. Solids*, vol. 51, n° 1, p. 39-45, juin 2016.
- [3] V. V. Nishawala, M. Ostoja-Starzewski, M. J. Leamy, et E. Porcu, « Lamb's problem on random mass density fields with fractal and Hurst effects », *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 472, n° 2196, p. 20160638, 2016.
- [4] I. Argatov et Yu. A. Fadin, « Excitation of the elastic half-space surface by normal rebounding impact of an indenter », *J. Frict. Wear*, vol. 30, n° 1, p. 1-6, févr. 2009.
- [5] L. A. Khajiyeva, D. A. Prikazchikov et L. A. Prikazchikova, « Hyperbolic-elliptic model for surface wave in a pre-stressed incompressible elastic half-space », *Mech Res Comm*, vol. 92, p. 49-53, 2018.
- [6] M. Nefovska-Danilovic et M. Petronijevic, « In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method », *Comput. Struct.*, vol. 152, p. 82-95, mai 2015.
- [7] M. Sali, F. Lontsi, O. Hamandjoda, et D. Raidandi, « Calculation of Plates on Elastic Foundation by the Generalized Equations of Finite Difference Method », *Int. J. Eng. Sci. IJES*, vol. 7, p. 32-38, 2018.
- [8] M.-H. Hsu, « Vibration analysis of orthotropic rectangular plates on elastic foundations », *Compos. Struct.*, vol. 92, n° 4, p. 844-852, mars 2010.
- [9] M. A. Foyouzat, M. Mofid, et J. E. Akin, « Free Vibration of Thin Circular Plates Resting on an Elastic Foundation with a Variable Modulus », *J. Eng. Mech.*, vol. 142, n° 4, p. 04016007, avr. 2016.
- [10] Z. Lu, H. Yao, Y. Zhan, et Z. Hu, « 1262. Vibrations of a plate on a two-parameter foundation subjected to moving rectangular loads of varying velocities », *J. Vibroengineering*, vol. 16, n° 3, p. 12, 2014.
- [11] M. Dehghan, M. Nejad, et A. Moosaie, « An effective combination of finite element and differential quadrature method for analyzing of plates partially resting on elastic foundation », *Eng. Solid Mech.*, vol. 4, n° 4, p. 201-218, 2016.
- [12] B. Akgoz et O. Civalek, « Nonlinear vibration analysis of laminated plates resting on nonlinear two-parameters elastic foundations », *Steel Compos. Struct.*, vol. 11, n° 5, p. 403-421, 2011.
- [13] F. Pang, H. Li, Y. Du, S. Li, H. Chen, et N. Liu, « A series solution for the vibration of Mindlin rectangular plates with elastic point supports around the edges », *Shock Vib.*, vol. 2018, 2018.

- [14] V. Babeshko, O. Evdokimova, et O. Babeshko, « Action of the semi-infinite plates on the elastic layer », *Procedia IUTAM*, vol. 20, p. 50-55, 2017.
- [15] M. Sobhy, « Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions », *Compos. Struct.*, vol. 99, p. 76-87, mai 2013.
- [16] E. V. Barmenkova et A. V. Matveeva, « Calculation of Plates of Variable Rigidity on Elastic Foundation with Variable Coefficient of Subgrade Reaction », *Procedia Eng.*, vol. 111, p. 97-102, janv. 2015.
- [17] Y. Chen, N. D. Beskou, et J. Qian, « Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic poroelastic half-plane to a load moving on its surface », *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, vol. 107, p. 292-302, avr. 2018.
- [18] E. Torkan, M. Pirmoradian, et M. Hashemian, « On the parametric and external resonances of rectangular plates on an elastic foundation traversed by sequential masses », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 88, n° 8, p. 1411-1428, 2018.
- [19] P. Malekzadeh et S. M. Monajjemzadeh, « Dynamic response of functionally graded plates in thermal environment under moving load », *Compos. Part B Eng.*, vol. 45, n° 1, p. 1521-1533, févr. 2013.
- [20] Z. Lu, R. Fang, H. Yao, C. Dong, et S. Xian, « Dynamic responses of unsaturated half-space soil to a moving harmonic rectangular load », *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, vol. 42, n° 9, p. 1057-1077, 2018.
- [21] R. Buczkowski, M. Taczala, et M. Kleiber, « A 16-node locking-free Mindlin plate resting on two-parameter elastic foundation-static and eigenvalue analysis », *Comput. Assist. Methods Eng. Sci.*, vol. 22, n° 2, p. 99-114, 2017.
- [22] A. Ghannadiasl et M. Mofid, « Free vibration analysis of general stepped circular plates with internal elastic ring support resting on Winkler foundation by Green function method », *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 44, n° 3, p. 212-230, 2016.
- [23] A. E. Musa, M. A. Al-Shugaa, et H. J. Al-Gahtani, « Energy-Based Solution for Bending Analysis of Thin Plates on Nonhomogeneous Elastic Foundation », *Arab. J. Sci. Eng.*, vol. 45, n° 5, p. 3817-3827, 2020.
- [24] S. A. Eftekhari et A. A. Jafari, « A mixed method for free and forced vibration of rectangular plates », *Appl. Math. Model.*, vol. 36, n° 6, p. 2814-2831, juin 2012.
- [25] Q. Wang, D. Shi, et X. Shi, « A modified solution for the free vibration analysis of moderately thick orthotropic rectangular plates with general boundary conditions, internal line supports and resting on elastic foundation », *Meccanica*, vol. 51, n° 8, p. 1985-2017, août 2016.
- [26] M. Dehghany et A. Farajpour, « Free vibration of simply supported rectangular plates on Pasternak foundation: An exact and three-dimensional solution », *Eng. Solid Mech.*, vol. 2, n° 1, p. 29-42, 2014.

- [27] J. B. Gunda, « Large amplitude free vibration analysis of square plates resting on elastic foundation: A simple closed-form solutions », *ZAMM-Journal Appl. Math. Mech. Für Angew. Math. Mech.*, vol. 93, n° 8, p. 597-608, 2013.
- [28] A. Rahbar-Ranji et A. Shahbaztabar, « Free vibration analysis of non-homogeneous orthotropic plates resting on Pasternak elastic foundation by Rayleigh-Ritz method », *J. Cent. South Univ.*, vol. 23, n° 2, p. 413-420, févr. 2016.
- [29] V. C. Hacıyev, G. R. Mirzeyeva, et A. I. Shiriyev, « Effect of Winkler foundation, inhomogeneity and orthotropy on the frequency of plates », *J. Struct. Eng. Appl. Mech. 1 I*, p. 1-5, 2018.
- [30] A. I. Karakas, K. Ozgan, et A. T. Daloglu, « A parametric study for free vibration analysis of hyperbolic cooling towers on elastic foundation using consistent FEM-Vlasov model », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 86, n° 5, p. 869-882, mai 2016.
- [31] B. F. Apostol, « On the Lamb problem: forced vibrations in a homogeneous and isotropic elastic half-space », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 90, n° 10, p. 2335-2346, oct. 2020.
- [32] M. Emami et M. Eskandari-Ghadi, « Lamb's problem: a brief history », *Math. Mech. Solids*, vol. 25, n° 3, p. 501-514, 2020.
- [33] E. H. Mansfield, *The Bending and Stretching of Plates*. Cambridge University Press, 2005.
- [34] S. P. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*. McGraw-hill, 1959.
- [35] E. Tsudik, *Analysis of Structures on Elastic Foundations*. J. Ross Publishing, 2012.
- [36] D. A. Dillard, B. Mukherjee, P. Karnal, R. C. Batra, et J. Frechette, « A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications », *Soft Matter*, vol. 14, n° 19, p. 3669-3683, 2018.
- [37] P. Ghosh, S. Rajesh, et J. S. Chand, « Linear and nonlinear elastic analysis of closely spaced strip foundations using Pasternak model », *Front. Struct. Civ. Eng.*, vol. 11, n° 2, p. 228-243, 2017.
- [38] D. V. Griffiths et G. Bee, « Analytical and numerical observations on the Hetenyi solution for buckling of beams on elastic foundations », *J. Eng. Mech.*, vol. 141, n° 1, p. 06014014, 2015.
- [39] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques: principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur: mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique, mathématique et d'analyse*, vol. 4. Gauthier-Villars, 1885.
- [40] Y. Xie, H. Xiao, et Z. Q. Yue, « Elastic Fields of a Nonhomogeneous Half-Space Subject to an Inclined Circular Load », *Adv. Mater. Sci. Eng.*, vol. 2020, 2020.
- [41] A. J. Anyaegbunam, « Complete stresses and displacements in a cross-anisotropic half-space caused by a surface vertical point load », *Int. J. Geomech.*, vol. 14, n° 2, p. 171-181, 2014.

- [42] A. Strukelj, T. Plibersek, et A. Umek, « Evaluation of Green's function for vertical point-load excitation applied to the surface of a layered semi-infinite elastic medium », *Arch. Appl. Mech.*, vol. 76, n° 7, p. 465-479, 2006.
- [43] İ. Coşkun, H. Engin, et A. Özmutlu, « Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity », *Shock Vib.*, vol. 18, n° 6, p. 827-838, 2011.
- [44] C. He, S. Zhou, P. Guo, et Q. Gong, « Three-dimensional analytical model for the dynamic interaction of twin tunnels in a homogeneous half-space », *Acta Mech.*, vol. 230, n° 3, p. 1159-1179, 2019.
- [45] S. Guenfoud, S. V. Bosakov, et D. F. Laefer, « A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 47, n° 14-15, p. 1822-1829, 2010.
- [46] M. T. Hanson et L. M. Keer, « A simplified analysis for an elastic quarter-space », *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 43, n° 4, p. 561-587, 1990.
- [47] V. M. Aleksandrov et D. A. Pozharskii, « Non Classical Spatial Problems of Mechanics of Contact of Interaction of Elastic Bodies », *Fakt. Mosc.* 1998.
- [48] P. Schultz et D. Finn-Foley, « Effects of quarter-space experiments on crater formation », *Brown Univ. Dep. Phys.*, 2007.
- [49] H. Lamb, « I. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid », *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Contain. Pap. Math. Phys. Character*, vol. 203, n° 359-371, p. 1-42, 1904.
- [50] S. Guenfoud, M. N. Amrane, S. V. Bosakov, et N. Ouelaa, « Semi-analytical evaluation of integral forms associated with Lamb's problem », *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, vol. 29, n° 3, p. 438-443, 2009.
- [51] D. Younesian, Z. Saadatnia, et H. Askari, « Analytical solutions for free oscillations of beams on nonlinear elastic foundations using the variational iteration method », *J. Theor. Appl. Mech.*, vol. 50, n° 2, p. 639-652, 2012.
- [52] F. M. Sabourin et F. Salle, « Calcul des structures par éléments finis, Barres–Poutres Elasticité plane Axisymétrique Plaques–coques non linéarité, Chapitre IV », *INSA Lyon*, 2000.
- [53] T. Koike, H. Wada, et T. Kobayashi, « Modeling of the human middle ear using the finite-element method », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 111, n° 3, p. 1306-1317, 2002.
- [54] S. V. Bosakov, « Eigenfrequencies and modified eigenmodes of a rectangular plate with free edges », *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, n° 6, p. 688-691, 2009.
- [55] S. V. Bosakov, « To the design of rectangular slabs on an elastic foundation », *Archit. Constr.*, 2007.
- [56] S. V. Bosakov, « Ritz's method in the mechanical problems and theory of elasticity », *Minsk*, p. 130, 2000.

- [57] S. V. Bosakov, « An approach to the contact problem for a circular punch on an elastic foundation », *Int. Appl. Mech.*, vol. 44, n° 4, p. 413-418, 2008.
- [58] S. Guenfoud, « Calcul des plaques de forme compliquées reposant sur milieu élastique. Thèse de Ph.D », Thèse de Ph.D. en mécanique des structures, Académie Polytechniques d'Etat de Belarus, Minsk, Etat de Belarus, 2002.
- [59] S. V. Bosakov, « Ritz's method in contact problems of elasticity theory », *BrSTU*, p. 108, 2006.
- [60] S. V. Bosakov, « Application of BN Zhemochkin's Method to Analysis of a Bendable Slab on an Elastic Bed », *Soil Mech. Found. Eng.*, vol. 40, n° 2, p. 48-54, 2003.
- [61] K. Zbigniew, « Calcul statique des plaques », *Stroiizdat Moscou*, p. 480, 1984.
- [62] S. V. Bosakov et S. I. Zinevich, « Calculation of Rectangular Plate on Two-Layer Basis », *Sci. Tech.*, n° 2, 2018.
- [63] S. V. Bosakov, « To Solution of Contact Problem for Rectangular Plate on Elastic Half-Space », *Sci. Tech.*, vol. 19, n° 3, 2020.
- [64] B. G. Korenov et I. M. Rabinovitch, « Guide sur la dynamique des ouvrages », *Stroiizdat Moscou*, p. 379, 1972.
- [65] A. P. Filippov, « Vibration des systèmes déformables », *Mashina Streini Moscou*, p. 720, 1970.
- [66] Y. Achdou, « Base des méthodes numériques », *UFR Mathématiques*, Université Paris 7, 2007.
- [67] S. Guenfoud, S. V. Bosakov, et D. F. Laefer, « Dynamic analysis of a beam resting on an elastic half-space with inertial properties », *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, vol. 29, n° 8, p. 1198-1207, 2009.
- [68] B. P. Demidovich, I. A. Maron, et E. Z. Shuvalova, « Numerical analysis methods », *Mosc. Sci.*, 1967.
- [69] I. S. Gradshteyn, *Tables of integrals, series and derivations*. Moscow: FM Publishing Company, 1969.
- [70] K. Johnson, « Contact interaction's mechanics », *Mosc. Mir*, 1989.
- [71] I. Aramanovich, « Development of the Theory of Contact Problems in the USSR », *Mosc. Nauka*, 1976.
- [72] B. N. Zhemochkin et A. P. Sinitsyn, « Practical methods of the calculation of beams and plates resting on an elastic foundation », *Moscow Stroyizdat Publ. Co.*, 1962.
- [73] S. V. Bosakov et O. Kozunova, « Development of the theory of computation of pivotally-connected beams on an elastic foundation taking into account their physical nonlinearity », *Leshkevich*, vol. 11, p. 11-24, 2019.
- [74] S. V. Bosakov, « Calcul des plaques reposant sur milieu élastique », *Minsk BNTU*, p. 120, 2002.
- [75] S. V. Bosakov et O. V. Kozunova, « Contact problem for hinged rectangular plates on an elastic foundation », *Archit. Constr.*, vol. 11, p. 619, 2018.

-
- [76] S. V. Bosakov, « Contact problem for a plate provided that some of its displacements are equal », *BrSTU*, p. 36-45, 2020.
- [77] S. V. Bosakov, S. Guenfoud, N. Ouelaa, et M. C. Djamaa, « Dynamical analysis of a beam resting on an elastic foundation of Winkler's type », *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, vol. 1, n° 3, p. 52-58, 2005.
- [78] V. A. Kiselev, « Mécanique des structures », *Stroiizdat Moscou*, p. 609, 1980.
- [79] N. V. Butenin, Y. L. Lunts, et D. R. Merkin, « Cours de la mécanique théorique », *Sciences Moscou*, p. 541, 1979.
- [80] J. Ahmad, « Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale », Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2009.

Annexe : 01 :

Le calcul de l'un des intégrales de la fonction de Green lorsque $r = 0$ (apportée au chapitre III) est détaillée de la manière suivante :

$$\int_{\eta=-b^2}^{\eta=b^2} \int_{\xi=-c^2}^{\xi=c^2} \left(\left(\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \times r^2 \right] \right) \right) d\xi d\eta \approx$$

$$\int \left(\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \times r^2 \right] \right) \times r dr =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \text{Gamma}[1+m] \text{HypergeometricPFQRegularized} \left[\{m\}, \{1+m, 2\}, -\frac{1}{4}k^2 r^2 \right]$$

$$Q1[r_]:= \frac{1}{2} r^2 \text{Gamma}[1+m] \text{HypergeometricPFQRegularized} \left[\{m\}, \{1+m, 2\}, -\frac{1}{4}k^2 r^2 \right];$$

$$\text{FullSimplify} \left[Q1 \left[\frac{c^2}{\cos[\varphi]} \right] - Q1[0] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{2, 1+m\}, -\frac{1}{4}c^2 k^2 \sec[\varphi]^2 \right] \sec[\varphi]^2$$

$$\sec[\varphi] = \frac{1}{\cos[\varphi]} = t$$

$$\text{Series} \left[\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{2, 1+m\}, -\frac{1}{4}c^2 k^2 t^2 \right] t^2, \{t, 0, 5\} \right] \approx$$

$$\approx t^2 - \frac{(c^2 k^2 m) t^4}{8(1+m)} + O[t]^6$$

$$\frac{1}{2} \times c^2 \times \int \left(\left(\frac{1}{\cos[\varphi]} \right)^2 - \frac{(c^2 k^2 m) \left(\frac{1}{\cos[\varphi]} \right)^4}{8(1+m)} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \left(\tan[\varphi] - \frac{c^2 k^2 m \tan[\varphi]}{12(1+m)} - \frac{c^2 k^2 m \sec[\varphi]^2 \tan[\varphi]}{24(1+m)} \right)$$

$$Q2[\varphi_-] := \frac{1}{2} c2^2 \left(\tan[\varphi] - \frac{c2^2 k^2 m \tan[\varphi]}{12(1+m)} - \frac{c2^2 k^2 m \sec[\varphi]^2 \tan[\varphi]}{24(1+m)} \right);$$

$$FullSimplify \left[\left(Q2 \left[\arctan \left[\frac{b2}{c2} \right] \right] - Q2[0] \right) \times 8 \right] = \frac{b2c2 \left(24 - (-24 + (b2^2 + 3c2^2) k^2) m \right)}{6(1+m)};$$

$$\int_{\eta=-b2}^{\eta=b2} \int_{\xi=-c2}^{\xi=c2} \left(HypergeometricPFQ \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4} k^2 \times r^2 \right] \right) d\xi d\eta \approx \frac{b2c2 \left(24 - (-24 + (b2^2 + 3c2^2) k^2) m \right)}{6(1+m)};$$

Le détail du calcul de l'un des intégrales de la fonction de Green lorsque $r \neq 0$ (apportée au chapitre III) s'est fait de la manière suivante :

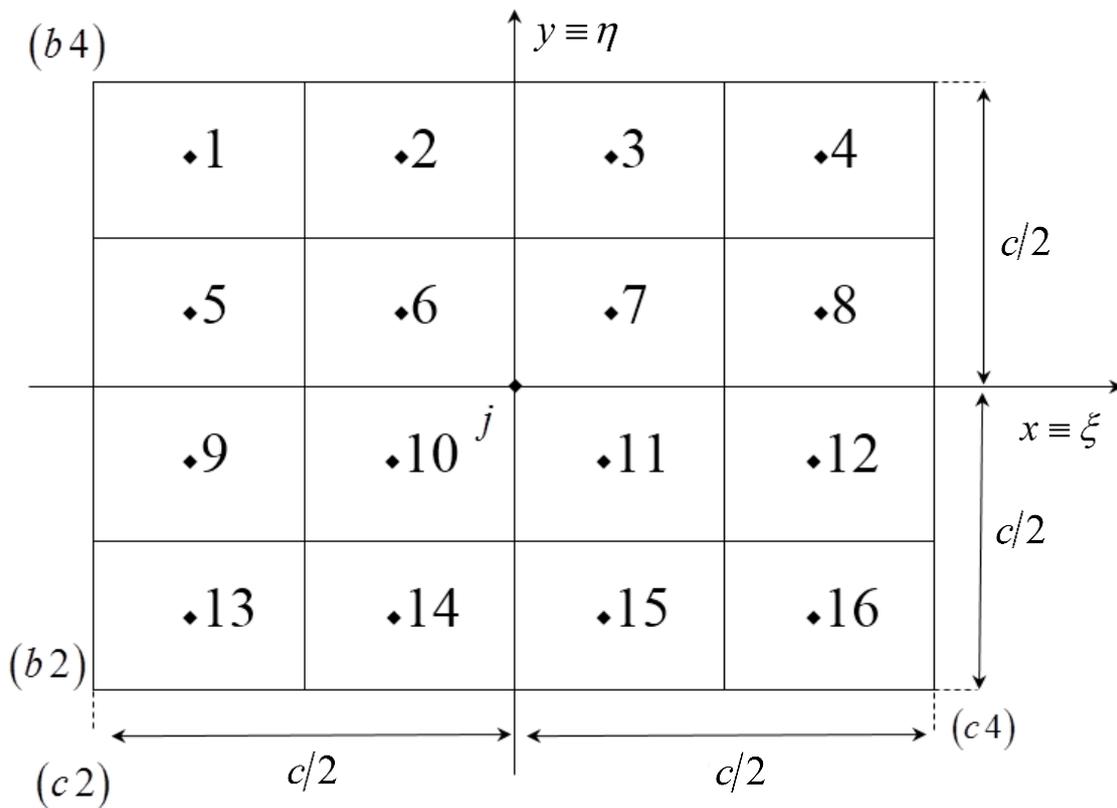


Fig.A.1 : Division de l'élément chargé en 16 sous-éléments

Où :

$(x_j ; y_j ; c2 ; c4 ; b2 ; b4)$: Les coordonnées de l'élément chargé;

Avec :

$$b4 = y_j + \frac{b}{2}; \quad b2 = y_j - \frac{b}{2}; \quad c4 = x_j + \frac{c}{2}; \quad c2 = x_j - \frac{c}{2};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = b4 - \frac{b}{8}; \\ \eta_2 = \eta_1; \\ \eta_3 = \eta_1; \\ \eta_4 = \eta_1; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \eta_5 = b4 - \frac{3b}{8}; \\ \eta_6 = \eta_5; \\ \eta_7 = \eta_5; \\ \eta_8 = \eta_5; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \eta_9 = b2 + \frac{3b}{8}; \\ \eta_{10} = \eta_9; \\ \eta_{11} = \eta_9; \\ \eta_{12} = \eta_9; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \eta_{13} = b2 + \frac{b}{8}; \\ \eta_{14} = \eta_{13}; \\ \eta_{15} = \eta_{13}; \\ \eta_{16} = \eta_{13}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = c2 + \frac{c}{8}; \\ \xi_5 = \xi_1; \\ \xi_9 = \xi_1; \\ \xi_{13} = \xi_1; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = c2 + \frac{3c}{8}; \\ \xi_6 = \xi_2; \\ \xi_{10} = \xi_2; \\ \xi_{14} = \xi_2; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \xi_3 = c4 - \frac{3c}{8}; \\ \xi_7 = \xi_3; \\ \xi_{11} = \xi_3; \\ \xi_{15} = \xi_3; \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \xi_4 = c4 - \frac{c}{8}; \\ \xi_8 = \xi_4; \\ \xi_{12} = \xi_4; \\ \xi_{16} = \xi_4; \end{array} \right.$$

$$\int_{y=-b2}^{y=b2} \int_{x=c2}^{x=c4} \left(\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} \right)^2 \right] \right) dx dy \approx$$

$$\text{Simplify} \left[\frac{b \times c}{16} \times \sum_{i=1}^{16} \left(\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2} \right)^2 \right] \right) \right] \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{16}bc \left(\text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \right. \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} + b2 - y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} + c2 - x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \\ &+ \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] + \text{HypergeometricPFQ} \left[\{m\}, \{1, 1+m\}, -\frac{1}{4}k^2 \left(\left(\frac{3c}{8} - c4 + x \right)^2 + \left(\frac{3b}{8} - b4 + y \right)^2 \right) \right] \left. \right) \end{aligned}$$

Annexe : 02 :

Le calcul des coordonnées de chaque élément est très important pour l'application de l'approche utilisée. Le calcul des coordonnées est plus exposé aux erreurs surtout lorsque le maillage utilisé est plus fin. Si on prend un exemple lorsque la discrétisation de la structure est $n = 900$ éléments, alors le nombre de coordonnées nécessaires pour les différentes combinaisons entre éléments est : $6 \times (900)^2 = 4860000$ combinaisons.

C'est pourquoi, il est indispensable de construire un code de calcul pour la détermination des coordonnées des éléments pour éviter les erreurs des calculs antérieurs.

Pour une discrétisation de n éléments, les coordonnées $(x_i; y_i)$ sont calculées de la manière suivante :

$$\forall (x_i = \xi_p) \text{ avec } \{i \in [1; n]; p \in [1; \sqrt{n}]\}$$

$$\forall (y_i = \eta_j) \text{ avec } \{i \in [1; n]; j \in [1; \sqrt{n}]\}$$

$$\begin{cases} \xi_p = -a + (2 \times p - 1) \times \left(\frac{a_i}{2}\right) & ; p \in [1; \sqrt{n}] \\ \eta_j = b - \left((2 \times j - 1) \times \left(\frac{b_i}{2}\right)\right) & ; j \in [1; \sqrt{n}] \end{cases} \quad \ddots$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_i = \frac{2a}{r} & ; \\ b_i = \frac{2b}{s} & ; \end{cases} \quad \ddots$$

Où :

a, b : la demi-longueur et la demi-largeur de la plaque respectivement ;

a_i, b_i : longueur et largeur de l'élément i respectivement ;

L'indice (j) est déterminé par la manière suivante :

$$j = \begin{cases} = 1, & i \in [1; \sqrt{n}]; \\ = 2, & i \in [\sqrt{n}+1; 2\sqrt{n}]; \\ = 3, & i \in [2\sqrt{n}+1; 3\sqrt{n}]; \\ \vdots \\ \vdots \\ = \sqrt{n}, & i \in [(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}+1; n]; \end{cases} \quad \therefore \Leftrightarrow \quad j = \begin{cases} = 1, & 0 < \frac{i}{\sqrt{n}} \leq 1; \\ = 2, & 1 < \frac{i}{\sqrt{n}} \leq 2; \\ = 3, & 2 < \frac{i}{\sqrt{n}} \leq 3; \\ \vdots \\ \vdots \\ = \sqrt{n}, & (\sqrt{n}-1) < \frac{i}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}; \end{cases} \quad \therefore$$

L'indice (p) est déterminé par la manière suivante :

$$p = \begin{cases} = 1, & i \in [1; \sqrt{n}+1; 2\sqrt{n}+1; \dots; n-(\sqrt{n}-1)]; \\ = 2, & i \in [2; \sqrt{n}+2; 2\sqrt{n}+2; \dots; n-(\sqrt{n}-2)]; \\ = 3, & i \in [3; \sqrt{n}+3; 2\sqrt{n}+3; \dots; n-(\sqrt{n}-3)]; \quad \therefore \Leftrightarrow \quad p = i - (j-1)\sqrt{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ = \sqrt{n}, & i \in [\sqrt{n}; 2\sqrt{n}; 3\sqrt{n}; \dots; n]; \end{cases}$$

Donc, les coordonnées ($x_i; y_i$) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi_1 \\ x_{\sqrt{n}+1} = \xi_1 \\ x_{(2\sqrt{n})+1} = \xi_1 \\ x_{(3\sqrt{n})+1} = \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-(\sqrt{n}-1)} = \xi_1 \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \xi_2 \\ x_{\sqrt{n}+2} = \xi_2 \\ x_{(2\sqrt{n})+2} = \xi_2 \\ x_{(3\sqrt{n})+2} = \xi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-(\sqrt{n}-2)} = \xi_2 \end{array} \right\} ; \dots ; \left\{ \begin{array}{l} x_{\sqrt{n}} = \xi_{\sqrt{n}} \\ x_{2\sqrt{n}} = \xi_{\sqrt{n}} \\ x_{3\sqrt{n}} = \xi_{\sqrt{n}} \\ x_{4\sqrt{n}} = \xi_{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = \xi_{\sqrt{n}} \end{array} \right\} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \eta_1 \\ y_2 = \eta_1 \\ y_3 = \eta_1 \\ y_4 = \eta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{\sqrt{n}} = \eta_1 \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} y_{\sqrt{n}+1} = \eta_2 \\ y_{\sqrt{n}+2} = \eta_2 \\ y_{\sqrt{n}+3} = \eta_2 \\ y_{\sqrt{n}+4} = \eta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{2\sqrt{n}} = \eta_2 \end{array} \right\} ; \dots ; \left\{ \begin{array}{l} y_{n-(\sqrt{n}-1)} = \eta_{\sqrt{n}} \\ y_{n-(\sqrt{n}-2)} = \eta_{\sqrt{n}} \\ y_{n-(\sqrt{n}-3)} = \eta_{\sqrt{n}} \\ y_{n-(\sqrt{n}-4)} = \eta_{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n = \eta_{\sqrt{n}} \end{array} \right\} ;$$

Prenons un exemple d'une plaque discrétisée en 25 éléments rectangulaires identiques :

$$n = 25; \quad a = b = 1 \text{ m}; \quad a_i = b_i = \frac{2a}{\sqrt{n}};$$

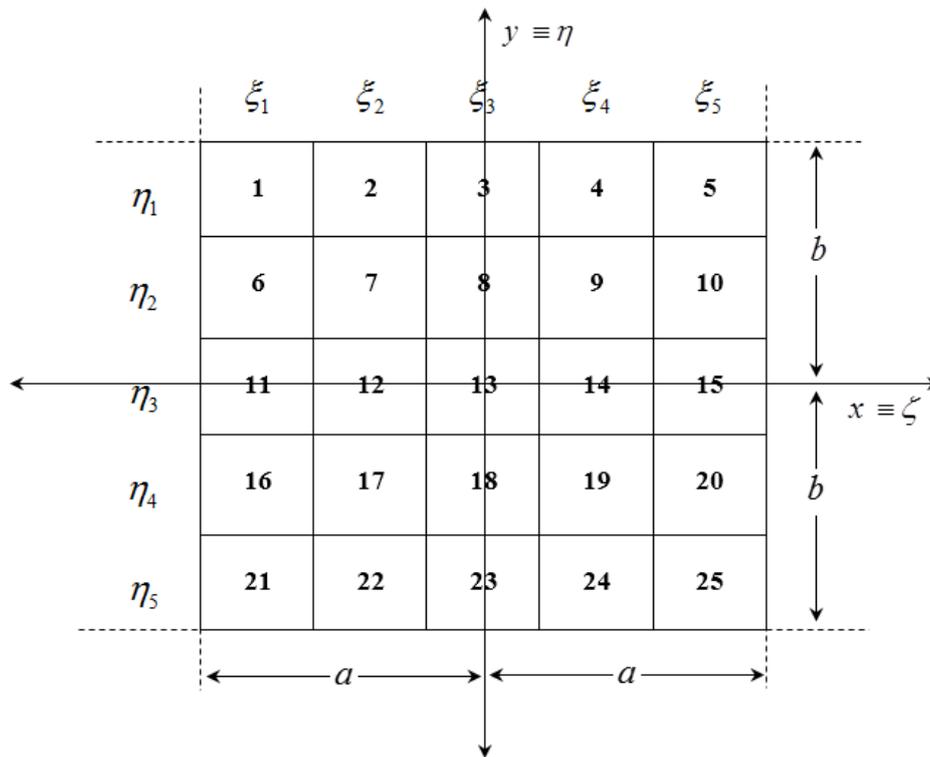


Fig. A.2. Exemple d'une plaque discrétisée en 25 éléments rectangulaires identiques

Si nous prenons le cas du déplacement $(v_{7,19})$ au centre de l'élément 7 causé par la charge appliquée au centre de l'élément 19 de coordonnées $(x_i; y_i; c2; c4; b2; b4)$. Toutes ces coordonnées sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{cases} (x_7 = \xi_2) = -a + (2 \times p - 1) \times \left(\frac{a_i}{2}\right) = -1 + (2 \times 2 - 1) \times (0, 2) = -0, 4; \\ (y_7 = \eta_2) = b - \left((2 \times j - 1) \times \left(\frac{b_i}{2}\right)\right) = 1 - ((2 \times 2 - 1) \times (0, 2)) = 0, 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_{19} = \xi_4) = -a + (2 \times p - 1) \times \left(\frac{a_i}{2}\right) = -1 + (2 \times 4 - 1) \times (0, 2) = 0, 4; \\ (y_{19} = \eta_2) = b - \left((2 \times j - 1) \times \left(\frac{b_i}{2}\right)\right) = 1 - ((2 \times 4 - 1) \times (0, 2)) = -0, 4; \end{cases}$$

$$b4 = y_{19} + \frac{b_i}{2}; \quad b2 = y_{19} - \frac{b_i}{2}; \quad c4 = x_{19} + \frac{a_i}{2}; \quad c2 = x_{19} - \frac{a_i}{2};$$

Finalement, on trouve :

$$x_7 = -0, 4; \quad y_7 = 0, 4; \quad x_{19} = 0, 4; \quad y_{19} = -0, 4; \quad b4 = -0, 2; \quad b2 = -0, 6; \quad c4 = 0, 6; \quad c2 = 0, 2;$$

Annexe : 03 :

La matrice [A] contenant les éléments de sa première et de ses quatre dernières colonnes, ainsi que ses deux premières et ses quatre dernières lignes lorsque la plaque étudiée est discrétisée en n=9 éléments est la suivant :

$$\begin{bmatrix}
 YY_{1,1} + \alpha(F_{1,1} - M\omega^2(F_{1,1}YY_{1,1} + F_{2,1}YY_{1,2} + F_{3,1}YY_{1,3} + F_{4,1}YY_{1,4} + F_{5,1}YY_{1,5} + F_{6,1}YY_{1,6} + F_{7,1}YY_{1,7} + F_{8,1}YY_{1,8} + F_{9,1}YY_{1,9})) & \cdots & YY_{1,9} + \alpha(F_{1,9} - M\omega^2(F_{1,9}YY_{1,1} + F_{2,9}YY_{1,2} + F_{3,9}YY_{1,3} + F_{4,9}YY_{1,4} + F_{5,9}YY_{1,5} + F_{6,9}YY_{1,6} + F_{7,9}YY_{1,7} + F_{8,9}YY_{1,8} + F_{9,9}YY_{1,9})) & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\
 YY_{2,1} + \alpha(F_{2,1} - M\omega^2(F_{1,1}YY_{2,1} + F_{2,1}YY_{2,2} + F_{3,1}YY_{2,3} + F_{4,1}YY_{2,4} + F_{5,1}YY_{2,5} + F_{6,1}YY_{2,6} + F_{7,1}YY_{2,7} + F_{8,1}YY_{2,8} + F_{9,1}YY_{2,9})) & \cdots & YY_{2,9} + \alpha(F_{2,9} - M\omega^2(F_{1,9}YY_{2,1} + F_{2,9}YY_{2,2} + F_{3,9}YY_{2,3} + F_{4,9}YY_{2,4} + F_{5,9}YY_{2,5} + F_{6,9}YY_{2,6} + F_{7,9}YY_{2,7} + F_{8,9}YY_{2,8} + F_{9,9}YY_{2,9})) & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 YY_{9,1} + \alpha(F_{9,1} - M\omega^2(F_{1,1}YY_{9,1} + F_{2,1}YY_{9,2} + F_{3,1}YY_{9,3} + F_{4,1}YY_{9,4} + F_{5,1}YY_{9,5} + F_{6,1}YY_{9,6} + F_{7,1}YY_{9,7} + F_{8,1}YY_{9,8} + F_{9,1}YY_{9,9})) & \cdots & YY_{9,9} + \alpha(F_{9,9} - M\omega^2(F_{1,9}YY_{9,1} + F_{2,9}YY_{9,2} + F_{3,9}YY_{9,3} + F_{4,9}YY_{9,4} + F_{5,9}YY_{9,5} + F_{6,9}YY_{9,6} + F_{7,9}YY_{9,7} + F_{8,9}YY_{9,8} + F_{9,9}YY_{9,9})) & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\
 \frac{2}{3} - M\alpha\omega^2\left(\frac{2F_{1,1}}{3} + \frac{2F_{2,1}}{3} + \frac{2F_{3,1}}{3} + 0.F_{4,1} + 0.F_{5,1} + 0.F_{6,1} - \frac{2F_{7,1}}{3} - \frac{2F_{8,1}}{3} - \frac{2F_{9,1}}{3}\right) & \cdots & -\frac{2}{3} - M\alpha\omega^2\left(\frac{2F_{1,9}}{3} + \frac{2F_{2,9}}{3} + \frac{2F_{3,9}}{3} + 0.F_{4,9} + 0.F_{5,9} + 0.F_{6,9} - \frac{2F_{7,9}}{3} - \frac{2F_{8,9}}{3} - \frac{2F_{9,9}}{3}\right) & \frac{1}{3}a^2m\omega^2 & 0 & 0 \\
 -\frac{2}{3} - M\alpha\omega^2\left(-\frac{2F_{1,1}}{3} + 0.F_{2,1} + \frac{2F_{3,1}}{3} - \frac{2F_{4,1}}{3} + 0.F_{5,1} + \frac{2F_{6,1}}{3} - \frac{2F_{7,1}}{3} + 0.F_{8,1} + \frac{2F_{9,1}}{3}\right) & \cdots & \frac{2}{3} - M\alpha\omega^2\left(-\frac{2F_{1,9}}{3} + 0.F_{2,9} + \frac{2F_{3,9}}{3} - \frac{2F_{4,9}}{3} + 0.F_{5,9} + \frac{2F_{6,9}}{3} - \frac{2F_{7,9}}{3} + 0.F_{8,9} + \frac{2F_{9,9}}{3}\right) & 0 & \frac{1}{3}a^2m\omega^2 & 0 \\
 1 - M\alpha\omega^2(F_{1,1} + F_{2,1} + F_{3,1} + F_{4,1} + F_{5,1} + F_{6,1} + F_{7,1} + F_{8,1} + F_{9,1}) & \cdots & 1 - M\alpha\omega^2(F_{1,9} + F_{2,9} + F_{3,9} + F_{4,9} + F_{5,9} + F_{6,9} + F_{7,9} + F_{8,9} + F_{9,9}) & 0 & 0 & m\omega^2
 \end{bmatrix}$$

PRODUCTION SCIENTIFIQUE :**UNE PUBLICATION INTERNATIONALE :**

Gherdaoui Hemza, Guenfoud Salah, Bosakov Sergey V, Rezaiguia Abdelouahab, Laefer Debra F. "Evaluation of the integrals of Green's function of Lamb's model used in contact problems". Acta Mechanica, vol. 231, no 10, 4145-4156. (2020). **(Impact Factor : 2.133)**

TROIS COMMUNICATIONS INTERNATIONALES :

- 1- **-Gherdaoui Hemza**, Guenfoud Salah, Bosakov Sergey V, Rezaiguia Abdelouahab, Laefer Debra F. "Mesh effects for a rectangular plate resting on the surface of an elastic foundation with distributive properties on the values of its natural frequencies". 9th International Conference and Forum on Engineering Science (JSI'2020), September 25-27 2020. Sfax, TUNISIA.
- 2- Guenfoud Salah, **Gherdaoui Hemza**, Bosakov Sergey V, Rezaiguia Abdelouahab, Laefer Debra F. "Evaluation of the integrals of Green's function of Lamb's model used in contact problems". The second International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'19), August 20-24 2019. Belgrad, Russia.
- 3- Guenfoud. Salah, **Gherdaoui. Hemza**, Bosakov. Sergey V, Rezaiguia. Abdelouahab, and Laefer. Debra F. " Ritz's method in the analysis of the deflections' plates.", 4rd Conference on Advances in Mechanical Engineering Istanbul 2018 – (ICAME2018), December 19-21 2018, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey.