République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié de

géométrie

Deuxième Année Licence de mathématiques

<u>Par Dr</u> : Mousaab BOUAFIA

Année scolaire 2017/2018

Année scolaire 2016-2017

Université 08 Mai 1945-Guelma Faculté de Mathématiques et de L'informatiques et des Sciences de la Matière Département de Mathématiques

Deuxième Année Licence de mathématiques

Polycopié de géométrie

par

Dr : BOUAFIA Mousaab

Ce cours de géométrie est destiné aux étudiants de deuxième année, licence de mathématiques, à l'université du 08 mai 1945, à Guelma. Le polycopié est composé de de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude des courbes dans $\mathbb{R}^n$. Nous étudions plus particulièrement les courbes planes (n=2) et les courbes gauches (n=3). Nous commençons par rappeler quelques définitions de caractérisation d'une courbe, ainsi que les propriétés fondamentales de la courbe. Nous introduisons la longueur d'une courbe, il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation par abscisse curviligne, ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le repère de Frenet, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. Nous donnons l'importance des concepts et mettons en évidence la courbure et la torsion d'une courbe. Dans le second chapitre, nous nous intéressons à l'étude des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Nous commençons par rappeler quelques définitions de caractérisation d'une surface. Pour expliquer l'importance des concepts (plan tangent et droite normale, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur une surface, l'aire d'une surface, on utilise la première forme fondamentale de la surface qui permet de calculer la longueur d'une courbe tracée sur la surface). Dans le troisième chapitre, nous allons parler de la géométrie affine et expliquer l'importance des concepts. Dans le quatrième chapitre, nous parlerons de la géométrie euclidienne, et expliquerons l'importance des concepts.

Table des matières

Introduction

Ce cours de géométrie est destiné aux étudiants de deuxième année, licence de mathématiques, à l'université du 08 mai 1945, à Guelma. Le polycopié est composé de de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude des courbes dans $\mathbb{R}^n$. Nous étudions plus particulièrement les courbes planes ($n = 2$) et les courbes gauches ($n = 3$). Nous commençons par rappeler quelques définitions de caractérisation d'une courbe, ainsi que les propriétés fondamentales de la courbe. Nous introduisons la longueur d'une courbe, il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation par abscisse curviligne, ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le repère de Frenet, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. Nous donnons l'importance des concepts et mettons en évidence la courbure et la torsion d'une courbe. Dans le second chapitre, nous nous intéressons à l'étude des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Nous commençons par rappeler quelques définitions de caractérisation d'une surface. Pour expliquer l'importance des concepts (plan tangent et droite normale, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur une surface, l'aire d'une surface, on utilise la première forme fondamentale de la surface qui permet de calculer la longueur d'une courbe tracée sur la surface). Dans le troisième chapitre, nous allons parler de la géométrie affine et expliquer l'importance des concepts. Dans le quatrième chapitre, nous parlerons de la géométrie euclidienne, et expliquerons l'importance des concepts.

.

Chapitre 1

Courbes paramétrées

1.1 Paramétrisation par abscisse curviligne

Dans cette section, nous allons paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation, on a les définitions suivantes :

Definition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle courbe paramétrée de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ une application de classe C^k,*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in I\}$ est appelé le support géométrique de

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n.$$

- On dit que γ est une courbe parmétrée régulière de classe C^k si, pour tout $t \in I$ et pour tout $m \in \{1, 2, ..., k\}$, $\gamma^{(m)}(t) \neq 0$.

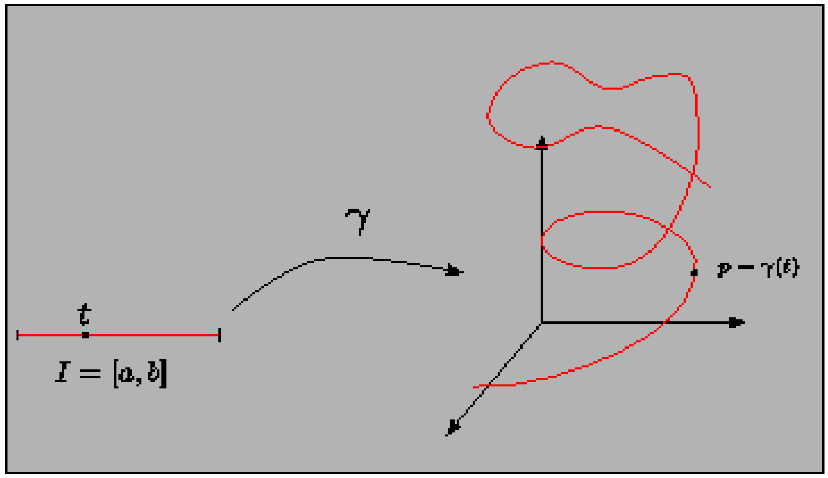


Figure1 : Courbe paramétrée

Il est possible de reparamétrer une courbe. Pour cela, on rappelle la notion de difféomorphisme.

Definition 2 *Soient U et V deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : U \to V$ est un C^1 difféomorphisme si :*

- f est une bijection de U dans V .

- f et f^{-1} sont toutes les deux de class C^1.

Definition 3 *Soit γ $I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de class C^1 et un difféomorphisme $\phi : J \to I$ (avec J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). Alors $\gamma \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$est une courbe paramétrée qui a exactement le même support géométrique que γ. On dit alors que ϕ est un changement de variable admissible et que $\gamma \circ \phi$ est une reparamétrisation de γ.*

Definition 4 *On dit que la paramétrisation d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est normale si, γ est une courbe paramétrée de classe C^1 et $\|\gamma'(t)\| = 1$.*

Definition 5 *Une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ d'une courbe géométrique est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$, la longueur de la courbe géométrique* *entre les points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ est exactement $[t_1, t_2]$:*

$$L_{[t_1,t_2]}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\| \, du = t_2 - t_1.$$

Definition 6 *Soit γ $I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0 est la fonction $S_{t_0} : I \to \mathbb{R}$ donnée par :*

$$S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du \quad \textit{pour tout } t \in I$$

Géométriquement, $S_{t_0}(t)$ est la longueur de la courbe géométrique γ entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. Le résultat suivant nous indique que toute courbe paramétrée régulière de classe C^1 peut être reparamétrée par abscisse curviligne.

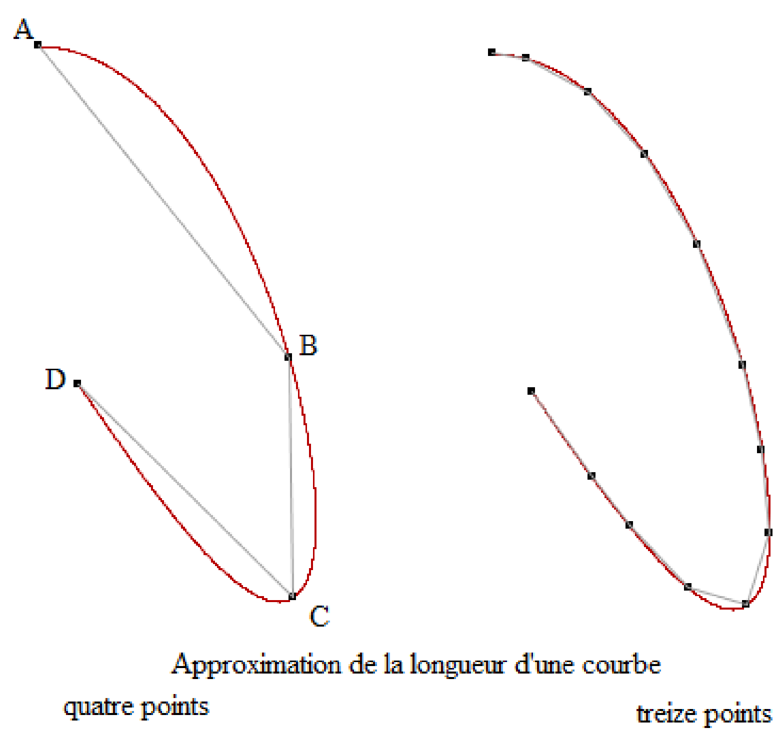


Figure2 : Approximation de la longueur d'une courbe

Théorème 1.1.1 *Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne $S_{t_0}^{-1} : J \to I$ est un changement de variable admissible et*

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n,$$

est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que γ.

Preuve. Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0, est

$$S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du \text{ pour tout } t \in I$$

On pose $J = S_{t_0}(I)$, comme

$$\begin{cases} \|\gamma'(u)\| > 0 \text{ car } \gamma \text{ est une courbe paramétrée régulière de classe } C^1 \\ S_{t_0} \text{ est une fonction strictement croissante} \end{cases}$$

alors S_{t_0} est une fonction inversible de classe C^1 notée par $S_{t_0}^{-1}$.

On pose $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ d'où le résultat. ■

Corollaire 1.1.1 *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1, On note $l = L_{[a,b]}(\gamma)$ la longueur de γ. Alors la courbe $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S_a^{-1} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$, est une reparamétrisation normale de γ.*

Preuve. Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1, On note $l = L_{[a,b]}(\gamma)$ la longueur de γ. Alors la courbe $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S_a^{-1} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$, on calcule

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \gamma'\left(S_a^{-1}(s)\right)\left(S_a^{-1}\right)'(s) \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

Et on a

$$\left\|\widetilde{\gamma}'(s)\right\| = \left\|\gamma'\left(S_a^{-1}(s)\right)\right\| \left|\left(S_a^{-1}\right)'(s)\right| \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

D'autre part

$$S_a^{-1}(s) = t \in [a,b] \text{ et } \left|\left(S_a^{-1}\right)'(s)\right| = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \text{ pour tout } s \in [0,l]$$

ce qui revient à

$$\left\|\widetilde{\gamma}'(s)\right\| = 1$$

d'où le résultat. ■

1.2 Repère de Serret-Frenet

Dans cette section on définit tout d'abord le repère de Serret-Frenet. Il s'agit d'un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée.

Definition 7 *Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 Le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(t)$ est le repère orthonormé : $\left(\gamma(t), \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right)$, où $\overrightarrow{T(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ et $\left(\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right)$ est une base orthonormée directe du plan affine ($det\left(\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right) = 1, et \left\|\overrightarrow{T(t)}\right\| = \left\|\overrightarrow{N(t)}\right\| = 1$)*

Le vecteur $\overrightarrow{T(t)}$ est tangent à la courbe au point $\gamma(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{N(t)}$ est un vecteur qui est normal à la courbe en $\gamma(t)$.

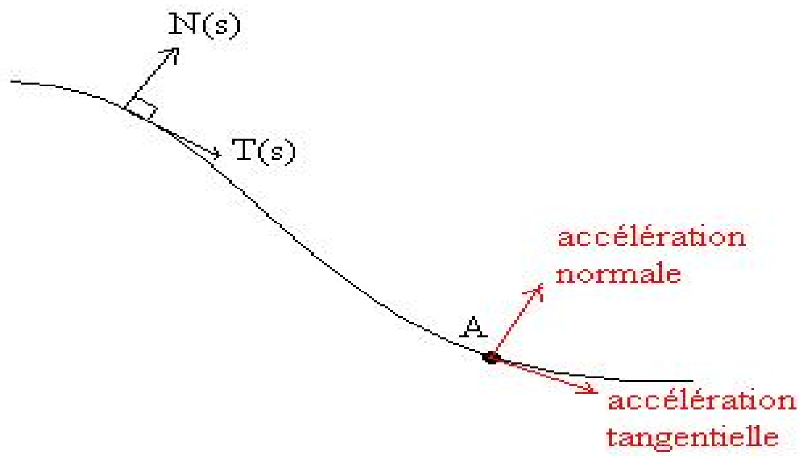


Figure 3 : Repère de Serret-Frenet dans $\mathbb{R}^2$

1.2.1 Courbure

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2 paramétrée par abscisse curviligne. L'allure locale d'une courbe γ est basée sur le développement limité de γ à l'ordre 2 en s_0 :

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(s_0) + (s - s_0)\gamma'(s_0) + \tfrac{(s-s_0)^2}{2}\gamma''(s_0) + \mathbf{o}\left((s - s_0)^2\right) \\ &= \gamma(s_0) + (s - s_0)\overrightarrow{T(s_0)} + \tfrac{(s-s_0)^2}{2}\overline{k}(s_0)\overrightarrow{N(s_0)} + \mathbf{o}\left((s - s_0)^2\right) \end{aligned}$$

On sait que le vecteur $\overrightarrow{T(s_0)} = \gamma'(s_0)$, comme $\gamma'(s_0) \perp \gamma''(s_0)$ et $\gamma''(s_0) \neq 0$ on pose $\gamma''(s_0) = \overline{k}(s_0)\overrightarrow{N(s_0)}$.car

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1 \Longrightarrow \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$$

donc $\gamma''(s_0)$ colinéaire à $\overrightarrow{N(s_0)}$. On pose

$$\overline{k}(s_0) = \gamma''(s_0)\overrightarrow{N(s_0)} = \left\langle \gamma''(s_0), \overrightarrow{N(s_0)} \right\rangle$$

car

$$\gamma''(s_0) = \overline{k}(s_0)\overrightarrow{N(s_0)}$$

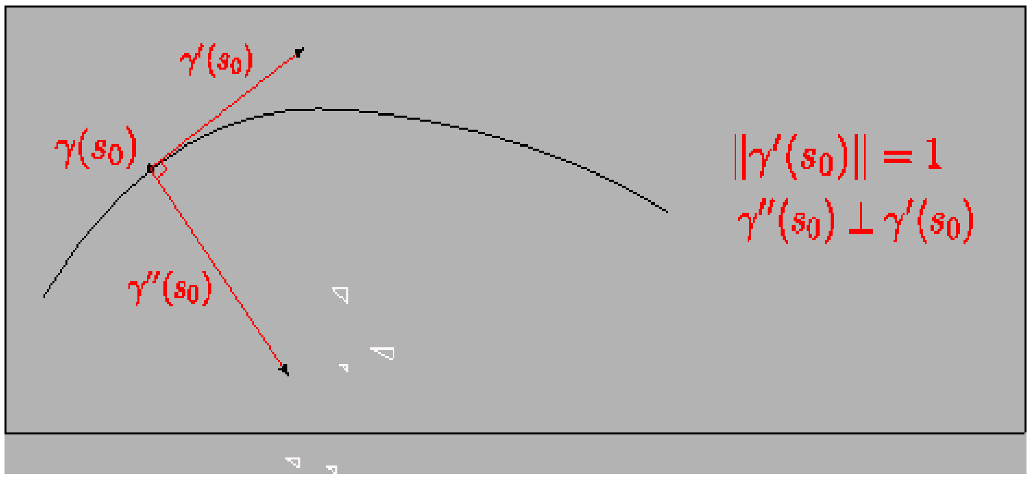


Figure 4 : Dérivée première et seconde d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne

On a les définitions suivantes

- La courbure algébrique $\overline{k}(s_0)$ de γ est :

$$\overline{k}(s_0) = \gamma''(s_0)\overrightarrow{N(s_0)} = \left\langle \overrightarrow{T'(s_0)}, \overrightarrow{N(s_0)} \right\rangle$$

- La courbure $k(s_0)$ de γ est :

$$k(s_0) = \left|\overline{k}(s_0)\right| = \left|\gamma''(s_0)\overrightarrow{N(s_0)}\right| = \|\gamma''(s_0)\|$$

- Le point $\gamma(s_0)$ de γ est birégulier si

$$k(s_0) \neq 0$$

- Le cercle osculateur est le cercle $C\left(c(s_0), \frac{1}{k(s_0)}\right)$ telque :

$$c(s) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \overrightarrow{N(s_0)}$$

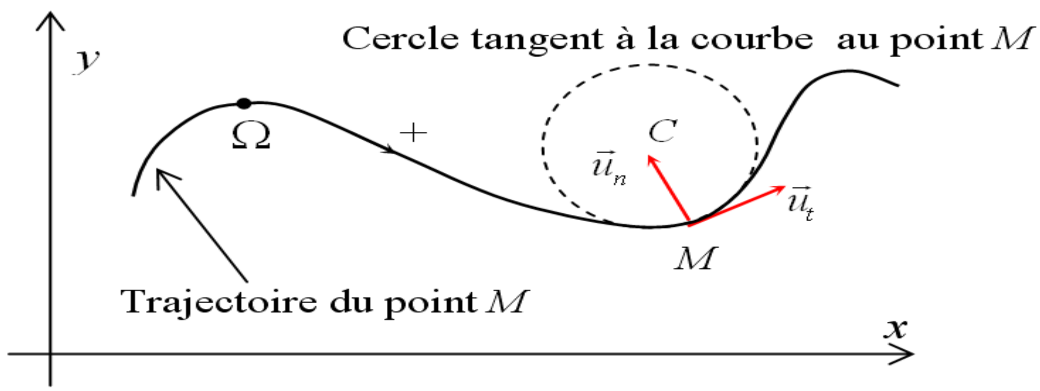


Figure 5 : Le cercle osculateur

1.2.2 Propriété de courbure

Proposition 8 *Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2. Alors pour tout $t \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \overline{k}(t) &= \tfrac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ k(t) &= \tfrac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3} \end{aligned}$$

Démonstration : soit $I = [a, b]$, on pose $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S_a^{-1}$ la paramétrisation par abscisse curviligne à partir du point de paramètre a, alors pour tout $s \in S_a([a, b])$ on pose $t = S_a^{-1}(s)$ et on a

$$\begin{array}{ll} \left(S_a^{-1}\right)'(s) & = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \\ \frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s) & = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\sqrt{\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle}} \\ \frac{d^2\widetilde{\gamma}}{ds^2}(s) & = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\frac{\frac{2}{\|\gamma'(t)\|}\left\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\right\rangle}{2\sqrt{\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle}}}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|^4}\gamma'(t) \\ \det\left(\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s), \frac{d^2\widetilde{\gamma}}{ds^2}(s)\right) & = \det\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}\right), \text{ car } \left(\frac{d^2\widetilde{\gamma}}{ds^2}(s) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|^4}\gamma'(t)\right) \end{array}$$

alors

$$\det\left(\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s), \frac{d^2\widetilde{\gamma}}{ds^2}(s)\right) = \frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right)}{\|\gamma'(t)\| \, \|\gamma'(t)\|^2} = \frac{\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right)}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

D'autre part

$$\det\left(\frac{d\widetilde{\gamma}}{ds}(s), \frac{d^2\widetilde{\gamma}}{ds^2}(s)\right) = \det\left(\overrightarrow{T(s)}, \overline{k}(s)\,\overrightarrow{N(s)}\right) = \overline{k}(s)\det\left(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}\right) = \overline{k}(s)$$

donc

$$\begin{array}{ll} \overline{k}(t) & = \frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ k(t) & = \frac{|\det(\gamma'(t),\gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3} \end{array}$$

d'où le résultat ■

1.3 Binormale et repère de Serret-Frenet

Dans cette section, on définit tout d'abord le repère de Serret-Frenet pour $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, une courbe régulière de classe C^2, paramétrée par abscisse curviligne. Comme dans le cas des courbes planes, Il suffit de compléter la base orthonormée $\left(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}\right)$ par un vecteur (la binormale à γ au point $\gamma(s)$), $\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)}$, où $\wedge$ est le produit vectoriel défini par :

$$(u, v, w) \wedge (i, j, k) = (vk - wj, wi - uk, uj - vi).$$

alors la base $\left(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\right)$ est orthonormée directe et le repère de Serret-Frenet est défini comme suit $\left(\gamma(s), \overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\right)$.

1.3.1 Courbure

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2 paramétrée par abscisse curviligne. La courbure de γ au point $\gamma(s)$ est :

$$k(s) = \|\gamma''(s)\|$$

1.3.2 Propriété de la courbure

Proposition 9 *Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2. Alors pour tout $t \in I$, on a :*

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Démonstration : éxercice ■

1.3.3 Torsion d'une courbe

On va maintenant étudier la torsion d'une courbe, autrement dit chercher à savoir comment "tourne" le repère de Serret-Frenet autour de la droite tangente à la courbe. Pour mesurer cela, on a besoin de la dérivée du vecteur binormal $\overrightarrow{B(s)}$.

On considère ici une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière de classe C^3 paramétrée par abscisse curviligne. On sait que le vecteur $\overrightarrow{B'(s)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N(s)}$ car

$$\left\langle \overrightarrow{B(s)}, \overrightarrow{B(s)} \right\rangle = 1 \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{B'(s)}, \overrightarrow{B(s)} \right\rangle = 0$$

donc

$$\overrightarrow{B'(s)} \perp \overrightarrow{B(s)}$$

d'autre part

$$\left\langle \overrightarrow{B\left(s\right)}, \overrightarrow{T\left(s\right)} \right\rangle = 0 \;\; \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{B'\left(s\right)}, \overrightarrow{T\left(s\right)} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{B\left(s\right)}, \overrightarrow{T'\left(s\right)} \right\rangle \begin{aligned} &= \left\langle \overrightarrow{B'\left(s\right)}, \overrightarrow{T\left(s\right)} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{B\left(s\right)}, \overline{k}\left(s\right) \overrightarrow{N\left(s\right)} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{B'\left(s\right)}, \overrightarrow{T\left(s\right)} \right\rangle + \overline{k}\left(s\right) \left\langle \overrightarrow{B\left(s\right)}, \overrightarrow{N\left(s\right)} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{B'\left(s\right)}, \overrightarrow{T\left(s\right)} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{B'\left(s\right)} \perp \overrightarrow{T\left(s\right)}$$

alors $\overrightarrow{B'\left(s\right)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N\left(s\right)}$. **On définit La torsion** $\tau\left(s\right)$ comme suit

$$\tau\left(s\right) = \left\langle \overrightarrow{B'\left(s\right)}, \overrightarrow{N\left(s\right)} \right\rangle$$

alors

$$\overrightarrow{B'\left(s\right)} = \tau\left(s\right) \overrightarrow{N\left(s\right)}$$

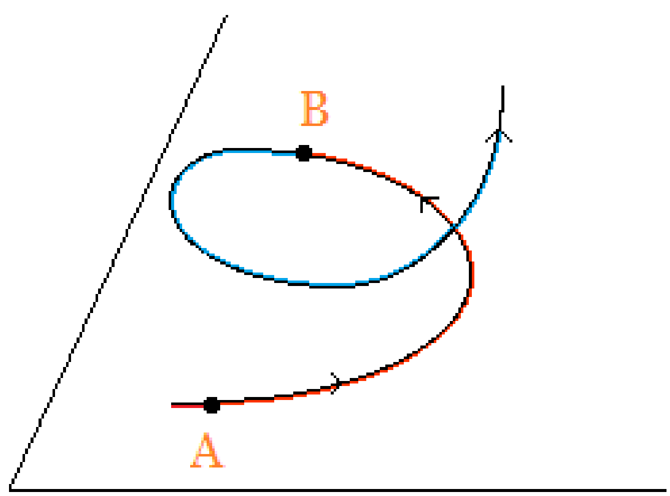


Figure 6 : La torsion d'une courbe au point B

1.3.4 Propriété de la torsion

Proposition 10 *La torsion est donnée par :* $\tau(s) = -\frac{\det(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2}$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\tau(s) &= \left\langle \overrightarrow{B'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{T'(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} + \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{k}(s)\, \overrightarrow{N(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} + \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle \\
&= \left\langle 0 + \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)} \right\rangle \\
&= \det\left(\overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N'(s)}\right) \\
&= -\det\left(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{N'(s)}\right) \\
&= -\det\left(\gamma'(s), \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}, \frac{\gamma'''(s)}{\|\gamma''(s)\|} - \frac{2\langle\gamma''(s),\gamma'''(s)\rangle\gamma''(s)}{2\|\gamma''(s)\|^3}\right) \\
&= -\det\left(\gamma'(s), \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}, \frac{\gamma'''(s)}{\|\gamma''(s)\|}\right) \\
&= \frac{-\det(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|\|\gamma''(s)\|} = -\frac{\det(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2}
\end{aligned}$$

■

Proposition 11 *La torsion d'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ régulière de classe C^3 en point $\gamma(t)$ est :*

$$\tau(t) = -\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Preuve. éxercice. ■

Chapitre 2

Exercices corrigés sur les courbes paramétrées

2.1 Exercice 1

Soit γ est une courbe régulière définie sur l'interval $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donner la longueur dans les cas suvants

1- γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $t \in [a,b]$.

2- γ est définie par une équation polaire $r = f(\theta)$, $t \in [a,b]$.

3- γ est définie par

$$\gamma(t) = \left(x_1\left(u_1^1(t), ..., u_n^1(t)\right), x_2\left(u_1^2(t), ..., u_n^2(t)\right), ..., x_n\left(u_1^n(t), ..., u_n^n(t)\right)\right)$$

où U^i est une courbe de classe C^1, $U^i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ définée par $U^i(t) = (u_1^i(t), ..., u_n^i(t))$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$

Corrigé de l'éxercice 1 :

On a la longueur de γ sur $[a, b]$, définie par :

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}(t) \right)^2} dt$$

1- γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $t \in [a, b]$, on a

$$x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$$
$$y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$$

et

$$x'(t) = r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \theta'(t) \sin(\theta(t))$$
$$y'(t) = r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \theta'(t) \cos(\theta(t))$$

alors

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t) \theta'(t))^2}$$

donc

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t) \theta'(t))^2} dt$$

2- γ est définie par une équation polaire $r = f(\theta)$, $t \in [a, b]$. On a pour γ est définie par un paramétrage polaire comme suit $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$, $t \in [a, b]$, on a

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t) \theta'(t))^2} dt$$

On calcule

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{dr}{d\theta}(\theta(t)) \theta'(t) = f'(\theta(t)) \theta'(t) = r'(\theta) \theta'(t)$$

alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} \, |\theta'(t)| \, dt$$

D'autre part, si pout $t \in [a,b]$, on a $\theta \in [c,d]$ alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_c^d \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta$$

3- γ est définie par

$$\gamma(t) = \left(x_1\left(u_1^1(t), ..., u_n^1(t)\right), x_2\left(u_1^2(t), ..., u_n^2(t)\right), ..., x_n\left(u_1^n(t), ..., u_n^n(t)\right)\right)$$

où U^i est une courbe de classe C^1, $U^i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ définée par $U^i(t) = (u_1^i(t), ..., u_n^i(t))$, pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$. Pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, on a :

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{dx_i}{du_j}(u_j(t)) \frac{du_j}{dt}(t), \text{ où } u_j(t) = \left(u_1^j(t), ..., u_n^j(t)\right), \text{ pour tout } j \in \{1,2,...,n\}.$$

Alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}(t)\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{dx_i}{du_j}(u_j(t)) \frac{du_j}{dt}(t)\right)^2} dt$$

2.2 Exercice 2

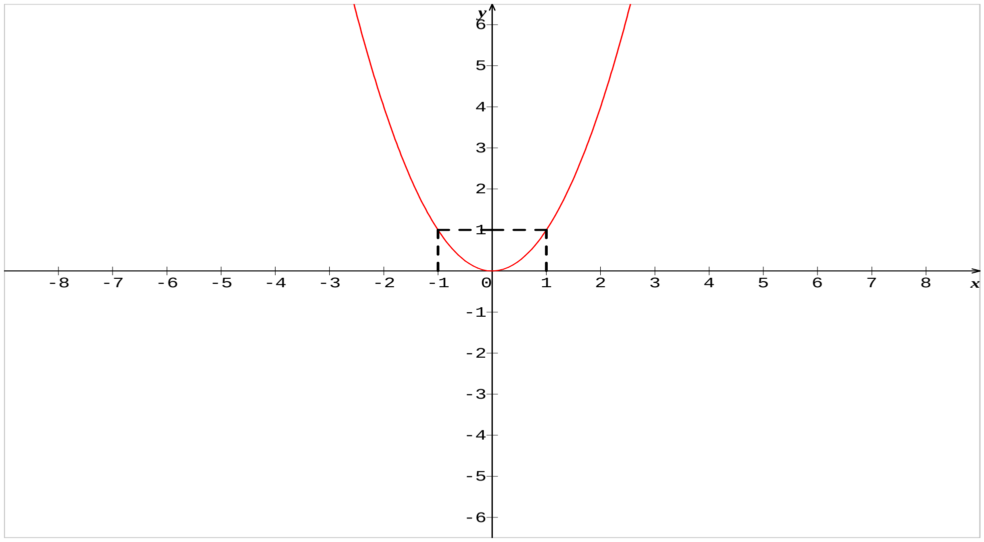
Calculer la longueur de l'arc de parabole $y = x^2$ entre les points $(0,0)$ et $(0,1)$.

Corrigé de l'éxercice 2 :

On a

$$C = \left\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\right\},\ \text{telque } \gamma(t) = \left(t, t^2\right)$$

le point $(0,0) \in C$ mais $(0,1) \notin C$ on résout l'équation $t^2 = 1$ alors $t = -1$ où $t = +1$,



Alors

$$\begin{aligned} L_{[-1,1]}(\gamma) &= \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t)^2 + 1^2} dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2+1} dt \end{aligned}$$

on pose $t = \frac{sh(u)}{2}$, alors $dt = \frac{ch(u)}{2} du$ et pour $t \in [-1,1]$ on a $u \in [u_1, u_2]$ donc

$$\begin{aligned} L_{[-1,1]}(\gamma) &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{4\left(\frac{sh(u)}{2}\right)^2 + 1}\ \frac{ch(u)}{2} du \\ &= \int_{u_1}^{u_2} ch(u)\, \frac{ch(u)}{2} du \\ &= \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} ch^2(u)\, du \\ &= \frac{1}{8}\int_{u_1}^{u_2} \left(e^{2u} + e^{-2u} + 2\right) du \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2u}}{2} - \frac{e^{-2u}}{2} + 2u\right]_{u_1}^{u_2} \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2\arg sh(t)}}{2} - \frac{e^{-2\arg sh(t)}}{2} + 2\arg sh(t)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{16}\left[\left(e^{2\arg sh(1)} - e^{-2\arg sh(1)} + 4\arg sh(1)\right) - \left(e^{2\arg sh(-1)} - e^{-2\arg sh(-1)} + 4\arg sh(-1)\right)\right] \\ &= \frac{1}{16}\left[2sh2\arg sh(1) - 2sh2\arg sh(-1) + 4\arg sh(1) - 4\arg sh(-1)\right] \\ &= \frac{sh2\arg sh(1) - sh2\arg sh(-1)}{8} + \frac{\arg sh(1) - \arg sh(-1)}{4} \end{aligned}$$

2.3 Exercice 3

On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{ où } a,b\in\mathbb{R}_+^* \text{ et } a\geq b$$

1. Donner une paramétrisation de l'ellipse.
2. Donner l'abscisse curviligne de l'ellipse.
3. Calculer la courbure de l'ellipse en tout point.
4. Quels sont les points les plus courbés ?
5. Déterminer le Repère de Serret-Frenet

Corrigé de l'éxercice 3 :

1. On donne une paramétrisation de l'ellipse :

$$C=\left\{\gamma(t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\right\},\ \text{ telque } \gamma(t)=(a\cos t,b\sin t)$$

2. On donne l'abscisse curviligne de l'ellipse :

Il faut tout d'abord calculer $\gamma'(t)$,

$$\gamma'(t)=(-a\sin t,b\cos t)$$

L'abscisse curviligne donnée par

$$\begin{aligned} S(t) &= \textstyle\int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du \\ &= \textstyle\int_0^t \sqrt{(-a\sin u)^2+(b\cos u)^2}du \\ &= \textstyle\int_0^t \sqrt{(a-b)^2\sin^2 u+b^2du} \end{aligned}$$

3. On calcule la courbure de l'ellipse en tout point :

$$k(t) \ = \tfrac{|\det(\gamma'(t),\gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

On a

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-a\sin t, b\cos t)\\
\gamma''(t) &= (-a\cos t, -b\sin t)\\
\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}\\
&= ab\\
\|\gamma'(t)\|^3 &= \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$$k(t) = \frac{|ab|}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

4. les points les plus courbés :

On a la courbure

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{ab}{\left((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
\max_{t\in\mathbb{R}} k(t) &= \tfrac{a}{b^2} \text{ pour } t = 0 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc les points les plus courbés sont :

$$\gamma(0+\pi k) = (a\cos(0+\pi k), b\sin(0+\pi k)),\ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des points les plus courbés sont :

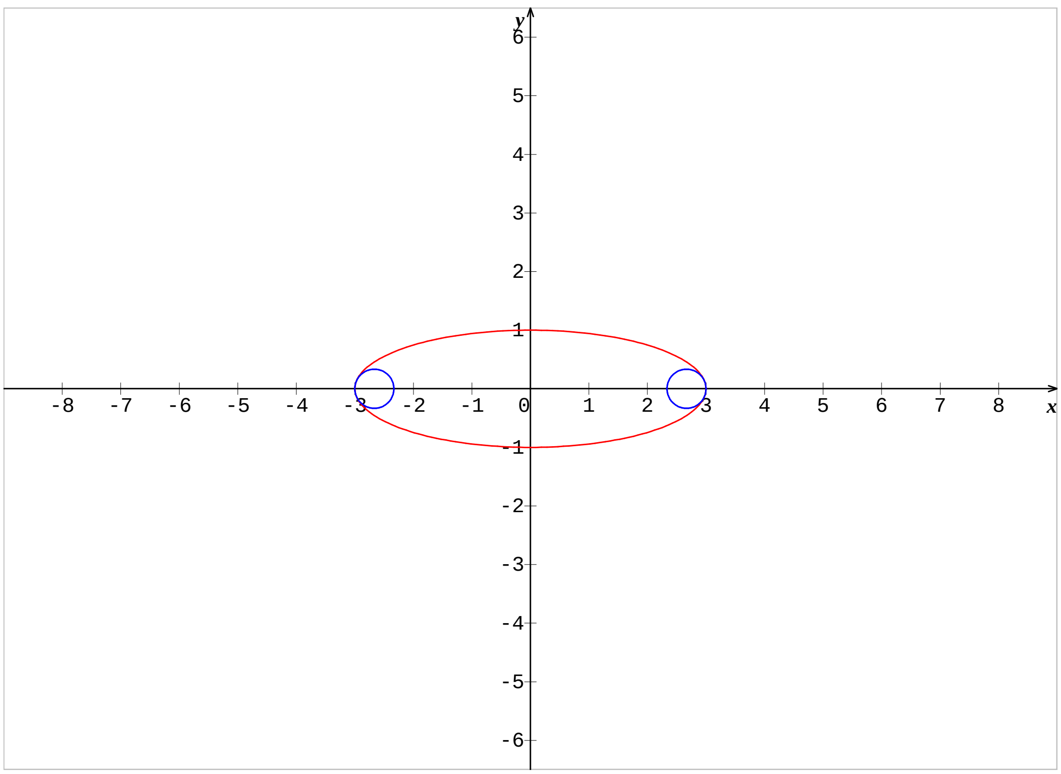
$$SC = \{(-a, 0), (a, 0)\}$$

Représentation de γ, par exemple, pour $a = 3, b = 1$ on a :

5. On détermine le Repère de Serret-Frenet : $\left(\gamma(t), \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right)$

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T(t)} &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\\
&= \left(\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)
\end{aligned}$$



y
6
5
4
3
2
1
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6

$\overrightarrow{N(t)}$ est un vecteur qui vérifie les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)} \right\rangle &= 0 \\ \left\| \overrightarrow{N(t)} \right\| &= 1 \\ det\left(\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right) &= 1 \end{aligned}$$

alors

$$\overrightarrow{N(t)} = \left(\frac{-b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \right)$$

2.4 Exercice 4

On considère la courbe paramétrée suivante : $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t - sh(t)\, ch(t), 2tch(t))$$

1- Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne.

2- Déterminer le repère de Serret-Frenet.

3- Calculer la courbure k de γ en tout point.

Corrigé de l'éxercice 4 :

1- On détermine une paramétrisation par abscisse curviligne :

Il faut tout d'abord calculer $\gamma'(t)$,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(1 - ch^2(t) - sh^2(t), 2ch(t) + 2tsh(t)\right) \\ &= \left(-2sh^2(t), 2ch(t) + 2tsh(t)\right) \end{aligned}$$

L'abscisse curviligne est donnée par

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du \\ &= \int_0^t \sqrt{\left(-2sh^2(u)\right)^2 + \left(2ch(u) + 2ush(u)\right)^2} du \\ &= \int_0^t \sqrt{4sh^4(u) + 4ch^2(u) + 4u^2sh^2(u) + 8ush(u)\, ch(u)} du \\ &= 2\int_0^t \sqrt{sh^4(u) + ch^2(u) + u^2sh^2(u) + 2ush(u)\, ch(u)} du \end{aligned}$$

La paramétrisation par abscisse curviligne :

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma \circ S^{-1}(s), \text{ tel que } S(t) = 2\int_0^t \sqrt{sh^4(u) + ch^2(u) + u^2sh^2(u) + 2ush(u)\, ch(u)} du$$

2- On détermine le repère de Serret-Frenet $\left(\gamma(t), \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right)$. On pose

$$b(t) = \|\gamma'(t)\| = 2\sqrt{sh^4(t) + ch^2(t) + t^2sh^2(t) + 2tsh(t)\, ch(t)}$$

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T(t)} &= \tfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ &= \left(\tfrac{2sh^2(t)}{b(t)}, \tfrac{2ch(t)+2tsh(t)}{b(t)}\right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{N(t)}$ est un vecteur qui vérifie les trois conditions suivantes :

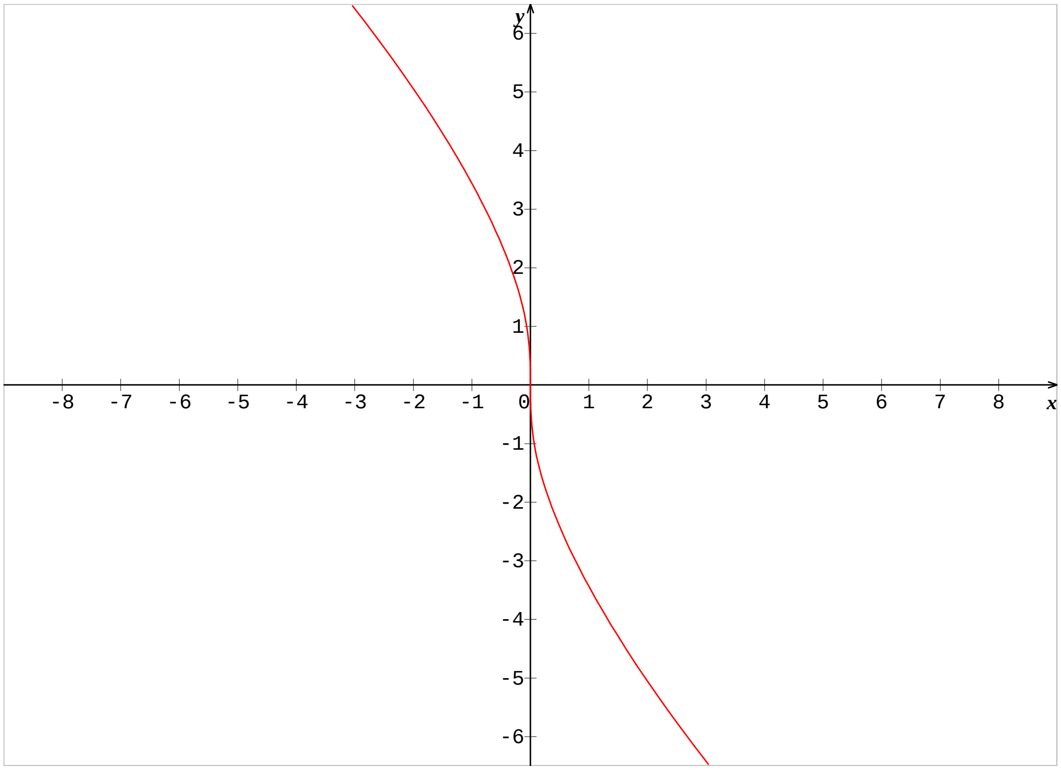
$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)} \right\rangle &= 0 \\ \left\| \overrightarrow{N(t)} \right\| &= 1 \\ det\left(\overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right) &= 1 \end{aligned}$$

alors

$$\overrightarrow{N(t)} = \left(-\frac{2ch(t) + 2tsh(t)}{b(t)}, \frac{2sh^2(t)}{b(t)}\right)$$

3. On calcule la courbure k de γ en tout point :

$$k(t) = \tfrac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$



On a

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \left(2sh^2(t), 2ch(t) + 2tsh(t)\right) \\
\gamma''(t) &= \left(4sh(t)\,ch(t), 4sh(t) + 2tch(t)\right) \\
\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right) &= \begin{vmatrix} 2sh^2(t) & 2ch(t) + 2tsh(t) \\ 4sh(t)\,ch(t) & 4sh(t) + 2tch(t) \end{vmatrix} \\
&= 8sh^3(t) - 8sh(t)\,ch^2(t) = -8sh(t) \\
\left\|\gamma'(t)\right\|^3 &= \left(b(t)\right)^3
\end{aligned}$$

Donc

$$k(t) = \frac{8|sh(t)|}{(b(t))^3}$$

Représentation de γ

2.5 Exercice 5

Soient α, r deux nombres réels strictement positifs. On considère la courbe paramétrée suivante : $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, \alpha t)$$

1- Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne.

2- Déterminer le repère de Serret-Frenet.

3- Calculer la courbure k_α de γ en tout point. Que remarquez-vous ?

4- Calculer la torsion τ_α de γ en tout point. Que remarquez-vous ?

5- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0} k_\alpha$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0} \tau_\alpha$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

Corrigé de l'éxercice 5 :

1- On détermine une paramétrisation par abscisse curviligne.

Il faut tout d'abord calculer $\gamma'(t)$,

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t, \alpha)$$

L'abscisse curviligne donnée par :

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du \\ &= \int_0^t \sqrt{(-r\sin u)^2 + (r\cos u)^2 + \alpha^2 du} \\ &= \int_0^t \sqrt{r^2+\alpha^2} du \\ &= \sqrt{r^2+\alpha^2} t \end{aligned}$$

Donc

$$t = \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}$$

Alors la paramétrisation par abscisse curviligne est

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(s) &= \gamma \circ S^{-1}(s)\,, \text{ tel que } S^{-1}(s) = \tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \\
&= \gamma\left(\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right) \\
&= \left(r\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, r\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{\alpha s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right)
\end{aligned}$$

2- On détermine le repère de Serret-Frenet. $\left(\widetilde{\gamma}(s)\,, \overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\right)$

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T(s)} &= \widetilde{\gamma}'(s) \\
&= \left(\tfrac{-r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N(s)} &= \tfrac{\widetilde{\gamma}''(s)}{\left\|\widetilde{\gamma}''(s)\right\|} \\
&= \tfrac{r^2+\alpha^2}{r}\left(\tfrac{-r}{r^2+\alpha^2}\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{-r}{r^2+\alpha^2}\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, 0\right) \\
&= \left(-\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, -\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, 0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B(s)} &= \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} \\
&= \begin{vmatrix}
\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\
\tfrac{-r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} & \tfrac{r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} & \tfrac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \\
-\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} & -\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} & 0
\end{vmatrix} \\
&= \left(\tfrac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\sin\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{-\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\cos\tfrac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \tfrac{r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\right)
\end{aligned}$$

3- La courbure est donnée par :

$$\begin{aligned}
k_\alpha(s) &= \left\|\widetilde{\gamma}''(s)\right\| \\
&= \tfrac{r}{r^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

On remarque que cette courbure est constante.

4- La torsion est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(s) &= \left\langle \overrightarrow{B'(s)}, \overrightarrow{N(s)} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, 0 \right)^t, \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}, 0 \right)^t \right\rangle \\ &= \frac{-\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}\end{aligned}$$

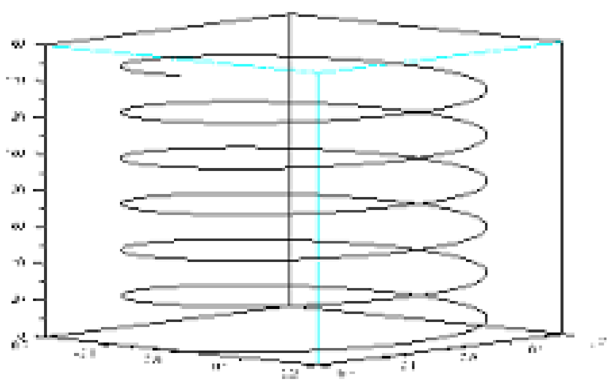
On remarque que cette torsion est constante.

5- On calcule les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0} k_\alpha(s) &= \frac{1}{r} \\ \lim_{\alpha\to 0} \tau_\alpha(s) &= 0\end{aligned}$$

On observe que la courbe γ tend vers une paramétrisation du cercle de rayon $\frac{1}{r}$quand α tend vers 0, car la torsion tend vers 0 quand α tend vers 0.

Représentation de γ



2.6 Exercice 6

On considère la courbe paramétrée suivante : $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right)$$

1- Calculer la longueur de γ dans $[0,t]$,et la tangente unitaire $T(t)$.

2- Utiliser le changement de variable $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, déterminer $\phi'(\theta)=T\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\phi(\theta)$

3- Est-ce que $\phi(\theta)$ est une paramétrisation de longueur ?

4- Donner le le repère de Serret-Frenet et calculer la courbure k et la torsion τ de γ en tout point.

5- Montrer que T fait un angle constant avec $(0,0,1)^t$

Corrigé de l'éxercice 6 :

1- On Calcule la longueur de γ dans $[0,t]$.

Il faut tout d'abord calculer $\gamma'(t)$,

$$\gamma'(t)=\left(3-3t^2,6t,3+3t^2\right)$$

La longueur de γ dans $[0,t]$ donnée par :

$$\begin{aligned}
L_{[0,t]}(\gamma) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du \\
&= \int_0^t \sqrt{\left(3-3u^2\right)^2+(6u)^2+\left(3+3u^2\right)^2}du \\
&= \int_0^t \sqrt{18+36u^2+18u^4}du \\
&= \sqrt{18}\int_0^t \sqrt{1+2u^2+u^4}du \\
&= 3\sqrt{2}\int_0^t \left(1+u^2\right)du \\
&= 3\sqrt{2}\left[u+\frac{u^3}{3}\right]_0^t \\
&= 3\sqrt{2}\left(t+\frac{t^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

On calcule la tangente unitaire $T(t)$,

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3-3t^2}{1+t^2},\frac{6t}{1+t^2},\frac{3+3t^2}{1+t^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2},1\right)
\end{aligned}$$

2- On utilise le changement de variable $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on détermine $\phi'(\theta) = T\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\phi(\theta)$,

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, 1\right)$$

On a

$$\begin{aligned} \tfrac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} &= \tfrac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \\ &= \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos\left(2\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos(\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} &= \tfrac{2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \\ &= 2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \sin\left(2\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \sin(\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

D'aprés (1) et (2) on a

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

Alors

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, \theta)$$

3- $\phi(\theta)$ est une paramétrisation de longueur car :

$$\|\phi'(\theta)\| = 1 \text{ pour tout } \theta$$

4- On donne le le repère de Serret-Frenet et on calcule la courbure k et la torsion τ de γ en tout point,

on détermine le repère de Serret-Frenet.$\left(\phi(\theta), \overrightarrow{T(\theta)}, \overrightarrow{N(\theta)}, \overrightarrow{B(\theta)}\right)$

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T(\theta)} &= \phi'(\theta)\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N(\theta)} &= \tfrac{\phi''(\theta)}{\|\phi''(\theta)\|}\\ &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B(\theta)} &= \overrightarrow{T(\theta)} \wedge \overrightarrow{N(\theta)}\\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)\end{aligned}$$

On calcule la courbure $k(\theta)$ et la torsion $\tau(\theta)$ de γ en tout point.

$$\begin{aligned}k(\theta) &= \|\phi''(\theta)\|\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \tau(\theta) &= \left\langle \overrightarrow{B'(\theta)}, \overrightarrow{N(\theta)} \right\rangle\\ &= \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, 0)^t, (-\sin\theta, \cos\theta, 0)^t \right\rangle\\ &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5- On montre que T fait un angle constante avec $(0,0,1)^t$,

On calcule

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{T(\theta)}, (0,0,1)^t \right\rangle &= \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)^t, (0,0,1)^t \right\rangle\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{T(\theta)}, (0,0,1)^t \right\rangle &= \left\| \overrightarrow{T(\theta)} \right\| \left\| (0,0,1)^t \right\| \cos\alpha\\ &= \cos\alpha \ , \ \alpha \in [0,\pi] \ \text{ alors } \alpha = \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Chapitre 3

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

3.1 Généralités sur les surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Dans cette section nous allons donner des généralités et quelques définitions sur les surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

On distingue 3 types d'équation de surface. Pour cela on a les défintions suivantes :

Definition 12 *On dit qu'une surface S est une surface simple, si $S = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$, où $s_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F_i(x,y,z) = 0\}$ où F_i est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$*

Definition 13 (surface définie par une équation implicite) *On dit qu'une surface S est définie par une équation implicite s'il existe une fonction F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = 0\right\}$$

Exemple : la sphère unitaire est donnée par l'équation implicite

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Théorème 3.1.1 (des fonctions implicites) *Soit f une application de classe C^1, sur* *un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un point de U tel que :*

$$\begin{array}{lll} 1) & f(a_1, a_2, ..., a_n) & = 0 \\ 2) & \overrightarrow{\nabla} f(a_1, a_2, ..., a_n) & \neq 0 \end{array}$$

Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^{n-1}$, et une application g de classe C^1, définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$, tels que :

1) $g(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = a_n$
2) *Quels que soient* $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in V$, $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, g(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) = 0$

Definition 14 (surface définie par une équation explicite) *On dit qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est définie par une équation explicite, s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x, y),\ \ (x, y) \in D\right\}$$

Exemple : la sphère unitaire est définie par l'union de deux surfaces explicites

$$\begin{array}{lll} S_1 & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in \overline{B}(0, 1)\right\} \\ S_2 & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in \overline{B}(0, 1)\right\} \end{array}$$

Definition 15 (surface définie par ses équations paramétriques) *On dit qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est définie par ses équations paramétriques, s'il existe une fonction ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :*

$$S = \left\{\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3,\ \ (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Exemple : la sphère unitaire est définie par ses équations paramétriques

$$S = \left\{(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^3,\ \ (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\right\}$$

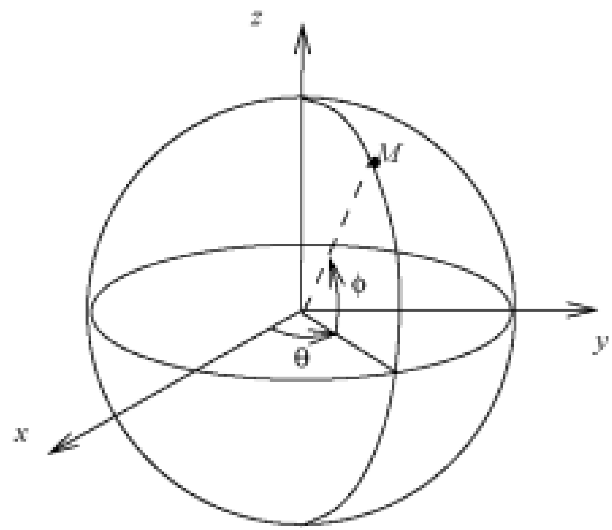


Figure 7 : la sphère unitaire est définie par seséquations paramétriques

3.1.1 Plan tangent et le droite normale à la surface

3.1.2 Plan tangent et droite normale à une surface définie par une équation implicite

Soit S une surface de classe C^1 définie par une équation implicite par

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = 0\right\}$$

Le plan tangent à la surface S au point $M \in S$, est le plan qui contient toutes les tangentes des courbes sur S, passant par M

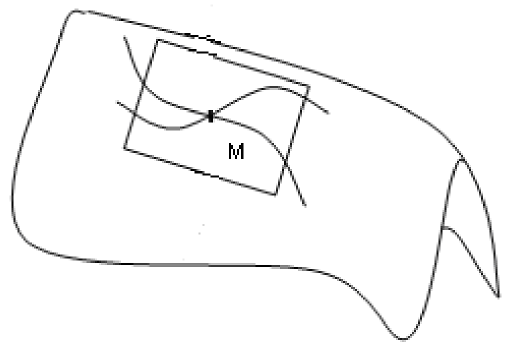


Figure 8 : Courbes sur S, les passant par M

L'équation du plan tangent (P) au point $M \in S$ est

$$(P): \; ax + by + cz = d$$

alors

$$(a, b, c)^t \perp (P)$$

soit la courbe ζ tel que

$$M \in \zeta = \left\{ (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3, \, t \in I \right\} \subset S \text{ de classe } C^1$$

alors

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \forall t \in I$$

donc

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t)) = \left\langle \overrightarrow{\nabla} F(x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t))^t \right\rangle = 0, \forall t \in I$$

on pose

$$M = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)), t_0 \in I$$

alors $\left\langle \nabla F\left(M\right), \left(x'\left(t_0\right), y'\left(t_0\right), z'\left(t_0\right)\right)^t\right\rangle = 0$, et comme $\left(x'\left(t_0\right), y'\left(t_0\right), z'\left(t_0\right)\right)^t$ est tangent à ζ alors

$$(P) : \left\langle \nabla F\left(M\right), \left(x - x\left(t_0\right), y - y\left(t_0\right), z - z\left(t_0\right)\right)^t\right\rangle = 0$$

Et la droite normale au point M est (N) définie par

$$(N) = \left\{M + \lambda \nabla F\left(M\right) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

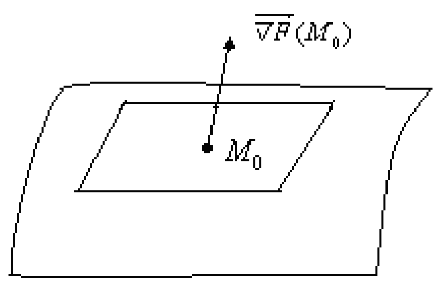


Figure 9 : plan de tangent (P) à une point $M_0 \in S$

3.1.3 Plan tangent et droite normale à la surface définie par une équation explicite

Soit S une surface de classe C^1 définie par l'équation explicite

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f\left(x, y\right),\ \ (x, y) \in D\right\}$$

Alors

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f\left(x, y\right) - z = 0,\ \ (x, y) \in D\right\}$$

On pose

$$F\left(x, y, z\right) = f\left(x, y\right) - z$$

Donc $\nabla F(M)$ au point $M(x_0, y_0, z_0) \in S$ et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)^t$$

Donc le plan tangent au point $M \in S$ est

$$(P) : \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)^t, (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^t \right\rangle = 0$$

Et la droite normale au point M, est (N) définie par

$$(N) = \left\{ M + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \in \mathbb{R}^3, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3.1.4 Plan tangent et droite normale à une surface définie par ses équations paramétriques

Remarque 3.1.1 *Soit S une surface de classe C^1, définie par ses équations paramétriques*

$$S = \left\{ \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \ \ (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Le plan tangent à la surface S au point $M \in S$ est le plan qui contient toutes les tangentes des courbes sur S, passants par M

Si l'équation de plan tangent (P) au point $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in S$ est

$$(P) : \ ax + by + cz = d$$

alors

$$(a, b, c)^t \perp (P)$$

Soit la courbe ζ *telle que*

$$M\left(\phi\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right)\in\zeta=\left\{\left(\phi_1\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right),\phi_2\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right),\phi_3\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)\right)\in\mathbb{R}^3,\ t\in I\right\}\subset S$$

Alors

$$\begin{array}{ll} x'\left(t_0\right) & =\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)u'\left(t_0\right)+\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)v'\left(t_0\right)\\ y'\left(t_0\right) & =\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)u'\left(t_0\right)+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)v'\left(t_0\right)\\ z'\left(t_0\right) & =\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)u'\left(t_0\right)+\frac{\partial\phi_3}{\partial v}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)v'\left(t_0\right)\end{array}$$

Donc

$$\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right),z'\left(t_0\right)\right)^t=u'\left(t_0\right)\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)+v'\left(t_0\right)\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)$$

Alors

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)\right]\perp\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right),z'\left(t_0\right)\right)^t,$$

Donc le plant tangent (P) *au point* $M\left(\phi\left(u_0,v_0\right)\right)\in S$ *est donné par*

$$(P):\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(u_0,v_0\right),\left(x-\phi_1\left(u_0,v_0\right),y-\phi_2\left(u_0,v_0\right),z-\phi_2\left(u_0,v_0\right)\right)^t\right\rangle=0$$

où $\left(u_0,v_0\right)=\left(u\left(t_0\right),v\left(\left(t_0\right)\right)\right)$

Et la droite normale au point $M\left(\phi\left(u_0,v_0\right)\right)$ *est* (N) *définie par*

$$(N)=\left\{\phi\left(u_0,v_0\right)+\lambda\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

3.1.5 Existence du plan tangent

Definition 16 (Un point régulier) *Soit* S *est une surface de classe* C^1*, et* M *un point dans* S *.On dit que* S *est régulière au point* M *si* $\overrightarrow{N\left(M\right)}\neq 0$ *où* $\overrightarrow{N\left(M\right)}$ *le vecteur normal au point* M

On dit que S *est régulière si* S *est régulière en tout point* $M\in S$

Remarque 3.1.2 (Existence du plan tangent) *Soit* S *est une surface de classe* C^1*,* *le plan tangent existe en tout point régulier*

3.2 Intégrales de surface

3.2.1 Intégrale d'une fonction sur une surface paramétrée

Soit S une surface de classe C^1 définie par ses équations paramétriques par

$$S = \left\{ \phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3, \ \ (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

et ona la figure suivante

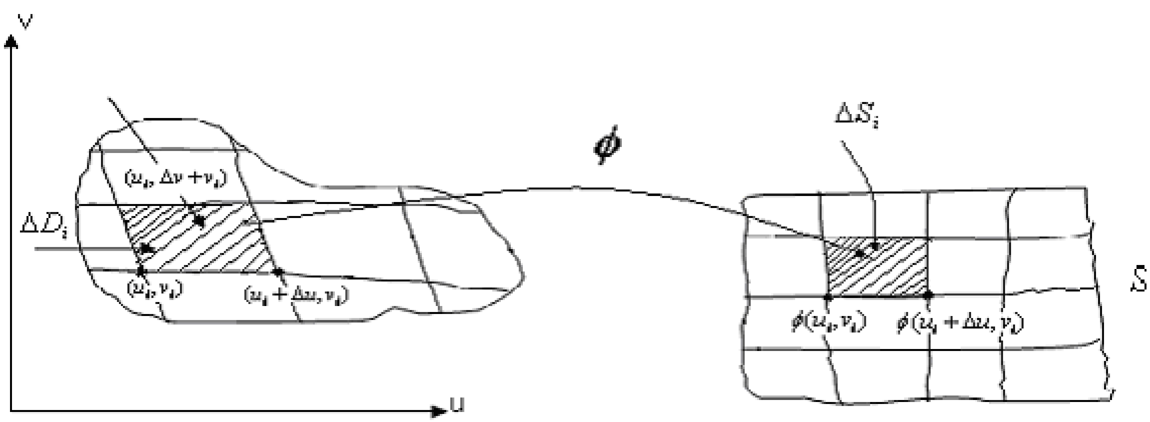


Figure 10 : transformation de surface

On a

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta s_i, \ \ \{\Delta s_i\}_{i \in \{1,2,..,m\}} \text{ est une subdivision quelconque de } S.$$

Soit la fonction continue g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie sur S. On définit l'intégrale de g sur S par :

$$\int_S g(x,y,z)\, ds = \lim_{|\Delta s_i| \to 0} \sum_{\Delta s_i} g(\xi_i, \eta_i, \mu_i) |\Delta s_i| \ \text{ où } \ (\xi_i, \eta_i, \mu_i) \in \Delta s_i$$

Utilisant l'approximation suivante

$$\begin{aligned}
|\Delta s_i| &= \left\|\left(\phi\left(u_i+\Delta u_i, v_i\right)-\phi\left(u_i, v_i\right)\right) \wedge \left(\phi\left(u_i, v_i+\Delta v_i\right)-\phi\left(u_i, v_i\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\tfrac{\phi(u_i+\Delta u_i, v_i)-\phi(u_i, v_i)}{\Delta u_i}\right)\Delta u_i \wedge \left(\tfrac{\phi(u_i, v_i+\Delta v_i)-\phi(u_i, v_i)}{\Delta v_i}\Delta v_i\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\tfrac{\phi(u_i+\Delta u_i, v_i)-\phi(u_i, v_i)}{\Delta u_i}\right) \wedge \left(\tfrac{\phi(u_i, v_i+\Delta v_i)-\phi(u_i, v_i)}{\Delta v_i}\right)\right\| \Delta u_i \Delta v_i
\end{aligned}$$

alors

$$ds = \left\|\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right\| dudv$$

donc

$$\int_S g(x,y,z)\, ds = \iint_\Delta g(\phi(u,v)) \left\|\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right\| dudv, \text{ où } \phi(\Delta) = S$$

3.2.2 Intégrale d'une fonction sur une surface explicite

Soit S une surface de classe C^1 définie par une équation explicite :

$$\begin{aligned}
S &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\right\} \\
&= \left\{(d, f(d)),\ d \in D\right\}
\end{aligned}$$

et soit la fonction continue g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_S g(x,y,z)\, ds = \iint_D g(x,y,f(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

3.2.3 Aire d'une surface

Soit S une surface de classe C^1, on a :

1) Si S est définie par ses équations paramétriques

$$S = \left\{\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3,\ (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

alors

$$Aire\,(S) = \int\limits_S ds = \iint\limits_\Delta \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv, \text{ où } \phi(\Delta) = S$$

2) Si S est définie par une équation explicite

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y),\ \ (x,y) \in D\} \\ &= \{(d, f(d)),\ d \in D\} \end{aligned}$$

alors

$$Aire\,(S) = \int\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dxdy$$

3.3 Première forme fondamentale

Soit S une surface de classe C^1 définie par ses équations paramétriques par

$$S = \left\{\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3,\ \ (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

et soit la fonction continue g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie sur S, alors

$$\int\limits_S g(x,y,z)\,ds = \iint\limits_\Delta g(\phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv, \text{ où } \phi(\Delta) = S$$

D'autre part

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\|^2 \sin^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\widehat{(u,v), \frac{\partial \phi}{\partial v}}(u,v) \right)$$

on pose

$$\theta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\widehat{(u,v), \frac{\partial \phi}{\partial v}}(u,v) \right)$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2 &= \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\|^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2\sin^2\theta \\
&= \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\|^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\
&= \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\|^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2-\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\|^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2\cos^2\theta \\
&= \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\|^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\|^2-\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\rangle^2 \\
&= \left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\rangle\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\rangle^2
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
E &= \left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\right\rangle \\
G &= \left\langle\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\rangle \\
F &= \left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\rangle
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right\| &= \sqrt{EG-F^2} \\
& \sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}
\end{aligned}$$

E, F et G étant les coefficients de la première forme fondamentale et on a

$$\begin{aligned}
\int_S g(x,y,z)\,ds &= \iint_\Delta g(\phi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,\ \text{où } \phi(\Delta)=S \\
Aire(S) &= \iint_\Delta \sqrt{EG-F^2}dudv,\ \text{où } \phi(\Delta)=S
\end{aligned}$$

3.3.1 Longueur d'un arc tracé sur une surface parametrée

Soit γ est une courbe parmétrée tracée sur une surface parametrée S, alors γ est définie par

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \phi(u(t),v(t)),\, t\in[a,b]\subset\mathbb{R} \text{ telle que} \\
S &= \left\{\phi(u,v)=(\phi_1(u,v),\phi_2(u,v),\phi_3(u,v))\in\mathbb{R}^3,\ \ (u,v)\in\Delta\subset\mathbb{R}^2\right\}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
L_{[a,b]}(\gamma) &= \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \\
&= \int\limits_a^b \left\|\tfrac{d\gamma}{dt}(t)\right\|dt \\
&= \int\limits_a^b \left\|\tfrac{d}{dt}\phi(u(t),v(t))\right\|dt \\
&= \int\limits_a^b \left\|u'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)) + v'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\|dt
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\left\|u'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)) + v'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\| =$$
$$\sqrt{\left\langle u'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)) + v'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t)), u'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)) + v'(t)\tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\rangle} =$$
$$\sqrt{(u'(t))^2 E(t) + (v'(t))^2 G(t) + 2u'(t)v'(t)\left\langle\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)), \tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\rangle} =$$
$$\sqrt{(u'(t))^2 E(t) + (u'(t))^2 G(t) + 2u'(t)v'(t)F(t)}$$

tel que

$$\begin{aligned}
E(t) &= \left\langle\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)), \tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t))\right\rangle \\
G(t) &= \left\langle\tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t)), \tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\rangle \\
F(t) &= \left\langle\tfrac{\partial\phi}{\partial u}(u(t),v(t)), \tfrac{\partial\phi}{\partial v}(u(t),v(t))\right\rangle
\end{aligned}$$

alors

$$L_{[a,b]}(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(u'(t))^2 E(t) + (u'(t))^2 G(t) + 2u'(t)v'(t)F(t)}dt$$

3.4 Aire d'une surface engendrée par la rotation d'une courbe autour d'un axe de repère cartésien

Soit S une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe autour d'un axe du repère cartésien $(o, \overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}, \overrightarrow{oz})$.

On suppose que la courbe γ est définie par l'équation $y = f(x)$, où $x \in [a, b]$, et S est une surface de révolution engendrée par la rotation de γ autour de l'axe (ox), alors pour calculer l'$aire\,(s)$, pour $x \in [a, b]$, on a la figure suivante :

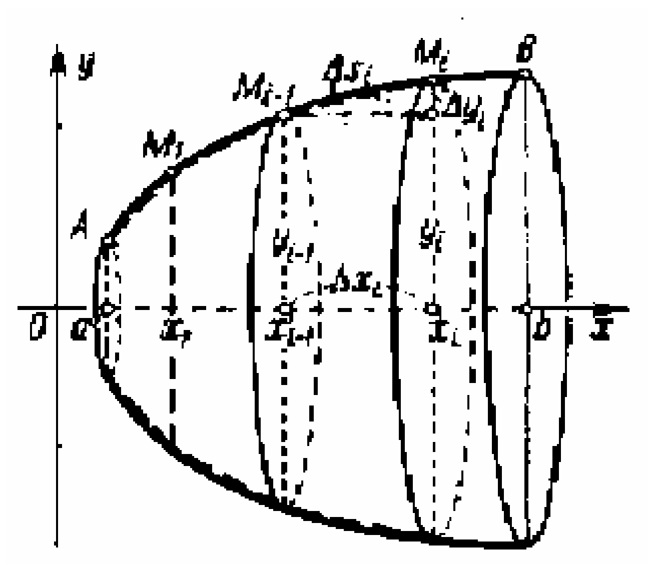


Figure 11 : rotation d'une courbe autour de l'axe (ox)

On peut remarquer l'approximation suivante

$$\Delta s_i = 2\pi f(x_i)\,\Delta l_i$$

Utilisant l'approximation suivante

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

alors on a

$$\Delta s_i \simeq 2\pi f\left(x_i\right)\sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2+\left(\Delta y_i\right)^2}=2\pi f\left(x_i\right)\Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}, \text{ où } \left\{\begin{array}{c}\Delta x_i = x_{i+1}-x_i \\ \Delta y_i = f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\end{array}\right.$$

D'autre part

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'\left(x_i\right)$$

alors

$$ds = 2\pi f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$$

et on a

$$Aire\left(S\right)=2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$$

Chapitre 4

Exercices corrigés sur les surfaces

4.1 Exercice 1

1- Trouver le plan tangent et la normale à la boule unitaire au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2- Calculer l'aire de surface de la boule de rayon R.

Corrigé de l'éxercice 1 :

1- On trouve le plan tangent et la normale à la boule unitaire au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
On a

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

On a

$$\overrightarrow{\nabla} F\,(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^t$$

et

$$\overrightarrow{\nabla} F \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t \neq \overrightarrow{0}.$$

alors le plan tangent (P) est défini par :

$$(P) : \left\langle \nabla F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}, y - \frac{1}{\sqrt{3}}, z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t \right\rangle = 0$$
$$(P) : \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t, \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}, y - \frac{1}{\sqrt{3}}, z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t \right\rangle = 0$$
$$(P) : \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{\sqrt{3}}z - 2 = 0$$

la normale unitaire $\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\nabla F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left\|\nabla F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\|} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t}{2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t
\end{aligned}$$

2- On calcule l'aire de la surface de la boule de rayon R :

On peut ecrire

$$S = \left\{(R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta) \in \mathbb{R}^3,\ (\phi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\right\}$$

alors

$$\begin{aligned}
Aire\,(S) &= \int_S ds \\
&= \int\int_D \left\| \left\langle (-R\cos\theta\sin\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0)^t \wedge (-R\sin\theta\cos\phi, -R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)^t \right\rangle \right\| \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -R\cos\theta\sin\phi & R\cos\theta\cos\phi & 0 \\ -R\sin\theta\cos\phi & -R\sin\theta\sin\phi & R\cos\theta \end{vmatrix} \right\| d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \left(R^2\cos^2\theta\cos\phi, R^2\cos^2\theta\sin\phi, R^2\cos\theta\sin\theta\right)^t \right\| d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\cos^2\theta\left(R^2\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\cos^2\theta\sin^2\phi + R^2\sin^2\theta\right)} d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sqrt{\cos^2\theta}\, d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 2\pi R^2\sqrt{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\pi R^2\cos\theta d\theta \\
&= 4\pi R^2
\end{aligned}$$

4.2 Exercice 2

Utiliser la première forme fondamentale quadratique pour calculer l'aire de la surface S (tore) :

$$S = \left\{ ((a + b\cos\theta)\cos\varphi, (a + b\cos\theta)\sin\varphi, b\sin\theta) \in \mathbb{R}^3,\ (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi]^2 \right\} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } a \geq b$$

Corrigé de l'éxercice 2 :

On utilise la première forme fondamentale quadratique pour calculer l'aire de la surface S, On a :

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \tfrac{\partial \phi}{\partial \varphi}(\varphi,\theta), \tfrac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi,\theta) \right\rangle \\ G &= \left\langle \tfrac{\partial \phi}{\partial \theta}(\varphi,\theta), \tfrac{\partial \phi}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \right\rangle \\ F &= \left\langle \tfrac{\partial \phi}{\partial \varphi}(\varphi,\theta), \tfrac{\partial \phi}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \right\rangle \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E &= \left\| \left(-\left(a+b\cos\theta\right)\sin\varphi, \left(a+b\cos\theta\right)\cos\varphi, 0\right) \right\|^2 \\ &= \left(a+b\cos\theta\right)^2 \\ G &= \left\| \left(-b\sin\theta\cos\varphi, -b\sin\theta\sin\varphi, b\cos\theta\right) \right\|^2 \\ &= b^2 \\ F &= \left\langle \left(-\left(a+b\cos\theta\right)\sin\varphi, \left(a+b\cos\theta\right)\cos\varphi, 0\right)^t, \left(-b\sin\theta\cos\varphi, -b\sin\theta\sin\varphi, b\cos\theta\right)^t \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

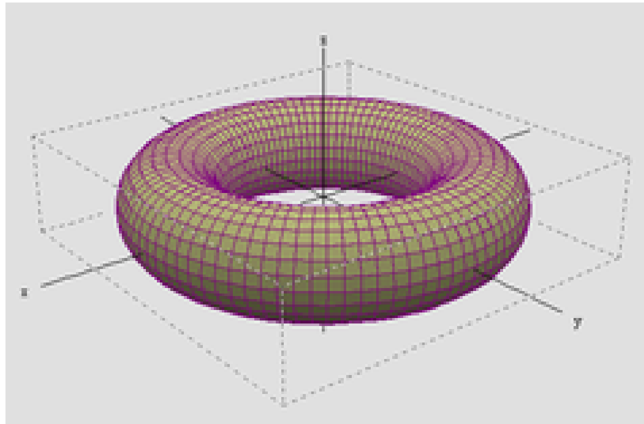
et on a

$$\begin{aligned} Aire\left(S\right) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2}\, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\left(a+b\cos\theta\right)^2}\, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\left(a+b\cos\theta\right)^2}\, d\varphi d\theta \\ &= b\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(a+b\cos\theta\right) d\varphi d\theta \\ &= 2b\pi\int_0^{2\pi} \left(a+b\cos\theta\right) d\theta = 2ab\pi \end{aligned}$$

Alors

$$Aire\left(S\right) \stackrel{?}{=} 4ab\pi^2$$

Représentation de la surface S.



4.3 Exercice 3

Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de la parabole $y = 2px^2$, autour de l'axe (ox) pour $x \in [0, \alpha]$, et $\alpha, p \in \mathbb{R}_+^*$

Corrigé de l'éxercice 3 :

On a l'aire de la surface engendrée par la rotation de la parabole $y = 2px^2$, autour de l'axe (ox), pour $x \in [0, \alpha]$:

$Aire\,(S) = 2\pi \int\limits_0^{\alpha} 2px^2 \sqrt{1 + (4px)^2}dx$

On pose $4px = sh\,(z)$, donc $dx = \frac{ch(z)}{4p}dz$, et si $x \in [0, \alpha] \Rightarrow z \in [0, \arg sh\,(4p\alpha)]$ donc :

$$\begin{aligned}
Aire\,(S) &= \tfrac{\pi}{16p^2} \int\limits_0^{\arg sh(4p\alpha)} sh^2\,(z)\,\sqrt{1 + sh^2\,(z)}ch\,(z)\,dz \\
&= \tfrac{\pi}{16p^2} \int\limits_0^{\arg sh(4p\alpha)} sh^2\,(z)\,ch^2\,(z)\,dz \\
&= \tfrac{\pi}{4p^2} \int\limits_0^{\arg sh(4p\alpha)} sh^2\,(2z)\,dz
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} ch^2(2z) &= 1 + sh^2(2z) \\ ch(2(2z)) &= ch^2(2z) + sh^2(2z) \end{aligned}$$

donc

$$sh^2(2z) = \frac{ch(4z) - 1}{2},$$

alors

$$\begin{aligned} Aire\,(S) &= \tfrac{\pi}{4p^2} \int_0^{\arg sh(4p\alpha)} \tfrac{ch(4z)-1}{2} dz \\ &= \tfrac{\pi}{4p^2} \left[\tfrac{sh(4z)}{8} - \tfrac{z}{2} \right]_0^{\arg sh(4p\alpha)} \\ &= \tfrac{\pi}{4p^2} \left(sh\,(4 \arg sh\,(4p\alpha)) - \tfrac{\arg sh(4p\alpha)}{2} \right) \end{aligned}$$

Chapitre 5

Géométrie affine

Dans ce chapitre, nous étudierons la géométrie affine. On fixe un corps de base $\Bbbk$. Le lecteur pourra toujours supposer que $\Bbbk = \mathbb{R}$. et que les espaces sont de dimension finie.

5.1 Groupe opérant sur un ensemble

L'idée est de réaliser un groupe non pas comme une entité abstraite, mais comme la transformation d'un ensemble.

Soit $(G, +)$ un groupe d'elément neutre 0, et E un ensemble. On dit que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : E \times G & \to & E \\ (x, g) & \mapsto & \phi(x, g) = x + g \end{array}$$

est une opération à droite de $(G, +)$, sur E si :

1- $\forall x \in E,\ \phi(x, 0) = x + 0 = x$

2- $\forall g, g' \in G,\ \forall x \in E : \phi(x, g + g') = \phi(\phi(x, g), g')$

5.2 Espace affine

Un espace affine sur $\mathbb{k}$ est un ensemble non vide E , muni d'une action simplement transitive du groupe additif $\left(\overrightarrow{E},+\right)$ d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ appelé espace directeur de E. La dimension de E est celle de $\overrightarrow{E}$. Enfin, un élément de E s'appelle un point, et on écrit :

$$\forall A, B \in E, \text{ il existe } u \in \overrightarrow{E} \text{ unique telque } B = A + u$$

On écrit alors

$$\overrightarrow{AB} = u$$

Proposition 17 (Relation de Chasles) *On a toujours*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Démonstration : En effet, on a

$$A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \left(A + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$$

autre part $A + \overrightarrow{AC} = C$ donc

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

■

5.2.1 Sous-espaces affines

Une partie F d'un espace affine E est un sous-espace affine de E s'il existe un point A de F tel que $\overrightarrow{F} = \left\{\overrightarrow{AM} \mid \ M \in F\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. On a alors $F = \left\{A + u \mid \ u \in \overrightarrow{F}\right\}$. On note

$$F = Aff\left(A, \overrightarrow{F}\right)$$

5.2.2 Caractéristiques des sous-espaces affines

Definition 18 *Soit* $F = Aff\left(A, \overrightarrow{F}\right)$ *une sous espace affine de* E *on a :*

- *Si* $\dim \overrightarrow{F} = 1$, *alors* F *est la droite affine passant par* A *et de direction la droite vectorielle* $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, *et on écrit* $F = D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$, *avec* $\overrightarrow{F}$ *engendré par* $\overrightarrow{u}$ *(c-à-d* $\overrightarrow{F} = vect\left\{\overrightarrow{u}\right\}$*).*

- *Si* $\dim \overrightarrow{F} = 2$, *alors* F *est la plan affine passant par* A *et de direction le plan vectoriel* $\mathbb{R}\overrightarrow{u} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ *et on écrit* $F = P\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, *tel que* $\overrightarrow{F}$ *engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *(c-à-d* $\overrightarrow{F} = vect\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right\}$.

- *Si* $\dim \overrightarrow{F} = \dim \overrightarrow{E} - 1$, *alors* F *est l' hyperplan affine passant par* A *et de direction* $\overrightarrow{F}$.

Definition 19 *Soient* F *et* G *deux espaces d'un même espace affine* E. *Alor* F *et* G *sont dits :*

- *parallèles s'ils ont même direction :*$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$.

- *faiblement parallèle si* $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$, *et on dit que* F *est parallèle à* G.

Definition 20 *Soit* A *une partie non vide d'un espace affine* E. *On appelle sous-espace affine engendré par* A *l'intersection de tous les sous-espaces affines de* E *contenant* A.

5.2.3 Repères, équations

Soit E est un espace affine d'une origine O et de direction $\overrightarrow{E}$, où $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ base de $\overrightarrow{E}$. Le couple $R(O, B) = R(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est appelé repère cartésien de E. Pour tout point M de E, il existe alors un unique n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de réels vérifiant $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$.

5.3 Notion de barycentre

Un système de points $A_1, A_2, ..., A_n$ de l'espace E affectés des coéfficients a_i, est appelé système pondéré et est noté :

$$\{(A_i, a_i), i = 1, 2, ..., n\}.$$

Considérons l'application $f : E \to \overrightarrow{E}$ qui, à tout point M associe le vecteur

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, il existe un point unique G tel que

$$f(G) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Ce point est appelé le barycentre du système pondéré

$$\{(A_i, a_i), i = 1, 2, ..., n\}.$$

5.3.1 Coordonnées du barycentre

L'espace étant rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_2})$, soit x_i^j les coordonnées de A_j et x_i celles de G. Comme

$$f(G) = \sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{GA_j} = \overrightarrow{0}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} a_j \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_j}\right) = \overrightarrow{0} \quad & \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{OA_j} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{OA_j}}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right)} \\ & \Leftrightarrow O + \overrightarrow{OG} = O + \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{OA_j}}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right)} \\ & \Leftrightarrow G = O + \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{OA_j}}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right)} \\ & \Leftrightarrow x_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j x_i^j}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right)}\end{aligned}$$

5.4 Applications affines et formes affines

Soient E et F deux espaces affines. Une application f de E dans F est dite affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$ telle que

$$\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \text{ pour tout couple } (A, B) \text{ de points de } E.$$

Cette propriété peut encore s'écrire

$$f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

pour tout point M de E et tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$.

Remarque 5.4.1 *Toute composée d'applications affines est une application affine, et la partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires :* $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

5.4.1 Homothéties et translations

Definition 21 (Homothéties) *Si $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application $h_{A,\lambda} : E \to E$, $M \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AM}$ s'appelle l'homothétie de centre A et de rapport λ.*

Definition 22 (Translations) *Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application $T_{\overrightarrow{u}} : E \to E$, $M \mapsto M + \overrightarrow{u}$ s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.*

Chapitre 6

Exercices corrigés sur la géométrie affine

6.1 Exercice 1

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires, $m \in \mathbb{R}$ et I, J les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. Soit G_m le barycentre des points pondérés

$$\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$$

.

1) Déterminer G_1 et G_2.

2) Montrer que G_2 est le milieu de $[G_1 J]$.

3) Montrer que $\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$ .Quel est le lieu de G_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$?

4) Vérifier que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

Corrigé de l'exercice 1

1) Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG_m} &= \tfrac{1}{1+1+m-2+m}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(m-2)\,\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OD}\right)\\
&= \tfrac{1}{2m}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(m-2)\,\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OD}\right)\\
\overrightarrow{OG_1} &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\\
\overrightarrow{OG_2} &= \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OD}\right)
\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_1G_2} &= \overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}\\
&= \tfrac{-1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}\\
\overrightarrow{G_2J} &= \overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OG_2}\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}\\
&= -\overrightarrow{G_1G_2}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que G_2 est le milieu de $[G_1J]$.

3) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IG_m} &= \overrightarrow{OG_m}-\overrightarrow{OI}\\
&= \tfrac{1}{2m}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(m-2)\,\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OD}\right)-\overrightarrow{OI}\\
&= \tfrac{1}{m}\overrightarrow{OI}+\tfrac{m-2}{2m}\overrightarrow{OC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OI}\\
&= \tfrac{1-m}{m}\overrightarrow{OI}+\tfrac{m-2}{2m}\overrightarrow{OC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}\\
&= \tfrac{m-2}{2m}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OI}\right)
\end{aligned}$$

4) On a

$$\begin{aligned}
m\overrightarrow{JG_m} &= m\left(\overrightarrow{OG_m}-\overrightarrow{OJ}\right)\\
&= m\left(\tfrac{1}{2m}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(m-2)\,\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OD}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right)\\
&= m\left(\tfrac{1}{2m}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)\right)\\
&= m\left(\tfrac{1}{2m}\left(2\overrightarrow{OI}-2\overrightarrow{OC}\right)\right)\\
&= \overrightarrow{CI}
\end{aligned}$$

Alors

$$\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$$

et par suite le point G_m parcourt $D\left(J, \overrightarrow{CI}\right)$

6.2 Exercice 2

On considère les vecteurs libres

$$\overrightarrow{u}\,(1,-2,1)\,,\ \overrightarrow{v}\,(-1,1,1)\,,\ \overrightarrow{w}\,(1,-1,1)\,.$$

et les points

$$A(0,-1,2), M(1,-2,3), N(1,0,1)$$

dans un repère de l'espace.

1) Montrer que A est sur le plan $P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

2) Donner les coordonnées des projections sur $D\left(O, \overrightarrow{w}\right)$, parallèlement à $P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ des points M, N.

3) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ comme sommes d'un vecteur sur $D\left(O, \overrightarrow{w}\right)$, et d'un vecteur sur $P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

Corrigé de l'exercice 2

1) $A \in P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. C'est à dire

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases}$$

Une solution de ce système est $\alpha = \beta = 1$, Donc $A \in P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

2) On donne les coordonnées des projections M' et N', sur $D\left(O, \overrightarrow{w}\right)$, parallèlement à $P\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ des points M, N.

$a)$Alors $M'(x,y,z) \in D(O, \overrightarrow{w})$, et $\overrightarrow{MM'} \in P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
&x = \alpha \\
&y = -\alpha \\
&z = \alpha \\
&\text{et} \\
&x - 1 = \beta - \gamma \\
&y + 2 = -2\beta + \gamma \\
&z - 3 = \beta + \gamma
\end{aligned}$$

Il faut donc résoudre ce système de six equations à six inconnues. Alors

$$\begin{aligned}
&\alpha - \beta + \gamma = 1 \\
&-\alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\
&\alpha - \beta - \gamma = 3
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\beta = -1 \\
&\alpha = 2 \\
&\gamma = -2
\end{aligned}$$

donc $M'(2, -2, 2)$

$b)$ $N'(x,y,z) \in D(O, \overrightarrow{w})$, et $\overrightarrow{NN'} \in P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
&x = \alpha \\
&y = -\alpha \\
&z = \alpha \\
&\text{et} \\
&x - 1 = \beta - \gamma \\
&y = -2\beta + \gamma \\
&z - 1 = \beta + \gamma
\end{aligned}$$

Il faut donc résoudre ce système a six inconnues et six equations. Alors

$$\alpha - \beta + \gamma = 1$$
$$-\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$
$$\alpha - \beta - \gamma = 1$$

alors

$$\beta = 1$$
$$\alpha = 2$$
$$\gamma = 0$$

donc $N'(2, -2, 2)$

3) On écrit les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ comme sommes d'un vecteur sur $D(O, \overrightarrow{w})$, et d'un vecteur sur $P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}' + \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}'\right) = \overrightarrow{OM}' + \overrightarrow{M'M}$$
$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON}' + \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON}'\right) = \overrightarrow{ON}' + \overrightarrow{N'N}$$

Tel que :

$$\overrightarrow{OM}'(2, -2, 2) \in D(O, \overrightarrow{w}), \text{ et } \overrightarrow{M'M}(-1, 0, 1) \in P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$
$$\overrightarrow{ON}'(2, -2, 2) \in D(O, \overrightarrow{w}), \text{ et } \overrightarrow{N'N}(-1, 2, -1) \in P(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Chapitre 7

Espace affine Euclidien

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement quelques propriétés des espaces de Hilbert.

7.1 Produit scalaire

7.1.1 Définitions

Definition 23 *L'application de* ***conjugaison*** $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *envoie* $z = a + ib$ *sur* $\overline{z} = a - ib$.

Definition 24 (produit scalaire) *Soit* H *un* IK*-espace vectoriel, où* ($IK = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$), *Une* ***forme*** *sur* H *est une application* $\varphi : H \times H \to IK$.

1$-$ *La forme est* ***sesquilinéaire*** *si pour tous* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \in H$ *et* $a, b, c, d \in IK$ *ona :*

$$\varphi\left(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, c\overrightarrow{u}' + d\overrightarrow{v}'\right) = a\overline{c}\varphi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'\right) + a\overline{d}\varphi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}'\right) + b\overline{c}\varphi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}'\right) + b\overline{d}\varphi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}'\right).$$

2$-$ *La forme est* ***hermitienne*** *si pour tous* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H$ *on a :*

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \overline{\varphi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)}.$$

$3-$ *La forme est* ***définie positive*** *si pour tous* $\overrightarrow{u} \in H$ *ona* :$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0$ *et* $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ *si seulement si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Un produit scalaire sur H est une ***forme sesquilinéaire***, ***hermitienne***, *et* ***définie positive***.

On note le produit scalaire sur H par $\langle . | . \rangle$.

Remarque 7.1.1 *Si* $IK = \mathbb{R}$ *alors :*

$$\textbf{\textit{forme sesquilinéaire}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{forme bilinéaire}}$$

$$\textbf{\textit{forme hermitienne}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{forme symétrique}}$$

Definition 25 (espace préhilbertien, Hilbert) *On appelle* $(H, \langle . | . \rangle)$ ***espace préhilbertien***

On définit une norme sur H par $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u} \rangle}$ *et donc une distance par* $d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.

On appelle espace de ***Hilbert*** *un* ***espace préhilbertien*** *dont la norme associée en fait un espace* ***complet***.

Definition 26 (espace métrique complet) *un espace métrique* (H, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* (H, d) *converge dans* (H, d).

7.1.2 Exemples de produits scalaires

Exemple 1 : Pour $x = (x_1, , , , x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, , , , y_n) \in \mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exemple 2 : Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est défini par

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, g(x) \, dx.$$

7.1.3 Relations remarquables dans un espace de Hilbert

$a-$ Egalité du parallélogramme

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$b-$ Identité de polarisation

$$\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$c-$ Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle|\leq\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration : Soit $P(\lambda)=\|\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}\|^2$ où $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction P est positive et en développant

$$P(\lambda)=\langle\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}\rangle=\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}\rangle\lambda^2+2\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle\lambda+\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u}\rangle.$$

- Si $\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}\rangle=0_H$, alors $\overrightarrow{v}=0_H$ et $\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle=0_H$, d'où l'inégalité est vérifiée.

- Si $\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}\rangle\neq0_H$, alors P est un polynome réel du second degré toujours positif. Donc son discriminant est négatif ou nul

$$\Delta=4\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle^2-4\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u}\rangle\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}\rangle\leq0.$$

d'où l'inégalité est vérifiée. ■

$d-$ Egalité de la médiane

$$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\|^2=2\left\|\overrightarrow{u}-\frac{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}}{2}\right\|^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} 2\left\|\overrightarrow{u}-\frac{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w})\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w})\right\|^2 \\ & \left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\right\|^2. \end{aligned}$$

■

7.1.4 Vecteurs orthogonaux et sous-espaces orthogonaux

1−Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de H sont dits **orthogonaux** si $\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle = 0$, et on note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

2−Deux sous-espaces vectoriels F et G de H sont dits **orthogonaux** si $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F \times G$, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, et on note $F \perp G$.

3−Soit $X \subset H$. On note $X^\perp = \{\overrightarrow{v} \in H | \forall \overrightarrow{u} \in X, \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}\}$ **l'orthogonal** de X.

4−Une famille $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ de vecteurs de H est dite orthogonale si $\forall (i,j) \in \{1,.,.,p\}^2 \text{avec} i \neq j, e_i \perp e_j$.

Propriétés

Soient X et Y deux parties de H, F et G deux sous-espaces vectoriels de H.

1− Si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$ et $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

$2 - X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H et $(VectX)^\perp = X^\perp$.

3−Si F est de dimension finie et $(e_1, ..., e_p)$ est une base de F alors

$$F^\perp = \{\overrightarrow{u} \in H | \forall i \in \{1,.,.,p\}, \langle \overrightarrow{u} | e_i \rangle = 0\}.$$

4−Si F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_H\}$. On en déduit que F et $F^\perp$ sont toujours en somme directe.

5−Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est toujours libre.

6$-$**Relation de Pythagore**. Si $(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p)$ est une famille orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{u}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|\overrightarrow{u}_i\|^2 .$$

Remarque 7.1.2 ***Dans la suite*** $E = \mathbb{R}^n$ ***et*** $IK = \mathbb{R}$

7.2 Produit scalaire euclidien

Le produit scalaire euclidien de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (x_1^u, x_2^u, ..., x_n^u)$, $\overrightarrow{v} = (x_1^v, x_2^v, ..., x_n^v)$ est un nombre réel égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment. On note ce nombre

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^u x_i^v$$

7.2.1 Angles non orientés de vecteurs

L'angle non orienté de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$ est le réel

$$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \arccos\left(\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|} \right) \in [0, \pi]$$

7.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 7.3.1 (Gram-Schmidt) *Soit un espace vectoriel* $\overrightarrow{E}$ *avec* $1 \leq \dim \overrightarrow{E} < \infty$, *alors* $\overrightarrow{E}$ *possède une (au moins une) base orthonormée.*

Démonstration : On montre que le procédé suivant (dit procédé de Gram-Schmid) fournit bien une base orthonormée à partir d'une base quelconque de $\overrightarrow{E}$.

Donnée $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ une base quelconque de $\overrightarrow{E}$.

On pose $\overrightarrow{w_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{\left\|\overrightarrow{u_1}\right\|}$,et $\overrightarrow{w_i} = \frac{\overrightarrow{u_i} - \sum_{j=2}^{i} \left\langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{w_{j-1}} \right\rangle \overrightarrow{w_{j-1}}}{\left\| \overrightarrow{u_i} - \sum_{j=2}^{i} \left\langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{w_{j-1}} \right\rangle \overrightarrow{w_{j-1}} \right\|}$, , $i = 2, ..., n$

Alors $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_n}\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$. ■

7.3.1 Distance d'un point à une droite

Si A est un point et F est un sous-espace de E, on appelle distance de A à F le réel $d(A, F) = \inf_{M \in F} \left\{ \left\| \overrightarrow{AM} \right\| \right\}$

Proposition 27 *1. Soient $A \in E$ et H un hyperplan. On note A' le projeté orthogonal de A sur H. Pour tout vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à H, on a*

$$d(A, H) = d(A, A') = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{n} \right\rangle \right|}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|}$$

2. Supposons E muni d'un repère orthonormé B, Dans ce repère, soient $(x_i)_{i=1}^{n}$les coordonnées de A et soit

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n + \beta = 0$$

une équation cartésienne de H. Alors

$$d(A, H) = \frac{|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}}$$

7.3.2 Applications dans les espaces affines euclidiens

isométrie et similitude

Soit f un endomorphisme affine $(f \in A(E))$ d'un espace euclidien E. Il est naturel de se demander si f préserve les notions typiquement euclidiennes, à savoir :

1. la distance : a-t-on $\left\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \right\| = \|AB\|$ pour tous $A, B \in E$?

2. le produit scalaire : a-t-on $\left\langle \overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right\rangle$ pour tous $A, B, C, D \in E$?

3. l'orthogonalité des sous-espaces : a-t-on $F \perp G \Rightarrow f(F) \perp f(G)$?

4. la perpendicularité des sous-espaces : a-t-on F, G perpendiculaires$\Rightarrow$ $f(F), f(G)$ perpendiculaires?

Definition 28 (isométrie et similitude) *Un endomorphisme affine* $(f \in A(E))$ *multipliant la distance par un réel* $k > 0$ *s'appelle une similitude de rapport* k. *Une similitude de rapport* 1 *s'appelle une isométrie.*

Proposition 29 *Soit* f *un endomorphisme affine* $(f \in A(E))$. *On a*

1- Si f *est une isométrie affine, alors* f *conserve la distance, le produit scalaire, l'orthogonalité et la perpendicularité.*

2- Si f *est ue similitude affine de rapport* $k > 0$, *alors* f *multiplie la distance par* k, *le produit scalaire par* k^2, *et elle conserve l'orthogonalité et la perpendicularité.*

Chapitre 8

Exercices corrigés sur l'espace affine Euclidien

8.1 Exercice composé

L'espace étant rapporté à un repère, soit A et B deux points quelconques de l'espace. On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{u}\,(0,1,2)\,,\,\overrightarrow{v}\,(1,2,3)\,,\,\overrightarrow{w}\,(1,1,1)\,,\,\overrightarrow{x}\,(-1,0,1)\,.$$

1) Montrer que les plans $P\left(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ et $P\left(A,\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}\right)$ sont parallèles

2) détèrminer une base orthonormée de l'espace $F = vect\left\{(0,1,2,2)\,,(0,1,0,1)\,,(0,0,-1,1)\right\}$

3) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres. Montrer que $\overrightarrow{v}$ peut s'ecrire comme somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, avec $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_2}\rangle = 0$.

Corrigé de l'exercice composé

1) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n} &= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \\ &= (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{n}' &= \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x} \\ &= (1, -2, 1)\end{aligned}$$

Alors $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont linéairement dépendantes, donc les plans $P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $P(A, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x})$ sont parallèles

2) On détèrmine une base orthonormée de l'espace

$$F = vect\left\{\overrightarrow{u_1}(0, 1, 2, 2), \overrightarrow{u_2}(0, 1, 0, 1), \overrightarrow{u_3}(0, 0, -1, 1)\right\}$$

On utilise la méthode de Gram-Schmidt :

On pose

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|}, \text{et } \overrightarrow{w_i} = \frac{\overrightarrow{u_i} - \sum_{j=2}^{i} \langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{w_{j-1}} \rangle \overrightarrow{w_{j-1}}}{\left\| \overrightarrow{u_i} - \sum_{j=2}^{i} \langle \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{w_{j-1}} \rangle \overrightarrow{w_{j-1}} \right\|}, i = 2, 3$$

Alors

$$\overrightarrow{w_1} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{(0, 1, 0, 1) - \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\left\|(0, 1, 0, 1) - \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\|} = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{w_3} = \frac{(0, 0, -1, 1) - \left((0, 0, 0, 0) + \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)}{\left\|(0, 0, -1, 1) - \left(\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)\right\|}$$

Alors

$$\overrightarrow{w_3} = \left(0, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres. On montre que $\overrightarrow{v}$ peut s'ecrire comme somme

de deux vecteurs libres $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, avec $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2} \rangle = 0$.

Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs libres, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{v} \neq \alpha \overrightarrow{u}$$

On pose

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$$

alors $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$. D'autre part

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_2} &= \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u_1} \\ &= \overrightarrow{v} - \tfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Et

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$, alors

$$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \alpha \overrightarrow{u}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2} \rangle &= \langle \alpha \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2} \rangle \\ &= \alpha \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$\langle \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2} \rangle = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle + \|\overrightarrow{u_2}\|^2 = 0$$

par définition $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle = 0$ donc $\|\overrightarrow{u_2}\|^2 = 0$, alors $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{u_2}$ contradiction.

Bibliographie

[1] Abderafik BENRABAH, *Cours de géométrie 2$^{\text{éme}}$ Année Maths*, Université 08 Mai 1945-Guelma, (2016)

[2] Boris Thibert,*Courbes et surfaces 2$^{\text{éme}}$ Année Maths*,Université Joseph Fourier, Grenoble I, (source http ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf)

[3] Vincent GUEDJ, *Géométrie différentielle,* (2015) (source https ://www.math.univ-toulouse.fr/~guedj/fichierspdf/GeomDiff2015.pdf)