République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l’Informatique et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié du cours

# Maths 1

## Première année ST

**Par : Dr SELLAMI NABIL**

.

Année universitaire 2016/2017

# Introduction

Ce cours du module "Maths 1" est destiné aux étudiants de la première année licence LMD sciences et techniques. Il est conforme au nouveau programme officiel. Il a été enseigné par l'auteur au sein du département ST à l'université 8 Mai 1945 de Guelma depuis l'année universitaire 2011/2012 jusqu'a nos jours.

Durant la préparation du cours, on a utilisé plusieurs références qu'on va citer à la fin de ce polycopie.

On espère que ce modeste manuel sera utile pour les étudiants et les aidera à la bonne compréhension du module.

# Table des matières

# CHAPITRE 1 Méthodes du raisonnement mathématiques

## 1.1 Rappel de logique

**Définition 1.1** Une *proposition* est une expression qui a du sens et qui peut être *vraie* ou *fausse*.

**Exemple 1.1**

1) «$-2$ est le carré d'un nombre réel» est une proposition fausse.

2) «3 est un nombre impair» est une proposition vraie.

**Remarque 1.1**

• Une proposition ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

• Si une proposition n'est pas vraie, alors elle est fausse et si elle n'est pas fausse, alors elle est vraie.

### 1.1.1 Opérations logiques

**Définition 1.2.** Soit $P$ et $Q$ deux propositions, alors

1) **La négation logique** de $P$ est l'opération «Non $P$», notée $\rceil P$ ou $\bar{P}$. Elle est vraie si $P$ est fausse et fausse si $P$ est vraie.

2) **La conjonction logique** de $P$ et $Q$ est l'opération «$P$ et $Q$», notée $P \wedge Q$. Elle est vraie si $P$ est vraie et $Q$ est vraie. Elle est fausse sinon.

3) **La disjonction logique** de $P$ et $Q$ est l'opération «$P$ ou $Q$», notée $P \vee Q$. Elle est vraie si l'une des propositions $P$ ou $Q$ est vraie. Elle est fausse si les deux propositions $P$ et $Q$ sont fausses.

4) **L'implication logique** de $P$ et $Q$ est l'opération «$P$ implique $Q$» ou encore «$\bar{P}$ ou $Q$», notée $P \Longrightarrow Q$. Elle est fausse si $P$ est vraie et $Q$ est fausse. Sinon, elle est vraie.

5) **L'équivalence logique** de $P$ et $Q$ est l'opération «$P$ est équivalent à $Q$» ou «$P$ équivaut à $Q$» ou encore «$P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$», notée $P \Longleftrightarrow Q$. Elle est vraie si $P$ et $Q$ sont vraies ou si $P$ et $Q$ sont fausses.

**Remarque 1.2**

- Une proposition est fausse si sa négation est vraie.
- On a

$$\begin{aligned}
\overline{(P \wedge Q)} &\Longleftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q} \\
\overline{(P \vee Q)} &\Longleftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q} \\
\overline{(\bar{P})} &\Longleftrightarrow P
\end{aligned}$$

### 1.1.2 Tableau de vérité

On a le tableau suivant, où $V$ désigne vrai et $F$ désigne faux.

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Longrightarrow Q$ | $P \Longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |

### 1.1.3 Les implications

Lorsqu'on a deux propositions $P$ et $Q$, on écrit $P \Longrightarrow Q$ pour dire que la proposition $P$ implique la proposition $Q$. Dans ce cas, $P$ est l'hypothèse et $Q$ est la conclusion.

Il y a différentes façons de lire $P \Longrightarrow Q$, on peut dire

1) Si la proposition $P$ est vraie, alors la proposition $Q$ est vraie.

2) La proposition $Q$ est vraie si la proposition $P$ est vraie.

3) La proposition $P$ est vraie seulement si $Q$ est vraie.

Lorsque $P$ n'implique pas $Q$, on note $P \nRightarrow Q$. C'est le cas où $Q$ est fausse quand $P$ est vraie.

**Exemple 1.2**

«$2x = 6 \Longrightarrow x = 3$» est une implication vraie.

«$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$» est une implication vraie.

La réciproque d'une implication $P \Longrightarrow Q$ est l'implication $Q \Longrightarrow P$. Lorsque la réciproque n'est pas vraie, on écrit $Q \nRightarrow P$.

La valeur de vérité de la réciproque d'une implication est indépendante de celle de l'implication.

**Exemple 1.3**

- La réciproque de «$2x = 6 \Longrightarrow x = 3$» est «$x = 3 \Longrightarrow 2x = 6$», elle est aussi vraie.
- La réciproque de «$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$» est «$x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1$», elle est fausse.

### 1.1.4 Les équivalences

Lorsqu'on a deux propositions $P$ et $Q$ telles que $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$, on écrit $P \Longleftrightarrow Q$ et on dit que $P$ est équivalente à $Q$.

Lorsque $P$ n'est pas équivalente à $Q$, on note $P \nLeftrightarrow Q$. C'est le cas lorsque $P \nRightarrow Q$ ou $Q \nRightarrow P$.

Au lieu de dire $P$ est équivalente à $Q$, on peut aussi dire «$P$ si et seulement si $Q$».

**Exemple 1.4**

- $2x = 6 \Longleftrightarrow x = 3$.
- $x = -1 \nLeftrightarrow x^2 = 1$.

### 1.1.5 Les quantificateurs

Soit $E$ un ensemble et $P(x)$ une proposition ou une relation qui dépend de l'élément $x$ de $E$.

Si $P(x)$ est vérifiée pour tous les éléments $x$ de $E$, on écrit $\forall\ x \in E,\ P(x)$ et on lit «quelque soit $x$ appartenant à $E$, $P(x)$».

S'il existe au moins un élément $x_0$ de $E$ qui vérifie $P(x)$, on écrit $\exists\ x_0 \in E,\ P(x)$ et on lit «il existe $x_0$ appartenant à $E$, $P(x)$».

S'il existe un élément unique $x_0$ de $E$ qui vérifie $P(x)$, on écrit $\exists!\ x_0 \in E,\ P(x)$ et on lit «il existe $x_0$ unique appartenant à $E$, $P(x)$».

Le symbole $\forall$ est le *quantificateur universel* et le symbole $\exists$ est le *quantificateur existentiel.*

La négation d'une proposition $P$ contenant les quantificateurs s'obtient en remplaçant $P$ par $\bar{P}$ et en échangeant les quantificateurs.

**Exemple 1.5**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists\ z \in \mathbb{R} : x - y = z. \tag{$P$}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : x - y \neq z. \tag{$\bar{P}$}$$

## 1.2 Méthodes du raisonnement

### 1.2.1 Méthode directe

On veut montrer que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie. On suppose que $P$ est vraie et on montre qu'alors $Q$ est vraie.

**Exemple 1.6**

Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ a \leqslant b \Rightarrow a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$.

Supposons que $a \leqslant b$ et montrons que $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$.

- On a $a \leqslant b$ et $a > 0$, alors $a + a \leqslant b + a$ et $\frac{a+a}{2} \leqslant \frac{b+a}{2}$.

  Donc
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

- On a $a \leqslant b$ et $b > 0$, alors $a + b \leqslant b + b$ et $\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b+b}{2}$.

Donc

$$\frac{a+b}{2} \leqslant b \tag{2}$$

De (1) et (2), on trouve

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$$

### 1.2.2 Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}\right)$$

Donc si l'on veut montrer la proposition «$P \Rightarrow Q$», on montre que si $\bar{Q}$ est vraie alors $\bar{P}$ est vraie.

**Exemple 1.7**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair ($n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair).

**Solution**

On suppose que $n$ n'est pas pair et on veut montrer que $n^2$ n'est pas pair. Comme $n$ n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \\ &= 2l + 1, \end{aligned}$$

avec $l = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ et donc $n^2$ est impair. On a montré que $n$ impair $\Rightarrow n^2$ impair, ce qui est équivalent à $n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair.

### 1.2.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer «$P \Rightarrow Q$» repose sur le principe suivant: On suppose à la fois que $P$ est vraie et que $Q$ est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si $P$ est vraie alors $Q$ doit être vraie et donc «$P \Rightarrow Q$» est vraie.

**Exemple 1.8**

Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

**Solution**

On suppose que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. On a $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$, alors $a(1+a) = b(1+b)$, d'où $a + a^2 = b + b^2$, donc $a^2 - b^2 = b - a$, ce qui implique que $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$, alors $a - b \neq 0$. En divisant par $a - b$, on obtient $a + b = -1$, contradiction car $a, b \geqslant 0$.

### 1.2.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type «$\forall x \in E,\ P(x)$» est vraie alors pour chaque $x \in E$ il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse (car la négation de «$\forall x \in E,\ P(x)$» est «$\exists x \in E,\ \bar{P}(x)$»). Trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse c'est trouver un contre exemple à la proposition «$\forall x \in E,\ P(x)$».

**Exemple 1.9**

Montrer que la proposition suivante est fausse: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$.

Un contre exemple à cette proposition est $x = \frac{1}{2}$ donc $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

### 1.2.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$, dépendant de $n$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes:

*Initialisation*: On prouve $P(0)$.

*Hérédité:* On suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que la proposition $P(n+1)$ au rang suivant est vraie.

*Conclusion:* On rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 1.10.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2.2^n = 2^n + 2^n > n + 2^n > n + 1. \text{ (car } 2^n \geqslant 1\text{)}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 1.3 Exercices

**Exercice 1.1.**

1) Montrer que si $n$ est impair, alors $n$ s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.

2) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \left(n^2 - 1\right) \text{ n'est pas divisible par } 8 \Rightarrow n \text{ est pair.}$$

**Exercice 1.2.**

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

**Exercice 1.3.**

Montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0 : (1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

CHAPITRE 2

# Ensembles, applications et relations

## 2.1 Théorie des ensembles

**Définition 2.1**

On définit un *ensemble* comme une collection d'objets rassemblés d'après une propriété commune.

Les objets qui constituent un ensemble s'appellent des *éléments*.

On admet l'existence d'un ensemble unique qui ne contient aucun élément appelé *ensemble vide* et noté $\phi$.

**Exemple 2.1**

L'ensemble des points d'un plan. L'ensemble des nombres entiers.

**Remarque 2.1**

La collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

**Définition 2.2**

On dit que l'élément $x$ *appartient* à l'ensemble $E$ lorsque $x$ fait partie des éléments qui constituent l'ensemble $E$ et on le note par $x \in E$. La négation de cette relation s'écrit $x \notin E$ :«$x$ *n'appartient pas* à $E$».

### 2.1.1 Ensembles finis

**Définition 2.3**

On appelle *ensemble fini* tout ensemble $E$ qui contient un nombre fini d'éléments qu'on le note $card(E)$ et on l'appelle *cardinal* de $E$.

**Exemple 2.2**

Soit $E = \{x, y, z, u, v, w\}$ , alors $card(E) = 6$.

**Remarque 2.2**

On a $card(\phi) = 0$.

### 2.1.2 Opérations sur les ensembles

**Inclusion**

**Définition 2.4**

Un ensemble $A$ est *inclus* dans un ensemble $E$ si tout élément de $A$ appartient à $E$ et on écrit $A \subset E$. On dit aussi que $A$ est une *partie* de $E$ ou que $A$ est un *sous ensemble* de $E$. On a toujours $E \subset E$.

Mathématiquement, on écrit

$$A \subset E \Leftrightarrow \forall x / x \in A \Rightarrow x \in E.$$

S'il existe au moins un élément de $A$ qui n'appartient pas à $E$, alors $A$ n'est pas inclus dans $E$ et on écrit $A \not\subset E$

$$A \not\subset E \Leftrightarrow \exists x / x \in A \text{ et } x \notin E.$$

**Exemple 2.3**

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

L'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble $E$.

### Egalité

**Définition 2.5**

Deux ensembles $E$ et $F$ sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre.

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

L'ensemble de *toutes les parties d'un ensemble* est noté $\mathcal{P}(E)$. On l'appelle aussi l'ensemble de tous les *sous-ensembles* de $E$. On a toujours $\phi \subset \mathcal{P}(E)$ et $E \subset \mathcal{P}(E)$. On a auusi $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$.

**Proposition 2.1**

Soit $E$ un ensemble fini tel que $card(E) = n$, alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

**Exemple 2.4**

Soit $E = \{a, b\}$ , $card(E) = 2$. Alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$

Clairement, on a $card(\mathcal{P}(E)) = 2^2 = 4$.

### Réunion

**Définition 2.6**

On appelle *réunion* de deux ensembles $A$ et $B$, noté $A \cup B$, l'ensemble formé des éléments $x$ appartenant à $A$ ou $B$. On a

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

**Définition 2.7**

On appelle *intersection* de deux ensembles $A$ et $B$, noté $A \cap B$, l'ensemble formé des éléments $x$ appartenant à $A$ et $B$. On a

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Deux ensembles sont dits *disjoints* si leur intersection est égale à l'ensemble vide:
$A \cap B = \phi$.

**Exemple 2.5**

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Alors on a $A \cap B = \{4, 5, 6\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**Proposition 2.2**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. Alors on a les propriétés suivantes

1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5) $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$, $A \cup \phi = A$ et $A \cap \phi = \phi$.

6) $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$, $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.

### 2.1.3 Ensemble complémentaire

**Définition 2.8**

Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. On appelle *complémentaire* de $A$ dans $E$, l'ensemble noté $C_E A$ ou $A^c$ des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $A$.

$$C_E A = A^c = \{x \in E / x \notin A\}.$$

**Exemple 2.6**

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $A = \{1, 4, 6, 7, 9\}$, donc $C_E A = \{2, 3, 5, 8\}$.

**Proposition 2.3**

Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux parties de $E$ ($A \subset E$ et $B \subset E$), alors

1) $A \subset B \Leftrightarrow (C_E B) \subset (C_E A)$.

2) $C_E (C_E A) = A$.

3) $C_E (A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$.

4) $C_E (A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$.

### 2.1.4 Partition d'un ensemble

**Définition 2.9**

Soit $E$ un ensemble, on appelle *partition* de $E$ toute famille $\mathcal{F} = (E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ formée de parties non vides de $E$ qui vérifie les deux conditions suivantes

1) Les parties sont deux à deux disjointes

$$\forall\ 1 \leqslant i, j \leqslant n : i \neq j : E_i \cap E_j = \phi.$$

2) Leur réunion est égale à $E$

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i = E.$$

**Exemple 2.7**

1) Soit $E$ un ensemble non vide et $A \subset E$. La famille $\mathcal{F} = \{A, C_E A\}$ est une partition de $E$ car $A \cap (C_E A) = \phi$ et $A \cup (C_E A) = E$.

2) Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La famille $\mathcal{F} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{5\}, \{8\}, \{7, 9\}\}$ est une partition de $E$.

### 2.1.5 Ensemble produit

**Définition 2.10**

On appelle ensemble *produit cartésien* de deux ensembles $A$ et $B$, l'ensemble noté $A \times B$ de tous les couples ordonnés $(x, y)$ tels que $x \in A$ et $y \in B$

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

On a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y', \\ (x, y) &\neq (y, x) \text{ si } x \neq y. \end{aligned}$$

**Exemple 2.8**

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{x, y, z\}$, alors

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y), (3, z)\} \\ B \times A &= \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3**

On a $(A \times B) \neq (B \times A)$ et $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

**Proposition 2.4**

On a

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

3) Si $card(A) = n$ et $card(B) = m$, alors $card\,(A \times B) = n.m$.

### 2.1.6 Différence et différence symétrique

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, on appelle *différence* de $A$ et $B$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ et n'appartiennent pas à $B$. On écrit $A \backslash B$.

$$A \backslash B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle différence symétrique de $A$ et $B$ l'ensemble noté $A \triangle B$ et défini par

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

## 2.2 Applications

**Définition 2.11**

On appelle *application* d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$, toute correspondance notée $f$ entre les éléments de $E$ et ceux de $F$ qui à tout élément $x$ de $E$ fait correspondre un unique élément $y$ de $F$ noté $f(x)$.

$y = f(x)$ est appelé *image* de $x$ par $f$ et $x$ est un antécédant de $y$. L'ensemble $E$ est l'ensemble de *départ* et $F$ est l'ensemble d'*arrivée* de l'application $f$.

Une application entre $E$ et $F$ est représentée par

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \longrightarrow F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

D'autre part, une correspondance $f$ entre deux ensembles non vides $E$ et $F$ est une application si et seulement si

$$\forall x, x' \in E : x = x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

**Exemple 2.9**

1) L'application

$$\begin{array}{rcl} Id_E & : & E \longrightarrow E \\ x & \longmapsto & y = Id_E(x) = x \end{array}$$

est appelée application *identité* sur $E$.

2) L'application

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \longrightarrow F \\ x & \longmapsto & y = f(x) = a, \ a \in F \end{array}$$

est dite application *constante*.

**Définition 2.12**

On dit que deux applications $f$ et $g$ sont égales si

1) Elles ont un même ensemble de départ $E$ et un même ensemble d'arrivée $F$.

2) $\forall x \in E, \ f(x) = g(x)$.

**Exemple 2.10**

Les applications suivantes sont différentes ($f \neq g \neq h \neq k$)

$$\left\{ \begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. .$$

**Définition 2.13**

On appelle graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$, l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), \ x \in E\}.$$

Le graphe $\Gamma_f$ est un sous ensemble du produit $E \times F$.

### 2.2.1 Composition d'applications

**Définition 2.14**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on note $g \circ f$ l'application de $E$ dans $G$ définie par

$$\forall x \in E, \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Cette application est appelée *composée* de $f$ et $g$. On a

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g \circ f}$$

En général, on a $g \circ f \neq f \circ g$ mais $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

**Exemple 2.11.** Soient

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto \frac{1}{x^2+1} \end{array},$$

alors

$$\underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}^+}_{g \circ f}.$$

Donc

$$\begin{array}{rl} g \circ f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2+1} = \frac{1}{x^2+1+1} = \frac{1}{x^2+2}. \end{array}$$

### 2.2.2 Restriction et prolongement d'une application

**Définition 2.15**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient $A$ et $B$ deux ensembles tels que $A \subset E \subset B$.

1) On appelle *restriction* de $f$ à $A$, l'application $g : A \to F$, telle que $\forall x \in A : g(x) = f(x)$. On note $g = f_{/A}$.

2) On appelle *prolongement* de $f$ à $B$, toute application $h : B \to F$ telle que $f$ est la restriction de $h$ à $E$.

**Exemple 2.12.** Soient

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{array}, \quad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln|x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(2|x| - x) \end{array}.$$

On a $g$ et $h$ sont deux prolongements différents de $f$ à $\mathbb{R}$ et $f$ est une restriction de $g$ et de $h$ à $\mathbb{R}^+$.

### 2.2.3 Image directe et image réciproque

**Définition 2.16**

Soient $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

1) On appelle *image directe* de $A$ par $f$, l'ensemble des images des éléments de $A$, noté $f(A)$ telle que

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\} \subset F.$$

2) On appelle *image réciproque* de $B$ par $f$, l'ensemble des antécédants des éléments de $B$ noté $f^{-1}(B)$ telle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\} \subset E.$$

On a

$$\forall y \in F,\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x)$$

et

$$\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

**Proposition 2.5**

Soient $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset F$ et $D \subset F$, alors on a

1) $f\left(A \cup B\right) = f(A) \cup f(B)$.

2) $f\left(A \cap B\right) \subset \left(f(A) \cap f(B)\right)$.

3) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

5) $f^{-1}(C_F\left(D\right)) = C_E\left(f^{-1}(D)\right)$.

6) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ et $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

7) $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$ et $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$.

### 2.2.4 Applications injectives, surjectives et bijectives

**Définition 2.17.** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, alors

1) $f$ est *injective* si tout élément de $F$ possède *au plus* un antécédant. C-à-d

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x, x' \in E : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

2) $f$ est *surjective* si tout élément de $F$ possède *au moins* un antécédant. C-à-d

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E / y = f(x).$$

3) $f$ est *bijective* si tout élément de $F$ possède *exactement* un *seul* antécédant. C-à-d

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E / y = f(x).$$

L'application $f$ est *bijective* si elle est *injective* et *surjective.*

**Exemple 2.13.** L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas injective ni surjective.

### 2.2.5 Application inverse

Si $f$ est une application *bijective* alors elle possède une application *inverse* ou *réciproque* notée $f^{-1}$ telle que

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} & : & F \longrightarrow E \\ y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

et on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

On a aussi

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E.$$

**Proposition 2.6**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications

1) Si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

2) Si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

3) Si $f$ et $g$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**Proposition 2.7**

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une application unique $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

L'application $g$ n'est que l'application réciproque de $f$ $(g = f^{-1})$.

**Proposition 2.8**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

3) $g \circ f$ injective et $f$ surjective $\Rightarrow g$ injective.

2) $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\Rightarrow f$ surjective.

## 2.3 Relations binaires

**Définition 2.18**

On appelle *relation* $\mathcal{R}$ de $E$ vers $F$ toute partie du produit cartésien $E \times F$. Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une *relation binaire* sur $E$.

**Définition 2.19**

Soit $E$ un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre les éléments de $E$, on dit que

1) $\mathcal{R}$ est *réflexive* $\Leftrightarrow \forall x \in E : x\mathcal{R}x$.

2) $\mathcal{R}$ est *symétrique* $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

3) $\mathcal{R}$ est *transitive* $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E : x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

4) $\mathcal{R}$ est *anti-symétrique* $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

### 2.3.1 Relations d'équivalence

**Définition 2.20**

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle est *réflexive, symétrique* et *transitive.*

On appelle *classe d'équivalence* d'un élément $x \in E$, l'ensemble $\dot{x} = \{y \in E;\ x\mathcal{R}y\}$.

On appelle *ensemble quotient* de $E$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de $E$. Cet ensemble est noté $E/\mathcal{R}$.

**Exemple 2.14**

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

1) On a $\forall x \in \mathbb{R} : x - x = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ est *réflexive.*

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x - y = 0 \Rightarrow y - x = 0$, alors $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est *symétrique.*

3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 0 \tag{*}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y - z = 0. \tag{**}$$

De $(**)$, on trouve $y = z$ et on remplace dans $(*)$, on obtient $x - z = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}z \Rightarrow \mathcal{R}$ est *transitive.*

Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

### 2.3.2 Relations d'ordre

**Définition 2.21**

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* si elle est *réflexive, anti-symétrique* et *transitive.*

**Définition 2.22**

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble $E$.

1) On dit que deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont *comparables* si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

2) On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre total* ou que $E$ est *totalement ordonné* par $\mathcal{R}$ si tous les éléments de $E$ sont comparables deux à deux. Sinon, on dit que la relation $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre partiel* ou que $E$ est *partiellement ordonné* par $\mathcal{R}$.

**Exemple 2.15**

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqslant y$$

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

1) On a $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ est *réflexive.*

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ et } y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y \leqslant x.$$

Ceci implique que $x = y$. Donc $\mathcal{R}$ est *anti-symétrique.*

3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ et } y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y \leqslant z.$$

On obtient

$$x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est *transitive.*

Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

On a $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, alors $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

## 2.4 Exercices

**Exercice 2.1.**

Soit $X$ et $Y$ deux ensembles. Montrer que

1) $X \subset Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X$

2) $X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y$

**Exercice 2.2.**

Soit $E$ un ensemble et soient $A$, $B$ et $C$ trois parties de $E$. Montrer que

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

3) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

**Exercice 2.3.**

1) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

2) Calculer $A \Delta A$ et $A \Delta \Phi$. Que peut-on déduire.

**Exercice 2.4.**

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2$

3) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 1$

**Exercice 2.5.**

On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \backslash \{2\} \rightarrow F \\ x & \mapsto & \dfrac{x+5}{x-2} \end{array}$$

où $F$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Déterminer $F$ pour que l'application $f$ soit bijective et donner $f^{-1}$.

**Exercice 2.6.**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et que si $f$ est surjective alors on a égalité.

2) $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que si $f$ est injective alors on a égalité.

**Exercice 2.7. (Proposition 2.8)**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que

1) $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

2) $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

3) $g \circ f$ injective et $f$ surjective $\Longrightarrow g$ injective.

4) $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\Longrightarrow f$ surjective.

**Exercice 2.8.**

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

**Exercice 2.9.**

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation binaire de divisibilité notée / par

$$a/b \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : aq = b.$$

Montrer que / est une relation d'ordre partiel.

CHAPITRE 3

# Fonctions réelles d'une variable réelle

## 3.1 Généralités

**Définition 3.1**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Une *fonction* $f$ de $E$ dans $F$ est une correspondance qui associe à tout élément $x$ de $E$ un élément $y = f(x) \in F$. On la note

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \longrightarrow F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

L'ensemble $E$ est le *domaine de définition* de $f$, on le note par $\mathcal{D}_f$.

Si $E$ et $F$ sont deux sous ensembles de $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est appelée *fonction réelle d'une variable réelle.*

**Définition 3.2.** Une fonction réelle $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

- *Paire* si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.
- *Impaire* si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.
- *Périodique* de période $T$ si $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$.
- *Bornée* si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour $m$, $M \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f$.
- *Croissante* (resp *strictement croissante*) si $\forall x, y \in \mathcal{D}_f : x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp $f(x) < f(y)$).

- *Décroissante* (resp *strictement décroissante*) si $\forall x, y \in \mathcal{D}_f : x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ (resp $f(x) > f(y)$).
- *Monotone* (resp *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp strictement croissante ou strictement décroissante).

**Proposition 3.1**

La composée de deux fonctions monotones est une fonction monotone. Plus précisément: La composée de deux fonctions ayant le *même sens de variation* est une fonction *croissante* et la composée de deux fonctions ayant des *sens de variation différents* est une fonction *décroissante. C-à-d*

$$
\begin{aligned}
&1)\ \{f \nearrow \text{ et } g \nearrow\} \ \Rightarrow \ (g \circ f) \nearrow \\
&2)\ \{f \searrow \text{ et } g \searrow\} \ \Rightarrow \ (g \circ f) \nearrow \\
&3)\ \{f \nearrow \text{ et } g \searrow\} \ \Rightarrow \ (g \circ f) \searrow \\
&4)\ \{f \searrow \text{ et } g \nearrow\} \ \Rightarrow \ (g \circ f) \searrow
\end{aligned}
$$

**Théorème 3.1**

Toute fonction strictement monotone sur un intervalle $A$ est une bijection de $A$ sur $f(A)$. De plus, la fonction réciproque $f^{-1}$ est strictement monotone sur $f(A)$ et varie dans le même sens que $f$.

**Proposition 3.2**

Toute fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrir de manière unique comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire. On a

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x),$$

telles que $g$ est une fonction paire et $h$ est une fonction impaire.

**Proposition 3.3**

Si $f$ et $g$ ont même parité alors $f.g$ est paire. Si elles sont de parité contraires alors $f.g$ est impaire.

La fonction $\frac{1}{f}$ est de même parité que $f$.

Si $f$ et $g$ sont paires (resp impaires) alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ est paire (resp impaire).

**Proposition 3.4**

Si $f$ est $T-$périodique, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f$ est $nT-$périodique.

Si $f$ et $g$ sont $T-$périodiques alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ et $f.g$ sont $T-$périodiques.

Si $f$ est $T-$périodique, alors $\frac{1}{f}$ est $T-$périodique.

Si $f$ est $T-$périodique, alors $\forall g : g \circ f$ est $T-$périodique.

## 3.2 Limite d'une fonction

**Définition 3.3.** Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert contenant $x_0$.

**Définition 3.4**

On dit qu'une fonction $f$ définie au voisinage de $x_0$, *sauf peut être en* $x_0$, a une *limite* $l$ *au point* $x_0$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ ou } f \to l \text{ quand } x \to x_0$$

**Exemple 3.1**

La limite de $f(x) = 3x - 2$ quand $x \to 1$ est égale à 1. On a

$$|f(x) - 1| = |3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0,\ \forall x \neq 1 : |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

**Remarque 3.1**

Pour prouver que $f$ n'admet pas pour limite le nombre $l$ quand $x \to x_0$, on prend la négation logique de la définition.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x : |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geqslant \varepsilon.$$

**Théorème 3.2 (Unicité de la limite):**

Si $f$ admet une limite au point $x_0$, cette limite est *unique*.

### 3.2.1 Limite à droite, limite à gauche

**Définition 3.5**

On dit que $f$ a une *limite à droite* (resp *à gauche*) au point $x_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \neq x_0 : x_0 < x < x_0 + \eta \text{ (resp } x_0 - \eta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si la limite existe, alors la limite à droite et la limite à gauche existent et sont égales à cette limite.

Si la limite à droite et la limite à gauche existent et sont égales, la limite existe.

### 3.2.2 Limite à l'infini

**Définition 3.6**

On a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x : x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x : x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

### 3.2.3 Limite infinie

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Si $x_0 = +\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x : x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x : x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

Si $x_0 = -\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x : x < -B \Rightarrow f(x) > A.$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x : x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

### 3.2.4 Théorèmes sur les limites

**Théorème 3.3**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$ , alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}, x_n \in [a, b]\ \ x_n \neq x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \text{on a } \lim f(x_n) = l.\ (l \text{ fini ou infini}).$$

**Théorème 3.4**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour que la limite finie $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a, b[\,,\ \forall x', x'' \in [a, b[\, : x' > c \text{ et } x'' > c \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

**Théorème 3.5 (des gendarmes)**

Soient $f, g$ et $h$ trois fonctions réelles, $x_0$ un point fixé et $\delta > 0$.

Si pour tout $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a :

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

et si

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

**Proposition 3.5**

Supposons que $f(x) = g(x)h(x)$. Si $h(x)$ est bornée sur un voisinage de $x_0$ et si $g(x) \to 0$ quand $x \to x_0$, alors $f(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.

### 3.2.5 Opérations sur les limites

**Théorème 3.6**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ (finie) et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ (finie), alors on a

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = ll'$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$, si $l' \neq 0$.

6) $f(x) < g(x) \Rightarrow l \leqslant l'$.

### 3.2.6 Formes indéterminées

On dit qu'on a une forme indéterminée si on rencontre l'une des cas suivants

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g) = \infty - \infty$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g) = 0.\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{0}{0}$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\infty}{\infty}$.

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f^g = 1^\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f^g = \infty^0$.

7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f^g = 0^0$.

Lever l'indétermination c'est chercher la limite dans les conditions considérées.

Pour les trois derniers cas, on peut les ramener à la forme $0.\infty$ par passage au logarithme. En effet, si $y = (f(x))^{g(x)}$, alors

$$\ln y = \ln (f(x))^{g(x)} = g(x) \ln f(x),$$

puis on cherche la limite, si

$$\lim_{x\to x_0} \ln y = k, +\infty, -\infty,$$

alors

$$\lim_{x\to x_0} y = e^k, +\infty, 0.$$

Soit $f$ et $g$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Si

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-1)\, g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lambda}.$$

En effet: on pose

$$(f(x))^{g(x)} = \left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)}$$

et on applique la relation

$$\lim_{X\to 0} (1+X)^{\frac{1}{X}} = e.$$

### 3.2.7 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point, notation de Landau

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage du point $x_0$, sauf peut être en $x_0$.

**Définition 3.7**

On dit que $f$ est *négligeable* devant $g$ quand $x \to x_0$ (ou en $x_0$) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\,.$$

On note alors $f = \circ(g)$.

**Définition 3.8**

On dit que $f$ est *dominée* par $g$ quand $x \to x_0$ (ou en $x_0$) si

$$\exists\ k > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant k\, |g(x)|\,.$$

On note alors $f = O(g)$.

Les symboles $\circ$ et $O$ s'appelent notation de Landau.

**Proposition 3.6**

On suppose que $g$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$, alors

1) $f = \circ(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

2) $f = O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $x_0$.

3) Si $g = 1$, alors

$$f = \circ(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

et

$$f = O(1) \Leftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } x_0.$$

**Proposition 3.7**

On a les propriétés suivantes

1) $f = \circ(g) \Rightarrow f = O(g)$.

2) $f = \circ(h)$ et $g = \circ(h) \Rightarrow f + g = \circ(h)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f = \circ(h)$.

3) $f = O(h)$ et $g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f = O(h)$.

4) $f = \circ(h)$ et $g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$.

5) $f = \circ(g) \Leftrightarrow f = g.h$, $h = \circ(1)$.

6) $f = O(g) \Leftrightarrow f = g.h$, $h = O(1)$.

7) $f = \circ(gh) \Leftrightarrow f = g. \circ (h)$.

8) $f = O(gh) \Leftrightarrow f = g.O(h)$.

9) $f = \circ(h)$ et $g = \circ(k) \Rightarrow f.g = \circ(h.k)$.

10) $f = O(h)$ et $g = O(k) \Rightarrow f.g = O(h.k)$.

11) $f = \circ(h) \Rightarrow f^\alpha = \circ(h^\alpha)$, $\forall \alpha > 0$.

**Fonctions équivalentes**

**Définition 3.9**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage de $x_0$, sauf peut être en $x_0$. on dit que $f$ est équivalente à $g$ lorsque $x \to x_0$ (ou en $x_0$) si $f - g = \circ(f)$, $x \to x_0$. On note $f \sim g$ ou $f \sim_{x_0} g$.

**Remarque 3.2**

S'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f$ et $g$ ne s'annulent pas dans $V \backslash x_0$ alors

$$f \sim g \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

**Proposition 3.8**

On a les propriétés suivantes

1) $f \sim g$ et $g = \circ(h) \Rightarrow f = \circ(h)$.

2) $f \sim g$ et $g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$.

3) $f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

4) $f \sim_{x_0} g \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

5) $f \sim g$ et $h \sim k \Rightarrow f.h \sim g.k$.

6) $f \sim g$ et $h \sim k \Rightarrow \frac{f}{h} \sim \frac{g}{k}$, $h, k \neq 0$.

7) $f \sim g \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}$, $f^\alpha \sim g^\alpha$. (Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on suppose que $f, g > 0$), $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$.

8) $f \sim h$ et $g = \circ(f) \Rightarrow (f + g) \sim h$.

**Proposition 3.9**

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\begin{aligned}
\textbf{1)}\ \lim_{x \to +\infty} x^\beta e^{-\alpha x} &= 0.\ (x^\beta = \circ(e^{\alpha x}) \text{ en } +\infty). \\
\textbf{2)}\ \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} &= 0.\ (e^{\alpha x} = \circ(|x|^{-\beta}) \text{ en } -\infty). \\
\textbf{3)}\ \lim_{x \to +\infty} x^{-\beta} \ln^\gamma x &= 0.\ (\ln^\gamma x = \circ(x^\beta) \text{ en } +\infty). \\
\textbf{4)}\ \lim_{x \to 0} x^\beta |\ln^\gamma x| &= 0.\ (|\ln^\gamma x| = \circ(x^{-\beta}) \text{ en } 0).
\end{aligned}$$

**Proposition 3.10**

En 0 on a $\sin x \sim x$, $tgx \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^m - 1 \sim mx$ et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

Si $P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ est un polynôme de degré $n$. ($a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$ et $n > m$), alors

1) Au voisinage de 0, $P(x) \sim a_m x^m$. (monôme de plus bas degré).

2) Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \sim a_n x^n$. (monôme de plus haut degré).

## 3.3 Fonctions continues

### 3.3.1 Continuité en un point

**Définitions 3.10**

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $I$ étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On dit que $f$ est *continue* en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. C-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2) $f$ est *continue à droite* en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. C-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3) $f$ est *continue à gauche* en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. C-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$f$ est continue à droite et à gauche en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en $x_0$.

$f$ est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in I$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

### 3.3.2 Continuité sur un intervalle

**Définition 3.11**

Une fonction définie sur un intervalle $I$ est dite *continue sur* $I$ si elle est continue en tout point de $I$.

L'ensemble des fonctions continues sur $I$ se note $C(I)$.

**Exemple 3.2**

1) Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 3.11**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $I$, alors

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha f + \beta g)$ est continue sur $I$.

2) $f.g$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur $I$. ($g$ ne s'annule pas sur $I$).

### 3.3.3 Continuité uniforme

**Définition 3.12**

Une fonction définie sur un intervalle $I$ est dite *uniformément continue sur $I$* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I : |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Remarques 3.3**

1) La continuité uniforme est une propriété de la fonction sur tout l'intervalle alors que la continuité peut être définie en un point.

2) Dans la définition de la continuité uniforme, le nombre $\eta$ dépend seulement de $\varepsilon$, alors que pour la continuité en $x_0$, $\eta$ dépend de $\varepsilon$ et $x_0$.

3) $f$ uniformément continue $\Rightarrow$ $f$ continue.

4) Pour montrer qu'une fonction $f$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in I : |x-y| < \eta \text{ mais } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

**Théorème 3.7**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

### 3.3.4 Fonctions lipschitziennes

**Définition 3.13**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que $f$ est *lipschitzienne* s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leqslant k\, |x-y|.$$

$f$ est dite $k-$*lipschitzienne.*

**Proposition 3.12**

1) $f$ est $k-$lipschitzienne $\Rightarrow$ $f$ est uniformément continue.

2) Si $f$ est $k-$lipschitzienne sur $I$, alors $\forall \lambda > k$, $f$ est $\lambda-$lipschitzienne sur $I$.

3) Si $f$ est $k-$lipschitzienne sur $I$ avec $k < 1$, on dit que $f$ est *contractante* sur $I$.

4) Si $f$ est $k-$lipschitzienne sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, alors $f$ est $k-$lipschitzienne sur $[a,b]$.

5) Si $f$ et $g$ sont $k-$lipschitziennes sur $I$, alors $(f+g)$ est $k-$lipschitzienne sur $I$.

6) Si $f$ est $k-$lipschitzienne sur $I$, alors $\alpha f$ est $(|\alpha| .k)-$lipschitzienne sur $I$.

### 3.3.5 Théorèmes sur les fonctions continues

**Théorème 3.8**

Soit $f : I \to I'$, $g : I' \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $I' \subset \mathbb{R}$. Si $f$ est continue en $x_0 \in I$ et $g$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $(g \circ f)$ est continue en $x_0$.

**Preuve**

On a $g$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall y \in I' : |y - y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon,$$

mais $f$ est continue en $x_0$, alors on peut associer à ce $\eta'$ un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour } \eta' > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |y - y_0| < \eta'.$$

Comme $x \in I \Rightarrow f(x) \in I'$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Donc $(g \circ f)$ est continue en $x_0$.

**Théorème 3.9**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors *il existe au moins* un point $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

**Théorème 3.10**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$, alors pour tout réel $c$ compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, $\exists\ x_0 \in ]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

**Preuve**

Supposons que $f(x_1) < f(x_2)$, soit $c$ tel que $f(x_1) < c < f(x_2)$. Considérons la fonction $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - c$. On a

1) $g$ est continue sur $[x_1, x_2]$.

2) $g(x_1) = f(x_1) - c < 0$ et $g(x_2) = f(x_2) - c > 0$.

Donc d'après le théorème 3.9, $\exists\ x_0 \in ]x_1, x_2[$ tel que $g(x_0) = 0$. Alors $f(x_0) = c$.

### 3.3.6 Prolongement par continuité

**Définition 3.14.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, sauf peut être en $x_0 \in I$. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (finie). La fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l \qquad \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en $x_0$. On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement par continuité* de $f$.

**Exemple 3.3**

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$. On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. La fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \qquad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de $f$ au point $x_0 = 0$.

## 3.4 Fonctions dérivables

### 3.4.1 Dérivée d'une fonction en un point

**Définition 3.15**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On dit que $f$ est *dérivable* au point $x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Cette limite est appelée *dérivée* de $f$ au point $x_0$ et notée $f'(x_0)$.

**Remarques 3.4**

1) La définition précédente permet d'écrire

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

2) Une définition équivalente est

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3) $f$ dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en $x_0$.

**Preuve**

3) Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \varepsilon(x) = 0$$

Donc $f$ est continue en $x_0$.

**Exemple 3.4**

Etudions la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ au point $x_0 = 1$. On a

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'(1).$$

**Dérivée à droite, dérivée à gauche**

**Définition 3.16**

Si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie, on l'appelle *dérivée à droite* de $f$ au point $x_0$.

Si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie, on l'appelle *dérivée à gauche* de $f$ au point $x_0$.

On a

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

**Exemples 3.5**

1) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Si $x > 0$, $f(x) = x$, d'où

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Si $x < 0$, $f(x) = -x$, d'où

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

On a alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

3) Soit

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases},$$

on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x},\ \text{n'existe pas car si } \frac{1}{x} \to +\infty,\ \sin\frac{1}{x} \text{ oscille entre } -1 \text{ et } 1.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

### 3.4.2 Dérivée sur un intervalle, fonction dérivée

**Définition 3.17**

On dit que $f$ est *dérivable sur* $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$.

L'application

$$\begin{array}{rcl} f' & : & I \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée *fonction dérivée* de $f$ et notée $f'$ ou $Df$ ou $\frac{df}{dx}$.

### 3.4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I$, alors

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha.f + \beta.g)$ est dérivable sur $I$ et on a

$$(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$$

2) $(f.g)$ est dérivable sur $I$ et on a

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n$ est dérivable sur $I$ et on a

$$(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$$

3) Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}.$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$ sont deux fonctions dérivables, alors $(g \circ f)$ est dérivable sur $I$ et on a

$$(g \circ f)' = f'.\left(g'(f)\right)$$

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et strictement monotone donc $f$ est bijective de $I$ sur $J \subset \mathbb{R}$. Si $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et on a

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

**Exemples 3.6**

On a $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos ax)' = -a \sin ax$, $(e^x)' = e^x$, $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x).e^{f(x)}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

### 3.4.4 Dérivées d'ordre supérieur

**Définition 3.18**

Si la fonction $f'$ admet une dérivée on l'appelle *dérivée seconde* de $f$ et on la note

$f''(x) = (f'(x))'$.

On définit par récurrence les *dérivées successives* de $f$.

La *dérivée $n-$ième* ou *d'ordre $n$* de $f$, notée $f^{(n)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto f^{(n-1)}(x) : f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

**Exemple 3.7**

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(3)}(x) = -\cos x$
$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x...$

### 3.4.5 Fonctions de classe $C^k$

**Définition 3.19**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, On dit que $f$ est *de classe* $C^k$ sur $I$ et on note $f \in C^k(I)$ si $f$ est $k$ fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue sur $I$ $(k \in \mathbb{N})$. En particulier, on a

$$f \in C^0(I) \Leftrightarrow f \text{ est continue}$$

et

$$f \in C^1(I) \Leftrightarrow f' \text{ existe et elle est continue.}$$

On dit que $f$ est *de classe* $C^\infty$ si elle est *indéfiniment dérivable* sur $I$.
Si $f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(I)$, alors $(f+g) \in C^n(I)$ et on a

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

**Exemples 3.8**

On a $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\ln x \in C^\infty(\mathbb{R}_*^+)$, $\cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\tan x \in C^\infty\left(\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

### 3.4.6 Dérivée $n-$*ième* d'un produit

**Théorème 3.11** (Formule de Leibnitz)

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions qui admettent des dérivées $n-$*ièmes* sur $I$, alors $(f.g)$ admet une dérivée $n-$*ième* sur $I$ donnée par

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=}^{n} C_n^k . f^{(k)} . g^{(n-k)}$$

où

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

et

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$$

### 3.4.7 Rolle et accroissements finis

**Théorème de Rolle**

**Théorème 3.12 (Rolle).** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
**Cas particulier.** Si $f(a) = f(b) = 0$, le théorème de Rolle s'énonce comme suit: entre deux zéros de la fonction $f$, il existe un zéro de la dérivée $f'$.

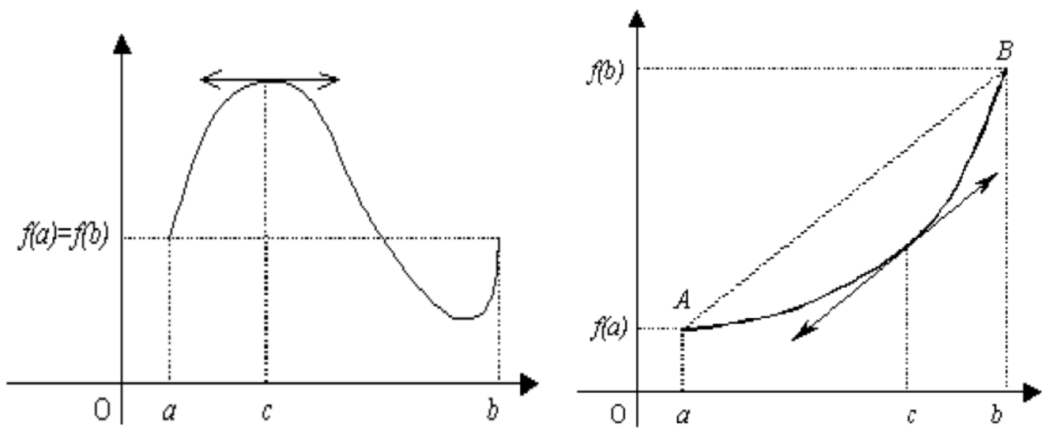
**Théorème des accroissements finis**

**Théorème 3.13 (Accroissements finis).** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c).$$

**Interprétation géométrique**

Sur la partie $AB$ correspondant à l'intervalle $[a, b]$ du graphe de $f$, il existe au moins un point $c$ distinct de $A$ et $B$, pour lequel
La tangente à la courbe est horizontale. (Rolle).
La tangente à la courbe est parallèle à la droite $AB$. (Accroissements finis).




Rolle                Accroissements finis

**Figure 3.1**: Interprétation géométrique des théorèmes de Rolle et d'accroissements finis

### 3.4.8 Règle de l'Hospital

**Théorème 3.14.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I = ]a, b[$ telles que pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$. Supposons que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha, \text{ avec } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pm\infty$$

et

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu, \text{ avec } \mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \ +\infty\}.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

**Remarque 3.5**

La règle reste valable si l'on remplace $a$ par $b$ ou par $\pm\infty$.

**Exemples 3.9**

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2)

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

3)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

4)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^3 \ln x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3 \ln x}\left(\frac{x^3}{x} + 3x^2 \ln x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 3x^2 \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln x} + 3} = \frac{1}{3}.$$

### 3.4.9 Formule de Taylor

Une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ et dérivable en $x_0 \in I$ peut s'écrire (au voisinage de $x_0$) comme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

avec $R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Cela veut dire que $f$ peut être approximée par le polynôme de degré 1

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La *formule de Taylor* généralise ce résultat en montrant que les fonctions $n$ fois dérivables peuvent être approximées (dans un voisinage de $x_0$) par des polynômes de degré $n$ comme suit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

où le polynôme $P_n$ de degré $n$ en $(x - x_0)$ est donné par

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$R_n(x)$ est appelé *reste* d'ordre $n$.

## Formule de Taylor-Lagrange

**Théorème 3.15 (Formule de Taylor-Lagrange)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^{n+1}(I)$ et soit $x_0 \in I$, alors $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

où $c$ est un point strictement compris entre $x_0$ et $x$.

Le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé *reste de Lagrange.*

**Remarque 3.6**

En posant $x - x_0 = h$ et $c = x_0 + \theta(x - x_0) = x_0 + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$, on obtient

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

**Formule de Maclaurin** Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule dite de *Maclaurin* (à l'ordre $n + 1$ avec reste de Lagrange)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in \left]0, 1\right[.$$

## Formule de Taylor-Young

**Théorème 3.16 (Formule de Taylor-Young)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^n(I)$ et soit $x_0 \in I$, alors $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le reste $R_n(x_0, x) = (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ est appelé *reste de Young.*

On peut aussi écrire $R_n(x_0, x) = \circ (x-x_0)^n$, alors on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x-x_0)^n} = 0 = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x).$$

**Formule de Maclaurin-Young** En posant $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Young, on obtient la formule de Maclaurin à l'ordre $n$ avec reste de Young.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

**Exemples 3.10**

**1)** Soit $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in \left]-1, +\infty\right[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Appliquons la formule de Maclaurin avec reste de Young

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \circ(x^n).$$

On a

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha, \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1), \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).
\end{aligned}$$

Alors on trouve

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \circ(x^n).$$

Le reste de Lagrange s'écrit

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\,x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Si $\alpha=-1$, alors la formule de Taylor en $x_0$ s'écrit $(x>-1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n\,x^n+r_n(x),$$

avec

$$r_n(x) = (-1)^{n+1}\,(1+\theta x)^{-n-2}\,x^{n+1} \text{ (reste de Lagrange)}$$

ou

$$r_n(x) = \circ\,(x^n) \text{ (reste de Young).}$$

On peut aussi écrire

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+r_n(x),$$

avec $r_n(x) = (1-\theta x)^{-n-2}\,x^{n+1}$ (reste de Lagrange) ou $r_n(x) = \circ\,(x^n)$ (reste de Young).

**2)** Soit $f(x)=\sqrt{x}$. Trouvons la formule de Taylor pour $f$ avec reste de Young en $x_0=1$ à l'ordre 3.

On pose $y=x-1$, on a $x_0=1 \Rightarrow y_0=0$ et

$$g(y)=f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{1+y}.$$

Donc $g(y)=(1+y)^{\frac{1}{2}}$, $y_0=0$. D'après le premier exemple, on trouve

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y} &= 1+\frac{y}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\circ\left(y^3\right)\\ &= 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}+\circ\left(y^3\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\sqrt{x} = 1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}+\circ\left((x-1)^3\right).$$

**3)** Soit $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\sin 0 &= 0 \\
(\sin x)' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \\
(\sin x)'' &= -\sin x = \sin(x + \pi) \Rightarrow f''(0) = \sin\pi = 0, \\
(\sin x)^{(3)} &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(3)}(0) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin\frac{4\pi}{2} = 0, \\
&\vdots \\
(\sin x)^{(k)} &= \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(x),$$

avec

$$r_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(\sin\theta x)\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ (reste de Lagrange)}$$

ou

$$r_{2n+1}(x) = \circ\left(x^{2n+2}\right) \text{ (reste de Young).}$$

De même on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x),$$

avec

$$r_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(\sin\theta x)\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ (reste de Lagrange)}$$

ou

$$r_{2n}(x) = \circ\left(x^{2n+1}\right) \text{ (reste de Young).}$$

## 3.5 Fonctions inverse des fonctions trigonométriques

### 3.5.1 Fonction arc sinus

Comme $(\sin x)' = \cos x > 0$, $\forall x : |x| < \frac{\pi}{2}$, la restriction de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ : $f = \sin_{/\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ est croissante et bijective. $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.

**Définition 3.20**

La fonction $\arcsin = f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ s'appelle *arc sinus*.

Cette fonction est impaire, strictement croissante et bijective.

On a

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

De plus, $(\arcsin x) \in C^{\infty}\left(]-1, 1[\right)$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arcsin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$.

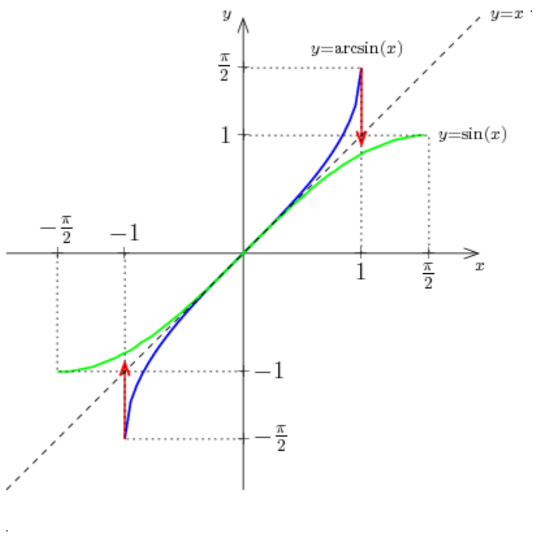



**Figure 3.2.** Graphes des fonctions sinus et arcsinus

### 3.5.2 Fonction arc cosinus

Comme $(\cos x)' = -\sin x < 0$ pour $0 < x < \pi$, la restriction $g = \cos_{/[0,\pi]}$ de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ est strictement décroissante et bijective $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

**Définition 3.21**

La fonction $\arccos = g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ s'appelle *arc cosinus.*

Cette fonction est positive, strictement décroissante et bijective.

On a

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

De plus, $(\arccos x) \in C^{\infty}(]-1, 1[)$ et $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

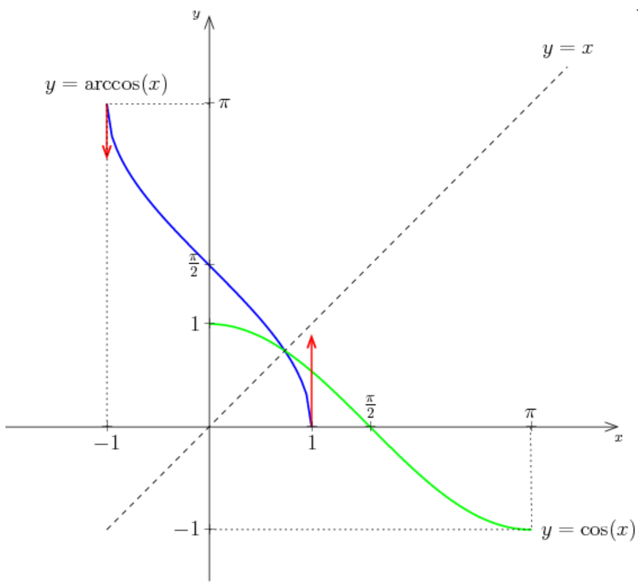



Figure 3.3. Graphes des fonctions cosinus et arccosinus

**Théorème 3.17**

$$\forall x \in [-1, 1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

### 3.5.3 Fonction arc tangente

Comme $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, la restriction de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante et bijective $h = \tan_{/\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$.

**Définition 3.22**

La fonction $\arctan = h^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ s'appelle *arc tangente.*

Cette fonction est impaire, strictement croissante et bijective.

On a

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

De plus, $(\arctan x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ et $(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}$.

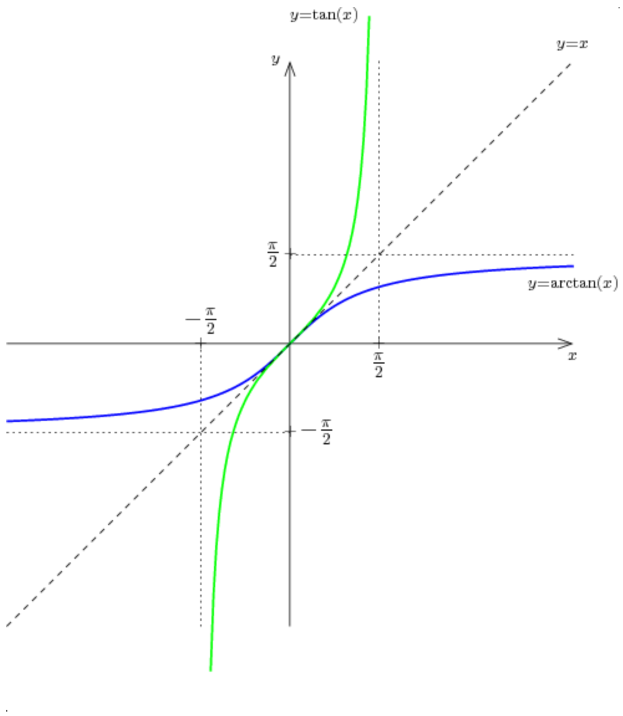



Figure 3.4. Graphes des fonctions tan et arctan

### 3.5.4 Fonction arc cotangente

Comme $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ pour $0 < x < \pi$, la restriction de de la fonction cotangente sur $]0,\pi[$ est strictement décroissante et bijective $k = \cot_{/]0,\pi[} : ]0,\pi[ \to \mathbb{R}$.

**Définition 3.23**

La fonction $\operatorname{arccot} = k^{-1} : \mathbb{R} \to ]0,\pi[$ s'appelle *arc cotangente.*

Cette fonction est strictement décroissante et bijective.

On a

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x \text{ et } 0 < y < \pi.$$

De plus, $(\operatorname{arccot} x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

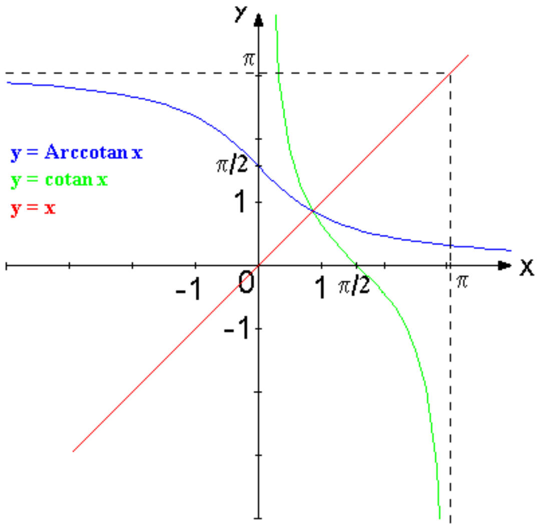



Figure 3.5. Graphes des fonctions cotangente et arccotangente

**Théorème 3.18**

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

## 3.6 Fonctions hyperboliques

**Définition 3.24**

Les fonctions :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{-2x} + 1}, \; \coth x = \frac{1}{thx}, \; x \neq 0.$$

s'appellent respectivement : cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique.

On en déduit que :

$sh\ 0 = 0$, $ch\ 0 = 1$, $th\ 0 = 0$.

$ch(-x) = chx$, $sh(-x) = -shx$.

La fonction $chx$ est paire et $shx$, $thx$ et $\coth x$ sont impaires

**Proposition 3.13**

1)

$$chx + shx = e^x \text{ et } chx - shx = e^{-x}.$$

2)

$$ch^2x - sh^2x = 1,\ 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}.$$

3)

$$ch(x+y) = chx.chy + shx.shy.$$

$$sh(x+y) = shx.chy + shy.chx$$

$$th(x+y) = \frac{thx + thy}{1 - thx.thy}.$$

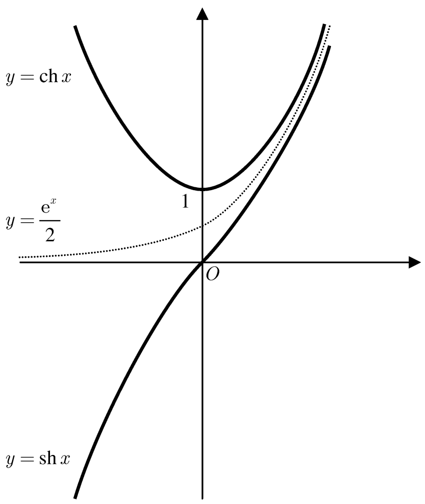
4) $(chx) \in C^\infty(\mathbb{R}), (shx) \in C^\infty(\mathbb{R}), (thx) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$(chx)' = shx$, $(shx)\prime = chx$, $(thx)' = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$.

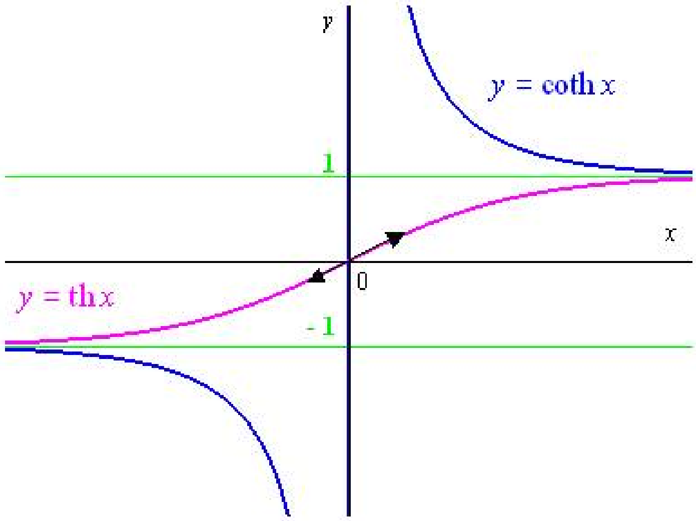
$\coth x \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ et $(\coth x)' = \frac{-1}{sh^2x}$.

5)

$$\lim chx = \begin{cases} +\infty, & x \to +\infty \\ +\infty, & x \to -\infty \end{cases},\quad \lim shx = \begin{cases} +\infty, & x \to +\infty \\ -\infty, & x \to -\infty \end{cases},\quad \lim thx = \begin{cases} 1, & x \to +\infty \\ -1, & x \to -\infty \end{cases}$$




Graphes de ch et sh




Graphes de th et coth

**Figure 3.6.** Graphes des fonctions hyperboliques

# 3.7 Fonctions hyperboliques réciproques

## 3.7.1 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction *sh* est continue, strictement croissante dans $\mathbb{R}$, l'application réciproque est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est appelée *argument sinus hyperbolique* et notée $\arg sh$.

$y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy$

On a aussi $\arg shx = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

En effet, on a

$$ch^2y = 1 + sh^2y,\ chy > 0 \Rightarrow chy = \sqrt{1 + sh^2y} = \sqrt{1 + x^2}.$$

et

$$shy + chy = e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow y = \arg shy = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$(\arg shx) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et on a: $(\arg shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

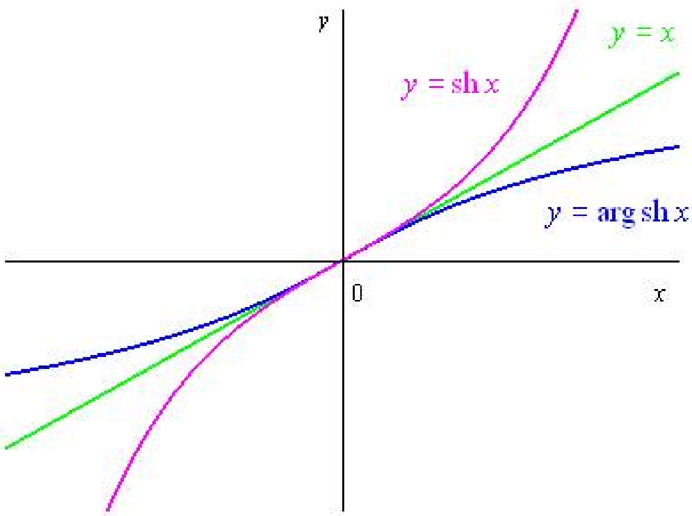



Figure 3.7. Graphes de sh et argsh

### 3.7.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction $ch$ est continue, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, l'application réciproque est définie, continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, elle est appelée *argument cosinus hyperbolique* et notée $\arg ch$. On a

$$\arg chx : [1, +\infty[ \to [0, +\infty[$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \arg chx \\ x \geqslant 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = chy \\ y \geqslant 0 \end{array} \right\}.$$

On a aussi

$$\arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \ x \geqslant 1$$

$(\arg chx) \in C^{\infty}(]1, +\infty[)$ et on a: $(\arg chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

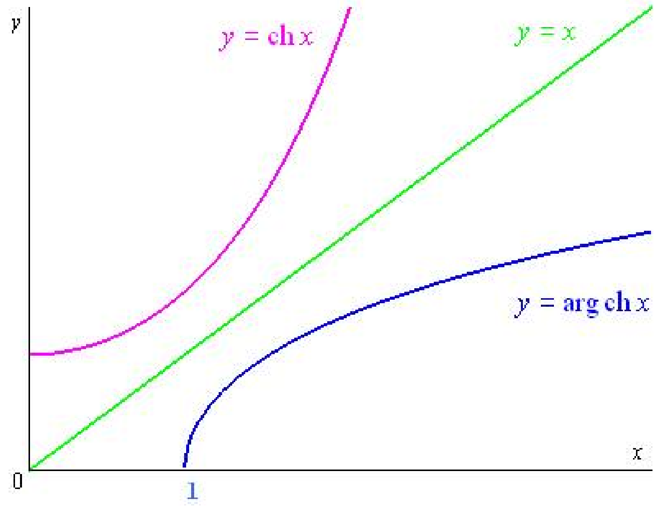



Figure 3.8. Graphes de ch et argch

### 3.7.3 Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction $th$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Elle admet une fonction réciproque continue et strictement croissante appelée *argument tangente hyperbolique* et notée $\arg thx$. On a

$$\arg thx : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} y = \arg thx \\ |x| < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = thy.$$

On a aussi

$$\arg thx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$$

et $(\arg thx) \in C^{\infty}(]-1, 1[)$ et on a: $(\arg thx)' = \frac{1}{1-x^2}$.

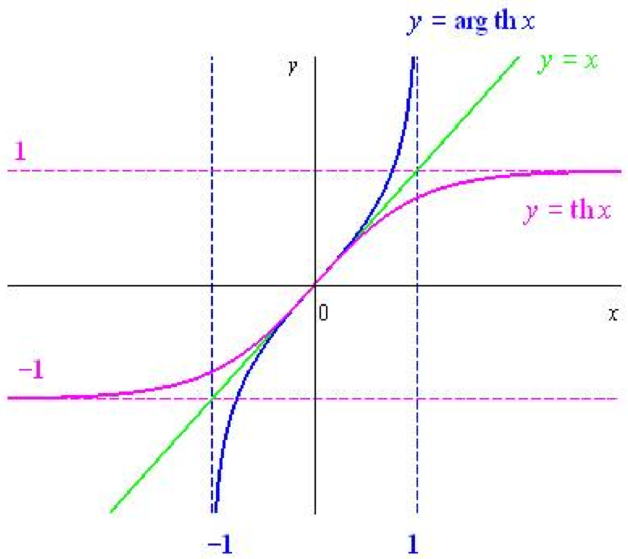



Figure 3.9. Graphes de th et argth

### 3.7.4 Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction coth : $\mathbb{R}^* \to ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ est continue et strictement décroissante, elle admet une fonction réciproque continue et strictement décroissante appelée *argument cotangente hyperbolique* et notée $\arg\coth x$. On a

$$\arg\coth : ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}^*$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} y = \arg\coth x \\ x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \coth y \\ y \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\}.$$

On a aussi

$$\forall x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[\, : \arg\coth x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

et $(\arg\coth x) \in C^\infty(]-\infty, -1[\, \cup\, ]1, +\infty[)$ et on a: $(\arg\coth x)' = \frac{1}{x^2-1}$.

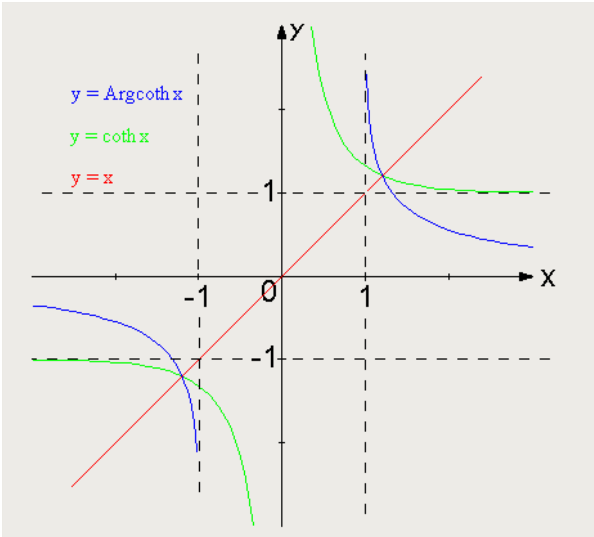



Figure 3.10. Graphes de coth et argcoth

## 3.8 Développement limité

**Définition 3.25.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$.

On dit que $f$ admet un *développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$* ($DLn\,(x_0)$) s'il existe des coefficients réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que

$$\forall x \in I : f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \circ\left((x - x_0)\right)^n .$$

Le polynôme

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

est appelé *partie principale* du développement limité.

**Exemple 3.11.** On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

**Remarques 3.7.**

1) L'existence du développement limité de $f$ implique que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$. Pour que le développement limité de $f$ existe au voisinage de $x_0$, il est donc nécessaire que $f$ tende vers une limite finie quand $x \to x_0$.

2) Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$, ce développement est unique.

3) On peut se ramener du voisinage de $x_0$ à celui de 0 en posant $x - x_0 = y$.

**Définition 3.26. (Développement limité à l'infini)**

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $+\infty$, s'il existe des constantes $c_0, c_1, ..., c_n$ telles que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} \text{ où } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

**Remarques 3.8.**

1) On peut aussi dans ce cas se ramener à l'origine en posant $y = \frac{1}{x}$.

2) Si $f \in C^n(I)\,, x_0 \in I$, alors l'égalité de Taylor-Young prouve l'existence d'un $DLn(x_0)$ de $f$ qui s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ\left((x - x_0)^n\right).$$

**Proposition 3.14**

Si $f$ est une fonction paire (resp impaire) qui admet un $DLn(x_0)$, sa partie principale est un polynôme pair (resp impair).

### 3.8.1 Développements limités usuels

La formule de Taylor-Young donne les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n). \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ\left(x^{2n+2}\right). \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right). \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ(x^n). \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ(x^n). \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n). \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \circ(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \circ(x^n). \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \circ\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + \circ\left(x^{2n+2}\right). \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \circ\left(x^{2n+2}\right).
\end{aligned}$$

### 3.8.2 Opérations sur les développements limités

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n), \ g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \circ(x^n).$$

Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1) x + \cdots + (\alpha a_n + \beta b_n) x^n + \circ(x^n)$.

$f.g$ et $\frac{f}{g}$ admettent des $DLn(0)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq 0$.

**Exemple 3.12.** On a

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\circ\left(x^4\right).\right)$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\circ\left(x^{2n+2}\right).$

3) On a

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\circ\left(x^4\right), \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+\circ\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{e^x}{1-x}=1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\circ\left(x^4\right).$$

### 3.8.3 Développement limité et dérivation

Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ au voisinage de 0. Alors le développement limité de $f'$ en 0 à l'ordre $n$ s'obtient en dérivant terme à terme le $DL(n+1)(0)$ de $f$.

**Exemple 3.13.** On sait que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\circ\left(x^n\right).$$

Par dérivation, on trouve

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+\left(n+1\right)x^n+\circ\left(x^n\right),$$

ou encore

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^3}=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}{2}x^n+\circ\left(x^n\right)$$

### 3.8.4 Développement limité et primitive

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ admet un $DLn(0)$ :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\circ\left(x^n\right).$$

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$ ($F'=f$). Alors $F$ a en 0 un $DL(n+1)$ obtenu par intégration terme à terme de celui de $f$

$$F(x)=F(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+\circ\left(x^{n+1}\right).$$

**Exemples 3.14**

1) $f(x) = \arctan \frac{x+2}{1-2x}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \circ\left(x^7\right)$. Alors
$$f(x) = \arctan 2 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \circ\left(x^8\right).$$

2) On a
$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ\left(x^n\right).$$
Alors
$$F(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ\left(x^{n+1}\right) .(F(0) = \ln 1 = 0).$$

### 3.8.5 Composition de deux développements limités

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que
$$\begin{aligned} f(x) &= a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \circ\left(x^n\right), \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \circ\left(x^n\right). \end{aligned}$$
Alors $g \circ f$ admet un $DLn(0)$.

On pose $X = f(x)$, alors
$$g(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n + \circ\left(X^n\right)$$
et on remplace $X$ par le $DL$ de $f(x)$.

**Exemple 3.15.** Soit
$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \circ\left(x^4\right)$$
et
$$g(X) = 1 + X + 3X^2 - X^3 - X^4 + \circ\left(X^4\right).$$
Posons
$$X = f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + \circ\left(x^4\right),$$
on trouve
$$\begin{aligned} X^2 &= x^2 - 2x^3 + 5x^4 + \circ\left(x^4\right), \\ X^3 &= x^3 - 3x^4 + \circ\left(x^4\right), \\ X^4 &= x^4 + \circ\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= 1+X+3X^2-X^3-X^4+\circ\left(X^4\right)\\ &= 1+x+2x^2-5x^3+18x^4+\circ\left(x^4\right).\end{aligned}$$

### 3.8.6 Inverse d'un développement limité

Soit $f: I\to\mathbb{R}$, admet un $DLn(0)$ :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\circ\left(x^n\right).$$

On suppose que $a_0\neq 0$, alors l'application $x\mapsto\frac{1}{f(x)}$ possède un $DLn(0)$, on écrit donc

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{a_0\left(1-g(x)\right)}$$

où

$$g(x)=-\frac{1}{a_0}\left(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\circ\left(x^n\right)\right),$$

on compose ensuite le $DL$ de $x\mapsto g(x)$ par celui de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$.

**Exemple 3.16.** Trouvons $DL7(0)$ de $\frac{1}{\cos x}$.

On sait que

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\circ\left(x^7\right),$$

on pose

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-g(x)},$$

avec

$$g(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\circ\left(x^7\right).$$

On a aussi

$$\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+X^3+\circ\left(X^3\right).$$

On pose $g(x)=X$, on trouve

$$\begin{aligned}X^2 &= \frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+\circ\left(x^7\right),\\ X^3 &= \frac{x^6}{8}+\circ\left(x^7\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\circ\left(x^7\right).$$

### 3.8.7 Développement limité généralisé

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut être en 0. Nous supposons que $f$ n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, mais que la fonction $x \mapsto x^\alpha f(x), (\alpha > 0)$ en admet un. On peut alors écrire au voisinage de 0

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \circ\left(x^n\right).$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \circ\left(x^n\right)\right).$$

Cette expression s'appelle *développement limité généralisé.*

**Exemple 3.17.** Soit $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, elle n'admet pas de $DL$ en 0.

On a

$$xf(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ\left(x^n\right).$$

Alors

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \circ\left(x^2\right).$$

## 3.9 Exercices

**Exercice 3.1.**

Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}$,
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{tg\ 2x}$, $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^4}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$

**Exercice 3.2.**

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in ]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

**Exercice 3.3.**

Trouver les nombres $a, b$ pour que la fonction $f$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < e \\ a\ln x + b & \text{si } x \geqslant e \end{cases}$$

soit dérivable en $x_0 = e$.

**Exercice 3.4.**

Calculer les dérivées d'ordre $n$ des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x},\ g(x) = \ln(1+x).$$

**Exercice 3.5.**

Montrer que $\forall x > 0$

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

**Exercice 3.6.**

Déterminer les développements limités suivants

*a)* $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin x$, *b)* $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$, *c)* $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

**Exercice 3.7.**

Calculer

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\ln(1+x)}{2-\sqrt{3+\cos x}},$$

$$2)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+1}\right)x^{\alpha}.$$

**Solution 3.7.**

1) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \frac{1}{e}.e^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)} \sim \frac{1}{e}.e^{\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\circ\left(x^3\right)\right)\right)} \sim e^{\left(-1+\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ\left(x^2\right)\right)\right)} \\ &\sim e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ\left(x^2\right)\right)} \sim 1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2 \\ &\sim 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+\circ\left(x^2\right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \sim \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\circ\left(x^3\right)\right) \sim 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ\left(x^2\right).$$

Alors

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\ln(1+x)\sim\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+\circ\left(x^2\right)\right)-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ\left(x^2\right)\right)\sim\frac{x^2}{8}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}2-\sqrt{3+\cos x} &\sim 2-\sqrt{3+1-\frac{x^2}{2}}\sim 2-\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{8}\right)}\sim 2-2\left(1-\frac{x^2}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\sim 2-2\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{8}\right)\sim\frac{x^2}{8}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\ln(1+x)}{2-\sqrt{3+\cos x}}=\frac{\frac{x^2}{8}}{\frac{x^2}{8}}=1.$$

2) On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-1} &= x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sim x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2\right)\\ &\sim x+\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+1} &= x\sqrt[3]{1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^3}}=x\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &\sim x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^3}\right)^2\right)\sim x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+1}\sim\left(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim-\frac{3}{8x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+1}\right)x^\alpha &= \lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{8x}x^\alpha=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{8}x^{\alpha-1}\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } \alpha<1\\ -\frac{3}{8} & \text{si } \alpha=1\\ -\infty & \text{si } \alpha>1\end{cases}.\end{aligned}$$

# CHAPITRE 4 Lois de composition internes

## 4.1 Définitions et propriétés

**Définition 4.1.** On appelle *loi de composition interne* sur un ensemble $E$, toute application

$$\begin{aligned} * \quad : \quad & E \times E \to E \\ (x, y) \quad \mapsto \quad & x * y. \end{aligned}$$

Un sous ensemble $F$ de $E$ est dit *stable* par rapport à la loi $*$ si

$$\forall a, b \in F : (a * b) \in F.$$

**Exemple 4.1.** Soit $A$ un ensemble et $E = \mathcal{P}(A)$, alors l'intersection et la réunion d'ensembles sont deux lois de composition internes dans $E$ car $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ on a
1) $(X \cap Y) \subset X \subset \mathcal{P}(A)$,
2) $\forall x$, $x \in (X \cup Y) \Rightarrow x \in X$ ou $x \in Y \Rightarrow x \in \mathcal{P}(A)$. Donc $(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(A)$.

**Exemple 4.2.** Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \subset \mathcal{P}(E)$.
$F$ n'est pas stable par rapport à l'intersection et la réunion car
1) $\exists\ X = \{a, b\} \in F$, $\exists\ Y = \{a, c\} \in F$; $X \cap Y = \{a\} \notin F$.
2) $\exists\ X = \{a, b\} \in F$, $\exists\ Y = \{a, c\} \in F$; $X \cup Y = \{a, b, c\} \notin F$.

**Définitions 4.2.** Soient $*$ et $\bullet$ deux lois de composition internes sur $E$, on dit que

1) $*$ est *commutative* si $\forall\ a, b \in E : a * b = b * a$.

2) $*$ est *associative* si $\forall\ a, b, c \in E : (a * b) * c = a * (b * c)$.

3) $*$ est *distributive* par rapport à $\bullet$ si $\forall\ a, b, c \in E : a * (b \bullet c) = (a * b) \bullet (a * c)$ et $(b \bullet c) * a = (b * a) \bullet (c * a)$.

4) $e \in E$ est un *élément neutre à gauche* (resp *à droite*) de la loi $*$ si $\forall\ a \in E : e * a = a$ (resp $a * e = a$).

Si $e$ est un élément neutre à droite et à gauche de $*$, on dit que $e$ est un *élément neutre* de $*$.

Si $*$ possède un élément neutre à droite $e'$ et un élément neutre à gauche $e''$ alors $e' = e''$. Donc l'élément neutre s'il existe il est unique.

**Définition 4.3.** Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble $E$ admettant un élément neutre $e$. On dit qu'un élément $a \in E$ est *inversible* ou *symétrisable à droite* (resp *à gauche*) de $*$ si

$$\exists\ a' \in E : a * a' = e \text{ (resp : } a' * a = e)$$

et $a'$ est dit un *inverse* ou un *symétrique à droite* (resp *à gauche*) de $a$.

S'il existe $a' \in E$ tel que

$$a * a' = a' * a = e,$$

on dit que $a$ est *inversible* ou *symétrisable* et que $a'$ est un *inverse* ou un *symétrique* de $a$ par rapport à $*$.

**Remarque 4.1.**

1) $a$ est inversible s'il est inversible à droite et à gauche de $*$.

2) Le symétrique d'un élément n'est pas toujours unique.

**Exemple 4.3.** Soit $E = \{a, b, c\}$, on définit une loi de composition interne dans $E$ par

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $a$ |

ou

$$\begin{cases} a * a = a, \ a * b = b, \ a * c = c \\ b * a = b, \ b * b = c, \ b * c = a \\ c * a = c, \ c * b = a, \ c * c = a \end{cases}.$$

On remarque que

1) $a$ est l'élément neutre de $*$.

2) Tous les éléments de $E$ sont inversibles avec

   $i)$ $a$ est l'inverse de $a$.

   $ii)$ $c$ est l'inverse de $b$.

   $iii)$ $b$ et $c$ sont des inverses de $c$.

**Proposition 4.1.**

Soit $*$ une loi de composition interne dans $E$, associative et admettant un élément neutre $e$. Si un élément $x$ admet un inverse à droite $x_1$ et un inverse à gauche $x_2$ alors $x_1 = x_2$.

**Preuve**

Soient $x_1$ un inverse à droite de $x$ et $x_2$ un inverse à gauche de $x$, alors $x * x_1 = e$ et $x_2 * x = e$. Donc

$$x_1 = e * x_1 = (x_2 * x) * x_1 = x_2 * (x * x_1) = x_2 * e = x_2.$$

Alors, on déduit que l'associativité assure l'unicité du symétrique d'un élément s'il existe. On déduit que la loi définie dans l'exemple 4.3 n'est pas associative car l'élément $c$ possède deux inverses $b$ et $c$. En effet: on a

$$(b * b) * c = c * c = a \text{ et } b * (b * c) = b * a = b.$$

Donc

$$(b * b) * c \neq b * (b * c).$$

Alors la loi $*$ n'est pas associative.

**Proposition 4.2.**

Soit $*$ une loi de composition interne dans un ensemble $E$, associative et admettant un élément neutre $e$, si $a$ et $b$ sont deux éléments inversibles alors $a * b$ est aussi inversible et on a

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

**Preuve**

Soient $a, b \in E$ deux éléments inversibles, alors

$$(a * b) * \left(b^{-1} * a^{-1}\right) = \left(a * \left(b * b^{-1}\right)\right) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

et

$$\left(b^{-1} * a^{-1}\right) * (a * b) = \left(b^{-1} * \left(a^{-1} * a\right)\right) * b = \left(b^{-1} * e\right) * b = b^{-1} * b = e.$$

Donc $(a * b)$ est inversible et $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

**Définition 4.4.** Soit $*$ une loi de composition interne dans un ensemble $E$. On dit qu'un élément $x \in E$ est *régulier à droite* (resp: *à gauche*) de $*$ si

$$\forall\ a, b \in E : a * x = b * x \Rightarrow a = b \text{ (resp: } x * a = x * b \Rightarrow a = b).$$

Si $x$ est régulier à droite et à gauche de $*$, on dit que $x$ est un élément *régulier* de $*$ dans $E$.

**Exemple 4.4.**

Soit $F$ un ensemble et $E = \mathcal{P}(F)$, alors $\phi$ est un élément régulier pour la réunion dans $E$ et $F$ est un élément régulier pour l'intersection dans $E$. On a $\forall\ X \subset E$ et $\forall\ Y \subset E$ :

$$\begin{cases} X \cup \phi = Y \cup \phi \Rightarrow X = Y \\ \phi \cup X = \phi \cup Y \Rightarrow X = Y \end{cases} \text{et} \begin{cases} X \cap F = Y \cap F \Rightarrow X = Y \\ F \cap X = F \cap Y \Rightarrow X = Y \end{cases}$$

**Proposition 4.3.**

Soit $*$ une loi de composition interne dans un ensemble $E$, associative et admettant un élément neutre $e$, alors tout élément symétrisable dans $(E, *)$ est régulier.

**Preuve**

Soit $x \in E$ un élément symétrisable, alors $x^{-1}$ existe et $\forall\ a, b \in E$, on a

$$\begin{aligned} a * x &= b * x \Rightarrow (a * x) * x^{-1} = (b * x) * x^{-1} \\ &\Rightarrow a * \left(x * x^{-1}\right) = b * \left(x * x^{-1}\right) \text{ (car } * \text{ est associative)} \\ &\Rightarrow a * e = b * e \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Alors $x$ est régulier à droite de $*$.

On a aussi

$$\begin{aligned} x * a &= x * b \Rightarrow x^{-1} * (x * a) = x^{-1} * (x * b) \\ &\Rightarrow \left(x^{-1} * x\right) * a = \left(x^{-1} * x\right) * b \\ &\Rightarrow e * a = e * b \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Alors $x$ est régulier à gauche de $*$. Donc $x$ est régulier.

## 4.2 Structure de groupe

**Définition 4.5.** On appelle *groupe* tout ensemble non vide $G$ muni d'une loi de composition interne $*$ telle que

1) $*$ est associative

2) $*$ possède un élément neutre.

3) Tout élément de $E$ est symétrisable.

Si de plus $*$ est commutative, On dit que $(G, *)$ est un *groupe commutatif* ou *abélien*.

**Exemple 4.5.** $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

### 4.2.1 Sous groupe

**Définition 4.6.** Soit $(G, *)$ un groupe, on appelle *sous-groupe* de $G$ tout sous ensemble non vide $G'$ de $G$ tel que muni de la restriction de $*$ à $G'$ est un groupe.

**Proposition 4.4.**

Soit $(G, *)$ un groupe et $G' \subset G$, alors $G'$ est un sous-groupe de $G$ si

$$\begin{cases} 1)\ G' \neq \phi \\ 2)\ \forall\ a, b \in G',\ \ (a * b) \in G' \\ 3)\ \forall\ a \in G',\ a^{-1} \in G' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1)\ G' \neq \phi \\ 2)\ \forall\ a, b \in G',\ \ (a * b^{-1}) \in G' \end{cases}.$$

**Remarque 4.2.**

Si $e$ est l'élément neutre d'un groupe $(G, *)$, alors tout sous-groupe de $G$ contient $e$.

On déduit la proposition suivante

**Proposition 4.5.**

Soit $(G,*)$ un groupe, $e$ l'élément neutre de $*$ et $G'$ un sous ensemble de $G$, alors

$$G' \text{ est un sous-groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ e \in G' \\ 2)\ \forall\ a,b \in G',\ \ (a * b^{-1}) \in G' \end{cases}.$$

### 4.2.2 Homomorphismes de groupes

Dans ce paragraphe, on considère $(G,\bullet)$ et $(H,*)$ deux groupes avec $e$ et $h$ leurs éléments neutres respectifs.

**Définition 4.7.** Une application $f : G \to H$ est appelée *homomorphisme de groupes* de $G$ dans $H$ si

$$\forall\ a,b \in G : f(a \bullet b) = f(a) * f(b).$$

Si de plus $f$ est bijective, on dit que $f$ est un *endomorphisme* de groupes de $G$ dans $H$. Si $G = H$, on dit que $f$ est un *endomorphisme* de $G$ et si de plus $f$ est bijective, on dit que $f$ est un *automorphisme* de groupes de $G$.

**Exemple 4.6.** Etant données deux groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,.)$ et soient

$$\begin{cases} f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*,.) \\ \qquad x \mapsto e^x \end{cases} \text{et} \begin{cases} g : (\mathbb{R}^*,.) \to (\mathbb{R},+) \\ \qquad x \mapsto \ln|x| \end{cases}.$$

On a

$$\forall\ x,y \in \mathbb{R} : f(x+y) = e^{x+y} = e^x.e^y = f(x).f(y)$$

Alors $f$ est un homomorphisme de groupes.

On a aussi

$$\forall\ x,y \in \mathbb{R}^* : g(x.y) = \ln(|x|\,.\,|y|) = \ln|x| + \ln|y| = g(x) + g(y).$$

Donc $g$ est un homomorphisme de groupes.

**Définition 4.8.** Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes

1) On appelle *noyau* de $f$ l'ensemble noté $\ker f$ tel que

$$\ker f = f^{-1}(\{h\}) = \{a \in G : f(a) = h\}.$$

2) On appelle image de $f$ l'ensemble noté $\operatorname{Im} f$ tel que

$$\operatorname{Im} f = f(G) = \{f(a),\ a \in G\}.$$

**Proposition 4.6.** Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes, alors

1) $f(e) = h$.

2) $\forall\ a \in G$, $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$.

**Preuve**

1) $h$ étant l'élément neutre de $(H, *)$ et $e$ l'élément neutre de $(G, \bullet)$, alors on a

$$f(e \bullet e) = f(e) = h * f(e). \tag{1}$$

Mais $f$ est un homomorphisme, donc

$$f(e \bullet e) = f(e) * f(e). \tag{2}$$

De (1) et (2), on trouve

$$h * f(e) = f(e) * f(e)$$

et comme tous les éléments du groupe $(H, *)$ sont réguliers, alors

$$h * f(e) = f(e) * f(e) \Rightarrow h = f(e).$$

2) Soit $a \in G$ et montrons que $f(a^{-1})$ est l'inverse de $f(a)$ dans le groupe $(H, *)$.

On a $f$ est un homomorphisme, alors

$$f(a) * f(a^{-1}) = f(a \bullet a^{-1}) = f(e) = h$$

et

$$f(a^{-1}) * f(a) = f(a^{-1} \bullet a) = f(e) = h.$$

Donc

$$(f(a))^{-1} = f(a^{-1}).$$

**Remarque 4.3.**

De la proposition précédente on a $f(e) = h$ donc $e \in \ker f$.

**Proposition 4.7.** Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes, alors

1) L'image d'un sous-groupe de $G$ est un sous-groupe de $H$.

2) L'image réciproque d'un sous-groupe de $H$ est un sous-groupe de $G$.

**Preuve**

1) Soit $G'$ un sous-groupe de $G$ et montrons que $f(G')$ est un sous-groupe de $H$.

*i)* Comme $G'$ est un sous-groupe de $G$, alors $e \in G'$ donc $f(e) \in f(G')$, alors $f(G') \neq \phi$.

*ii)* Soient $a, b \in f(G')$, alors $\exists\ x, y \in G'$ tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$, d'où

$$a * b^{-1} = f(x) * (f(y))^{-1} = f(x) * f(y^{-1}) = f(x \bullet y^{-1}).$$

On a $x, y \in G'$ et $G'$ est un sous-groupe de $G$, alors $(x \bullet y^{-1}) \in G'$. Donc on aura

$$f(x \bullet y^{-1}) \in f(G') \text{ et } \left(a * b^{-1}\right) \in f(G').$$

De *i)* et *ii)* on déduit que $f(G')$ est un sous-groupe de $H$.

2) Soit $H'$ un sous-groupe de $H$ et montrons que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $G$.

*i)* $H'$ est un sous-groupe de $H$, alors $h \in H' \Rightarrow f(e) \in H' \Rightarrow e \in f^{-1}(H')$. Donc $f^{-1}(H') \neq \phi$.

*ii)* Soient $x, y \in f^{-1}(H')$, alors $f(x)$, $f(y) \in H'$ et comme $H'$ est un sous-groupe de $H$, on aura $\left(f(x) * (f(y))^{-1}\right) \in H'$ et on a

$$f(x \bullet y^{-1}) = f(x) * f(y^{-1}) = \left(f(x) * (f(y))^{-1}\right) \in H'.$$

Donc

$$(x \bullet y^{-1}) \in f^{-1}(H').$$

De *i)* et *ii)* on trouve que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $G$.

**Remarque 4.4.** Comme cas particuliers, on a

1) $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $(H, *)$.

2) $\ker f$ est un sous-groupe de $(G, \bullet)$.

**Proposition 4.8.** Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes, alors

1) $f$ est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$.

2) $f$ est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = H$.

## 4.3 Structure d'anneaux

**Définition 4.9.** On appelle *anneau* tout ensemble $A$ muni de deux lois de composition internes $+$ et $\bullet$ telles que

1) $(A, +)$ est un groupe abélien. (On note $0$ ou $0_A$ l'élément neutre de la loi $+$).

2) La loi $\bullet$ est associative et distributive par rapport à $+$.

Si de plus, la loi $\bullet$ est commutative, on dit que $(A, +, \bullet)$ est un *anneau commutatif.*

Si la loi $\bullet$ possède un élément neutre, on le note $1$ ou $1_A$ et on dit que l'anneau $(A, +, \bullet)$ est *unitaire* ou *unifère.*

On note le symétrique d'un élément $x \in A$ par rapport à la loi $+$ par $-x$.

On dit qu'un élément $x$ dans l'anneau $A$ est *inversible* s'il est inversible par rapport à la loi $\bullet$ et l'inverse de $x$ est noté $x^{-1}$.

### 4.3.1 Règles de calcul dans un anneau

Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau, alors on a

1) $0_A \bullet x = x \bullet 0_A = 0_A$.

2) $x \bullet (-y) = (-x) \bullet y = -(x \bullet y)$.

3) $x \bullet (y - z) = (x \bullet y) - (x \bullet z)$.

4) $(y - z) \bullet x = (y \bullet x) - (z \bullet x)$.

### 4.3.2 Sous-anneaux

**Définition 4.10.** On appelle *sous-anneau* de $(A, +, \bullet)$, tout sous ensemble $A'$ de $A$ tel que muni des restrictions des lois $+$ et $\bullet$ est un anneau.

**Proposition 4.9.** Un sous ensemble $A'$ de $A$ est un sous-anneau si et seulement si

1) $A' \neq \phi$.

2) $\forall\ x, y \in A'$, $(x - y) \in A'$.

3) $\forall\ x, y \in A'$, $(x \bullet y) \in A'$.

### 4.3.3 Homomorphisme d'anneaux

Soient $(A, +, \bullet)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$ une application.

**Définition 4.11.** On dit que $f$ est un *homomorphisme d'anneaux* si

$$\forall\ x, y \in A : f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \text{ et } f(x \bullet y) = f(x) \otimes f(y).$$

Si $A = B$, on dit que $f$ est un *endomorphisme d'anneaux* de $A$.

Si $f$ est bijective, on dit que $f$ est un *isomorphisme d'anneaux.*

Si $f$ est bijective et $A = B$, on dit que $f$ est un *automorphisme.*

**Définition 4.12.** Soient $A$ et $B$ deux anneaux unitaires, on dit qu'un homomorphisme d'anneaux $f$ de $A$ dans $B$ est unitaire si $f(1_A) = 1_B$.

## 4.4 Corps

**Définition 4.13.** On dit qu'un anneau unitaire $(\mathbb{K}, +, \bullet)$, est un *corps* si tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible (par rapport à $\bullet$).

Si de plus $\bullet$ est commutative, le corps $\mathbb{K}$ est dit *corps commutatif.*

### 4.4.1 Sous-corps

**Définition 4.14.** On appelle *sous-corps* de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$, tout sous ensemble $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$ tel que muni des restrictions des lois $+$ et $\bullet$ est un corps.

**Proposition 4.10.** Un sous ensemble $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ si et seulement si

1) $\mathbb{K}' \neq \phi$.

2) $\forall\ a, b \in \mathbb{K}'$, $(a - b) \in \mathbb{K}'$.

3) $\forall\ a, b \in \mathbb{K}'$, $(a \bullet b^{-1}) \in \mathbb{K}'$.

## 4.5 Exercices

**Exercice 4.1.**

On définit sur l'ensemble $G = ]-1, 1[$ une opération notée $*$ par:

$$\forall\ x, y \in G : x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne.

2) Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.

**Exercice 4.2.**

Soit $(G, *)$ un groupe et

$$G' = \{x \in G; \forall y \in G, x * y = y * x\}.$$

Montrer que $G'$ est un sous groupe de $G$.

**Exercice 4.3.**

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition internes notées $+$ et $\times$ par $\forall\ (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ :

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (ac, ad + bc)\end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

CHAPITRE 5

# Espaces vectoriels

**Définition 5.1.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $E$ un ensemble. L'application

$$\begin{array}{rcl} \bullet & : & \mathbb{K} \times E \to E \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \bullet x \end{array}$$

est appelée *loi externe* sur $E$.

**Définition 5.2.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $E$ un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et une loi externe notée $\bullet$.

On dit que $(E, +, \bullet)$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* si

*i*) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

*ii*) $\forall\ (x, y) \in E^2$ et $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a

1) $\alpha \bullet (x + y) = (\alpha \bullet x) + (\alpha \bullet y)$

2) $(\alpha + \beta) \bullet x = (\alpha \bullet x) + (\beta \bullet x)$

3) $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \bullet \beta) \bullet x$

4) $1_{\mathbb{K}} \bullet x = x$.

Les éléments de $E$ sont alors appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires.*

**Exemple 5.1.**

1) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

2) $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

**Proposition 5.1.** Si $E$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, alors $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall\ x, y \in E$, on a

1) $0_{\mathbb{K}} \bullet x = 0_E$ et $\alpha \bullet 0_E = 0_E$.

2) $\alpha \bullet (-x) = (-\alpha) \bullet x = -(\alpha \bullet x)$.

3) $\alpha \bullet (x - y) = (\alpha \bullet x) - (\alpha \bullet y)$.

4) $\alpha \bullet x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

## 5.1 Combinaisons linéaires

**Définition 5.3.** Soient $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de $E$.

On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, ..., x_n$ tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \text{ où } \lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

**Exemple 5.2.** Dans $\mathbb{C}$, tout nombre complexe $z$ est combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et $i$ :

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\ z = x + iy = x.1 + y.i \text{ où } x, y \in \mathbb{R}.$$

## 5.2 Espace vectoriel produit

Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ une famille de $n$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $E$ l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. L'ensemble $E$ muni des lois $+$ et $\bullet$ définies par

$\forall\ u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in E$, $\forall\ v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in E$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} + &\ :\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \\ \bullet &\ :\ \lambda \bullet u = (\lambda.u_1, \lambda.u_2, ..., \lambda.u_n) \end{aligned}$$

est un espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit.*

## 5.3 Sous espaces vectoriels

**Définition 5.4.** Soient $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $F$ une partie de $E$, alors $F$ est un *sous espace vectoriel* de $E$ si

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \phi.\ (0_E \in F) \\ 2)\ \forall\ x, y \in F : (x+y) \in F \\ 3)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ x \in F : (\lambda \bullet x) \in F \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1)\ F \neq \phi.\ (0_E \in F) \\ 2)\ \forall\ x, y \in F,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha \bullet x + \beta \bullet y) \in F. \end{cases}$$

### 5.3.1 Sous espace vectoriel engendré par une partie

**Proposition 5.2.** L'intersection d'une famille de sous espaces vectoriels de $E$ est un sous espace vectoriel de $E$.

**Remarque 5.1.** La réunion des sous espaces vectoriels de $E$ n'est pas en général un sous espace vectoriel de $E$.

**Définition 5.5.** On appelle *sous espace vectoriel engendré par une partie* $A$ de $E$, le plus petit sous espace vectoriel de $E$ qui contient $A$.

**Proposition 5.3.**

1) Le plus petit sous espace vectoriel de $E$ qui contient une partie $A$ de $E$ est L'intersection de tous les sous espaces vectoriels de $E$ qui contiennent $A$.

2) Le sous espace vectoriel de $E$ engendré par un vecteur $x \in E$ est $F = \{a \bullet x, a \in \mathbb{K}\}$.

3) Le sous espace vectoriel de $E$ engendré par $n$ vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n \in E$ est l'ensemble de leurs combinaisons linéaires

$$F = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,\ a_i \in \mathbb{K},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

**Exemple 5.3.** Dans $\mathbb{C}$, on a

1) Le sous espace vectoriel de engendré par $\{1\}$ est $\mathbb{R}$.

2) Le sous espace vectoriel de engendré par $\{i\}$ est l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$.

3) Le sous espace vectoriel de engendré par $\{1, i\}$ est $\mathbb{C}$.

### 5.3.2 Sommes de sous espaces vectoriels

**Définition 5.6.** On appelle somme d'une famille $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous espaces vectoriels de $E$, l'ensemble $S$ des sommes de vecteurs $x_i \in F_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ :

$$S = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ x_i \in F_i\}$$

et on note

$$S = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

**Proposition 5.4.** La somme $S = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ d'une famille de sous espaces vectoriels de $E$ est un sous espace vectoriel de $E$.

### 5.3.3 Somme directe

**Définition 5.7.** Soient $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous espaces vectoriels de $E$.
On dit que la somme $S = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est *directe* si tout vecteur $x$ de $F$ s'écrit de manière unique comme

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ x_i \in F_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

et on écrit

$$S = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

**Proposition 5.5.** Soient $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous espaces vectoriels de $E$, la somme $S = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe si

$$F_i \cap F_j = \{0_E\},\ i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

### 5.3.4 Sous espaces vectoriels supplémentaires

**Définition 5.8.** Deux sous espaces vectoriels $F_1$ et $F_2$ de $E$ sont *supplémentaires* si et seulement si $E = F_1 \oplus F_2$ et on a

$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ E = F_1 + F_2 \\ 2)\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}.$$

## 5.4 Familles libres, génératrices, bases

### 5.4.1 Familles libres

**Définition 5.9.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. On dit que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est *libre* ou que les vecteurs $x_i$ sont *linéairement indépendants* si

$$\forall\ \lambda_i,\ 1\leqslant i\leqslant n : \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

S'il existe une famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$, on dit que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est *liée* ou que les vecteurs sont *linéairement dépendants.*

Une famille qui contient un seul vecteur $x$ est libre si et seulement si $x$ est non nul.

Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

**Proposition 5.6.**

1) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

2) Toute famille qui contient une famille liéé est liée.

En particulier, une famille qui contient le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est liée.

### 5.4.2 Familles génératrices

**Définition 5.10.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

On dit q'une famille d'éléments $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $E$ est *génératrice* ou que les vecteurs $x_i$ *engendrent* $E$ si tout élément $x$ de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $x_i$

$$\forall\ x\in E,\ \exists\ \lambda_i,\ 1\leqslant i\leqslant n : x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n.$$

**Remarque 5.2.** Toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice.

### 5.4.3 Bases

**Définition 5.11.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $E$ est une *base* de $E$ si elle est libre et génératrice.

**Proposition 5.7.** La famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $E$ si et seulement si tout vecteur $x$ de $E$ peut s'écrir et de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $x_i$.

$$\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)! : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Les coefficients $\lambda_i$ son appelés *coordonnées* de $x$ dans la base $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

**Exemple 5.4.** Dans $\mathbb{R}^n$, la famille

$$\{e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,,\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,, ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)\}$$

est une base appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{C}$, $\{1, i\}$ est une base.

**Remarque 5.3.** La base n'est pas unique.

## 5.5 Espaces vectoriels de dimension finie

**Définition 5.12.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On dit que $E$ est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

**Définition 5.13.** Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de $E$ ont le même nombre $n$ d"éléments. L'entier $n$ est appelé *dimension* de $E$ et noté $\dim E$.

**Proposition 5.8.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.

Soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille de $n$ éléments de $E$, alors

$$B \text{ est une base de } E \Leftrightarrow B \text{ est libre dans } E \Leftrightarrow B \text{ est génératrice de } E.$$

**Proposition 5.9.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une partie finie de $E$, alors

$$\begin{aligned} B \text{ est une base de } E \quad &\Leftrightarrow \quad B \text{ est une partie } \textit{libre maximale} \text{ de } E \\ &\Leftrightarrow \quad B \text{ est une partie } \textit{génératrice minimale} \text{ de } E. \end{aligned}$$

**Remarque 5.4.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n$, alors

Toute famille *libre* est constituée d'*au plus* $n$ vecteurs, ou encore toute famille de plus de $n$ vecteurs est *liée*.

Toute famille *génératrice* est formée d'*au moins* $n$ vecteurs, ou encore toute famille de moins de $n$ vecteurs n'est *pas génératrice*.

La dimension $n$ de $E$ est donc

Le nombre *minimum* d'éléments d'une famille *génératrice*.

Le nombre *maximum* d'éléments d'une famille *libre*.

### 5.5.1 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

**Proposition 5.10.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. On a

$$F = E \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ F \subset E \\ 2) \ \dim F = \dim E \end{cases}$$

**Proposition 5.11.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors on a

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G) .$$

## 5.6 Exercices

**Exercice 5.1.**

Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $E$ sur le corps $\mathbb{R}$

1) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}$ , $E = \mathbb{R}^3$

2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0\}$ , $E = \mathbb{R}^2$

3) $C = \{(x, y, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ , $E = \mathbb{R}^3$

4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ , $E = \mathbb{R}^2$.

**Exercice 5.2.**

1) Montrer que la famille $B = \{(1, 1, 1) , (-1, 1, 0) , (1, 0, -1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Trouver les coordonnées du vecteur $v = (1, 0, 1)$ dans cette base.

**Exercice 5.3.**

Soit $F$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\right\}$$

Trouver une base de $F$ puis déterminer sa dimension.

**Exercice 5.4.**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous espaces : $F_1$ engendré par $(0, 1, -1)$ et $(0, 1, 1)$ et $F_2$ engendré par $(0, 1, 2)$ et $(2, 3, 4)$.

1) Quelles sont les dimensions de $F_1$, $F_2$, $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$?

2) Est-ce que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires.

# CHAPITRE 6 Applications linéaires

**Définition 6.1.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et soit $f : E \to F$ une application.

L'application $f$ est dite *linéaire* si $\forall\ x, y \in E$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On dit aussi que $f$ est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

**Remarques 6.1.**

1) $f$ est linéaire $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in E$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

2) Si $f$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Un *endomorphisme* de $E$ est une application linéaire de $E$ dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.

Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

Un *automorphisme* est un isomorphisme de $E$ dans lui même.

**Exemple 6.1**

1) L'application nulle

$$\begin{aligned} : \quad & E \to F \\ x \quad \mapsto \quad & 0_F \end{aligned}$$

est linéaire.

2) L'application

$$\begin{aligned} Id_E \quad &: \quad E \to E \\ x \quad &\mapsto \quad y = Id_E(x) = x \end{aligned}$$

est un automorphisme de $E$.

## 6.1 Opérations sur les applications linéaires

**Proposition 6.1.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f$ et $g$ deux applications linéaires de $E$ dans $F$, alors $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha f + \beta g)$ est linéaire de $E$ dans $F$.

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de $E$ dans $G$.

**Proposition 6.2.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ linéaire, alors

1) Si $E'$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

2) Si $F'$ est un sous-espace vectoriel de $F$, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## 6.2 Noyau et image

**Définition 6.2.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1) L'ensemble

$$f(E) = \{y = f(x)/x \in E\}$$

est appelé *image* de $f$ et le note $\operatorname{Im} f$.

2) L'ensemble

$$f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{x \in E/f(x) = 0_F\}$$

est appelé *noyau* de $f$ et on le note $\ker f$.

**Proposition 6.3.**

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $F$ et $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Proposition 6.4.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors

1) $f$ injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \forall\, x \in E : f(x) = 0_F \Rightarrow x = 0_E$.

2) $f$ surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F$.

**Définition 6.3.** On appelle *rang* de $f$ la dimension de l'image de $f$.

$$rang\ f = \dim \operatorname{Im} f.$$

**Théorème 6.1.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire, on a alors

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \\ &= rang\ f + \dim \ker f. \end{aligned}$$

**Proposition 6.5.** On a

1) $rang\ f \leqslant \dim E$ et $rang\ f = \dim E \Leftrightarrow f$ injective.

2) $rang\ f \leqslant \dim F$ et $rang\ f = \dim F \Leftrightarrow f$ surjective.

## 6.3 Exercices

**Exercice 6.1.**

Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$a)$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$,

$b)$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$,

$c)$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$.

**Exercice 6.2**

Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives, surjectives, biectives?

$a)$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$,

$b)$ $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (x + y, x - y, z + t)$,

$c)$ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $h(x, y, z) = (x, y, y, z)$.

# Bibliographie


[1] Kada Allab, Eléments d'analyse Tome 1 : fonction d'une variable réelle 1re et 2e année d'université. Ecoles scientifiques. OPU. 1984.

[2] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'analyse, Premier cycle scientifique, Première année, Préparation aux grandes écoles. Armand Colin-Collection U.

[3] L. Chambadal et J. L. Ovaert, Cours de Mathématiques, tome1, Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse. Gauthier Villars, 1966.

[4] J. M. Ferrard, Cours de Mathématiques. Klubprépa.

[5] A. Giroux, Analyse 1, Notes de cours, Université de Montréal, 2004.

[6] M. Hazi, SEM 300 par ses examens, analyse et algèbre de première année des universités et grandes ecoles scientifiques, tome 1, OPU, 2009.

[7] A. Hitta, Cours Algèbre et analyse 1. LMD : DEUG I–MI/ST– 2008/2009. Faculté des sciences et de l'ingénierie. Université 8 Mai 1945. Guelma.

[8] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, PROBLÈMES D'ANALYSE II, Continuité et dérivabilité. Traduction : Eric Kouris. EDP sciences.

[9] Pierre Lavaurs, Cours - DEUG MIAS - Unité d'enseignement 11 - Université Lyon I - Année 2001-2002.

[10] G. Lefort, Exercices d'algèbre et d'analyse, $1^{er}$ cycle M.P, tome 1, $1^{ere}$ année. Dunod Université, 1970.

[11] F. Liret, Maths en pratique, à l'usage des étudiants. Cours et exercices. Dunod, 2006.

[12] M. Mechab, Cours d'algèbre: Maths1 LMD Sciences et Techniques.

[13] F. Pécastaings & J. Sevin, Chemins vers l'analyse, tome 1. Vuibert 1979.

[14] M. Zitouni, Algèbre, OPU, 1993.

[15] Base raisonnée d'exercices de mathématiques (Braise), Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, Université de Rennes 1. http://braise.univ-rennes1.fr/

[16] Cours, Mathématiques: outils pour la biologie (Mathsv), université de Lyon 1. http://mathsv.univ-lyon1.fr/

[17] Cours, Mathématiques pour la physique et la chimie, Fonctions circulaires réciproques. http://www-ari.ufr-info-p6.jussieu.fr/

[18] Cours, Fonctions usuelles, Prépas Dupuy de Lôme. http://mp.cpgedupuydelome.fr/