

Université 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Fin d'Études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Construction Mécanique

Présenté par : MRABTI Ammar

=====

**Lubrification par film comprimé de
l'articulation fémoro-tibiale du genou humain**

=====

Sous la Direction de :
Pr. LAHMAR Mustapha

Année universitaire : 2019/2020

Je dédie ce modeste travail

A Mon Père qui m'a toujours guidé et soutenu ;

A Ma très chère Mère qui a été toujours à mes côtés ;

A mes frères et mes sœurs pour leur soutien moral ;

*A tous mes amis avec qui, j'ai partagé les meilleurs moments
de ma vie ;*

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail ainsi qu'à tous les membres de ma famille.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur **Pr. LAHMAR Mustapha**, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail, ses précieux conseils, et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

La conception de prothèses articulaires efficaces et durables est basée sur une bonne connaissance du comportement tribologique et des performances des matériaux constituant ces prothèses et une meilleure modélisation du comportement rhéologique du fluide assurant la lubrification de l'articulation par effet d'écrasement. Le meilleur fluide lubrifiant est celui qui possède des caractéristiques physiques et rhéologiques très proches du fluide synovial dont le comportement est non Newtonien.

Ce travail d'initiation à la recherche est une contribution à l'étude théorique et numérique de la lubrification fluide de l'articulation du genou.

La configuration géométrique de l'articulation ou de la prothèse est constituée schématiquement de deux disques dont les faces sont parfaitement parallèles séparées soit par un troisième corps qui peut être soit un film fluide ou une matrice poreuse imbibée (mousse en polyuréthane).

L'analyse des problèmes de lubrification HD, PHD, PEHD, et XPHD a été effectuée à une vitesse constante, ou une charge constante ou sinusoïdale imposée.

Cette analyse montre que les effets non Newtonien dus à la présence des couples de contraintes ainsi que la poro-élasticité des disques permettent d'améliorer d'avantage les performances HD du système lubrifié à l'aide d'un fluide suspendant. De plus, il a été mis en évidence que le nouveau mode de lubrification XPHD est plus efficace que le mode traditionnel car il permet entre autres de concevoir des prothèses autolubrifiantes.

Mots clés :

Joint articulaire-Prothèse de genou-Lubrification PEHD-Lubrification XPHD-Fluide non Newtonien-Suspension-Poro-élasticité-Equation de Reynolds-Equation de Darcy-Brinkman-Approche de Morgan-Cameron-Méthode de Runge-Kutta-Quadrature de Gauss-Legendre.

Abstract

The design of efficient and durable joint prostheses is based on a good knowledge of the tribological behaviour and performance characteristics of prosthesis' materials, and a better modeling of the fluid rheological behavior ensuring the joint lubrication by the squeezing effect. The best lubricating fluid is that which has physical and rheological characteristics similar to the synovial fluid where the behavior is unquestionably non-Newtonian.

The present research work is a contribution to the theoretical and numerical analysis of the knee joint lubrication.

The joint or the prosthesis geometric configuration schematically consists of two discs whose faces are perfectly parallel separated by a third body which can be either a fluid film or an imbibed porous matrix made of polyurethane foam.

The analysis of HD, PHD, PEHD, and XPHD lubrication problems was performed for a constant speed, or an imposed constant or sinusoidal load.

This analysis shows that the non-Newtonian effects due to the presence of the stress couples as well as the poro-elasticity of the discs enhance substantially the HD performance of the lubricated system using a suspending fluid. Furthermore, it has been demonstrated that the new XPHD lubrication mode is more efficient than the traditional mode because it allows, among other things, the design of self-lubricating prostheses.

Keywords:

Articular joint-Knee prosthesis-PEHD lubrication-XPHD lubrication-Non-Newtonian fluid-Suspension-Poro-elasticity-Reynolds equation-Darcy-Brinkman equation-Morgan-Cameron approach-Runge-Kutta method-Gauss-Legendre quadrature.

Table des matières

Nomenclature.....	1
Liste des figures.....	4
Liste des tableaux.....	7
Introduction générale.....	8
Chapitre I : Revue Bibliographique	
I.1. Introduction.....	11
I.2. Anatomie descriptive du genou humain.....	11
I.2.1. Mécanisme musculo-ligamentaire.....	15
I.2.2. Cartilage articulaire (Premiers corps)	16
I.2.3. Fluide synovial (3ème corps)	19
I.3. Milieux poreux.....	23
I.3.1. Définitions.....	23
I.3.2. Caractéristiques des matériaux poreux.....	26
I.3.3. Modèles d'écoulement dans les milieux poreux.....	30
I.4. La lubrification articulaire.....	33
I.5. Modèles rhéologiques de lubrifiant contenant des suspensions.....	35
I.6. Les joints artificiels « les prothèses ».....	37
I.7. Conclusion.....	38
Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables	
II.1. Introduction.....	40
II.2. Equations Fondamentales pour un fluide newtonien.....	42
II.2.1. Equations de Navier-Stokes.....	42
II.2.2. Equation de continuité.....	43
II.2.3. Dérivation de l'équation de Reynolds newtonienne.....	44
II.2.4. Conditions limites sur la pression.....	45
II.3. Ecrasement à vitesse constante sans l'inertie d'un fluide Newtonien (squeezing of inertialess Newtonian fluid).....	46
II.3.1. Champ de pression.....	46
II.3.2. Capacité de charge.....	47
II.3.3. Vitesses radiale et axiale de l'écoulement.....	47
II.3.4. Débit radial de fuite.....	47

Table des matières

II.3.5. Puissance dissipée.....	48
II.3.6. Temps d'écrasement du film.....	48
II.4. Equations Fondamentales pour un fluide non newtonien à couple de contraintes.....	48
II.5. Ecrasement sans l'inertie d'un fluide à couple de contraintes : Calcul des performances hydrodynamiques.....	50
II.6. Ecrasement à charge imposée : Inertie du disque mobile négligée.....	53
II.7. Détermination de la viscosité effective d'un fluide suspendu (suspension).....	54
II.8. Etude paramétrique.....	55
II.8.1. Ecrasement à vitesse constante.....	56
II.8.2. Ecrasement à charge constante.....	61
II.8.3. Ecrasement à charge sinusoïdale.....	64
II.9. Conclusion.....	66
Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contraintes en présence de milieux poreux et poro-élastiques	
III.1. Introduction.....	68
III.2. Equations gouvernantes et hypothèses simplificatrices.....	69
III.2.1. Equations générales dans les milieux poreux.....	70
III.2.2. Equations générales dans les milieux poro-élastiques: Loi de Darcy modifiée.....	71
III.2.3. Equations générales dans le film fluide.....	72
III.3. Approximation de Morgan-Cameron pour une couche poreuse mince.....	74
III.4. Equations de mouvement et d'équilibre du disque supérieur et schéma de résolution.....	77
III.4.1. Prise en compte de l'inertie du disque : Equations de mouvement.....	77
III.4.2. Inertie du disque négligée : Equation d'équilibre du disque supérieur.....	79

Table des matières

III.5. Etude paramétrique.....	79
III.5.1. Cas d'une vitesse imposée constante.....	79
III.5.2. Cas d'une charge imposée constante.....	84
III.6. Conclusion.....	88
Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-hydrodynamique (XPHD)	
IV.1. Introduction.....	90
IV.2. Equations en coordonnées cartésiennes pour un fluide newtonien.....	92
IV.2.1. Conditions limites associées.....	93
IV.2.2. Débit volumique.....	94
IV.2.3. Intégration de l'équation de continuité : Dérivation de l'équation de base.....	95
IV.2.4. Vitesse moyenne en un point de l'écoulement.....	95
IV.3. Equations en coordonnées cylindriques.....	96
IV.4. Etude comparative.....	100
IV.5. Conclusion.....	105
Conclusion générale.....	107
Bibliographie.....	110
Annexes	
Annexe A : Equations de la dynamique des fluides Newtoniens & visco-élastiques	113
Annexe B : Eléments de la théorie de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes.....	117
Annexe C : Paramètres de la quadrature de Gauss-Legendre.....	121

Nomenclature

Lettres latines :

C_f	: Coefficient de trainée (terme d'inertie ou coefficient de Forchheimer)
d	: Diamètre caractéristique des pores ou fibres (m)
E	: Module de Young
F	: Capacité de charge ou portance hydrodynamique (N)
g	: Accélération de la pesanteur (m/s ²)
h	: Epaisseur du film fluide (m)
h_0	: Epaisseur initiale du film fluide ou épaisseur de la mousse (m)
H^*	: Epaisseur du disque poreux (m)
k	: Perméabilité de la matrice poreuse (m ²)
\tilde{l}	: Paramètre des couples de contraintes, $\tilde{l} = \frac{l}{h_0}$
l	: Longueur caractéristique de la taille des particules solides en suspension dans le fluide (m), $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$
m	: Masse du disque supérieur (kg)
p	: Pression au sein du film fluide (Pa)
p^*	: Pression dans la matrice poreuse (Pa)
\mathcal{P}	: Puissance dissipée (W)
$\langle Q_r \rangle$: Débit volumique de fuite moyen (m ³ /s)
r	: Coordonnée radiale (m)
\tilde{r}	: Coordonnée radiale adimensionnelle, $\tilde{r} = \frac{r}{r_a}$
r_a	: Rayon des deux disques (m)
R'_e	: Nombre de Reynolds modifié de l'écoulement
t	: Variable temporelle (s)
\vec{u}_s	: Vecteur déplacement des pores
\vec{v}^*	: Vecteur vitesse de filtration ou de Darcy dans le milieu poreux
\vec{v}	: Vecteur vitesse des particules de fluide dans le film

Nomenclature

v_i	: Composantes du vecteur vitesse (m/s)
\vec{v}^*	: Vitesse des particules de fluide dans la matrice poreuse (m/s)
v_r	: Composante de la vitesse radiale dans le film fluide (m/s)
v_r^*	: Composante radiale du vecteur vitesse dans le disque poreux (m/s)
$\langle v_r \rangle$: Vitesse radiale moyenne (m/s)
v_z	: Composante axiale du vecteur vitesse dans le film fluide (m/s)
v_z^*	: Composante axiale du vecteur vitesse dans la couche poreuse (m/s)
\vec{v}_f	: Vitesse absolue des particules fluides dans la matrice poreuse
$Wsq = \dot{h} = \frac{dh}{dt}$: Vitesse du disque supérieur ou vitesse d'écrasement (m/s)
W	: Charge appliquée (N)
x_i	: Variables d'espace (m)
z	: Coordonnée axiale (m)

Lettres grecques :

ε	: Porosité du disque poreux
$\vec{\nabla}(\circ)$ ou $\overline{grad}(\circ)$: Opérateur gradient
$div(\circ)$ ou $\vec{\nabla} \cdot (\circ)$: Opérateur divergence
μ	: Viscosité dynamique du fluide (Pa.s)
μ'	: Viscosité dynamique effective (Pa.s)
μ_0	: Viscosité dynamique du solvant ou du fluide de base (Pa.s)
$\tilde{\mu}$: Viscosité relative
ρ	: Masse volumique du fluide (kg/m ³)
η	: Propriété physique intrinsèque au fluide (N.s)
$[\eta]$: Viscosité intrinsèque
ϕ	: Fraction volumique de particules ou la concentration en particules

Nomenclature

ϕ_m	: Fraction volumique de particules maximale
δ	: Paramètre d'élasticité
ρ	: Masse volumique du fluide (kg/m ³)

Symboles :

$\langle \circ \rangle$: Valeur moyenne
$\widetilde{(\circ)}$: Quantité adimensionnelle ou normalisée

Abréviations :

AH	: Acide Hyaluronique
HD	: Hydro-Dynamique
EHD	: Elasto-Hydro-Dynamique
PHD	: Poro-Hydro-Dynamique
PEHD	: Poro-Elasto-Hydro-Dynamique
XPHD	: EX-Poro-Hydro-Dynamique
XPEHD	: EX-Poro-Elasto-Hydro-Dynamique
XTPHD	: EX-Thermo-Poro-Hydro-Dynamique
XTPEHD	: EX-Thermo-Poro-Elasto-Hydro-Dynamique
XVPHD	: EX-Visco-Poro-Hydro-Dynamique

Liste des illustrations

- Figure I.1 : Anatomie descriptive du genou humain
- Figure I.2 : Composantes constituant le genou
- Figure I.3 : Éléments principaux du triplet tribologique articulaire
- Figure I.4 : Les couches du cartilage articulaire
- Figure I.5 : Composition du cartilage articulaire
- Figure I.6 : Corrélation entre la viscosité et la concentration de AH
- Figure I.7 : Variation de la viscosité du fluide synovial avec la concentration de l'acide hyaluronique
- Figure I.8 : Structure d'un milieu poreux
- Figure I.9 : Exemples de matériaux poreux naturels
- Figure I.10 : Exemples de coussinets poreux
- Figure I.11 : L'espace vide dans un milieu poreux
- Figure I.12 : Notion de tortuosité d'un milieu poreux
- Figure I.13 : Lubrification du genou pour un cycle de marche
- Figure I.14 : Prothèse totale de l'articulation du genou
- Figure II.1 : Ecrasement d'un fluide entre deux disques
- Figure II.2 : Photographies montrant la rupture de film par cavitation dans un contact disque/plan
- Figure II.3 : Film comprimé d'épaisseur $h \ll r_a$
- Figure II.4 : Conditions limites dans un film en compression et en arrachement
- Figure II.5 : Comparaison des modèles de viscosité de Krieger-Dougherty et d'Einstein pour diverses valeurs de la concentration
- Figure II.6 : Profils de pression dans le film fluide obtenus pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration ϕ .
- Figure II.7 : Profils de vitesse radiale calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration.
- Figure II.8 : Profils de vitesse axiale calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration ϕ .

Liste des illustrations

- Figure II.9 : Variations de la capacité de charge en fonction de la position relative h/h_0 du disque supérieur pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel \tilde{l} et de la concentration ϕ .
- Figure II.10 : Variations de la puissance dissipée en fonction de la hauteur relative h/h_0 pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel \tilde{l} et de la concentration de particules ϕ
- Figure II.11 : Variations de la position relative h/h_0 du disque supérieur en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre de \tilde{l} et ϕ .
- Figure II.12 : Profils de pression axisymétriques obtenus pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .
- Figure II.13 : Evolution temporelle de la charge portante pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .
- Figure II.14 : Profils de vitesse radiale au bord du disque calculés pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .
- Figure II.15 : Evolution temporelle de la charge dynamique appliquée pour $f = 0.1, 0.5, \text{ et } 1 \text{ Hz}$ et $W_0 = 300 \text{ N}$.
- Figure II.16 : Cycle complet de la charge dynamique appliquée pour $f = 1 \text{ Hz}$ et $W_0 = 200, 300, 600, \text{ et } 800 \text{ N}$.
- Figure II.17 : Effets des couples de contraintes $\tilde{l} = \frac{l}{h_0}$ et de la concentration ϕ sur la position relative du disque supérieur pour un cycle de charge.
- Figure III.1 : Configuration de l'articulation du genou en écrasement axisymétrique du film.
- Figure III.2 : Variations de la perméabilité k en fonction de la porosité ε pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des pores d
- Figure III.3 : Représentation de l'action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur dans le cas où les contraintes tangentielles pariétales négligées
- Figure III.4 : Profils de pression poro-hydrodynamique dans le film fluide déterminés pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de la porosité ε .

Liste des illustrations

- Figure III.5 : Profils de vitesse radiale au bord libre du disque calculés pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de la porosité ε
- Figure III.6 : Variations de la capacité de charge en fonction de la hauteur relative h/h_0 pour différentes valeurs de la porosité ε
- Figure III.7 : Courbes de pression poro-élasto-hydrodynamique dans le film fluide calculées pour différentes valeurs du paramètre d'élasticité δ avec une porosité $\varepsilon = 0.8$
- Figure III.8 : Profils de vitesse radiale au bord libre du disque calculés pour deux positions du disque supérieur et différentes valeurs de δ
- Figure III.9 : Variations de la capacité de charge en fonction de la hauteur relative du film h/h_0 pour différentes valeurs du paramètre d'élasticité δ avec une porosité $\varepsilon = 0.8$
- Figure III.10 : Variations temporelles de l'espacement relatif entre les deux disques $\frac{h}{h_0}$ déterminées à l'aide des théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .
- Figure III.11 : Répartitions de la pression PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .
- Figure III.12 : Evolution temporelle de la vitesse d'écrasement W/sq calculée par les théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .
- Figure III.13 : Profils de vitesse radiale au bord du disque calculée par les théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .
- Figure IV.1 : Compression d'une matrice poreuse sèche ou imbibée
- Figure IV.2 : Ecrasement d'une matrice poreuse entre 2 disques
- Figure IV.3 : Comparaison des courbes de variation temporelle de la position relative du disque supérieur pour deux valeurs de la porosité
- Figure IV.4 : Comparaison des courbes de variation temporelle de la vitesse d'écrasement du disque supérieur pour deux valeurs de la porosité
- Figure IV.5 : Comparaison des profils de vitesse radiale d'écoulement calculée au bord du disque pour deux valeurs de la porosité.
- Figure IV.6 : Profils de pression calculés pour une charge constante imposée et deux valeurs de la porosité.

Liste des tableaux

- Tableau I.1 : Exemples de porosité pour différents matériaux
- Tableau I.2 : Quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane
- Tableau I.3 : Valeurs typiques de la perméabilité de quelques matériaux poreux usuels
- Tableau II.1 : Données géométriques et conditions de fonctionnement
- Tableau II.2 : Le temps d'écrasement du film fluide pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration de particules ϕ
- Tableau IV.1 : Données géométriques et conditions de fonctionnement relatives à l'étude comparative

Introduction générale

L'articulation fémoro-tibiale du genou humain suscite depuis de nombreuses années l'intérêt des chercheurs en biomécanique, des cliniciens et surtout des concepteurs de prothèses en raison de sa situation stratégique entre la hanche et la cheville et des actions qu'elle subit au cours des mouvements très variés du corps, notamment celui de la locomotion et plus encore celui du franchissement des obstacles sans oublier évidemment les mouvements et gestes sportifs (athlétisme, haltérophilie, ...).

D'autre part, la conception de prothèses articulaires efficaces et durables est basée d'une part sur une bonne connaissance du comportement tribologique des matériaux performants constituant ces prothèses et d'autre part une meilleure modélisation du comportement rhéologique du fluide assurant la lubrification de l'articulation par effet d'écrasement. Le meilleur fluide lubrifiant est bien évidemment celui qui possède des caractéristiques physiques et rhéologiques très proches du fluide synovial dont le comportement est incontestablement non Newtonien.

Le travail d'initiation à la recherche effectué dans le cadre du projet de fin d'études est une contribution à l'étude théorique et numérique de la lubrification fluide de l'articulation du genou par effet d'écrasement du film lubrifiant qui est le fluide synovial.

Dans cette étude, la configuration géométrique de l'articulation ou de la prothèse est constituée schématiquement de deux disques dont les faces sont parfaitement parallèles séparées soit par un film fluide (le troisième corps) dont le comportement peut être non Newtonien ou une mousse en polyuréthane imbibée de fluide lubrifiant supposé Newtonien.

Dans la première configuration ou la configuration classique, une des deux surfaces contiguës au film (celle du disque stationnaire) est supposée rigide imperméable et poro-élastique. Dans cette configuration, le problème d'interaction fluide-solide est gouverné par une équation de Reynolds modifiée dérivée à partir des lois décrivant le comportement hydrodynamique du film fluide en écrasement, des équations de Navier-Stokes, et de l'équation de continuité écrites en coordonnées cylindriques en utilisant les hypothèses classiques de la lubrification hydrodynamique par film mince visqueux. Dans le cas où le milieu solide est poreux ou poro-élastique, l'équation de Reynolds modifiée doit être couplée à l'équation de Darcy, et aux équations d'élasticité linéaire. Les simulations numériques envisagées seront faites soit à vitesse constante (problème de

Introduction générale

lubrification directe) ou à charge imposée (problème de lubrification inverse) en résolvant numériquement l'équation de mouvement du disque supérieur par les méthodes explicites d'Euler.

Dans la seconde configuration qui peut être considérée comme une nouvelle solution technologique à inspiration biomimétique qui imite le mode de lubrification réel de l'articulation du genou. L'étude théorique de ce mode de lubrification est basée sur une théorie de lubrification alternative dénommée « lubrification EX-Poro-Hydro-Dynamique ». Cette théorie se base sur les mêmes hypothèses simplificatrices exploitées par Osborne Reynolds pour la dérivation d'une équation de pression à partir des équations de Darcy-Brinkmann et de l'équation de continuité.

Le mémoire présentant ce travail comprend quatre chapitres et une conclusion générale avec indication des prolongements possibles de la présente étude.

Le premier chapitre est dévolu à l'étude bibliographique portant principalement sur :

L'anatomie descriptive du genou humain ; la caractérisation d'un milieu poreux ; les équations gouvernant l'écoulement dans un milieu poreux ; et la rhéologie des bio-fluides (liquide synovial).

L'intérêt de cette étude consiste de bien connaître la constitution du genou humain et de son mode de lubrification en vue d'améliorer la conception des prothèses du point de vue tribologique.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons en détail le principe et la théorie de la lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement d'un film fluide entre deux surfaces imperméables rigides.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'écrasement d'un film non Newtonien à couples de contraintes modélisant le fluide synovial en présence d'un milieu (disque inférieur) poreux ou poro-élastique.

Le quatrième et dernier chapitre est dévolu à la présentation du principe et de la théorie d'un nouveau mode de lubrification Ex-Poro-Hydrodynamique (XPHD) simulant le mode de lubrification réel rencontré dans l'articulation fémoro-tibiale qui peut être considéré comme une solution technologique innovante alternative au mode classique de lubrification par film comprimé décrit dans le deuxième et le troisième chapitres.

Chapitre I

Revue Bibliographique

Chapitre I : Revue bibliographique

I.1. Introduction

L'articulation fémoro-tibiale du genou humain est une articulation complexe formée principalement de deux extrémités osseuses (le cartilage), séparé par le fluide synovial. Cette articulation peut être considérée comme un mécanisme tribologique, donc une connaissance de son anatomie et une très bonne compréhension de sa fonctionnalité sont demandées afin d'améliorer les joints artificiels.

Le cartilage osseux est un matériau poreux compliant, ce qui lui permet de contribuer à réduire le frottement et l'usure dans le contact. En revanche, le fluide synovial a un comportement rhéologique non Newtonien ; constitué principalement par un sérum qui est un fluide Newtonien, et des additifs de l'acide Hyaluronique. Nous pouvons considérer le cartilage comme les deux premiers corps et le fluide synovial comme le troisième corps du triplet tribologique. La présence du cartilage oblige une bonne connaissance des milieux poreux et ses caractéristiques ainsi que les lois fondamentales décrivant l'écoulement d'un fluide Newtonien ou non Newtonien au sein d'un milieu poreux ou poro-élastique.

Quelques modèles mathématiques de lubrification sont rappelés dans ce chapitre. Différents mécanismes de lubrification de l'articulation du genou y sont également présentés.

I.2. Anatomie descriptive du genou humain

Comme illustré dans la [figure I.1](#), le genou humain est l'une des articulations les plus importantes de notre squelette. Il est situé dans la terminaison de la tendresse du quadriceps (muscle devant la cuisse qui est le plus puissant de l'organisme). Ainsi, il suit le tendon quadricipital qui est situé au sommet de celui-ci et est prolongé vers le bas par le tendon rotulien. L'enveloppe fibreuse qui couvre l'articulation du genou est en continuité avec ces deux tendons. Il est maintenu latéralement par deux types de ligaments appelés aileron interne et aileron externe. L'articulation du genou a un rôle de protection du tendon du quadriceps, mais elle augmente aussi le bras de levier de celui-ci, donc sa force sur le tibia (son ablation fait perdre 30% de la force au quadriceps).

Chapitre I : Revue bibliographique

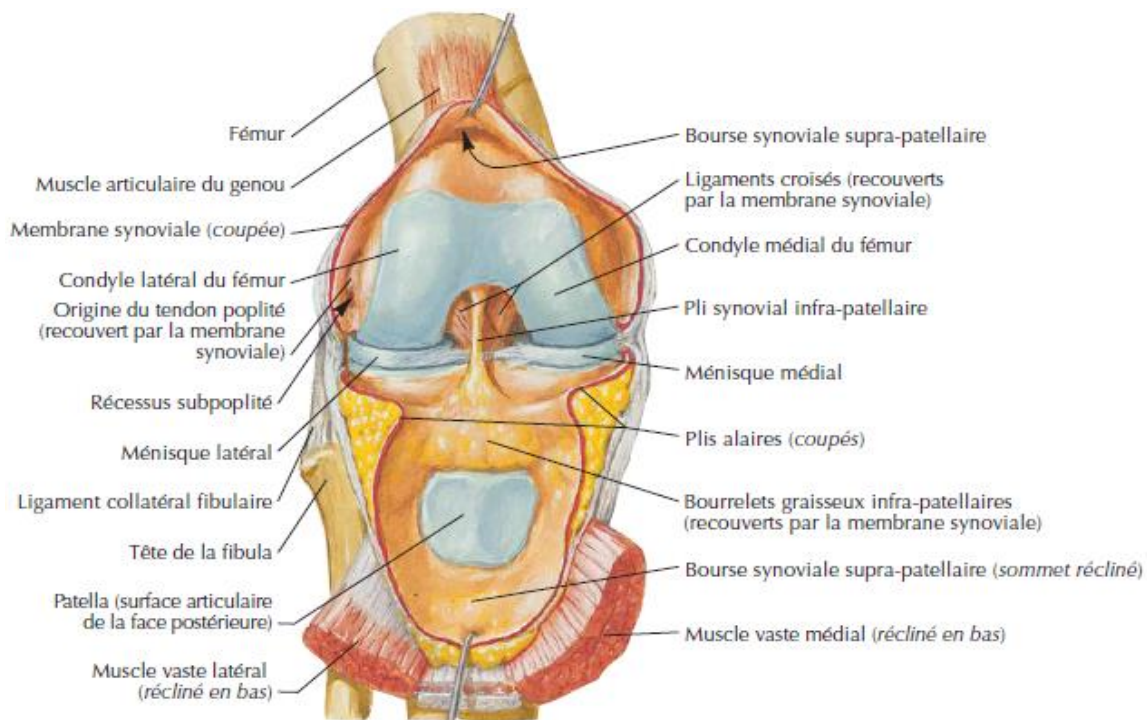


Fig. I.1 : Anatomie descriptive du genou humain [1]

Le genou est une articulation complexe, à la fois mobile, souple, solide et résistante. Il supporte le poids du corps et lui permet ses multiples activités de locomotion et sportives, il doit être stable pour ne pas entraîner de chute. Lors de ces mouvements, la jambe tourne aussi sur elle-même sans que l'os se rende compte (ces mouvements s'appellent des rotations automatiques).

Considérée comme la plus grande diarthrose dans le corps humain, l'articulation du genou est une articulation synoviale complexe possédant des extrémités osseuses, cartilages, membrane synoviale, ligaments, etc. Cette articulation peut être considérée lors de son mouvement comme un mécanisme dont la compréhension du fonctionnement mène irrémédiablement à des questionnements d'ordre tribologique. A partir de son anatomie, le cartilage osseux peut être considéré comme les deux premiers corps du tribo-système et le fluide synovial comme le troisième corps [2].

Chapitre I : Revue bibliographique

L'articulation du genou est composée de trois parties **figure I.2 [3]** :

- L'extrémité inférieure du fémur qui a la forme de deux roues accolées dénommées les condyles.
- L'extrémité supérieure du tibia, en plateau.
- La rotule (Patella) : petit bouclier situé sur l'avant du fémur. Elle est la troisième partie osseuse du genou. Cet os situé à la face antérieure du genou coulisse dans la trochlée fémorale lors de la flexion/extension du genou et constitue la poulie de réflexion de l'appareil extenseur. Le muscle quadriceps et la rotule (appelés appareil extenseur) permettent d'étendre la jambe. Leur rôle est très important lors de la marche car ils verrouillent le genou.

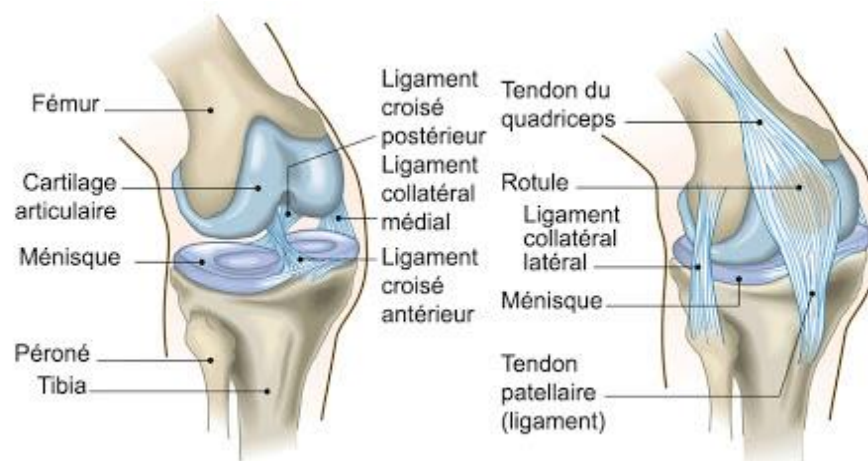


Fig. I.2 : Composantes constituant le genou [3]

Les deux extrémités, condyles fémoraux, et plateaux tibiaux, sont recouvertes de cartilage dont la structure est poreuse voire poro-élastique, ce dernier baigne dans un liquide appelé "liquide synovial" qui lubrifie et nourrit le cartilage. C'est l'usure de ce cartilage accompagnée de phénomènes inflammatoires qui définit l'arthrose qui est une pathologie fréquemment rencontrée surtout chez les personnes âgées communément connue sous le nom de rhumatisme.

Au contraire de la hanche qui est une articulation avec une stabilité intrinsèque par emboîtement, le genou comporte trois compartiments permettant six degrés de liberté.

- Le compartiment fémoro-tibial interne,
- Le compartiment fémoro-tibial externe,
- Et le compartiment fémoro-rotulien, situé entre le fémur et la rotule.

Chapitre I : Revue bibliographique

La stabilité de l'articulation est extrinsèque, assurée par un système ligamentaire complexe et contrôlée par des muscles. L'idéal serait de remplacer les surfaces articulaires usées en respectant, dans la mesure du possible, l'appareil ligamentaire. Ainsi la cinématique de la nouvelle articulation serait proche de la normale.

La **figure I.3** illustre les éléments principaux du triplet tribologique appelé également tribo-système à partir d'une coupe anatomique d'une articulation : les cartilages articulaires et la synovie ou "fluide synovial" jouant le rôle de lubrifiant, constituent respectivement les deux premiers corps et le troisième corps. Le système musculo-ligamentaire joue le rôle de mécanisme [4].

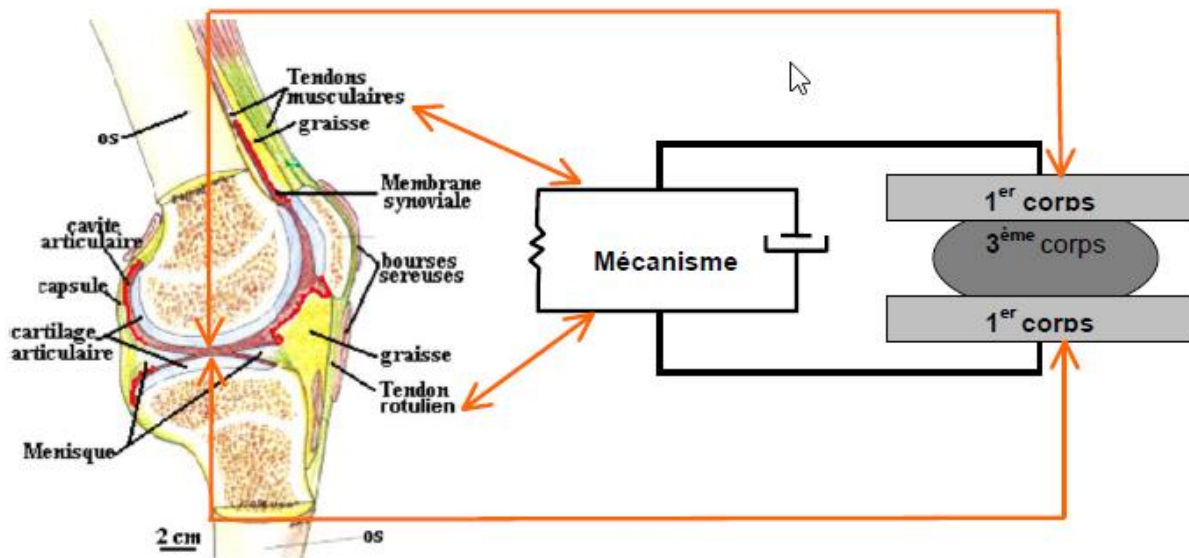


Fig. I.3 : Eléments principaux du triplet tribologique articulaire [4]

Avant de détailler la structure et les propriétés de chaque élément du triplet tribologique il convient de mentionner que l'articulation est une structure vivante qui est conçue au cours du développement embryonnaire. Cette étape embryonnaire, est importante pour comprendre les performances tribologiques du contact articulaire.

Chapitre I : Revue bibliographique

1.2.1. Mécanisme musculo-ligamentaire

Ce mécanisme permet de mettre en mouvement les premiers corps du contact articulaire par l'intermédiaire du système neuromusculaire et du système ligamentaire. Le système neuromusculaire est le générateur du mouvement tandis que le système ligamentaire crée les « liaisons flexibles » entre les premiers corps qui limitent et stabilisent les mouvements articulaires, en imposant les « degrés de liberté cinématiques ».

- Structure :

Le système neuromusculaire peut être vu comme un système mécatronique formé par des unités motrices qui comportent une partie électrique de commande, couplée à une partie mécanique de fonction.

La partie électrique est constituée par la fibre nerveuse qui transmet à la fibre musculaire des décharges électriques (influx nerveux) provenant du système nerveux central. Ces décharges sont générées par la volonté de faire un mouvement, d'où leur appellation de « décharges électriques volontaires ».

La partie mécanique est représentée par la fibre musculaire, qui fonctionne comme un actuateur piézo-électrique en modifiant sa longueur en fonction de l'amplitude de la décharge électrique transmise. Les fibres musculaires sont assemblées entre elles pour former des muscles qui relient les extrémités osseuses articulaires entre elles.

Le système ligamentaire est considéré par les biologistes comme un système passif car il ne génère pas de mouvement, mais il est essentiel pour le bon fonctionnement articulaire car il limite et stabilise les mouvements, tout en informant le système nerveux central de la position articulaire [4].

- Propriétés tribologiques :

Bien que la structure macroscopique du mécanisme et les sollicitations globales puissent être très différentes d'une articulation à l'autre, les compensations biologiques telles que la conformité géométrique des surfaces articulaires et le rétrocontrôle nerveux font que les conditions locales de fonctionnement tribologique sont pratiquement les mêmes pour toutes les articulations.

Pour remonter à ces conditions locales, la bibliographie présente des études de dynamique articulaire permettant de connaître les valeurs des sollicitations globales imposées par le mécanisme articulaire au cours de la marche normale.

Chapitre I : Revue bibliographique

Ces données globales sont utilisées dans des modèles analytiques (cinématique ou éléments finis) pour remonter aux paramètres locaux du mécanisme articulaire : pression de contact et vitesses relatives des surfaces articulaires. Mais, les résultats de la bibliographie obtenus avec ces modèles sont dispersés, car ils ne prennent pas en compte les caractéristiques mécaniques complexes des cartilages articulaires (effets des premiers corps) et les effets dus à la présence d'un film lubrifiant (effets du troisième corps) [4].

1.2.2. Cartilage articulaire (Premiers corps)

Le cartilage articulaire, les premiers corps, dans les contacts naturels, dans le cas d'un fonctionnement normal, contribue, avec le fluide synovial, à la lubrification des surfaces des joints en contact, en maintenant un faible frottement et ainsi une faible usure. Il résiste à la compression, transmet et distribue les charges, d'où il sert comme absorbeur de chocs des charges d'impact et est une surface de support de charge.

Biologiquement, le cartilage articulaire, qui recouvre les extrémités osseuses, est une lamelle de tissu vivant, appelé tissu mou. Il est blanc, souple, résistant et élastique, reconnaissable à l'alignement de ses cellules. Le tissu est non vasculaire, sa nutrition se fait par diffusion du fluide synovial. Il n'a pas de terminaisons nerveuses, la douleur n'apparaît qu'une fois que les lésions ont atteint l'os. De plus, il a une faible immunité, comme il ne contient pas de vaisseaux lymphatiques. C'est l'une des formes de tissus conjonctifs les plus simples de l'organisme [2].

Le cartilage articulaire est un matériau poreux anisotrope de structure complexe et d'épaisseur spécifique à chaque articulation, qui tend vers zéro dans le cas des joints arthritiques (cas pathologique). Il se compose essentiellement d'un gel, appelé matrice, dans laquelle sont incluses des fibres de collagène et des cellules.

- Structure :

La surface articulaire rugueuse, comme une membrane fine, est un revêtement de la matrice cartilagineuse. Cette membrane est constituée, entre autres, d'une couche de phospholipides, ayant des propriétés tensioactives appelée surface phospholipide active, qui agit de la même façon que les lubrifiants lamellaires solides, comme par exemple le graphite et le bisulfure de molybdène [2,4].

Chapitre I : Revue bibliographique

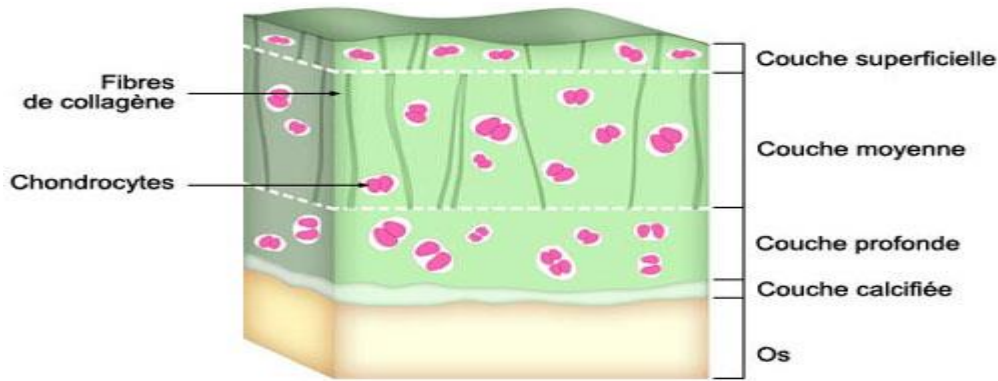


Fig. I.4 : Les couches du cartilage articulaire [5]

Sur la **figure I.4**, quatre zones peuvent se distinguer dans le cartilage articulaire [2] :

- Couche superficielle où les fibres de collagène sont serrées, parallèles à la surface et forment une chaîne étroite. Cela mène à une élasticité plus faible perpendiculairement à la surface et une faible perméabilité de la surface. La présence de groupes de lignes sur la surface articulaire indique une direction préférée des fibres de collagène à la surface.
- Couche intermédiaire constituée d'un réseau de fibres de collagène entrelacées plus espacées et plus aléatoirement orientées relativement à la zone superficielle. Cette zone contient moins d'eau.
- Couche profonde où le réseau des fibres est plus étroit que celui de la première zone et les fibres sont orientées primordialement perpendiculairement à la surface. Cette zone a la plus faible quantité d'eau.
- Couche calcifiée constituée de quelques cellules ancrées dans une matrice contenant des cristaux de sel de calcium. Les fibres sont alignées perpendiculairement et connectées à l'os sous-jacent.

Il est à noter que l'épaisseur des zones superficielles et calcifiées atteignent approximativement chacune 10% et les zones intermédiaires et profondes chacune 40% de l'épaisseur totale du cartilage. D'autre part, la **figure I.5** montre que les cartilages articulaires ont une structure complexe qui se compose principalement d'un gel dans lequel sont incluses des fibres et des cellules.

Chapitre I : Revue bibliographique

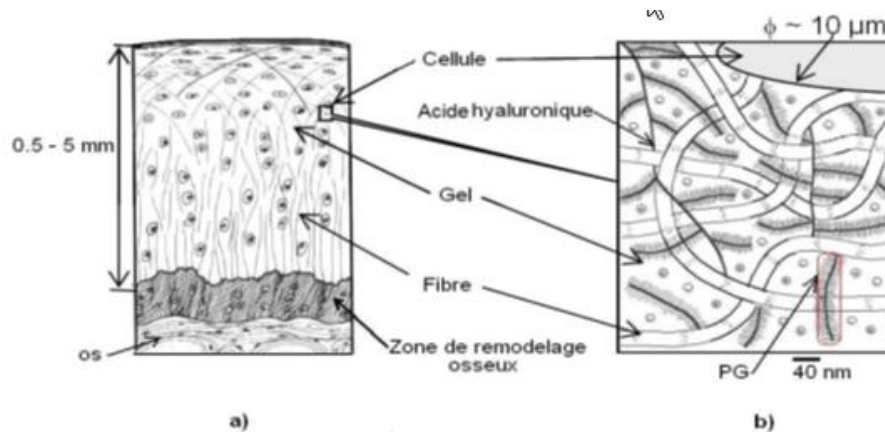


Fig. I.5 Composition du cartilage articulaire [4]

▪ Propriétés :

Le comportement mécanique global du cartilage articulaire résulte donc des interactions entre les propriétés mécaniques, physico-chimiques et biologiques imposées par sa structure « gel - fibre - cellule ».

Le gel confère les propriétés physico-chimiques par lesquelles le cartilage articulaire est capable d'attirer et de retenir l'eau et les ions positifs.

Les fibres règlent la teneur en eau du cartilage articulaire et lui apportent sa résistance mécanique.

Les cellules confèrent les propriétés biologiques par lesquelles le cartilage articulaire maintient un équilibre quantitatif entre ses composants : fibres, gel et substances minérales.

Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses expérimentations, et qui ciblent les plages de valeurs des trois principaux paramètres qui caractérisent le comportement mécanique global du cartilage articulaire [6] :

- *Le module d'élasticité d'Young global* : ce module dont la valeur typique s'échelonne entre 0,5 et 1 MPa déterminée lors d'essais de compression après stabilisation de la migration d'eau et d'ions dans la matrice cartilagineuse.
- *Le coefficient de Poisson* : le cartilage étant un matériau poreux voire poro-élastique composé d'une phase solide et d'une phase fluide. Ces deux phases, étudiées séparément, sont considérées comme incompressibles ou quasi-incompressibles ce qui implique des coefficients de Poisson très proches de 0,5. Mais, la migration de la phase fluide hors du cartilage lors des sollicitations mécaniques réduit le coefficient de Poisson à seulement 0,2. Cependant, cette

Chapitre I : Revue bibliographique

valeur dépend de la perméabilité ou de la porosité du cartilage, qui peut être modifiée par les assemblages moléculaires de la synovie.

- *La perméabilité* : les valeurs du rapport de la perméabilité à la viscosité dynamique ou absolue $\frac{k}{\mu}$ mesurées sont généralement comprises entre 10^{-16} m⁴/N.s et 10^{-15} m⁴/N.s, pour une épaisseur de 1 mm de cartilage soumis à une différence de pression hydrostatique de 2 MPa. Cette perméabilité paraît faible pour un matériau comme le cartilage, qui possède 80% d'eau. Ceci peut s'expliquer par le fait que cette perméabilité est donnée par des effets physico-chimiques (osmotique et électrique) et non simplement par des effets mécaniques (poro-élasticité).

Comme il a été mentionné précédemment, le cartilage articulaire est un corps poreux ou poro-élastique, qui a l'aspect d'une mousse ou d'une éponge, l'eau remplissant le vide interstitiel à 75 % qui lui donne sa fonction de coussinet hydrostatique dont l'efficacité dépend de son épaisseur. La porosité du cartilage est élevée, de 20 à 65 Å, et déterminée par la mesure des échantillons de cartilage avant et après séchage, dans des étuves à 80°C, pendant 24 heures. Sa perméabilité est très faible de l'ordre de 10^{-18} m² et dépendante de sa déformation comme l'est aussi la porosité. **Lai et Mow [7]** utilisent la loi empirique de perméabilité : $k = k_0 e^{-M\varepsilon}$ où k_0 est la perméabilité du matériau sans déformation, M est le coefficient sans dimension de perméabilité, et ε est la déformation. Le coefficient M s'obtient par un ajustement des résultats expérimentaux à la courbe théorique. Des relations plus élaborées ont fait suite, faisant intervenir la porosité qui peut être modélisée selon des lois linéaires, si les déformations sont petites.

1.2.3. Fluide synovial (3ème corps)

Le fluide synovial (FS) normal est un liquide visqueux clair à jaune composé principalement de sérum, qui ressemble au plasma sanguin, sauf qu'il y a moins de protéines. De longues chaînes d'acide hyaluronique donnent au liquide synovial de nombreuses propriétés rhéologiques bénéfiques [8].

Du point de vue rhéologique, le comportement du liquide synovial est non newtonien qui se caractérise par un effet de cisaillement visqueux, un effet de contrainte normal perpendiculaire au plan de cisaillement connu sous le nom d'effet de **Weissenberg**, et un effet élastique.

Chapitre I : Revue bibliographique

Les propriétés viscoélastiques linéaires ou non linéaires que présentent le liquide synovial sont particulièrement bien adaptées à l'articulation puisque le fluide est très visqueux à faible taux de cisaillement comme pendant la marche, et très élastique pendant les taux de cisaillement élevés, comme lors d'un saut (geste sportif) ou d'un traumatisme [6].

Le liquide synovial de l'articulation est à l'œuvre dans de nombreux mécanismes complexes à l'intérieur de l'articulation pour maintenir un mouvement efficace. Il est un composant primaire du processus de lubrification. Dans les théories de la couche limite et du film fluide, il est essentiel que le liquide synovial fournisse les molécules lubrifiantes nécessaires et les propriétés visqueuses, respectivement. Le liquide synovial et le cartilage articulaire sont étroitement liés pour former et maintenir un film lubrifiant en vue d'assurer la lubrification fluide de la synovie.

Le volume du liquide synovial présent normalement dans une articulation saine est faible. Il est de l'ordre de 0,5 à 4 ml selon la taille de l'articulation. Par conséquent, c'est seulement lorsque ce volume augmente lors des maladies articulaires, qu'il est possible d'extraire du liquide synovial d'une articulation et de l'analyser. C'est pourquoi la majorité des études rhéologiques du fluide synovial utilisent un fluide synovial pathologique ou des substituts, qui sont des solutions aqueuses d'acide hyaluronique. Cette situation explique les difficultés pour obtenir des valeurs réalistes des paramètres rhéologiques du fluide synovial sain.

▪ Composition :

Le fluide synovial se compose de sérum physiologique « additivé » des composants moléculaires suivants [9] :

- Protéines sériques, de poids moléculaire 67 kDa, c'est-à-dire 1.1×10^{-19} g (environ 20g/l).
- Acide hyaluronique, de poids moléculaire 5000 kDa (environ 3 g/l).
- Lipides, de poids moléculaire 0.75 kDa (environ 3 g/l).
- Lubricine, de poids moléculaire 227 kDa (~ 0.02 g/l).

Les protéines sériques sont des macromolécules ellipsoïdales d'un volume d'environ $4 \times 4 \times 14 \text{ nm}^3$. Leurs rôles principaux dans les organismes vivants sont de véhiculer des substances nutritives ou immunitaires (rôle biologique) et d'équilibrer les pressions osmotiques extracellulaires et intracellulaires (rôle physico chimique),

Chapitre I : Revue bibliographique

donc de maintenir en vie les cellules et les tissus. Les albumines contribuent aussi à l'augmentation de la viscosité de la synovie en formant des réticulations entre les chaînes moléculaires de l'acide hyaluronique (rôle mécanique) [10].

L'acide hyaluronique (AH), un polysaccharide combiné avec des protéines, de poids moléculaire élevé (environ 10^6 g.mole⁻¹), secrété par la membrane synoviale, est un constituant important du fluide synovial, puisqu'il lui confère un comportement fortement non-Newtonien, comme c'est une molécule très hydrophile, un état de gel et conduit à une viscosité importante entre 0,1 à 1 Pa.s dans le cas normal et 0,01 à 0,1 Pa.s dans le cas des fluides rhumatismaux [2]. Il présente les caractéristiques structurales suivantes :

- Une structure bi-hélicoïdale à l'état solide,
- Un poids moléculaire d'environ 5 millions de Daltons (1Da = $1,66018 \times 10^{-24}$ g). Ce grand poids moléculaire lui interdit de pénétrer dans le cartilage articulaire,
- un rayon giratoire moléculaire d'environ 70 nm et une longueur de chaîne moléculaire étirée de 12 μ m.

En conclusion, l'acide hyaluronique est un composant important de la tribologie articulaire car il impose la valeur élevée de la viscosité de la synovie, mais il n'est pas le seul à contribuer aux performances tribologiques d'une articulation saine.

Les lipides de la synovie sont des phospholipides, amphiphiles, dont la structure se compose de deux parties [4] :

- Une queue hydrophobe composée des deux chaînes d'acides gras. Dans la synovie les acides gras formant ces queues sont pour 43 % saturés et 57% non saturés.
- Une tête hydrophile composée de trois éléments qui sont un glycérol, un phosphate et un groupe spécifique à chaque type de phospholipide. Dans la synovie, ce groupe génère trois types de phospholipides qui sont pour 41% en masse des phosphatidylcholines, pour 27% des phosphatidyléthanolamines et 32% de sphingomyélines.

La lubricine est une molécule glycoprotéique présente sur les surfaces du cartilage articulaire et de la membrane synoviale. Sa structure chimique est composée d'environ 50% en masse de vitronectine, de 40% d'hémopexine. Les 10% restants sont des parties protéiques de liaisons.

Chapitre I : Revue bibliographique

▪ Propriétés du fluide synovial :

La **figure I.6** montre que la viscosité du FS est inversement proportionnelle au taux de cisaillement, ce qui indique un comportement appelé rhéofluidifiant (shear thinning fluid). Elle varie de quelques dixièmes de [Pa.s] à quelques centièmes de [Pa.s] et est directement liée à la concentration de AH qui est de 2 à 3 mg.ml⁻¹, dans un genou humain normal. Un fluide synovial qui contient moins de AH que la normale est moins visqueux (**figure I.7**). Les injections thérapeutiques de AH, administrées dans les cavités articulaires affectées, dans le cas de l'ostéoarthrite, ont pour raison de faciliter la lubrification de l'articulation et par conséquent soulager la douleur. C'est cette concentration qui permet aux molécules de AH de former un réseau macromoléculaire réticulant responsable des propriétés rhéologiques du FS. A partir d'une concentration supérieure à 0,1 mg.mL⁻¹, l'AH commence à montrer des caractéristiques non-Newtoniennes significatives. Une bonne corrélation entre la viscosité et la concentration de AH a été proposée dans la littérature [11].

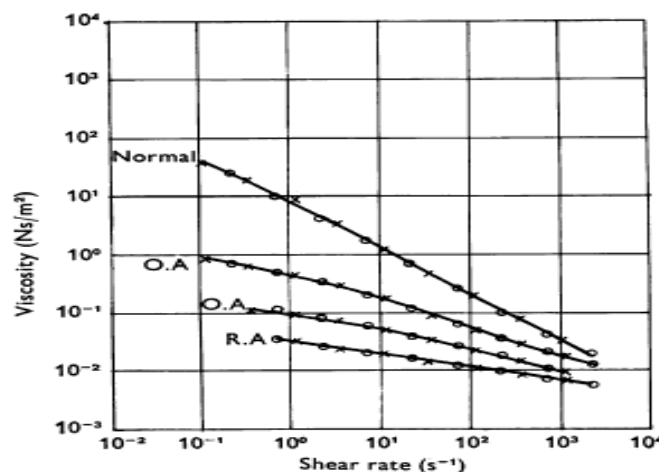


Fig. I.6 Corrélation entre la viscosité et la concentration de AH [11]

La viscosité du FS est dépendante aussi du temps, c'est le comportement thixotrope. Elle n'est pas très sensible aux changements de pression, de la pression atmosphérique à 100 MPa, sa variation est insignifiante. C'est une caractéristique partagée avec l'eau et différente de celle des huiles minérales et des fluides de silicone. La viscosité croît avec la température et à des taux de cisaillement faibles, la croissance est plus grande qu'à des taux de cisaillements élevés.

Chapitre I : Revue bibliographique

Dans certaines maladies inflammatoires, où le volume du FS augmente considérablement et la concentration de AH diminue, la viscosité, se voit en conséquence, décroître et peut devenir indépendante du taux de cisaillement, cependant, la capacité de lubrification paraît peu affectée, seulement 20 de 180 joints malades montrent une diminution de la capacité de lubrification [2].

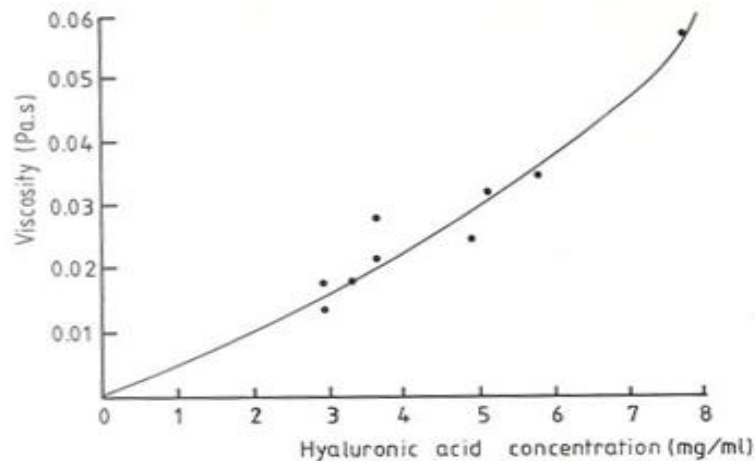


Fig. I.7 : Variation de la viscosité du fluide synovial avec la concentration de l'acide hyaluronique [2]

La plupart des travaux rhéologiques consacrés à la synovie considèrent celle-ci comme un milieu continu et révèlent un comportement rhéofluidifiant du liquide synovial ; c'est-à-dire qu'en fonction du taux de cisaillement, les valeurs de sa viscosité diminuent de plusieurs ordres de grandeur.

I.3. Milieux poreux

I.3.1. Définitions

Un milieu poreux est communément défini comme étant un milieu solide contenant des pores qui sont des espaces vides interconnectés ou séparés. Autrement dit, le milieu poreux est un corps solide contenant une quantité suffisante de vides répartis de manière ordonnée ou chaotique, connectés ou non-connectés entre eux comme illustré sur la [figure I.8](#). Les vides se caractérisent par des formes et des tailles très variées qui peuvent être classés en trois groupes, à savoir : les pores moléculaires qui sont les plus petits vides, les cavernes qui sont les plus grands vides, et les pores qui sont simplement l'espace entre les deux premiers types [12].

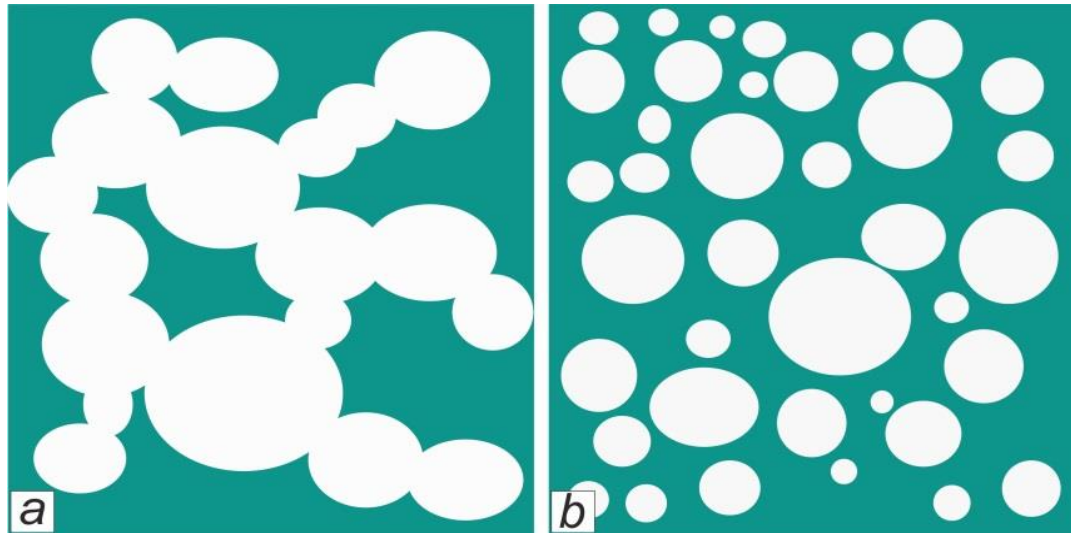


Fig. I.8 : Structure d'un milieu poreux [12]

Selon la structure du matériau formant la partie solide du milieu poreux [figure I.9](#), il est possible de faire la classification suivante :

- le matériau granulaire constitué d'un grand nombre de particules solides distinctes (les grains) qui ne sont pas liés par des liaisons chimiques ;
- le matériau cellulaire dont la partie solide forme des cellules distinctes ouvertes ou fermées;
- le matériau fibreux dont la partie solide est constituée de fibres plus ou moins enchevêtrées les unes dans les autres et agglomérées par un liant.

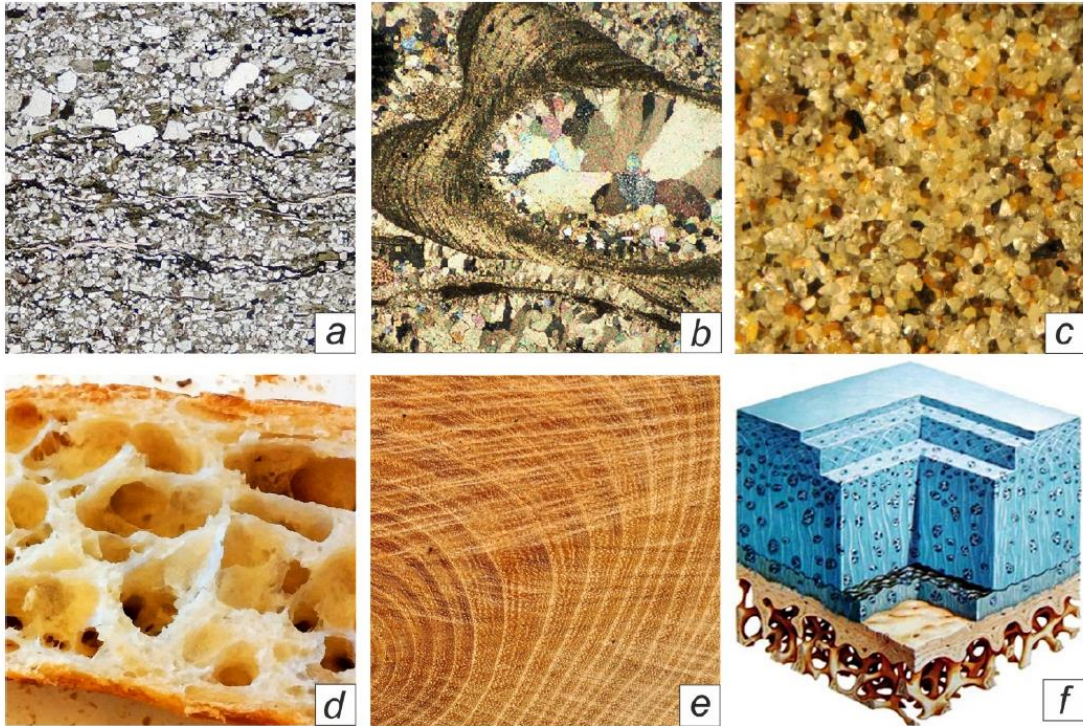


Fig. I.9 Exemples de matériaux poreux naturels [12] :

a) grès, b) calcaire, c) sable des plages, d) pain, e) bois, f) cartilage articulaire.

Les matériaux poreux sont largement présents aussi bien dans la nature (par exemple les roches, les sols, et le bois) que dans le milieu industriel où on s'aperçoit de l'utilisation ubiquitaire des milieux poreux dans différents domaines comme l'aérospatial, l'industrie automobile, la médecine, et la bio-ingénierie **figure I.10**.

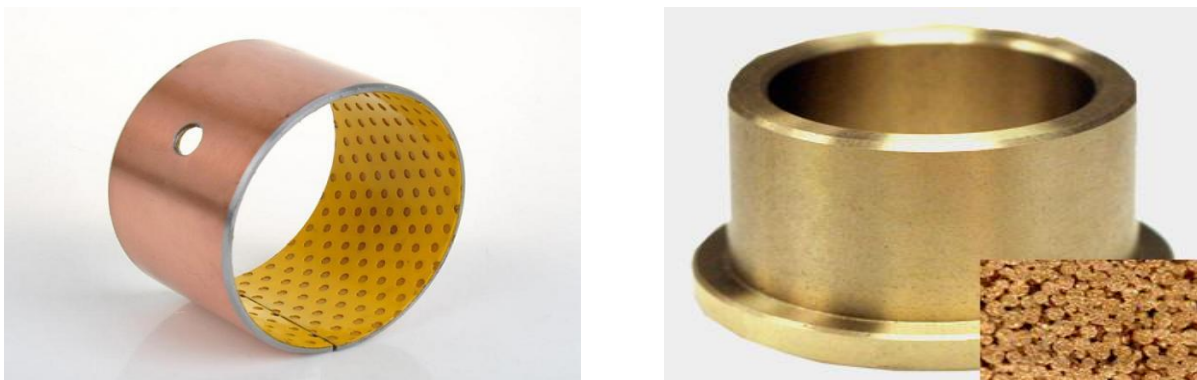


Fig. I.10 : Exemples de coussinets poreux

Chapitre I : Revue bibliographique

1.3.2. Caractéristiques des matériaux poreux

Les milieux poreux ont différentes caractéristiques, à savoir :

La porosité :

Les milieux poreux comme montrés dans la **figure I.11** contiennent un certain pourcentage de vides qui peuvent être occupés par des fluides ce qui définit leur porosité ε .

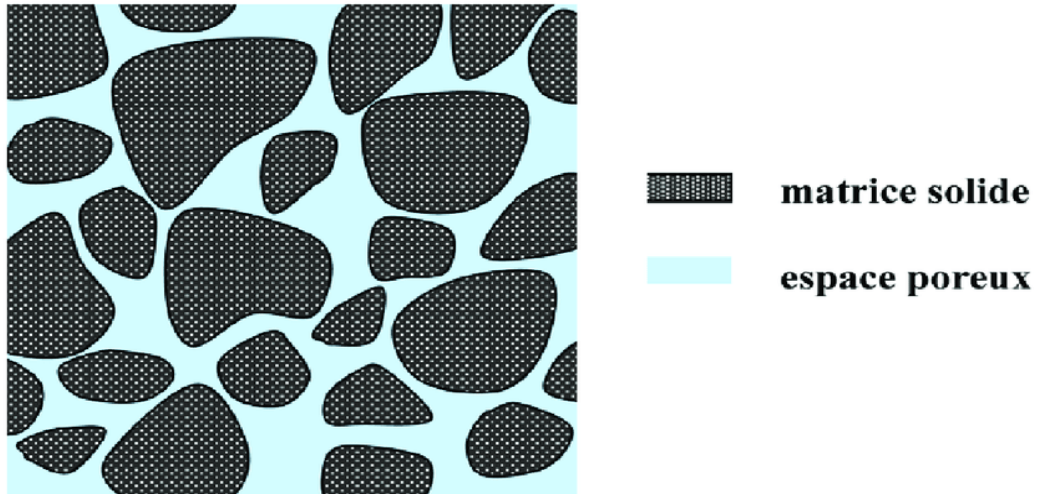


Fig. I.11 : L'espace vide dans un milieu poreux

Ce paramètre est défini par la relation suivante : $\varepsilon = \frac{V_p}{V_t}$ où V_p est le volume des pores et V_t est le volume total.

Les valeurs de la porosité s'échelonnent entre 0 et 1, telle que la valeur 0 représente le solide plein et la valeur 1 représente un solide complètement vide. La porosité calculée seulement à partir de l'espace poreux interconnecté est appelée la porosité effective [6].

▪ Type de porosité :

La porosité se diffère par la taille des pores, on peut distinguer plusieurs types [12] :

- la microporosité correspondant aux pores dont le diamètre ne dépasse pas 2 nm ;
- la mésoporosité correspondant aux pores dont le diamètre est compris entre 2 et 50 nm ;
- la macroporosité concernant les pores dont le diamètre est supérieur à 50 nm.

Chapitre I : Revue bibliographique

▪ Détermination de la porosité :

La détermination expérimentale de la porosité est basée sur la mesure du volume des pores et le volume total afin de calculer le rapport de porosité. Nous présentons ci-dessous les méthodes les plus utilisées :

- la méthode directe qui consiste à mesurer la différence entre le volume total d'un échantillon et le volume de celui-ci après la compression totale. Elle n'est applicable que pour les matériaux poreux souples.
- la méthode optique basée sur l'observation des sections d'un milieu poreux au microscope optique. En supposant que la porosité surfacique pour une section aléatoire doit être la même que celle du milieu poreux, on obtient la valeur de la porosité.
- la méthode qui se base sur les mesures de la densité utilisant comme relation simple : $\varepsilon = 1 - \frac{\rho_g}{\rho_m}$ où ρ_g est la masse volumique globale ou apparente du milieu poreux et ρ_m étant la masse volumique réelle du matériau formant la structure solide du milieu poreux (sans porosité).
- la méthode d'expansion du gaz qui consiste à mesurer directement le volume du gaz qui se trouve dans l'échantillon et qui est égal au volume des pores.
- la méthode d'imbibition qui permet de déterminer la porosité effective du milieu poreux. Elle se base sur la capacité du matériau poreux à s'imbiber d'un fluide.
- la méthode basée sur la tomographie par absorption de rayons X basée sur la reconstruction d'images en section d'un milieu poreux en trois dimensions. Ce type de mesures repose sur l'analyse multidirectionnelle de l'interaction d'un faisceau de rayons X avec l'échantillon étudié. La valeur de la porosité est obtenue après le traitement d'une séquence d'images numériques [12].

Dans le **tableau I.1** nous présentons quelques exemples de valeur de porosité pour différents matériaux.

Chapitre I : Revue bibliographique

Tableau I.1 Exemples de porosité pour différents matériaux [6,12] :

Matériaux	Porosité ε
Brique	0.12 – 0.66
Béton (bitumineux)	0.1
Poudre de cuivre (compacté à chaud)	0.09 – 0.34
Fibre de verre	0.88 – 0.93
Poudre d'ardoise noire	0.57 – 0.66
Cuir	0.56 – 0.59
Sable	0.37 – 0.50
Catalyseur	0.45
Cheveux (mammifères)	0.95 -0.99
Sol	0.43 – 0.54

La compacité

La deuxième caractéristique des milieux poreux est la compacité qui est cette fois-ci le pourcentage de volume solide dans le milieu poreux calculée par la relation :

$$C = \frac{V_s}{V_t} = 1 - \varepsilon \quad \text{où } V_s \text{ est le volume du solide et } V_t \text{ est le volume total du milieu [12].}$$

Ainsi, nous pouvons dire que la compacité représente le taux d'occupation réel de l'espace à l'intérieur d'un milieu poreux.

La connectivité et la tortuosité

La connectivité caractérise la topologie du volume des pores, le voisinage des pores et la présence de pores bouchés tandis que la tortuosité représente la non-rectilinéarité des trajectoires à l'intérieur du milieu poreux **figure I.12**. Si nous considérons un échantillon de longueur L d'une part, et un canal de longueur effective $L_e > L$ qui traverse cet échantillon d'une extrémité à l'autre, nous pouvons déterminer la tortuosité comme :

$$\tau = \frac{L_e}{L}$$

Autrement dit, la tortuosité caractérise la ligne de courant d'un fluide dans le milieu poreux, par rapport à une ligne droite entre les extrémités d'écoulement dans le milieu poreux.

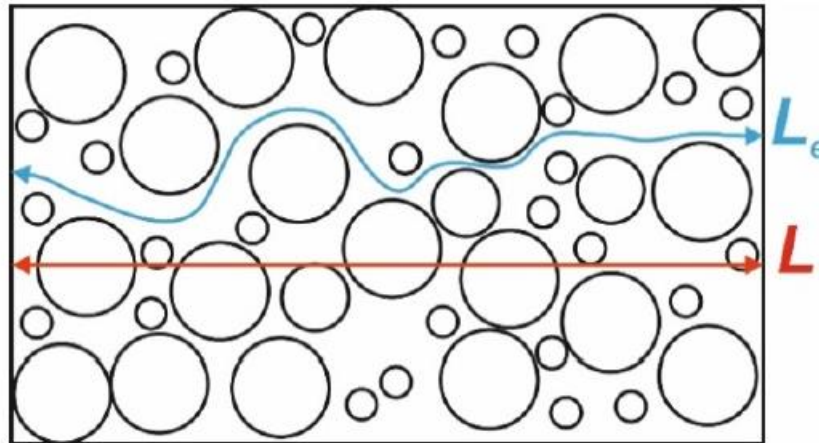


Fig. I.12 : Notion de tortuosité d'un milieu poreux [12]

Dans le **tableau I.2** suivant, nous reportons quelques propriétés de la roche de sable (grès ou sandstone) et de la mousse en polyuréthane considérée comme des milieux poreux naturels et industriels [13] :

Tableau I.2 quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane

Porosité ε (-)	Perméabilité k (m^2)	Tortuosité τ (-)	Module d'Young, E (GPa)	Coefficient de Poisson, ν (-)	Masse volumique, ρ (kg/m^3)
0.3	10^{-10} - 10^{-4}	1.02	7.3	0.3	2300.
0.97	1.53×10^{-10}	1.60	169×10^{-6}	0.3	998.

La perméabilité

La perméabilité intrinsèque, notée k , se rapporte au milieu poreux indépendamment des caractéristiques du fluide. Elle correspond à l'interconnexion et aux caractéristiques géométriques des vides permettant à un fluide d'y circuler. La perméabilité dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. Elle est dimensionnellement homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel [6,12]. La perméabilité est un paramètre physique qui caractérise la capacité du milieu poreux à conduire à travers lui un liquide sous un gradient de pression donné. L'équation dimensionnelle de la perméabilité est $[k] = L^2$ ou encore le Darcy ($1 \text{ Darcy} = 0.987 \times 10^{-12} m^2 \approx 1 \mu m^2$).

Chapitre I : Revue bibliographique

La littérature technique offre plusieurs relations et formules pour le calcul de la perméabilité k . Elle peut être calculée à partir de la relation de Kozney-Carmen [14] :

$$k = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \text{ où } D_p \text{ est un diamètre caractéristique des pores.}$$

▪ Mesure de la perméabilité : la perméamétrie

La mesure de la perméabilité d'un milieu poreux dépend de plusieurs facteurs ce qui nécessite l'emploi de nombreuses techniques et méthodes de mesure. En général, le principe de mesure de la perméabilité consiste à mesurer le débit d'un liquide de viscosité donnée à travers un échantillon pour un gradient de pression qui provoque un écoulement. Dans la référence [12], nous trouvons une description détaillée des différentes techniques utilisées en perméamétrie.

Dans le **tableau I.3** nous présentons quelques exemples de valeur de perméabilité pour différents matériaux.

Tableau I.3 Valeurs typiques de la perméabilité de quelques matériaux poreux usuels [6,12]

Matériau	Perméabilité [m ²]
Briques	$4,8 \times 10^{-15} - 2,2 \times 10^{-13}$
Cuir	$9,5 \times 10^{-14} - 1,2 \times 10^{-13}$
Fibres de verre	$2,4 \times 10^{-11} - 5,1 \times 10^{-11}$
Sable	$2,0 \times 10^{-11} - 5,1 \times 10^{-11}$
Cheveux artificiels	$8,3 \times 10^{-10} - 1,2 \times 10^{-9}$
Poudre d'ardoise noire	$4,9 \times 10^{-14} - 1,2 \times 10^{-13}$
Fils à tisser	$3,8 \times 10^{-9} - 1 \times 10^{-8}$

1.3.3. Modèles d'écoulement dans les milieux poreux

Pour étudier les processus d'écoulement dans un milieu poreux, il existe différents modèles qui utilisent des lois basiques de transfert de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Dans ce qui suit, nous ne présenterons que les modèles les plus utilisés :

Chapitre I : Revue bibliographique

Modèle de Darcy

Dans les milieux poreux, nous utilisons généralement la loi fondamentale de **Darcy**, cette loi a été validée par des résultats expérimentaux, ce modèle est décrit par la formule suivante [15] :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* \quad (\text{I.1})$$

où \vec{v}^* est la vitesse de filtration ou d'écoulement, μ est la viscosité dynamique du fluide, k est la perméabilité du milieu poreux, et p est la pression.

Le signe moins apparaissant dans la loi de Darcy signifie que l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens des pressions décroissantes.

Ce modèle, dit aussi loi de **Darcy**, relie donc le gradient de pression avec la vitesse d'écoulement, mais malgré cela elle est limitée car ce modèle ne s'applique pas dans les cas où la vitesse est très élevée ou dans le cas d'un milieu ayant une porosité importante, car nous ne pouvons pas considérer une variation linéaire du gradient de pression avec la vitesse en raison de l'influence significative des effets inertiels. Il a été affirmé que l'application de ce modèle se limite à des écoulements de faibles valeurs du nombre de **Reynolds** modifié. Afin de caractériser les domaines de vitesse d'écoulement, nous introduisons le nombre de Reynolds modifié dont l'expression est [12] :

$$R'_e = \frac{v\rho d}{\mu'} \quad (\text{I.2})$$

où μ' est la viscosité dynamique effective, ρ est la masse volumique, et d est le diamètre d'écoulement.

Modèle de Darcy-Forchheimer

En dépit de sa large utilisation dans l'étude des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy est mis en défaut lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est très élevé. Dans ces conditions, les forces d'inertie deviennent prépondérantes et ne doivent pas être ignorées. Ce modèle a donc subi des modifications dont le but est d'introduire le terme d'inertie.

Chapitre I : Revue bibliographique

Parmi ces modifications, nous citons celle de **Forchheimer** [6] :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{k}\vec{v}^* - \frac{\rho c_f}{\sqrt{k}}|\vec{v}^*|\vec{v}^* \quad (I.3)$$

où c_f est le coefficient de la traînée de forme qui représente le terme d'inertie, parfois appelé le coefficient de Forchheimer, qui n'est pas une constante universelle mais varie selon la nature du matériau poreux et la vitesse d'écoulement.

Le passage du modèle de Darcy au modèle de **Darcy-Forchheimer** se produit lorsqu'on arrive à un nombre de Reynolds modifié égale à 10, cette transition est caractérisée par l'apparition des premiers tourbillons dans l'écoulement.

Modèle de Darcy-Brinkman

Avec la loi de Darcy, il n'est pas possible d'appliquer des conditions sur la vitesse tangentielle ou sur sa dérivée. Donc une autre alternative de correction à l'équation de Darcy a été faite par Brinkman ; ce modèle est connue actuellement sous le nom de l'équation de **Darcy-Brinkman** dont la forme est [16] :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{k}\vec{v}^* + \mu'\vec{\nabla}^2\vec{v}^* \quad (I.4)$$

où μ^* est la viscosité dynamique effective ou seconde viscosité.

Le premier terme de droite est le terme de Darcy, et le second est appelé le terme de Brinkman qui présente une analogie du terme de Laplace dans l'équation de Navier-Stokes.

La correction de Brinkman est valable pour les grandes valeurs de la porosité.

Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Toujours dans le but d'obtenir une formulation universelle pour caractériser avec une précision suffisante les écoulements dans les milieux poreux, une autre correction a été faite en vue d'améliorer la loi décrivant les écoulements visqueux dans les milieux poreux. Cette correction, basée sur la fusion des trois modèles évoqués précédemment, a permis de dériver un modèle global et complet appelé loi de **Darcy-Brinkman-Forchheimer**.

Chapitre I : Revue bibliographique

Ce modèle s'exprime [6] :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* - \frac{\rho c_f}{\sqrt{k}} |\vec{v}^*| \vec{v}^* \quad (I.5)$$

A notre connaissance, cette loi ne fut pas validée expérimentalement, d'autant plus la justification de cette loi n'est pas suffisamment claire.

I.4. La lubrification articulaire

La lubrification consiste à introduire un troisième corps entre deux corps en mouvement relatif, pour minimiser le frottement et l'usure. Dans le cadre de la mécanique des films minces visqueux, différentes approches théoriques ont été proposées pour simuler et interpréter le rôle tribologique du 3ème corps « fluide synovial ».

Le régime de lubrification hydrostatique a lieu quand une pression assez élevée est créée dans un fluide pompé ou injecté de l'extérieur pour séparer les deux corps formant le contact. En revanche, il faut deux conditions *séné qua none* pour que le régime de lubrification hydrodynamique s'installe :

- un mouvement de surface ;
- présence d'un coin d'huile à géométrie convergente (wedge effect) ou d'un film comprimé (squeeze effect).

Différents modes de lubrification sont rencontrés dans les articulations biologiques durant un cycle de marche, parmi lesquels figure l'écrasement. Le film écrasé (ou comprimé) peut supporter les fortes charges appliquées sur le joint durant la marche, ce qui fait de l'écrasement du fluide synovial le mécanisme de lubrification le plus important. **Fein** a estimé la durée de l'écrasement du fluide synovial dans des joints humains et a conclu que l'écrasement est le mécanisme principal dans la lubrification des articulations biologiques.

La **figure I.13** présente les variations d'épaisseur du film de synovie calculées grâce à un modèle de lubrification élasto-hydrodynamique (prise en considération des déformations du cartilage osseux) à partir de données expérimentales concernant la cinématique (vitesses, angle de flexion articulaire) et la dynamique (charge dynamique appliquée) globale d'une articulation du genou lors de la marche.

Chapitre I : Revue bibliographique

L'ordre de grandeur des épaisseurs calculées et les conditions de contact correspondantes (charge, vitesses, angle de contact articulaire) ont conduit à associer les différentes phases du cycle de marche à quatre types de régimes de lubrification [6].

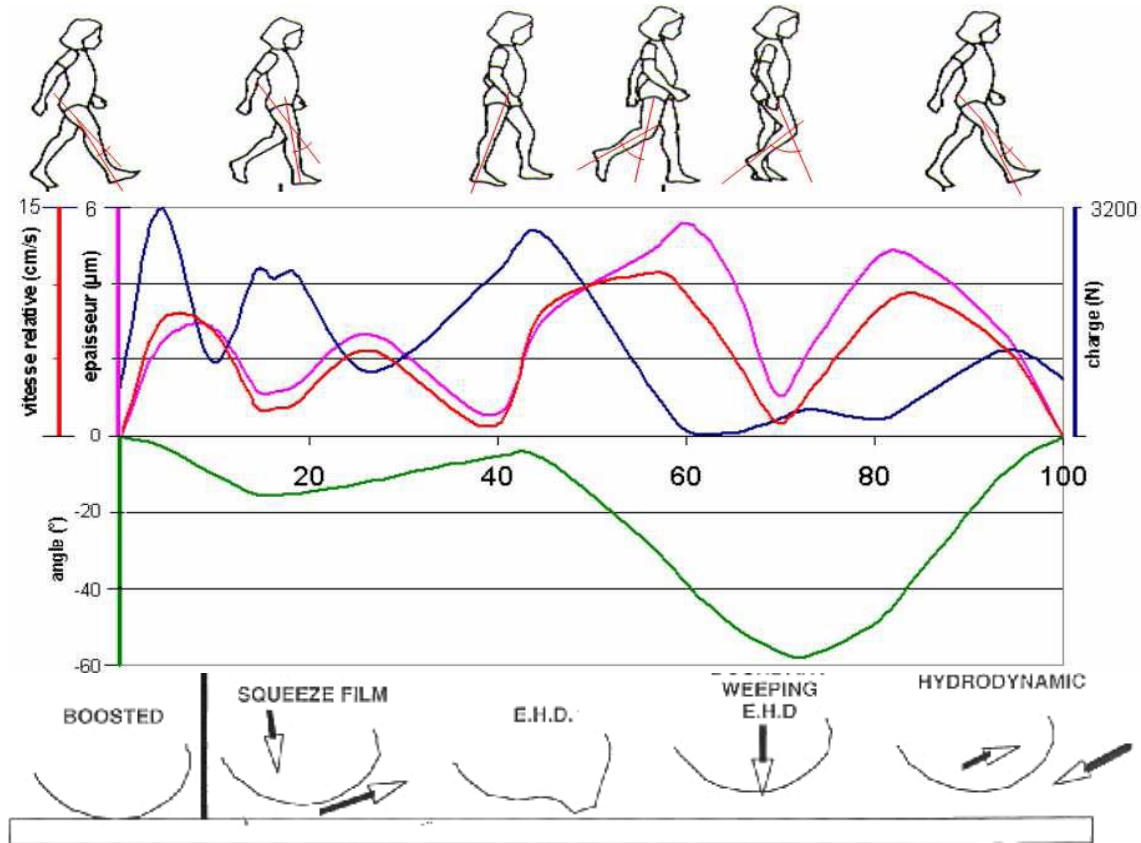


Fig I.13 : Lubrification du genou pour un cycle de marche [6]

- Régime hydrodynamique par effet d'écrasement : « Squeeze film », « Boosted lubrication » :

La première phase du cycle de marche correspond au moment où le contact articulaire est soumis à une forte charge, avec des vitesses tangentielles très faibles. La théorie prédit alors une portance hydrodynamique significative, liée à un effet de type « squeeze film ». Cet effet d'écrasement pourrait être amplifié (« boosted lubrication ») par une augmentation de la viscosité du fluide synovial : la porosité du cartilage jouant le rôle de filtre provoquerait la fuite de la phase aqueuse, ce qui tendrait à augmenter progressivement la concentration du liquide synovial en grosses molécules d'acide hyaluronique, jusqu'à ce qu'elles se structurent en gel. La viscosité élevée de ce gel permettrait de maintenir, par effet d'écrasement, une épaisseur de film élevée, de l'ordre du micromètre à la fin de cette première phase [2].

Chapitre I : Revue bibliographique

- Régime élasto-hydrodynamique par effet de « coin d'huile » :

La deuxième phase du cycle de marche correspond à des vitesses tangentielles plus élevées, susceptibles de générer une portance hydrodynamique par effet de type « coin d'huile ». La déformation des cartilages est significative, et bénéfique vis-à-vis de l'épaisseur de film, qui reste néanmoins très faible (quelques dixièmes de micromètres). Par contre, l'effet piézo-visqueux, responsable d'une augmentation très importante de la viscosité dans les contacts « usuels » fonctionnant en régime élasto-hydrodynamique, ne concerne apparemment pas le fluide synovial [2].

- « Weeping lubrication » :

La troisième phase de la marche correspond au moment où la charge commence à être transférée sur l'articulation de l'autre membre. Les charge et les vitesses sont faibles. Certains auteurs ont avancé l'hypothèse d'un mécanisme d'alimentation du film par un effet d'exsudation du cartilage lié à sa nature poro-élastique. Dans la littérature, cet effet est dénommé « weeping lubrication ». Néanmoins, à notre connaissance, les effets de génération de portance par cet effet d'exsudation n'ont jamais été évalués [2].

- Régime hydrodynamique par effet de « coin d'huile » :

La quatrième phase de la marche correspond au moment où la charge est presque nulle et les vitesses tangentielles importantes. Dans ce cas, la déformation des cartilages est non significative. La portance hydrodynamique par effets de « coin d'huile » induit une épaisseur de film élevée (quelques micromètres) (Duncan Dowson) [2].

I.5. Modèles rhéologiques de lubrifiant contenant des suspensions

Comme le fluide synovial est un fluide naturellement non-newtonien dit aussi à rhéologie complexe, il existe de nombreux modèles rhéologiques proposés dans la littérature technique pour le caractériser. L'approche la plus simple et la plus utilisée est de le considérer comme un fluide polaire. Les fluides polaires appelés aussi fluides à couple de contrainte se composent de particules rigides et aléatoirement orientées (acide hyaluronique, ...) suspendus dans un milieu visqueux appelé solvant (sérum physiologique) dont le comportement est newtonien.

Chapitre I : Revue bibliographique

Pour décrire l'écoulement du fluide synovial assimilé à un fluide polaire, nous devons utiliser la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes qui prend en considération la taille caractéristique des particules en suspension.

Dans l'**annexe A**, nous présentons d'autres modèles rhéologiques complexes de fluides non newtoniens (fluides viscoélastiques non linéaires, ...) utilisés pour la modélisation de fluides biologiques (sang, fluide synovial, liquide lacrymal, la sueur, ...).

Dans ce qui suit, nous ne présenterons que la mise en équations de la théorie des milieux continus de V. K. Stokes.

Les équations gouvernant pour un flux transitoire d'un fluide incompressible (iso-volume) à couple de contrainte, négligeant les forces du volume et les couples de volume, peuvent être écrites dans la forme générale comme suit [17,18]

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (I.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad (I.7)$$

où $T_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ qui est le tenseur symétrique d'inclinaison totale, et $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ est l'opérateur de Laplace.

$$\underbrace{\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\text{Transfert d'énergie due à la convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{\text{Transfert d'énergie due à la conduction}} + \underbrace{\frac{2\mu D_{ij} D_{ij} + 16\eta K_i K_i}{\Phi}}_{\text{La dissipation visqueuse totale}} \quad (I.3)$$

où $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ et $K_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$ qui sont le tenseur de la vitesse de déformation et le vecteur de la vitesse de courbure moyenne, respectivement.

Dans l'**annexe B**, nous présentons en détails la théorie des milieu continus de V. K. Stokes.

Chapitre I : Revue bibliographique

I.6. Les joints artificiels « les prothèses »

Une prothèse de genou est une articulation artificielle du genou destinée à remplacer une articulation naturelle pathologique complètement ou seulement une partie de celle-ci **figure I.14**. Les articulations artificielles du genou ne sont généralement utilisées que si l'articulation naturelle présente un degré d'usure très élevé ou si l'articulation restreint la liberté de mouvement du patient en raison de la douleur. Les prothèses ne sont généralement envisagées que lorsque toutes les autres mesures conservatrices telles que les analgésiques, les substances construisant le cartilage ou les traitements doux pour les articulations ne sont plus efficaces.

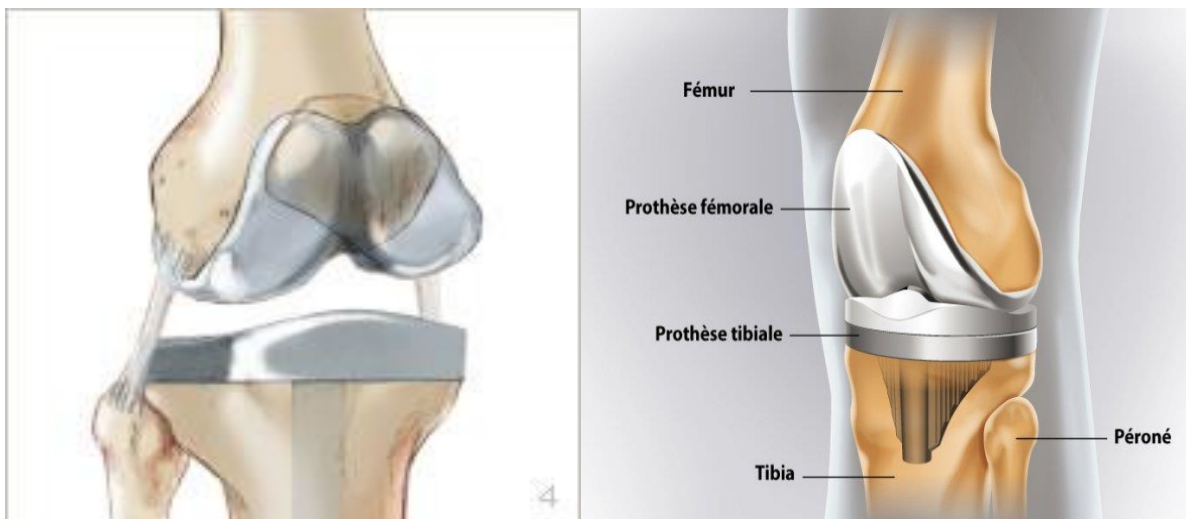


Fig. I.14 : Prothèse totale de l'articulation du genou

Les prothèses articulaires doivent avoir un bas coefficient de frottement, une faible usure, une résistance à la défaillance mécanique et au desserrage. Une bonne compréhension des performances de l'implant s'avère très importante.

Chapitre I : Revue bibliographique

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'anatomie générale descriptive de l'articulation fémoro-tibiale du genou humain, ainsi que la nature du cartilage et le fluide synovial d'un point de vue biomécanique.

Nous avons aussi rappelé les définitions nécessaires à la modélisation et à la formulation théorique des écoulements des fluides au sein des milieux poreux et poro-élastiques ainsi que leur caractérisation physique. Outre cela, nous avons présenté quelques modèles rhéologiques complexes de fluides lubrifiants proposés dans la littérature technique ainsi que les différents mécanismes de lubrification fluide rencontrés dans un joint articulaire pendant un cycle de marche.

Chapitre II
Ecrasement d'un film
Newtonien et non
Newtonien entre deux
surfaces rigides
imperméables

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.1. Introduction

Une pression hydrodynamique peut être générée dans un film fluide intercalé entre deux surfaces qui se rapprochent l'une de l'autre [figure II.1](#). Il s'agit du mode de lubrification par effet de compression ou d'écrasement du film fluide ou encore « squeeze film lubrication » en anglais. Le principe de ce mode de lubrification s'explique par le fait qu'un fluide visqueux ne peut être instantanément expulsé de l'espace compris entre deux surfaces en mouvement d'approche. Il faut donc un certain délai pour que les surfaces se touchent et, pendant ce temps, à cause de la résistance à l'extrusion ou à l'expulsion du lubrifiant, un champ de pression dans le film est alors engendré. L'intégration du champ de pression sur la surface de contact donne la charge portante du système ce qui permet au film lubrifiant de supporter la charge appliquée ou imposée. Si cette charge est appliquée pendant un temps assez court, il est possible que les deux surfaces ne se rencontrent pas ; c'est-à-dire un contact solide-solide destructeur ne survient alors pas. En effet, lorsque la charge change de sens dans le cas d'un mouvement de retrait ou d'arrachement, l'espace séparant les deux faces des disques contiguës au film peut être réalimenté en fluide lubrifiant et le film retrouve ainsi son épaisseur. Il est utile de noter que dans certaines applications tels que les paliers de pied de bielle de moteurs thermiques, les rainures et les orifices d'alimentation sont susceptibles de gêner la restauration du film s'ils sont mal placés ce qui conduit à réduire voire supprimer la capacité de charge du système lubrifié. C'est pourquoi le concepteur doit attacher une grande importance au choix de leurs emplacements.

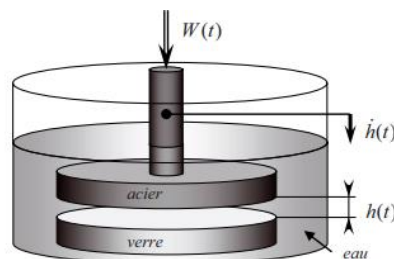


Fig. II.1 Ecrasement d'un fluide entre deux disques

L'effet d'écrasement ou de compression du film a été discuté par Osborne Reynolds [\[19\]](#) dans son célèbre article sur la lubrification publié à la fin du XIX^{ème} siècle (1886) et a affirmé que c'était un mécanisme de lubrification important, avec l'effet de coin d'huile,

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

pour la génération de pression dans un film lubrifiant surtout lorsqu'un effet de coin suffisamment grand n'est pas prévu. C'est le cas du palier de pied de bielle d'une machine alternative ou encore le cas d'un joint humain ou animal. Dans ces exemples d'application, l'effet de compression ou d'écrasement du film est bien évidemment le seul mécanisme de génération de pression. Cependant, le cas où les deux surfaces s'éloignent l'une de l'autre qui survient lorsque la charge appliquée change de sens (charge alternative ou sinusoïdale) entraîne une chute de pression (c'est-à-dire la pression absolue dans le film fluide devient inférieure à la pression atmosphérique ou la pression de vapeur saturante) accompagnée d'une rupture du film lubrifiant. Ce phénomène est désigné dans la littérature par le vocable « cavitation » [figure II.2](#). Dans le cas où la charge appliquée change de sens, nous parlerons d'effet de compression négative (negative-squeeze effect, en anglais) puisqu'une pression relative négative (dépression) se produit dans le film fluide. L'effet de compression sera dit positif (positive squeeze) dans le cas où les deux surfaces se rapprochent. En outre, il est également intéressant de considérer les situations dans lesquelles les effets de compression positif et négatif se produisent alternativement. C'est aussi le cas du palier de pied de bielle où une charge positive et une charge négative agit à tour de rôle durant le cycle de charge du moteur thermique, et des pressions positive et négative se produisent alternativement. Dans ce cas, le fluide est aspiré dans l'espace entre les deux surfaces pendant la phase de compression négative (dépression), et il y est comprimé pendant la phase de compression positive (surpression) et il est le siège d'une charge portante. Un film de compression est, contrairement à un film de coin, toujours dans un état instable. Il faut souligner qu'un film en compression (squeeze film) ne peut pas être maintenu pendant une longue période sous une charge constante, mais il peut être maintenu pendant une longue période seulement lorsque les pressions positives et négatives sont répétées alternativement (cas d'un système en vibrations).

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

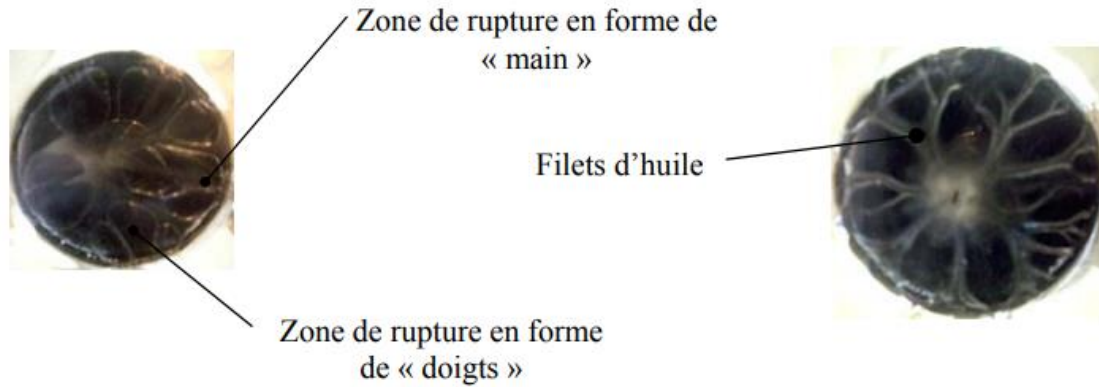


Fig. II.2 Photographies montrant la rupture de film par cavitation dans un contact disque/plan [20]

II.2. Equations Fondamentales pour un fluide Newtonien

Les équations de base d'un film incompressible et Newtonien en compression entre deux disques circulaires rigides et imperméables sont données en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

II.2.1. Equations de Navier-Stokes

Pour un écoulement laminaire isotherme et axisymétrique $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$ caractérisé par une masse volumique ρ et une viscosité dynamique μ constantes, les équations de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement (ou le mouvement) d'un fluide s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (\text{II.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

où v_r et v_z sont respectivement les composantes radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement. Les équations (II.1) et (II.2) sont écrites dans le cas de forces de volume (poids) négligeables.

Sur la **figure II.3**, nous supposons que l'épaisseur du film h est suffisamment petite par rapport au rayon de la surface de compression r_a ; c-à-d $h \ll r_a$ ou $\varepsilon = \frac{h}{r_a} \ll 1$ qui est le paramètre d'échelle en théorie de la lubrification fluide. Dans ces conditions, une

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

comparaison de l'ordre de grandeur des deux équations ci-dessus donne $\frac{\partial p}{\partial r} \gg \frac{\partial p}{\partial z}$ ce qui conduit par conséquent à considérer seulement l'Eq. II.1. Si par hypothèse $h \ll r_a$ (cas des écoulements en films minces), l'analyse dimensionnelle des Eqs. II.1 et II.2 basée sur la réécriture de ces deux équations en variables adimensionnelles permet de simplifier sensiblement ces équations qui se réduisent à :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (\text{II.3a})$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{II.3b})$$

L'équation (II.3b) indique que la pression p est constante selon l'épaisseur de l'écoulement et ne dépend que de la coordonnée radiale r et de la variable temporelle t . Lorsque le terme d'inertie figurant dans le premier membre de l'équation (II.3a) est négligé, p dépend seulement de r .

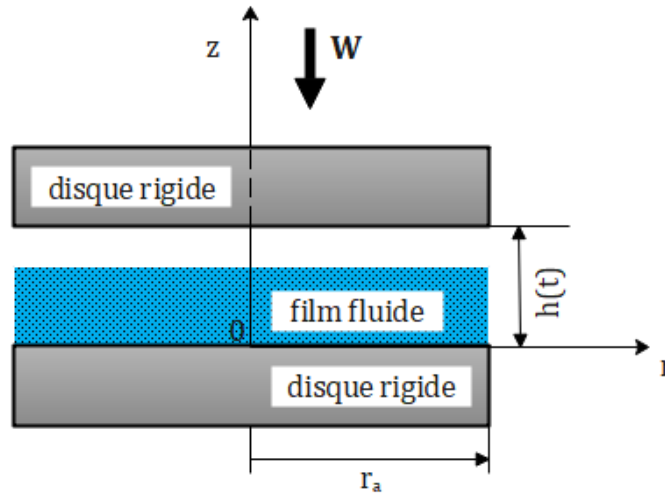


Fig. II.3 Film comprimé d'épaisseur $h \ll r_a$

II.2.2. Equation de continuité

L'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse de l'écoulement incompressible et conservatif est :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La conservation de débit volumique permet d'écrire :

$$2\pi r \int_0^h v_r dz = -\pi r^2 \dot{h} \quad (\text{disques rigides}) \quad (\text{II.5})$$

$$2\pi r \int_0^h v_r dz = -2\pi \int_0^r r \dot{h} dr \quad (\text{disques déformables}) \quad (\text{II.6})$$

où $\dot{h} = \partial h / \partial t$ est la vitesse d'écrasement ou d'arrachement des surfaces, et $0 < r \leq r_a$.

Notons que si $\dot{h} < 0$, la pression est positive et si $\dot{h} > 0$, la pression est négative.

Une analyse d'un film de compression comprenant des effets d'inertie peut être effectuée en utilisant les trois équations : Eqs. II.3a, II.4, et II.5 (ou Eq. II.6).

II.2.3. Dérivation de l'équation de Reynolds Newtonienne

Lorsque les effets d'inertie sont ignorés, l'équation de Reynolds peut être dérivée. Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes se simplifie sensiblement et prend la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (\text{II.7})$$

L'intégration de l'équation ci-dessus deux fois par rapport à z et l'application des conditions limites de non glissement $v_r = 0$ à $z = 0$ et $z = h$ donne la vitesse radiale de l'écoulement v_r dont l'expression est :

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - hz) \quad (\text{II.8})$$

La substitution de l'équation (II.8) dans l'équation de continuité, Eq. II.4, et l'intégration de celle-ci au travers l'épaisseur du film moyennant les conditions limites : $v_z = 0$ à $z = 0$, $v_z = \dot{h}$ à $z = h$ donne l'équation de Reynolds Newtonienne en coordonnées cylindriques suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12\mu r \dot{h} \quad (\text{II.9a})$$

Si $h = h(t)$, l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12\mu \frac{\dot{h}}{h^3} \quad (\text{II.9b})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.2.4. Conditions limites sur la pression

Si l'inertie du fluide peut être négligée **figure II.4(a)**, la pression à la périphérie du film comprimé est égale à la pression ambiante. Ceci se traduit par l'expression suivante :

$$p(r = r_a, t) = 0 \quad (\text{II.10a})$$

$$p(r = 0) = p_{max} \text{ ce qui implique } \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \text{ à l'axe du disque} \quad (\text{II.10b})$$

Si l'inertie du fluide est prise en considération **figure II.4(b)**, les conditions limites correspondant à une compression positive (mouvement d'approche ou de descente) et celles d'une compression négative (mouvement de retrait ou d'arrachement) sont différentes ; c'est-à-dire :

$$\text{si } \dot{h} < 0, p = 0 \text{ à } r = r_a \quad (\text{II.11})$$

$$\text{si } \dot{h} > 0, p = -\Delta p \text{ à } r = r_a \quad (\text{II.12})$$

Alors que pour une pression positive (Eq. II.11), la pression à la périphérie du film comprimé est égale à la pression ambiante (c.-à-d., pression relative nulle), dans le cas d'une pression négative (Eq. II.12), une chute de pression Δp se produit lorsque le fluide est aspiré dans l'espace entre les disques, et la pression à la périphérie du film comprimé

devient plus faible que la pression ambiante par la quantité Δp où $\Delta p = \frac{1}{8} \rho r_a^2 \left(\frac{\dot{h}}{h} \right)^2$

[21].

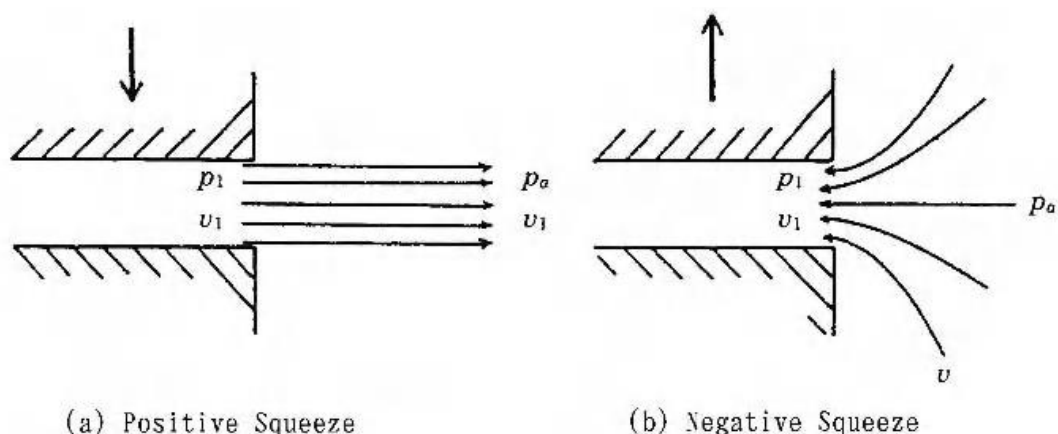


Fig. II.4 Conditions limites dans un film en compression et en arrachement [21].

a) Pression positive, b) pression négative

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.3. Ecrasement à vitesse constante sans l'inertie d'un fluide Newtonien (squeezing of inertialess Newtonian fluid)

Le problème de l'écrasement d'un film lubrifiant se classe naturellement comme un problème physique transitoire à valeur initiale. Il existe deux types d'analyse du problème d'écrasement de fluide, à savoir l'analyse à vitesse imposée et l'analyse à charge imposée. La vitesse et la charge peuvent être des constantes comme elles peuvent varier en fonction du temps (sinusoïdales). Le problème d'écrasement à vitesse imposée est gouverné par l'équation de Reynolds tandis que le problème à charge imposée, qui reflète les conditions réelles de fonctionnement de l'articulation fémoro-tibiale, est régi par une équation supplémentaire (seconde loi de Newton) qui décrit le mouvement du disque supérieur. Cette équation fait intervenir la réaction du fluide (action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur) calculée par intégration du champ de pression sur la surface du contact (surface du disque supérieur) obtenu à partir de la résolution analytique ou numérique de l'équation de Reynolds. La résolution du problème d'écrasement à charge imposée, qui sera aussi traité dans ce chapitre, nécessite l'emploi d'un schéma numérique (schéma d'Euler explicite, ...) qui permet, à partir des efforts appliqués sur le disque supérieur à l'instant $(t-\Delta t)$ où Δt est le pas de temps, de déduire de façon séquentielle l'accélération \dot{h} , la vitesse \dot{h} , et la position du disque supérieur h à l'instant t .

Dans cette étude qui concerne le problème de compression à vitesse constante, nous supposons que la vitesse de compression du film est suffisamment petite, ce qui nous permet de négliger l'inertie du fluide.

II.3.1. Champ de pression

L'intégration analytique de l'équation de Reynolds Newtonienne (II.9b) moyennant les conditions limites (II.10) donne :

$$p(r, t) = \frac{3\mu\dot{h}}{h^3} (r^2 - r_a^2) \quad (\text{II.13})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

Nous remarquons que lorsque l'inertie du fluide est négligée, la pression du film fluide est proportionnelle au coefficient de viscosité et à la vitesse d'approche des deux surfaces, et est inversement proportionnelle à la troisième puissance de l'épaisseur du film.

En outre, la distribution de pression dans le sens radial sera une parabole qui admet un maximum au centre du disque. La pression p est positive quand \dot{h} est négative (pression positive).

II.3.2. Capacité de charge

L'intégration de l'Eq. II.13 sur l'aire du disque donne la capacité de charge F comme suit :

$$F(t) = 2\pi \int_0^{r_a} p r dr = -\frac{3\pi}{2} \frac{\mu \dot{h} r_a^4}{h^3} \quad (\text{II.14})$$

II.3.3. Vitesses radiale et axiale de l'écoulement

Compte tenu de l'expression de la pression p (Eq. II.13), la composante de la vitesse radiale peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$v_r(r, z, t) = \frac{3r\dot{h}}{h^3} (z^2 - hz) \quad (\text{II.15})$$

La substitution de l'équation (II.15) dans l'équation de continuité (II.4) permet d'obtenir, après intégration par rapport à z , l'expression de la vitesse axiale :

$$v_z(z, t) = -\frac{\dot{h}}{h^3} (2z^3 - 3hz^2) \quad (\text{II.16})$$

Si $h = h(r, t)$, nous avons alors $v_z = v_z(r, z, t)$.

La vitesse radiale moyenne en un point du fluide de coordonnée radiale r se calcule par la relation suivante :

$$\langle v_r \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h v_r dz = -\frac{r \dot{h}}{2h} \quad (\text{II.17})$$

II.3.4. Débit radial de fuite

La connaissance de la vitesse radiale moyenne en $r = r_a$ permet de calculer le débit volumique de fuite au bord du disque par l'expression suivante :

$$\langle Q_r \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^h v_r r_a dz d\theta = 2\pi r_a \int_0^h v_r dz = 2\pi r_a h \langle v_r \rangle \quad (\text{II.18})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.3.5. Puissance dissipée

La puissance perdue par frottement visqueux peut être calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse sur le volume occupé par le fluide en écoulement:

$$\mathcal{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{r_a} \Phi_v r dr dz d\theta \quad \text{où } \Phi_v = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \quad \text{et } \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{3r\dot{h}}{h^3} (2z - h)$$

Soit :

$$\mathcal{P} = 2\pi\mu \int_0^{r_a} r \left(\int_0^h \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 dz \right) dr = \frac{3\pi\mu \dot{h}^2 r_a^4}{2h^3} \quad (\text{II.19})$$

II.3.6. Temps d'écrasement du film

Le temps d'écrasement du film peut être calculé à partir de l'équation (II.14) en remplaçant \dot{h} par $\frac{dh}{dt}$ et la charge portante F par la charge appliquée W ce qui donne :

$$\int_0^{t_{sq}} dt = -\frac{3\pi\mu r_a^4}{2W} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{h^3}$$

Soit :

$$t_{sq} = \frac{3\pi\mu r_a^4}{2W} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

W peut représenter le poids du disque supérieur ; c'est-à-dire : $W=mg$

II.4. Equations Fondamentales pour un fluide non newtonien à couple de contraintes

En utilisant les mêmes hypothèses que celles du paragraphe 2, les équations de la dynamique d'un fluide iso-volume à couple de contraintes dans le cas où les couples de volume et les forces d'inertie sont négligés s'écrivent :

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

- **Equations de mouvement (momentum equations) :**

$$\vec{\nabla} p = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{v} \quad (\text{II.21})$$

où $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$ est le champ de vitesse de l'écoulement, et η est une propriété physique intrinsèque au fluide à couple de contraintes dont l'équation dimensionnelle est $[\eta] = MLT^{-1}$. Dans le système d'unités internationales (SI), elle s'exprime en $[N.s]$.

- **Equation de continuité :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.22})$$

- **Equation de Reynolds modifiée**

Dans le cadre de la théorie de la lubrification (Mécanique des films minces visqueux), l'équation vectorielle (II.21) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v_r}{\partial z^4} \quad (\text{II.23})$$

et $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$.

Les conditions limites associées à l'équation (II.23) sont :

- pour $z = 0$: $v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0$ (II.24a)

- pour $z = h$: $v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0$ (II.24b)

L'annulation de la dérivée seconde de la vitesse radiale s'explique par l'annulation des couples de contraintes au niveau des parois. D'autre part, l'annulation de la vitesse radiale provient du fait que la particule de fluide adhère parfaitement aux parois (vitesse de glissement négligée).

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La solution générale de l'équation (II.23) est de la forme :

$$v_r = A_0 + A_1 z + B_0 \cosh\left(\frac{z}{l}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{z}{l}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 \quad (\text{II.25})$$

où $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$ est le paramètre des couples de contraintes dont l'équation dimensionnelle est $[l] = L$. Ce paramètre, qui est nul dans le cas du fluide Newtonien, représente physiquement la taille caractéristique des particules présentes dans la suspension.

Compte tenu des conditions limites (II.24), nous obtenons la solution suivante :

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left[z(z-h) + 2l^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{II.26})$$

En procédant de la même manière que dans le paragraphe (II.3), nous obtenons une équation de Reynolds modifiée de la forme :

$$\frac{G(h,l)}{12\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{où } G(h,l) = h^3 - 12l^2 h + 24l^3 \operatorname{Tanh}\left(\frac{h}{2l}\right)$$

Si $l = 0$, nous retrouvons l'équation de Reynolds Newtonienne (II.9).

Les conditions limites associées à l'équation (II.27) sont similaires à celles de l'équation de Reynolds Newtonienne (II.9).

II.5. Ecrasement sans l'inertie d'un fluide à couple de contraintes : Calcul des performances hydrodynamiques

- *Champ de pression et son gradient :*

$$p(r,t) = \frac{3\mu\dot{h}}{G(h,l)} (r^2 - r_a^2) \quad (\text{II.28a})$$

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{6\mu\dot{h}r}{G(h,l)} \quad (\text{II.28b})$$

- *Capacité de charge :*

$$F(t) = -\frac{3\pi}{2} \frac{\mu\dot{h}r_a^4}{G(h,l)} \quad (\text{II.29})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

- Vitesses radiale et axiale :

En substituant l'expression du gradient radial de la pression (Eq. II.28b) dans l'équation (II.26), nous obtenons l'expression de la vitesse radiale suivante :

$$v_r = \frac{3r\dot{h}}{G(h,l)} \left[z(z-h) + 2l^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{II.30})$$

A partir de l'équation de continuité (II.4), nous pouvons déterminer, par intégration par rapport à z , l'expression de la vitesse axiale de l'écoulement :

$$v_z(z,t) = -\frac{\dot{h}}{G(h,l)} \left[2z^3 - 3z^2h + 12l^2 \left(z - \frac{l \sinh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) - 12l^3 \text{Tanh}\left(\frac{h}{2l}\right) \right] \quad (\text{II.31})$$

La vitesse radiale moyenne en r se calcule par la relation suivante :

$$\langle v_r \rangle = -\frac{r\dot{h}}{2h} \quad (\text{II.32a})$$

La vitesse axiale moyenne s'exprime :

$$\langle v_z \rangle = \frac{\dot{h}}{2} \quad (\text{II.32b})$$

- Débit radial de fuite au bord du disque

$$\langle Q_r \rangle = 2\pi r_a h \langle v_r \rangle = -\pi r_a^2 \dot{h} \quad (\text{II.33})$$

- Puissance dissipée

La puissance est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse exprimée cette fois-ci dans le cas d'un fluide à couple de contraintes :

$$\mathcal{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{r_a} \Phi_v r dr dz d\theta$$

$$\text{où } \Phi_v = \underbrace{\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2}_{\text{contribution Newtonienne}} + \underbrace{\eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)^2}_{\text{contribution non Newtonienne}}$$

Soit :

$$\mathcal{P} = \frac{3\pi\mu\dot{h}^2 r_a^4}{2G(h,l)} \quad (\text{II.34})$$

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

- Temps d'écrasement du film

$$\int_0^{t_{sq}} dt = -\frac{3\pi\mu r_a^4}{2W} \int_{h_0}^{h_f} \frac{dh}{h^3 - 12l^2h + 24l^3 \operatorname{Tanh}\left(\frac{h}{2l}\right)} \quad (\text{II.35a})$$

$$\text{ou encore } t_{sq} = -\frac{3\pi\mu r_a^4}{2W} \int_{h_0}^{h_f} \frac{dh}{G(h,l)} \quad (\text{II.35b})$$

où h_0 est la hauteur initiale du film à $t=0$, et h_f est la hauteur finale du film à $t=t_{sq}$ tel que $h_f < h_0$.

L'évaluation de l'intégrale apparaissant dans le second membre de l'équation (II.35b) nécessite l'emploi d'une méthode d'intégration numérique en raison de la complexité de l'intégrand. La méthode utilisée est la quadrature de Gauss-Legendre dont le principe est :

$$I = \int_{h_0}^{h_f} \frac{dh}{G(h,l)} = \int_{h_0}^{h_f} f(h) dh = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(h_f-h_0)\xi + (h_0+h_f)}{2}\right) \frac{(h_f-h_0)}{2} d\xi \approx \sum_{r=1}^n W_r f(\xi_r) \quad (\text{II.36})$$

où : $f(h) = \frac{1}{G(h,l)}$ tel que $h_f \leq h \leq h_0$, ξ est la variable d'intégration de Gauss tel que $-1 \leq \xi \leq 1$, n est le nombre des points d'intégration de Gauss, ξ_r sont les abscisses des points d'intégration de Gauss, et W_r sont les poids des points de Gauss.

Les abscisses des points de Gauss correspondent aux racines des polynômes orthogonaux de Legendre. La méthode de Gauss-Legendre à n points permet d'intégrer exactement des polynômes simples de degré maximum égal à $(2n - 1)$ de la forme : $p(\xi) = a_j \xi^{j-1}$.

Pour évaluer avec précision suffisante l'intégrale I , il est conseillé d'utiliser un nombre élevé de points de Gauss. Dans l'annexe C, nous reportons les valeurs des paramètres de la quadrature de Gauss-Legendre ξ_r et W_r pour différents points d'intégration.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.6. Ecrasement à charge imposée : Inertie du disque mobile négligée

Dans le cas d'un chargement dynamique sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude W_0 , l'expression de la charge appliquée est donnée par l'équation (II.37) :

$$W(t) = W_0 \cos(\omega t) \quad (\text{II.37})$$

où $\omega = 2\pi f$, et t étant la variable temporelle.

Dans le cas d'une charge statique constante, l'équation (II.37) devient :

$$W(t) = W_0 \mathcal{H}(t) \quad (\text{II.38})$$

où $\mathcal{H}(t)$ est la fonction échelon de Heaviside.

Lorsque l'inertie du disque supérieur est négligée, l'équilibre de celui-ci peut être décrit par la troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction) comme suit :

$$F(t) = W(t) \quad (\text{II.39})$$

$$\text{où } F(t) = 2\pi \int_0^{r_a} p r dr$$

Compte tenu de l'expression de p (Eq. II.28a), l'équation (II.39) conduit à l'équation différentielle ordinaire d'ordre un suivante :

$$\frac{dh}{dt} = \mathcal{F}(t, h) \quad \text{où } \mathcal{F}(t, h) = \frac{-2 G(h, l) W(t)}{3\pi\mu r_a^4} \quad \text{pour } t > 0 \quad (\text{II.40})$$

La condition initiale associée à cette équation est : $h(t = 0) = h_0$

Dans l'équation (II.40), t est la variable temporelle indépendante et h est la variable dépendante recherchée.

L'équation différentielle (II.40) n'admet pas de solution analytique à cause de son caractère non linéaire ce qui nous oblige de recourir aux méthodes numériques. Cette équation étant d'ordre un, il convient d'utiliser les méthodes de type Runge-Kutta [22].

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La formule d'ordre 4 est une des plus utilisées :

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (\text{II.41})$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$ et

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t \mathcal{F}(t_n, h_n); \quad k_2 = \Delta t \mathcal{F}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, h_n + \frac{k_1}{2}\right); \quad k_3 \\ &= \Delta t \mathcal{F}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, h_n + \frac{k_2}{2}\right); \quad k_4 = \Delta t \mathcal{F}(t_n + \Delta t, h_n + k_3) \end{aligned}$$

II.7. Détermination de la viscosité effective d'un fluide suspendu (suspension)

Pour calculer la viscosité effective, Krieger & Dougherty en 1959 ont dérivé la relation viscosité-fraction de volume suivante [23] :

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-[\eta]\phi_m} \quad (\text{II.42})$$

où μ_0 est la viscosité du fluide de base (le sérum pour le cas du joint synovial), ϕ est la fraction de volume des particules dans le fluide de base ou la concentration (l'acide hyaluronique pour l'articulation du genou), ϕ_m est la fraction de volume maximale dont la valeur varie de 0,495 à 0,54 et vaut approximativement 0,605 aux taux de cisaillement élevés, et $[\eta]$ est appelé viscosité intrinsèque dont la valeur typique pour les suspensions de sphères rigides est 2,5.

Les variations typiques de la viscosité relative $\tilde{\mu}(\phi) = \frac{\mu}{\mu_0}$ avec ϕ sont présentées dans la **figure II.5** en utilisant les modèles de viscosité de Krieger-Dougherty et le célèbre modèle bien connu proposé par Einstein [24] : $\tilde{\mu}(\phi) = 1 + [\eta]\phi$ avec $[\eta] = 2,5$.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

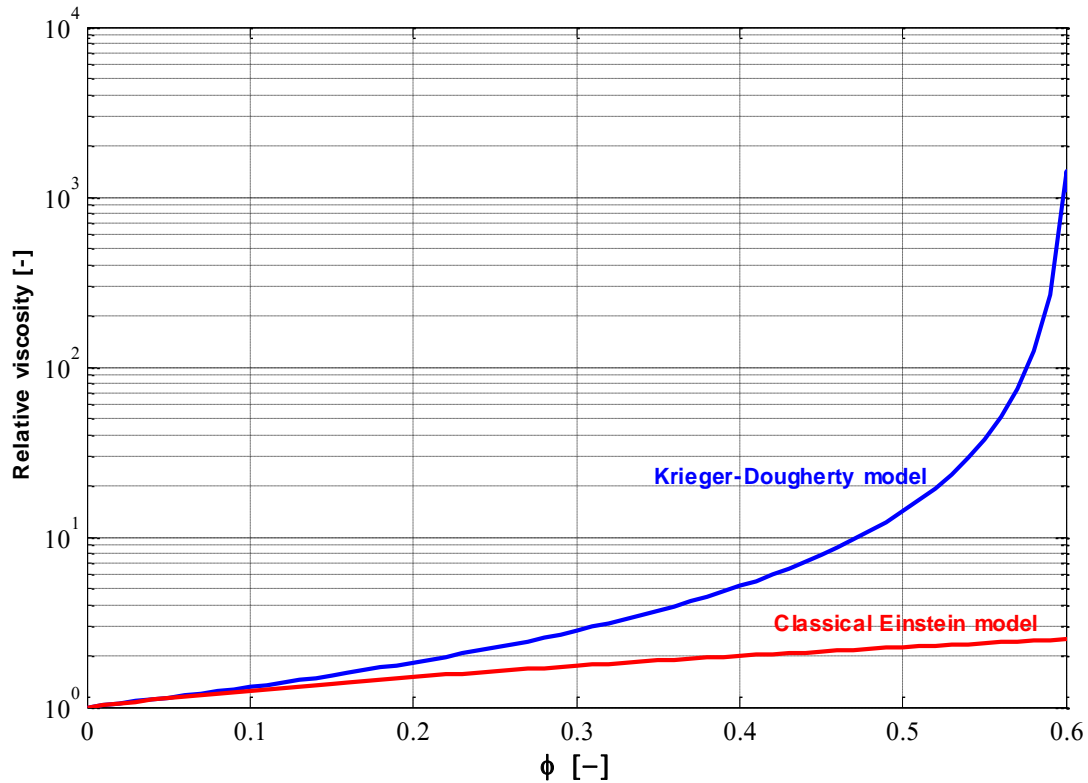


Fig. II.5 Comparaison des modèles de viscosité de Krieger-Dougherty et d'Einstein pour diverses valeurs de la concentration [24].

Dans le cas d'une suspension, l'équation de Reynolds prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12\mu_0 \tilde{\mu}(\phi) \frac{dh}{G(h,l) dt} \quad (\text{II.43})$$

où μ_0 étant la viscosité dynamique du solvant ou du fluide de base.

II.8. Etude paramétrique

Dans ce paragraphe, nous envisageons l'étude de l'influence des couples de contraintes et de la concentration sur le comportement HD du film comprimé pour trois conditions de fonctionnement : vitesse constante imposée, charge constante imposée, et charge sinusoïdale imposée.

Les données relatives à cette étude sont reportées dans le [tableau II.1](#).

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

Tableau II.1 Données géométriques et conditions de fonctionnement

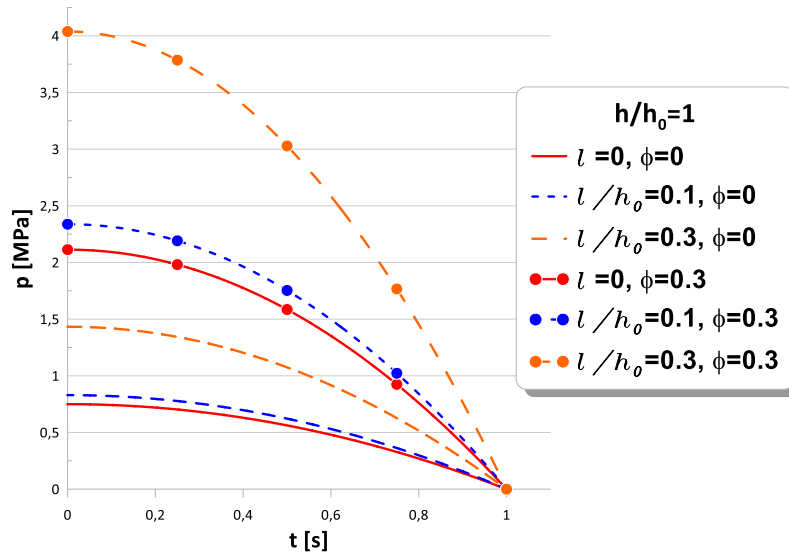
Cas Etudie	W_0 [N]	r_a [m]	h_0 [mm]	h_f [mm]	t_0 [s]	t_f [s]	W_{sq} [mm/s]
Vitesse constante	-	4×10^{-2}	4×10^{-1}	5×10^{-2}	-	-	-100
Charge constante	-300	4×10^{-2}	4×10^{-1}	-	0	1	-
Charge sinusoïdale	300	4×10^{-2}	1×10^{-2}	-	0	1	-

II.8.1. Ecrasement à vitesse constante

La [figure II.6](#) présente les effets des couples de contraintes et de la concentration en particules sur la pression HD pour deux positions du disque supérieur ($h = h_0$ et $h = h_f$). Nous constatons d'une part que pour une même valeur de la concentration ϕ , la pression, calculée pour une vitesse imposée, augmente avec la taille ou la longueur caractéristique des particules suspendues. Cette augmentation est plus accentuée dans le cas d'un fluide à haute concentration. D'autre part, les pressions prédites pour $h=h_f$ sont énormes et peuvent entraîner une augmentation significative de la viscosité du lubrifiant. Dans ces conditions, la piézo-viscosité du lubrifiant doit être prise en considération.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

a. Cas où $h = h_0$



b. Cas où $h = h_f$

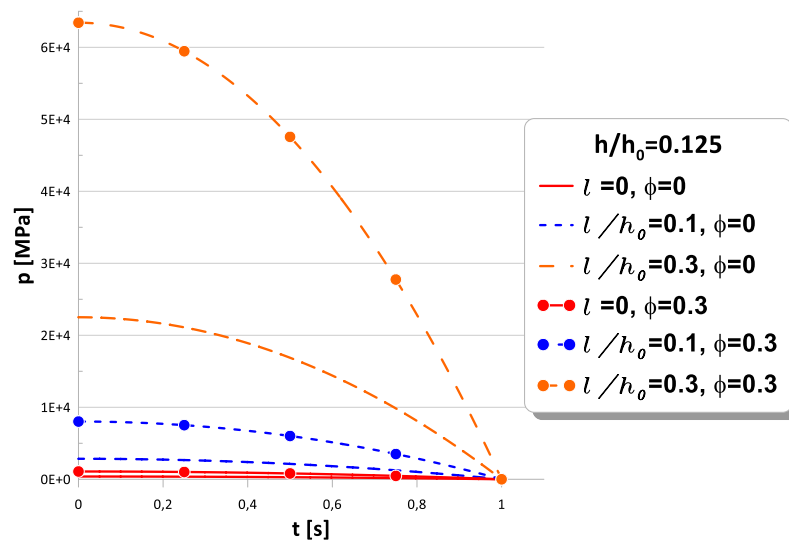
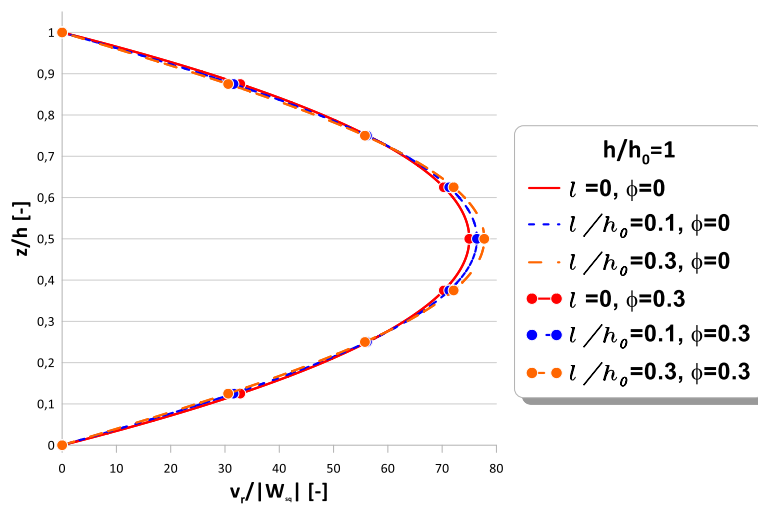


Fig. II.6 Profils de pression dans le film fluide obtenus pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration ϕ .

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La **Figure II.7** montre les profils de vitesse radiale normalisée pour des différentes valeurs du paramètre des couples de contrainte et de la concentration en particules calculés pour deux positions du disque supérieur ($h = h_0$ et $h = h_f$). Nous observons que les couples de contraintes et la concentration n'ont pas d'effets appréciables sur la distribution de la vitesse d'écoulement radiale au travers l'épaisseur du film. D'autre part, les vitesses correspondant à la position h_f sont largement supérieures à celles calculées pour la position h_0 .

a. Cas où $h = h_0$



b. Cas où $h = h_f$

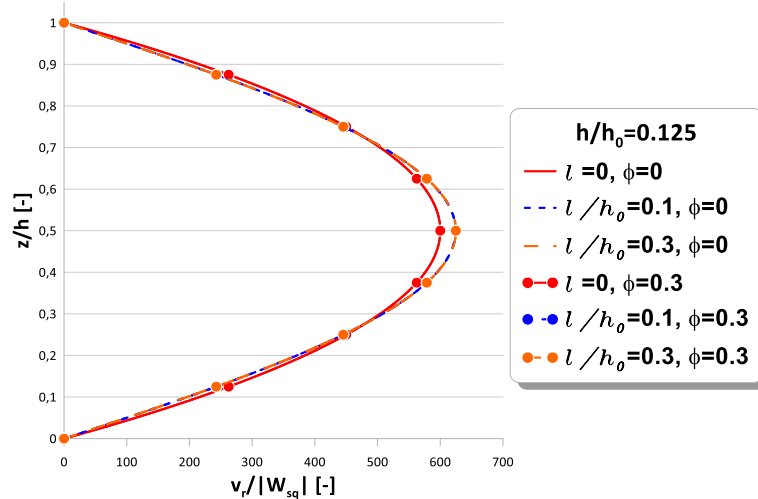
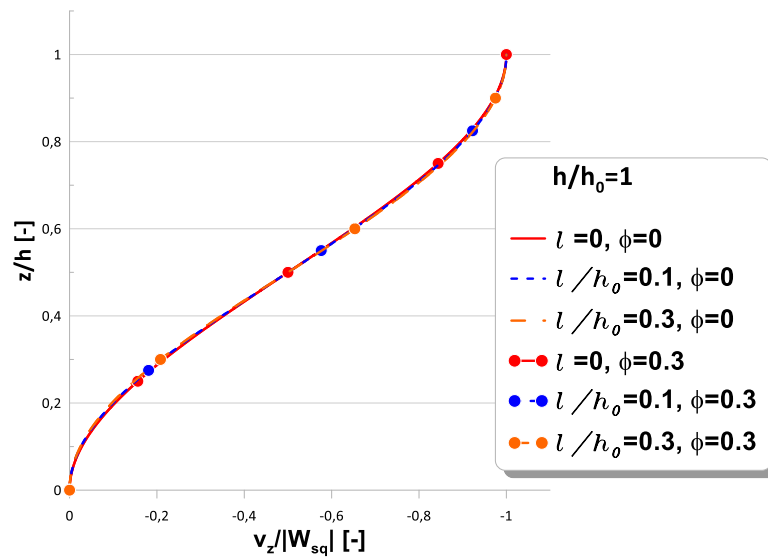


Fig. II.7 Profils de vitesse radiale calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La figure II.8 montre les profils de la vitesse axiale normalisée calculés pour différentes valeurs du paramètre des couple de contrainte adimensionnel \tilde{l} et de la concentration ϕ , les résultats obtenus montrent que les variations de la vitesse axiale au travers l'épaisseur du film sont identiques pour toutes les valeurs de \tilde{l} et ϕ . Par comparaison à la vitesse radiale, les valeurs de la vitesse axiale sont très faibles et sont en bon accord avec la théorie de la lubrification par films minces.

a. Cas où $h = h_0$



b. Cas où $h = h_f$

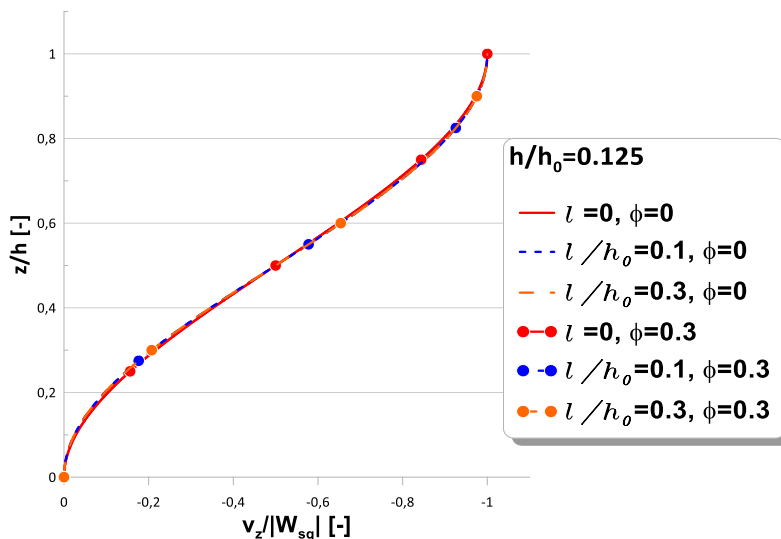


Fig. II.8 Profils de vitesse axiale calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration ϕ .

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La **figure II.9** donne l'allure des courbes de variation de la capacité de charge en fonction de la position relative h/h_0 du disque supérieur pour trois valeurs de \tilde{l} et deux valeurs de ϕ . Nous remarquons que la portance HD croît au fur et à mesure que le disque supérieur se rapproche du disque inférieur. Autrement dit, lorsque l'épaisseur du film séparant les deux disques diminue. De plus, pour une position du disque supérieur donnée la capacité de charge s'améliore avec \tilde{l} . Cette amélioration est plus significative dans le cas d'un fluide à haute concentration.

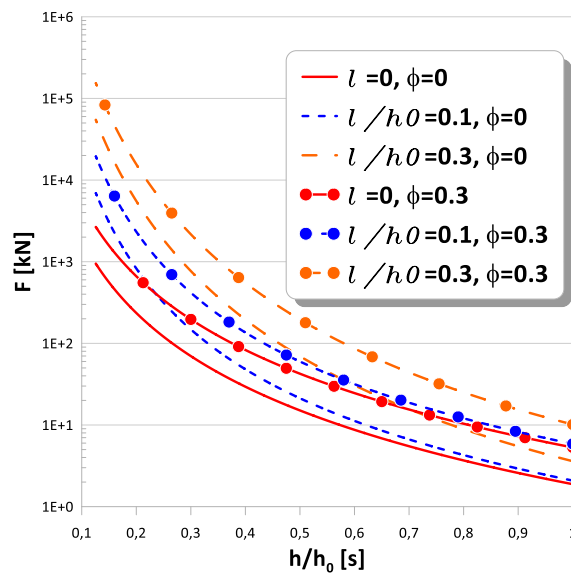


Fig. II.9 Variations de la capacité de charge en fonction de la position relative h/h_0 du disque supérieur pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration ϕ .

La **figure II.10** illustre la variation de la puissance dissipée en fonction de la position relative h/h_0 du disque supérieur pour différentes valeurs de \tilde{l} et ϕ . Nous retrouvons les mêmes tendances de la **figure II.9** ; c'est-à-dire une augmentation de la puissance avec \tilde{l} . Cette augmentation est plus accentuée dans le cas d'un fluide suspendant.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

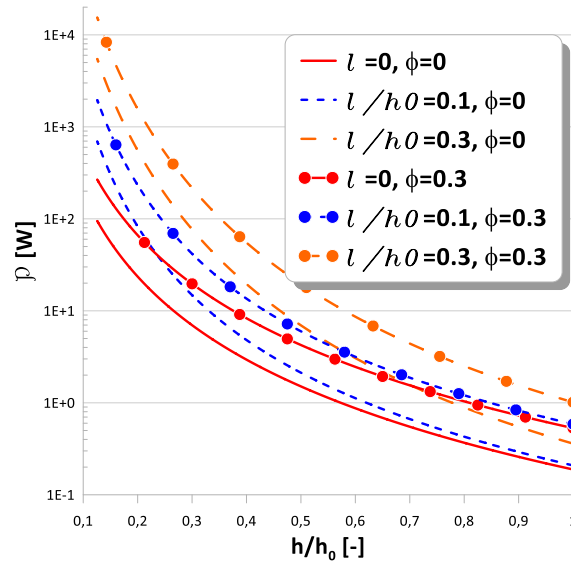


Fig. II.10 Variations de la puissance dissipée en fonction de la hauteur relative h/h_0 pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel $\tilde{l} = l/h_0$ et de la concentration de particules ϕ

Dans le **tableau II.2**, nous présentons les valeurs du temps d'écrasement calculés par l'équation (II.36) en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre pour une charge $W_0 = 300 \text{ N}$. Nous remarquons que la présence des couples de contraintes dans le fluide suspendant a pour effet de ralentir le mouvement d'écrasement du disque supérieur par comparaison avec le cas Newtonien. Cet effet s'accroît avec la concentration en particules ϕ .

Tableau II.2 Temps d'écrasement du film fluide pour différentes valeurs de l/h_0 et ϕ

Temps d'écrasement [s]					
$\phi = 0$			$\phi = 0.3$		
$\tilde{l} = 0$	$\tilde{l} = 0.1$	$\tilde{l} = 0.3$	$\tilde{l} = 0$	$\tilde{l} = 0.1$	$\tilde{l} = 0.3$
23.69	99.50	703.85	66.73	280.34	1983.27

II.8.2. Ecrasement à charge constante

La **figure II.11** présente l'évolution temporelle de la position relative h/h_0 du disque supérieur pour différentes valeurs de \tilde{l} et ϕ . Nous constatons que la présence des couples de contraintes entraîne un ralentissement notable du disque supérieur qui se traduit par un temps d'écrasement plus long.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

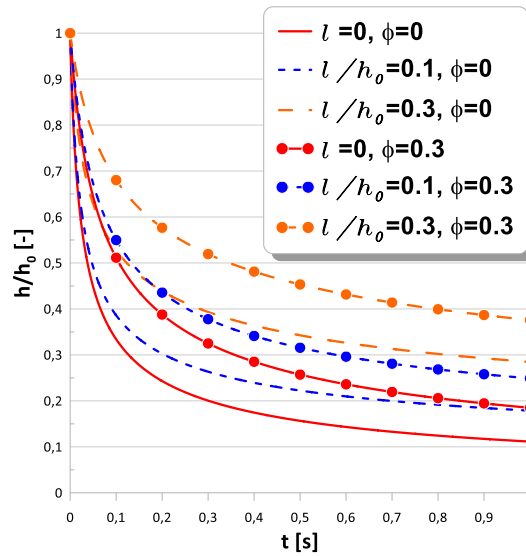


Fig. II.11 Variations de la position relative h/h_0 du disque supérieur en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .

Les distributions de la pression HD au sein du film fluide sont représentées sur la **figure II.12** pour différentes valeurs de \tilde{l} et ϕ . Les courbes de pression calculées sont confondues puisque le contact fonctionne à charge constante imposée $W=300N$. L'intégration de la pression sur la face du disque donne bien évidemment une portance HD constante $F=300 N$ comme il est montré sur la **figure II.13**. Ce résultat confirme la validité du programme de calcul développé.

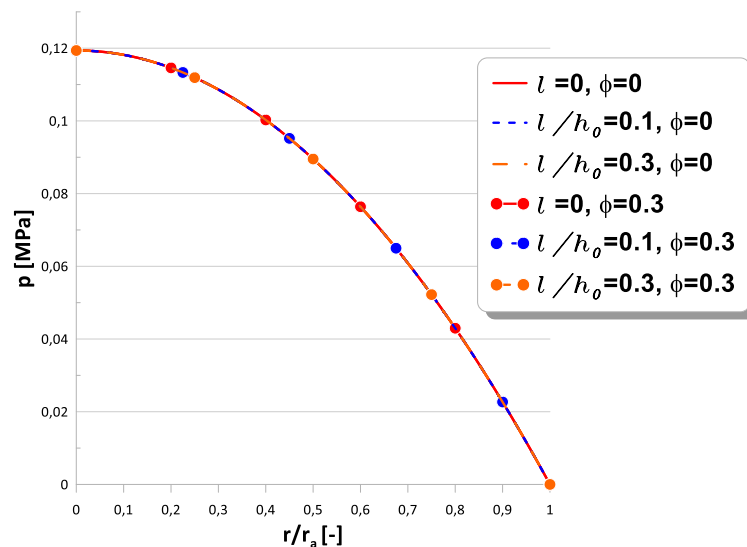


Fig. II.12 Profils de pression axisymétriques obtenus pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

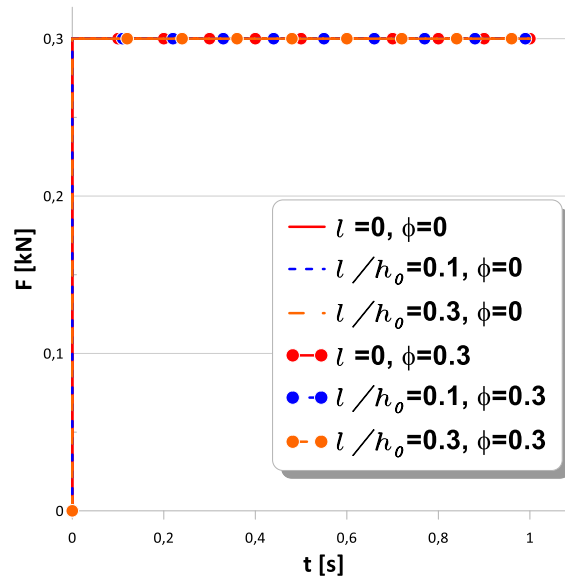


Fig. II.13 Evolution temporelle de la charge portante pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .

Les effets de \tilde{l} et ϕ sur la vitesse radiale normalisée sont clairement mis en évidence sur la **figure II.14** où nous constatons que pour une valeur constante de ϕ , la vitesse radiale diminue avec \tilde{l} . Cette diminution est plus importante pour un fluide à haute concentration. Les profils de vitesse tracés nous révèlent que les contraintes de cisaillement visqueuses, $\tau_{rz} \propto \frac{\partial v_r}{\partial z}$, sont maximales au niveau des parois ($z=0$ et h) et s'annulent en $z=0$.

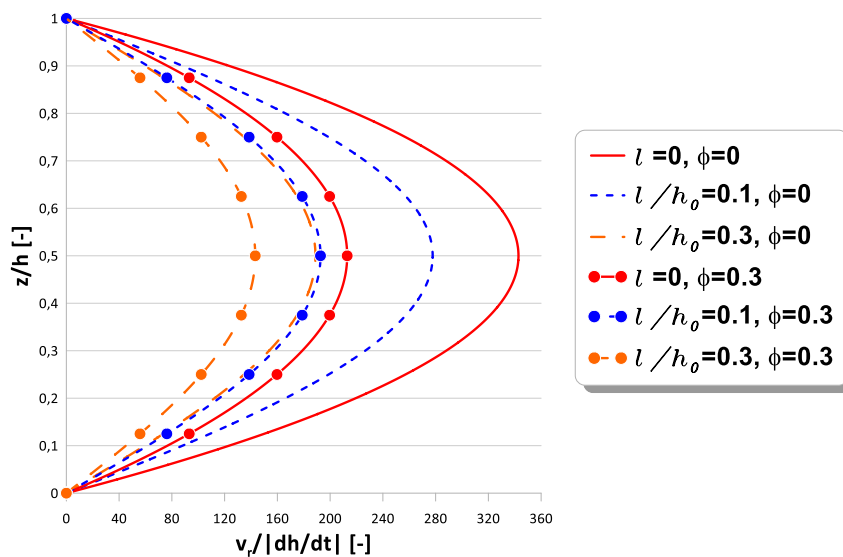


Fig. II.14 Profils de vitesse radiale au bord du disque calculés pour différentes valeurs de $\tilde{l} = l/h_0$ et ϕ .

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.8.3. Ecrasement à charge sinusoïdale

La figure II.15 présente les variations de la charge dynamique appliquée $W(t)$ d'amplitude $W_0=300\text{ N}$ pour trois valeurs de la fréquence $f=1/T$ où T est la période.

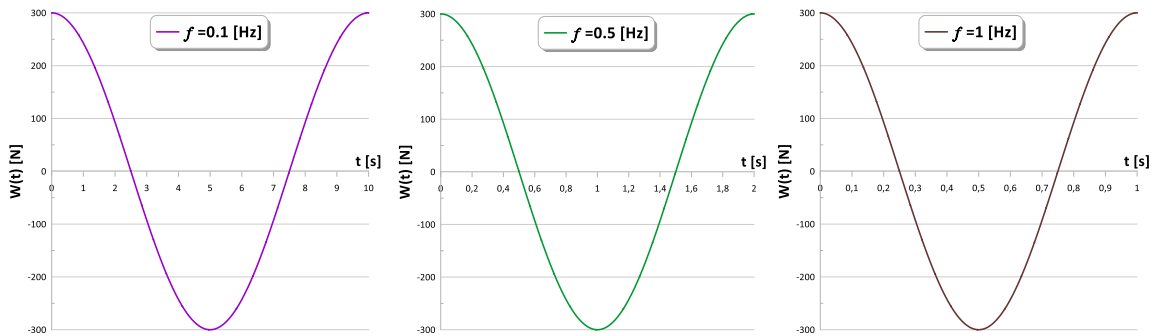


Fig. II.15 Evolution temporelle de la charge dynamique appliquée pour $f = 0.1, 0.5, \text{ et } 1\text{ Hz}$ et $W_0 = 300\text{ N}$.

La figure II.16 présente les différentes courbes de variation de la charge en fonction du temps pour différentes amplitudes W_0 avec $f=1\text{ Hz}$. Ces charges s'annulent en $t=0.25$ et 0.75 s avant de changer leur signe quelque soit l'amplitude W_0 .

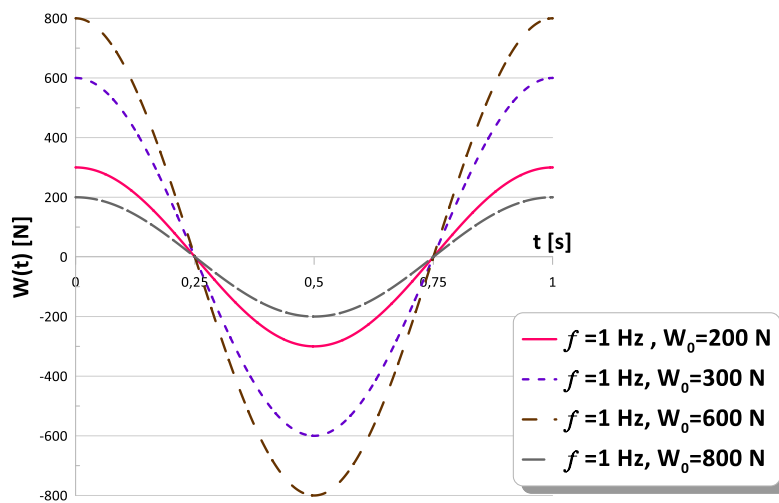
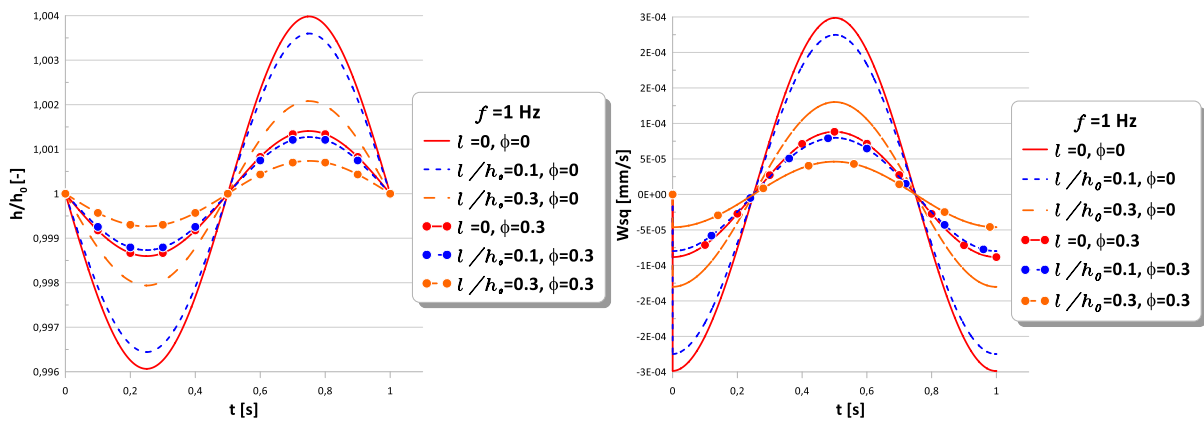


Fig. II.16 Cycle complet de la charge dynamique appliquée pour $f = 1\text{ Hz}$ et $W_0 = 200, 300, 600, \text{ et } 800\text{ N}$.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

La **figure II.17** présente l'évolution temporelle de la hauteur relative h/h_0 et la variation de la vitesse d'écrasement en fonction du temps durant un cycle complet de chargement pour différentes valeurs de \tilde{l} et ϕ . Nous constatons que la hauteur relative et la vitesse d'écrasement diminuent avec \tilde{l} , cette diminution est plus significative dans le cas d'un fluide suspendant à haute concentration. Les résultats graphiques montrent que la hauteur relative est maximale pour $t = 0.25\text{ s}$ et 0.75 s pour lesquels la charge dynamique ainsi que la vitesse d'écrasement s'annulent.



a) Position relative du disque supérieur

b) Vitesse d'écrasement instantanée du film $W_{sq} = dh/dt$

Fig. II.17 Effets des couples de contraintes $\tilde{l} = \frac{l}{h_0}$ et de la concentration ϕ sur la position relative du disque supérieur pour un cycle de charge.

Chapitre II : Ecrasement d'un film Newtonien et non Newtonien entre deux surfaces rigides imperméables

II.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence les effets non négligeables de la rhéologie du fluide suspendant et de la concentration sur les performances HD du contact modélisant l'articulation fémoro-tibiale. Les deux corps du triplet tribologique ont été assimilés en première approximation à des disques rigides imperméables.

Il a été conclu ce qui suit :

Ecrasement à vitesse constante :

- une augmentation de la pression HD, de la capacité de charge, de la vitesse radiale d'écoulement, de la puissance dissipée, et du temps d'écrasement avec les paramètres des couples de contraintes et la concentration en particules entraînant une augmentation de la viscosité de la suspension.

Ecrasement à charge constante :

- une augmentation du temps d'écrasement avec le paramètre des couples de contraintes et la concentration en particules,
- une diminution de la vitesse radiale d'écoulement avec le paramètre des couples de contraintes et la concentration en particule du fluide.

Ecrasement à charge sinusoïdale :

- une diminution de la période du cycle de charge avec la fréquence,
- une diminution de la position relative du disque mobile (supérieur) et la vitesse d'écrasement avec le paramètre des couples de contraintes et la concentration en particules.

Chapitre III

Ecrasement d'un fluide à couple de contraintes en présence de milieux poreux et poro-élastiques

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

III.1. Introduction

Le cartilage articulaire est un milieu poro-élastique. La prise en considération de cette propriété particulière permet de mieux modéliser le contact cartilage/fluide synovial, en écrasement. Ainsi, dans ce chapitre, le disque inférieur sera considéré en première approximation poreux et déformable.

Au sein de ce disque poro-élastique, l'écoulement est régi par la loi de Darcy modifiée. En outre, l'approximation de Morgan-Cameron sera utilisée pour tenir compte de la porosité du disque inférieur ce qui nous permettra d'intégrer directement le paramètre relatif à la porosité k dans l'équation de Reynolds modifiée et d'éviter ainsi les difficultés numériques inhérentes au couplage de celle-ci avec l'équation de Darcy à l'aide de procédures itératives. Dans le cadre de la théorie de lubrification poro-élasto-hydrodynamique (PEHD), le problème de lubrification par film comprimé est contrôlé par quatre paramètres, à savoir : le paramètre des couples de contraintes l , la concentration de particules ou de macromolécules dans le fluide suspendu ϕ , la perméabilité de la matrice poreuse k , et le paramètre adimensionnel d'élasticité de la matrice poreuse δ .

Il est utile de noter que dans le joint articulaire les macromolécules de l'acide hyaluronique (AH), lors de l'écrasement, sont bloquées à cause de leur taille ($l^2 > k$) à l'interface milieu poreux-film fluide. Ainsi, seul le solvant (le sérum) pénètre dans la couche poreuse, qui est naturellement considéré comme un fluide Newtonien.

Ce chapitre est dévolu à la simulation numérique du problème de lubrification par film comprimé de l'articulation du genou humain gouverné par une équation de Reynolds modifiée linéaire dont l'inconnue principale est la pression engendrée dans le fluide synovial. Dans cette simulation, les cartilages osseux sont modélisés par deux disques circulaires et parfaitement parallèles de rayon r_a dont l'un (disque inférieur fixe) est poro-élastique. Le caractère linéaire de l'équation de Reynolds modifiée nous permettra de trouver analytiquement le champ de pression hydrodynamique dans le cas d'un écoulement laminaire axisymétrique.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

III.2. Equations gouvernantes et hypothèses simplificatrices

Considérons la configuration géométrique axisymétrique représentée sur la **figure III.1** composée de deux disques circulaires et parallèles d'axe Oz dont l'un est poro-élastique. L'axe Or est situé sur l'interface film fluide-disque poreux. Entre ces deux disques, un film fluide de hauteur $h = h(t)$ s'écoule. Les propriétés physiques du fluide (la masse volumique ρ et la propriété responsable des couples de contraintes η) sont supposées constantes. En revanche, la viscosité dynamique du fluide μ dépend de la concentration en particules ϕ . L'écoulement du fluide est supposé par hypothèse laminaire aussi bien dans l'espace séparant les deux disques que dans le milieu poreux. Le disque inférieur poreux ou poro-élastique, d'épaisseur H^* , est stationnaire tandis que le disque supérieur est imperméable et il se meut avec une vitesse d'écrasement instantanée ($\vec{W}_{sq} = -\frac{dh}{dt} \vec{e}_z$). Cette configuration permet de schématiser de façon simplifiée le contact articulaire rencontré au niveau du genou.

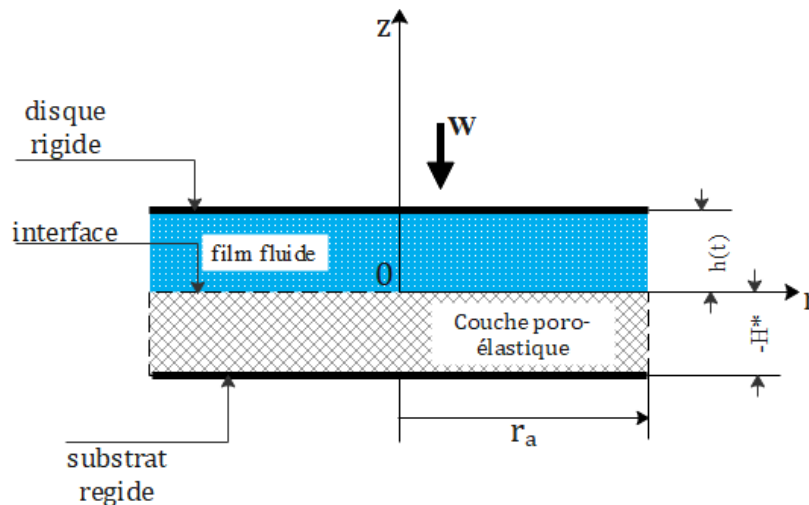


Fig. III.1 Configuration de l'articulation du genou en écrasement axisymétrique du film.

Les différentes hypothèses utilisées peuvent être résumées comme suit :

- l'écoulement est axisymétrique, entre les deux disques et dans la matrice poreuse,
- le disque supérieur est rigide (indéformable) et imperméable (non poreux),
- le disque inférieur est isotrope et poro-élastique,

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

- la hauteur du film lubrifiant est supposée très faible devant le rayon du disque ($\frac{h}{r_a} \ll 1$) et ne dépend que de la variable temporelle t ; $h = h(t)$,
- l'épaisseur du disque inférieur H^* est constante et est supposée très faible devant le rayon du disque ($\frac{H^*}{r_a} \ll 1$) ce qui permettra d'utiliser l'approximation de Morgan-Cameron,
- les composantes radiale, circonférentielle, et axiale de la vitesse du disque supérieur sont $(V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, -|dh/dt|)$ lors de l'écrasement,
- la vitesse du disque inférieur est nulle,
- la porosité ε et la perméabilité k du disque inférieur sont supposées constantes. Cette dernière est calculée à partir de la loi de Kozeny-Carman.

III.2.1. Equations générales dans les milieux poreux

Lors de l'écrasement, le fluide lubrifiant de base (le solvant supposé iso-volume et Newtonien) pénètre dans les pores de la matrice poreuse. Ces pores sont dépourvus de tout déplacement puisque la matrice est supposée indéformable. Dans ces conditions, les lois de conservation de la masse et de Darcy s'écrivent en notation vectorielle comme suit :

- **Loi de Darcy classique :**

Pour un milieu poreux isotrope et lorsque les forces de volume sont négligées, la loi de Darcy prend la forme suivante :

$$\vec{v}^* = -\frac{k(\varepsilon)}{\mu_0} \vec{\nabla} p^* \quad (\text{III.1})$$

où k et μ_0 sont respectivement la perméabilité du disque poreux et la viscosité dynamique du fluide lubrifiant de base. p^* étant la pression dans le milieu poreux.

La présence du signe moins signifie que l'écoulement s'effectue dans le sens des pressions décroissantes.

Ses projections sur les axes Or et Oz nous donne les expressions de :

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

- la composante radiale de la vitesse d'écoulement dans le milieu poreux:

$$v_r^* = -\frac{k}{\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial r} \quad (\text{III.2})$$

- la composante axiale de la vitesse d'écoulement dans le milieu poreux:

$$v_z^* = -\frac{k}{\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (\text{III.3})$$

- Loi de conservation de la masse :

Dans un milieu poreux ou poro-élastique, l'équation de continuité est toujours applicable, nous avons alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{III.4})$$

qui peut s'écrire en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique comme suit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^*) + \frac{\partial v_z^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.5})$$

Compte tenu des relations de Darcy (III.2) et (III.3), et de l'équation de continuité (III.5), nous pouvons écrire, au sein du milieu poreux, une équation de Laplace dont l'inconnue est la pression p^*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

III.2.2. Equations générales dans les milieux poro-élastiques : Loi de Darcy modifiée

Selon Bujurke [25], la loi de Darcy modifiée pour un écoulement laminaire dans un milieu poro-élastique (cas du cartilage) imbibé par le fluide de base (solvant) s'écrit sous forme vectorielle :

$$\vec{v}^* = -\frac{k}{\mu_0} (1 - \delta) \vec{\nabla} p^* \quad (\text{III.8})$$

où δ est le paramètre d'élasticité dont la valeur s'échelonne entre 0 et 1. Une valeur nulle de δ signifie que le milieu poreux est indéformable ou rigide.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

Ses projections sur les axes Or et Oz sont :

$$v_r^* = -\frac{k}{\mu_0} (1 - \delta) \frac{\partial p^*}{\partial r} \quad (\text{III.9})$$

$$v_z^* = -\frac{k}{\mu_0} (1 - \delta) \frac{\partial p^*}{\partial z} \quad (\text{III.10})$$

III.2.3. Equations générales dans le film fluide

Lorsque les forces d'inertie, les forces et les couples de volume sont négligés, les lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse pour un fluide non Newtonien à couples de contraintes incompressible prennent les formes suivantes :

$$\vec{\nabla} p = -\mu_s \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) - \eta \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}\right)\right)\right) \quad (\text{III.11})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{III.12})$$

où $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$ est le vecteur vitesse de l'écoulement, p est la pression dans le film fluide, μ_s est la viscosité effective de la suspension, et η est la constante matérielle responsable de la présence des couples de contraintes dans le fluide.

En utilisant l'hypothèse classique de la lubrification par film mince et celle de la symétrie circonférentielle de l'écoulement (c.-à-d., $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$),

Les équations (III.11) et (III.12) en coordonnées cylindriques (r, θ , et z) se réduisent à :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_s \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v_r}{\partial z^4} \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.15})$$

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

Les conditions limites sur les vitesses et leurs dérivées sont :

- $z = h(t)$

$$v_r = 0, v_z = \frac{dh}{dt}, \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.16a})$$

- $z = 0$

$$v_r = v_r^*|_{z=0}, v_z = v_z^*|_{z=0}, \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.16b})$$

Les conditions limites pour la pression sont :

$$p = 0 \text{ (pression ambiante), et } p^* = 0 \text{ pour } r = r_a \quad (\text{III.17a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \text{ à } r = 0 \text{ (champs axisymétriques)} \quad (\text{III.17b})$$

$$p = p^* \text{ à } z = 0 \text{ (continuité de la pression à l'interface)} \quad (\text{III.17c})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \text{ à } z = -H^* \text{ (surface rigide)} \quad (\text{III.17d})$$

Rappelons que H^* est l'épaisseur de la couche poreuse.

La solution de l'équation (III.13) soumise aux conditions limites (III.16) est :

$$v_r(r, z) = \frac{1}{2\mu_s} \frac{\partial p}{\partial r} \left[z(z-h) + 2l^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{z-z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{III.18})$$

où $l = \sqrt{\eta/\mu_s}$ est le paramètre des couples de contraintes.

En intégrant l'équation de continuité (III.15) au travers l'épaisseur du film fluide, et en utilisant la loi de Darcy (III.3) et les conditions limites (III.16) portant sur la vitesse axiale du fluide v_z ,

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

Nous dérivons l'équation de Reynolds modifiée dans le cas d'un milieu poreux rigide (III.19):

$$\frac{G(h,l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} - v_z^* \Big|_{z=0} \quad (\text{III.19})$$

où :

$$G(h,l) = h^3 - 12 l^2 h + 24 l^3 \tanh \left(\frac{h}{2l} \right) \quad (\text{III.20})$$

Compte tenu de l'équation (III.3), nous pouvons alors obtenir une forme alternative de l'équation de Reynolds modifiée:

$$\frac{G(h,l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} + \frac{k}{\mu_0} \left(\frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (\text{III.21})$$

Rappelons que $\mu_s = \mu_0 \tilde{\mu}(\phi)$ où μ_0 est la viscosité dynamique du solvant et ϕ est la concentration.

Pour un milieu poro-élastique, une équation de Reynolds modifiée générale peut être dérivée à partir des équations (III.10) et (III.19) sous la forme :

$$\frac{G(h,l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} + \frac{k}{\mu_0} (1 - \delta) \frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (\text{III.22})$$

III.3. Approximation de Morgan-Cameron pour une couche poreuse mince [26,27]

Cette approximation n'est valide que dans le cas d'une épaisseur très mince de la couche poreuse $\left(\frac{H^*}{r_a} \ll 1 \right)$ et lorsque la vitesse de glissement de la particule de fluide à l'interface est négligée.

En intégrant l'équation de Darcy (III.6) par rapport à la variable spatiale z , tel que $-H^* \leq z \leq 0$, et compte tenu de la condition limite (III.17d), nous obtenons

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \int_{-H^*}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) dz \quad (\text{III.23})$$

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

En supposant que l'épaisseur de la couche poreuse H^* est très faible devant le rayon du disque ($\frac{H^*}{r_a} \ll 1$) et l'utilisation de la condition de continuité de la pression à l'interface (III.17c), l'équation (III.23) devient

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial z} \right|_{z=0} = -H^* \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{III.24})$$

Par conséquent, la composante de la vitesse de Darcy à l'interface ($z=0$) est donnée par l'expression :

$$v_z^*|_{z=0} = -\frac{k}{\mu_0} \left. \frac{\partial p^*}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{k H^*}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{III.25})$$

Compte tenu de la relation (III.25), les équations de Reynolds modifiées (III.21) et (III.22) prennent les formes suivantes :

- *Cas d'une couche poreuse indéformable*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12 \mu_0 \frac{dh}{dt}}{\bar{G}(h,l,H^*,k,\phi)} \quad (\text{III.26})$$

$$\text{où : } \bar{G}(h,l,H^*,k,\phi) = \frac{h^3 - 12 l^2 h + 24 l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) + 12 \tilde{\mu}(\phi) k H^*}{\tilde{\mu}(\phi)}$$

- *Cas d'une couche poro-élastique*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left[\frac{G(h,l)}{\tilde{\mu}(\phi)} + 12 k H^* (1 - \delta) \right] = 12 \mu_0 \frac{dh}{dt} \quad (\text{III.27})$$

ou encore

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12 \mu_0 \frac{dh}{dt}}{G'(h,l,H^*,k,\delta,\phi)} \quad (\text{III.28})$$

$$\text{avec } G'(h,l,H^*,k,\phi,\delta) = \frac{h^3 - 12 l^2 h + 24 l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) + 12 \tilde{\mu}(\phi) k H^* (1 - \delta)}{\tilde{\mu}(\phi)}$$

Pour $l = 0$ (fluide non polaire ou Newtonien), nous avons dans le cas d'une suspension : $G'(h,H^*,k,\phi,\delta) = \frac{h^3 + 12 \tilde{\mu}(\phi) k H^* (1 - \delta)}{\tilde{\mu}(\phi)}$

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

Notons que $\tilde{\mu}(\Phi) = 1$ dans le cas d'un solvant pur Newtonien. Notons également que pour une couche poreuse indéformable ($\delta = 0$), l'équation (III.28) se réduit à l'équation (III.26).

En utilisant les conditions limites (III.17a) et (III.17b) sur p , la solution analytique de l'équation (III.28) est :

$$p(r, t) = \frac{3 \mu_0 \frac{dh}{dt} (r^2 - r_a^2)}{G'(h, l, H^*, k, \Phi, \delta)} \quad (\text{III.29})$$

Le coefficient de perméabilité peut être déterminé à partir de l'équation de Kozeny-Carman [28] :

$$k = \frac{\varepsilon r_h^2}{\kappa} \quad (\text{III.30})$$

où : $\kappa = 5$ est la constante de Kozeny, et $r_h = \frac{d \varepsilon}{4(1-\varepsilon)}$ est le rayon hydraulique moyen pour un milieu fibreux de diamètre d .

Le modèle de Kozeny peut s'écrire aussi sous la forme :

$$k = \frac{d^2 \varepsilon^3}{80(1-\varepsilon)^2} \quad (\text{III.31})$$

Notons que la valeur de d doit être inférieure à la taille caractéristique des particules, =

$\sqrt{\frac{\eta}{\mu_s}}$, en suspension dans le fluide lubrifiant.

La **figure III.2** montre clairement l'influence du diamètre caractéristique des fibres ou des pores d et de la porosité ε sur la perméabilité k . La perméabilité augmente avec la porosité de façon exponentielle car $k \propto \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2}$. D'autre part, pour une même valeur de la porosité, nous remarquons une augmentation de la perméabilité avec le rapport du diamètre caractéristique des pores à la taille caractéristiques des particules suspendues dans le fluide de base.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

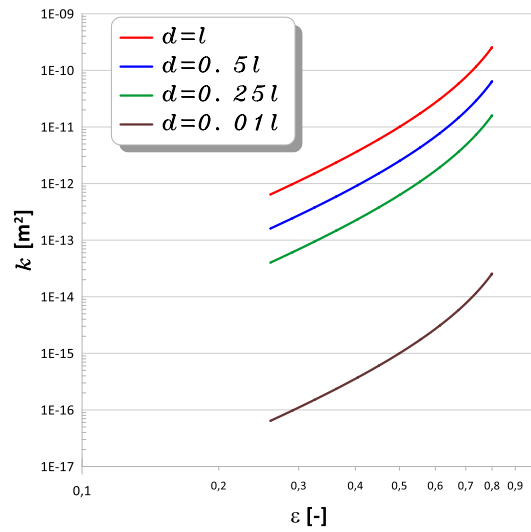


Fig. III.2 Variations de la perméabilité k en fonction de la porosité ε pour différentes valeurs du diamètre caractéristique des pores d

III.4. Equations de mouvement et d'équilibre du disque supérieur et schéma de résolution

III.4.1. Prise en compte de l'inertie du disque : Equations de mouvement

Les forces extérieures agissant sur le disque supérieur sont la force résultante des actions de la pression hydrodynamique, les forces d'inertie du disque en mouvement et son propre poids. Dans le système d'axes de la [figure III.1](#), l'équation de mouvement selon la direction axiale s'écrit :

$$F_z(t) - mg = m \frac{d^2h}{dt^2} \quad (\text{III.32})$$

où m est la masse du disque supérieur, g est l'accélération de la pesanteur, F_z est la portance hydrodynamique ou l'action du fluide sur la face inférieure du disque. Elle est calculée à partir de l'intégration du vecteur contrainte sur toute la surface du contact ([figure III.3](#)):

$\vec{F} = \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) dS$ où $\vec{T}(M, \vec{n}) = -p \vec{n}(M)$, $\vec{n}(M) = -\vec{e}_z$ est le vecteur normal unitaire extérieur en un point M du solide dirigé vers le fluide tel que $\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}$, et $dS = r dr d\theta$. Soit :

$$F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = 2\pi \int_0^{r_a} p(r, t) r dr \quad (\text{III.33})$$

\vec{e}_z étant le vecteur de base unitaire de l'axe ascendant Oz .

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

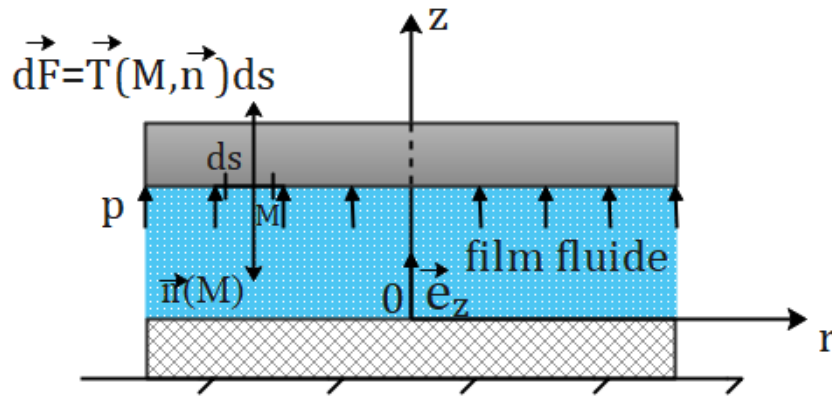


Fig. III.3 Représentation de l'action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur dans le cas où les contraintes tangentielles pariétales négligées

- Schéma de calcul de la vitesse de descente de la surface écrasante : dh/dt

La vitesse d'écrasement $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t+\Delta t}$ du disque à l'instant $t + \Delta t$ est calculée à l'aide d'un schéma explicite d'ordre un de l'accélération :

$$m \frac{\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t+\Delta t} - \left. \frac{dh}{dt} \right|_t}{\Delta t} = F_z(t) - mg$$

Soit :

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{dh}{dt} \right|_t + \Delta t \left(\frac{F_z(t) - mg}{m} \right) + o(\Delta t) \quad (\text{III.34})$$

où la portance $F_z(t)$ et la vitesse d'écrasement $\left. \frac{dh}{dt} \right|_t$ à l'instant t sont supposées connues.

- Schéma de calcul de la position de la surface écrasante : $h(t)$

La position de la face inférieure du disque en mouvement est obtenue à partir d'un développement de Taylor limité à l'ordre deux :

$$h|_{t+\Delta t} = h|_t + \Delta t \left. \frac{dh}{dt} \right|_t + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{F_z(t) - mg}{m} \right) + o(\Delta t^2) \quad (\text{III.35})$$

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

III.4.2. Inertie du disque négligée : Equation d'équilibre du disque supérieur

Dans le cas où la force d'inertie est négligée, l'équation (III.32) se réduit à :

$$F_z(t) - mg = 0 \quad (\text{III.36a})$$

ou encore

$$2\pi \int_0^{r_a} p(r, t) r dr = mg \quad (\text{III.36b})$$

Compte tenu de l'expression de p (Eq. III.29), nous aboutissons à l'équation différentielle ordinaire d'ordre un suivante :

$$\frac{dh}{dt} = \mathcal{F}(t, h) \quad (\text{III.37})$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(t, h) = - \frac{2mg G'(h, l, H^*, k, \phi, \delta)}{3\mu_0 \pi r_a^4}$$

La solution de l'équation différentielle fortement non linéaire (III.37) est recherchée numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.

III.5. Etude paramétrique

Dans cette section, nous allons mettre en évidence les effets de la porosité ε (ou de la perméabilité k) et de l'élasticité de la matrice poreuse sur le profil de pression hydrodynamique et la capacité de charge du contact fonctionnant à vitesse constante et à charge constante. Le fluide suspendant est supposé non Newtonien à couples de contraintes caractérisé par : $\tilde{l} = \frac{l}{h_0} = 0,3$ et $\phi = 0,30$.

III.5.1. Cas d'une vitesse imposée constante

La **figure III.4** représente la variation axisymétrique de la pression poro-hydrodynamique en fonction de la coordonnée radiale relative pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de la porosité dans le cas où le disque inférieur est poreux indéformable. Nous observons que la pression relative calculée est maximale au centre du disque et diminue avec r jusqu'à ce qu'elle devienne nulle au bord du disque car la pression absolue qui y règne est celle de l'atmosphère. Pour une porosité donnée, la diminution de la pression entraîne une augmentation de la vitesse radiale de l'écoulement comme il est clairement illustré sur la **figure III.5**.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

Dans cette figure, nous remarquons aussi que la vitesse radiale d'écoulement au bord du disque diminue avec la porosité ; ceci est dû à l'infiltration du solvant dans la matrice poreuse.

Nous observons également que la porosité du disque inférieur entraîne une diminution de la pression surtout lorsque l'espacement entre les deux disques est faible ; c'est-à-dire lorsque les deux disques sont très proches l'un de l'autre. La chute de pression dans le film lubrifiant conduit bien évidemment à une diminution de la capacité de charge du système lubrifié obtenue à partir de l'intégration du champ de pression [figure III.6](#). Sans surprise, la portance hydrodynamique est plus élevée pour une épaisseur du film plus faible qui peut s'expliquer par la résistance à l'écrasement du fluide lubrifiant.

Les résultats obtenus pour $h=h_f$ montrent que les pressions engendrées dans le film lubrifiant à vitesse imposée sont énormes et largement suffisantes pour d'une part déformer élastiquement voire plastiquement la face active du disque poreux et d'autre part affecter sensiblement les propriétés rhéologiques du fluide en l'occurrence sa viscosité. Dans ces conditions, il y a lieu d'utiliser la théorie de lubrification poro-élasto-hydrodynamique qui prend en considération ces effets.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

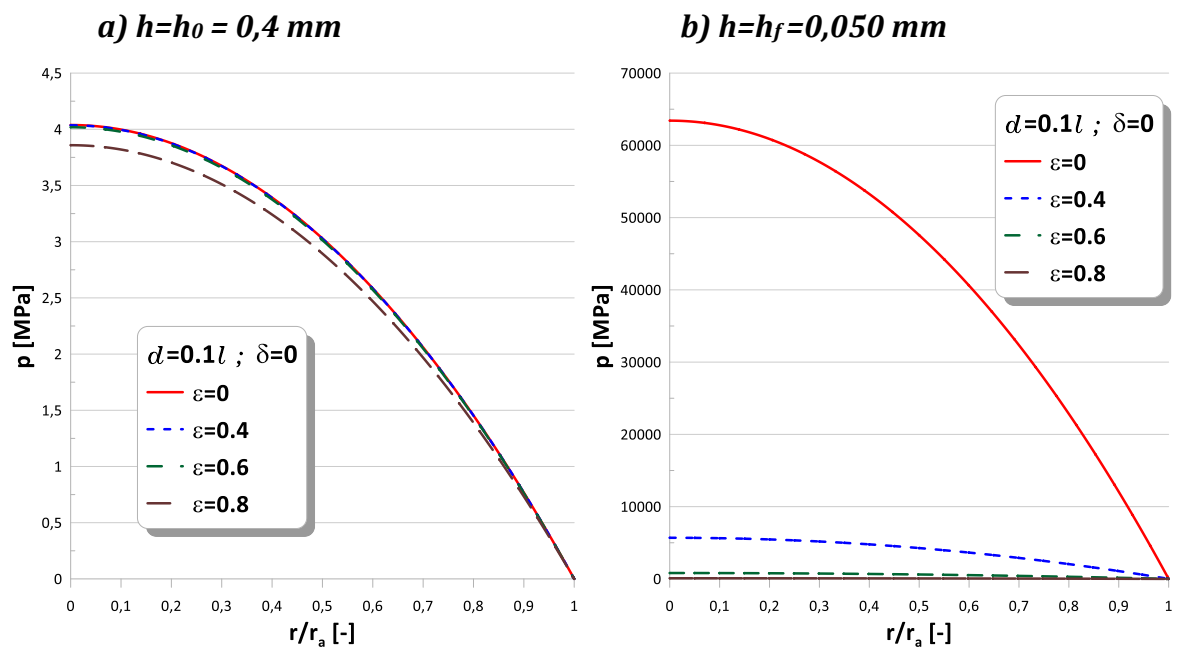


Fig. III.4 Profils de pression poro-hydrodynamique dans le film fluide déterminés pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de la porosité ϵ .

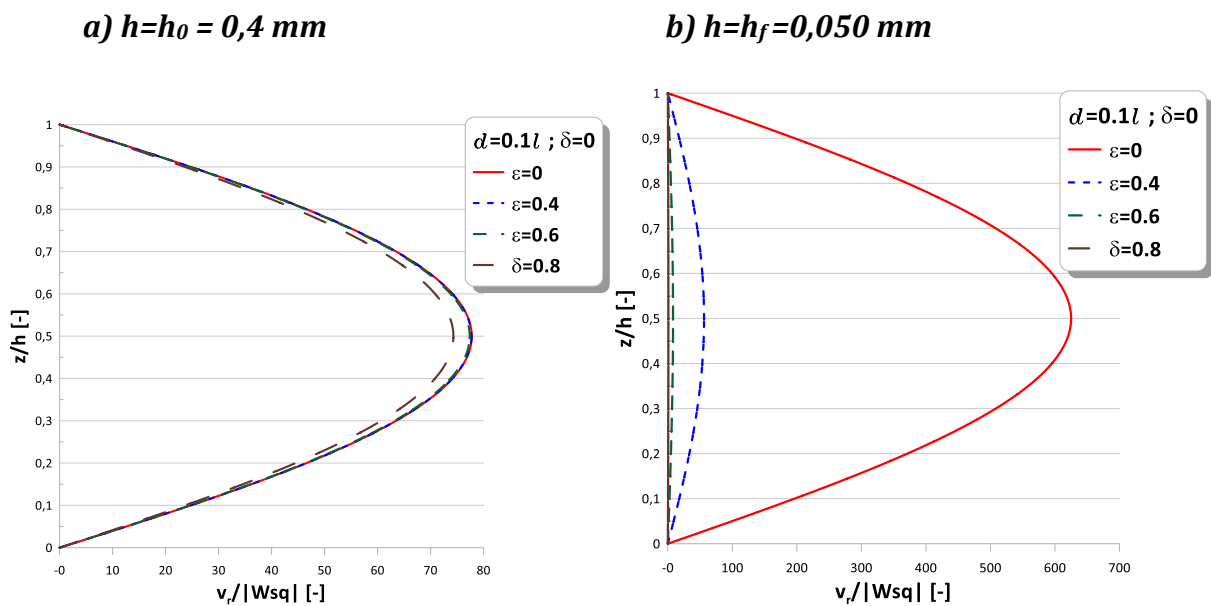


Fig. III.5 Profils de vitesse radiale au bord libre du disque calculés pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de la porosité ϵ .

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

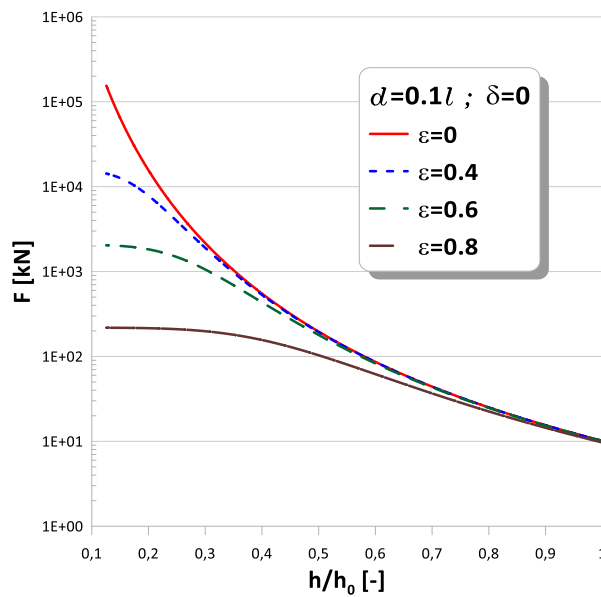


Fig. III.6 Variations de la capacité de charge en fonction de la hauteur relative h/h_0 pour différentes valeurs de la porosité ε

Le modèle de lubrification poro-hydrodynamique a été développé afin de tenir compte des effets poro-élastiques non négligeables sur le comportement hydrodynamique du système en introduisant dans le modèle un nouveau paramètre d'élasticité adimensionnel noté δ .

La **figure III.7** représente les variations axisymétriques de la pression poro-élasto-hydrodynamique calculée pour une vitesse constante à l'aide du nouveau modèle en fonction de la coordonnée radiale relative pour deux valeurs de la hauteur du film et différentes valeurs de δ dans le cas où le disque inférieur est poro-élastique. Nous observons la même tendance que dans le cas précédent ; c'est à dire une pression maximale au centre et une pression nulle au bord du disque. Par contre, la prise en considération de la poro-élasticité entraîne une augmentation de la pression surtout lorsque la distance séparant les deux faces des disques est faible.

Sur la **figure III.8**, nous observons que la prise en considération de la poro-élasticité affecte également le profil de vitesse radial. D'autre part, nous notons une augmentation de celle-ci avec le paramètre d'élasticité δ . Cet effet est accentué dans le cas où les deux disques sont très proches.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

L'augmentation de la pression dans le film lubrifiant conduit bien évidemment à une amélioration de la capacité de charge du système lubrifié [figure III.9](#). Ainsi, la capacité de charge poro-élasto-hydrodynamique (PEHD) est d'autant plus grande que la hauteur du film est faible.

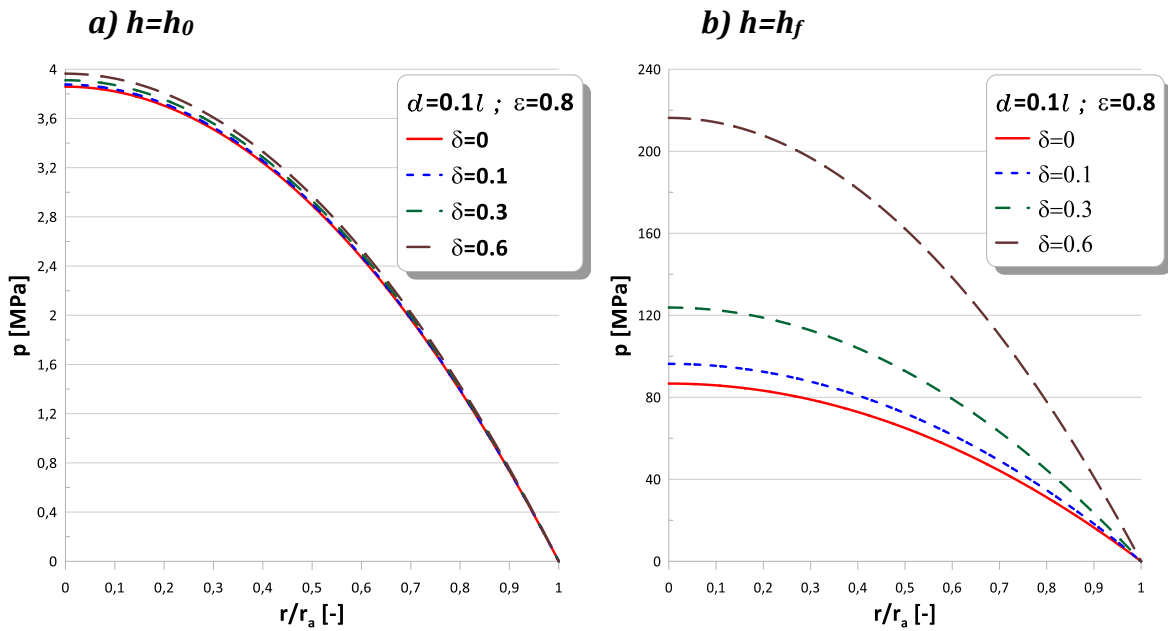


Fig. III.7 Courbes de pression poro-élasto-hydrodynamique dans le film fluide calculées pour différentes valeurs du paramètre d'élasticité δ avec une porosité $\epsilon = 0.8$

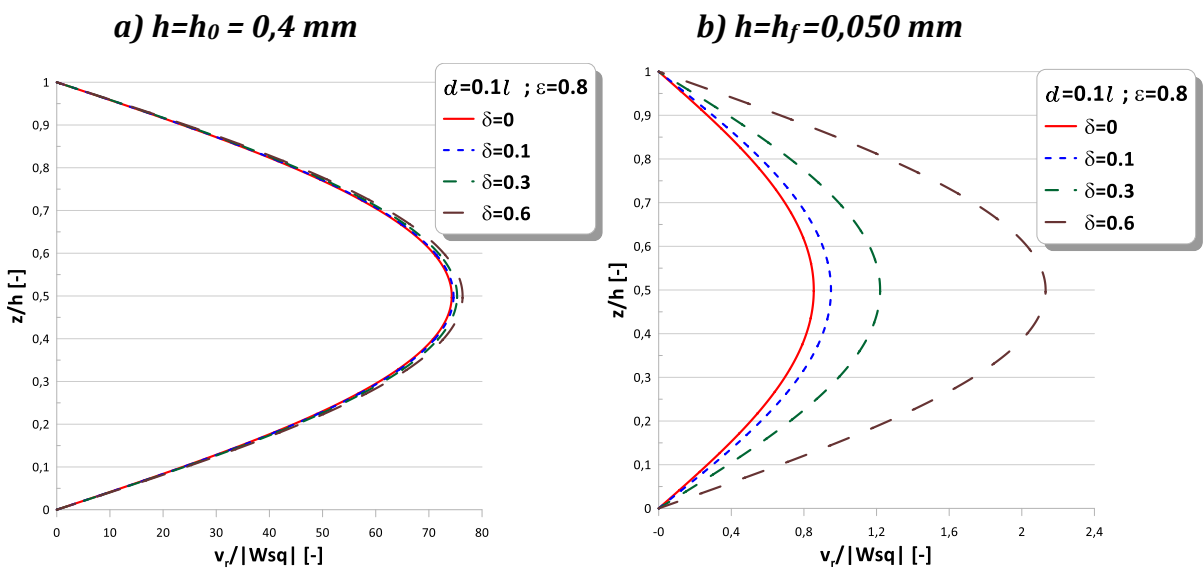


Fig. III.8 Profils de vitesse radiale au bord libre du disque calculés pour deux positions du disque supérieur et différentes valeurs de δ

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

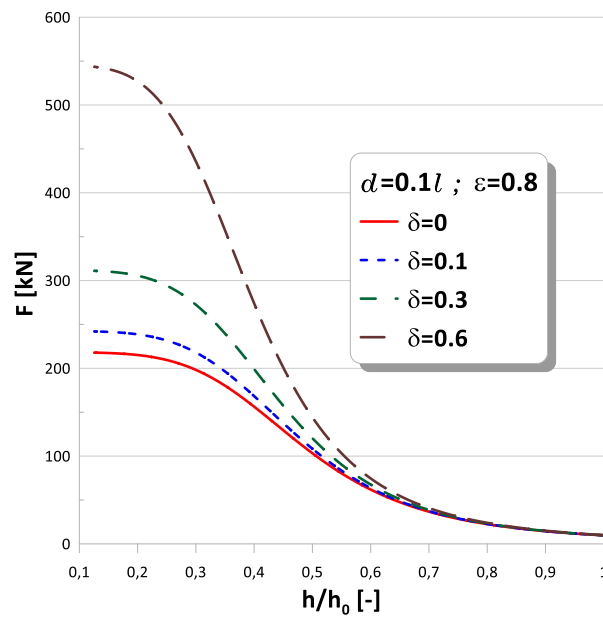


Fig. III.9 Variations de la capacité de charge en fonction de la hauteur relative du film h/h_0 pour différentes valeurs du paramètre d'élasticité δ avec une porosité $\varepsilon = 0.8$

III.5.2. Cas d'une charge imposée constante

La **figure III.10** représente les variations temporelles de la hauteur relative du film déterminées par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre pour différentes valeurs de la porosité en utilisant les théories PHD et PEHD. Nous observons que le temps d'écrasement prédit par la théorie PHD diminue lorsque la porosité croît. Pour une porosité $\varepsilon = 0.8$ le temps d'écrasement calculé par la théorie PHD est plus court que celui prédit par la théorie PEHD.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

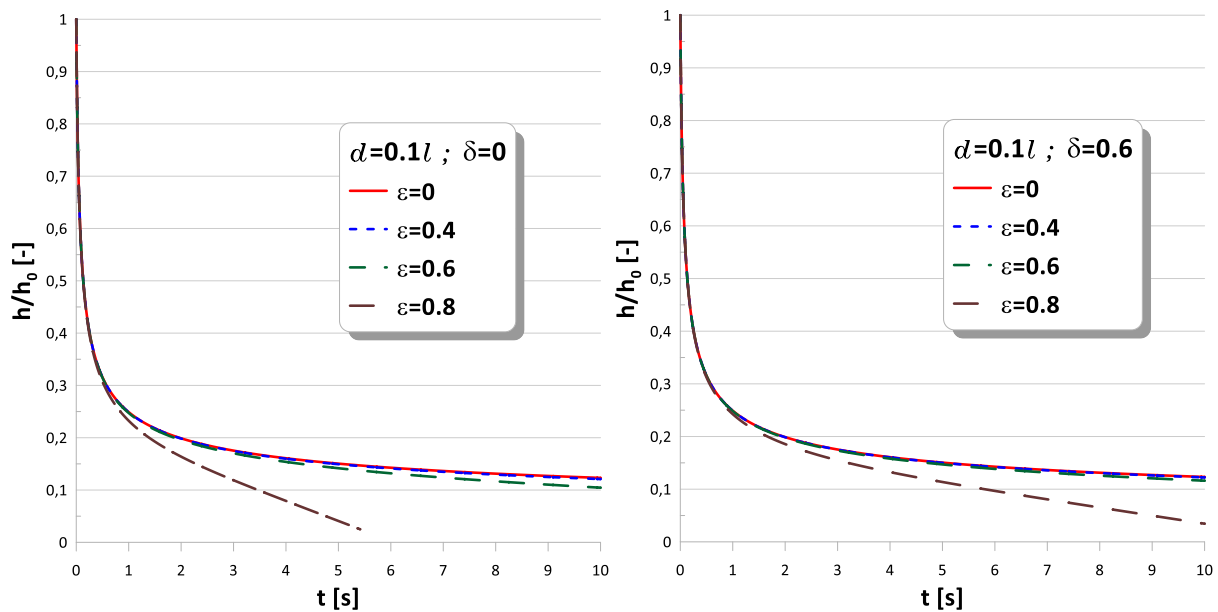


Fig. III.10 Variations temporelles de l'espacement relatif entre les deux disques $\frac{h}{h_0}$ déterminées à l'aide des théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .

La **figure III.11** montre les profils de pression calculée par les deux théories PHD et PEHD pour diverses porosités ε . La valeur nulle de ε correspond au cas imperméable (non poreux). Nous constatons que la porosité n'a aucun effet sur les distributions de pression PHD et PEHD puisque le processus d'écrasement s'effectue à charge constante imposée. Ces résultats justifient la validité du code de calcul MS-Fortran 90 développé.

La **figure III.12** montre que la porosité n'affecte pas l'évolution de la vitesse d'écrasement instantanée $\frac{dh}{dt}$ prédite par la méthode de Runge-Kutta en utilisant les deux théories de lubrification PHD et PEHD.

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

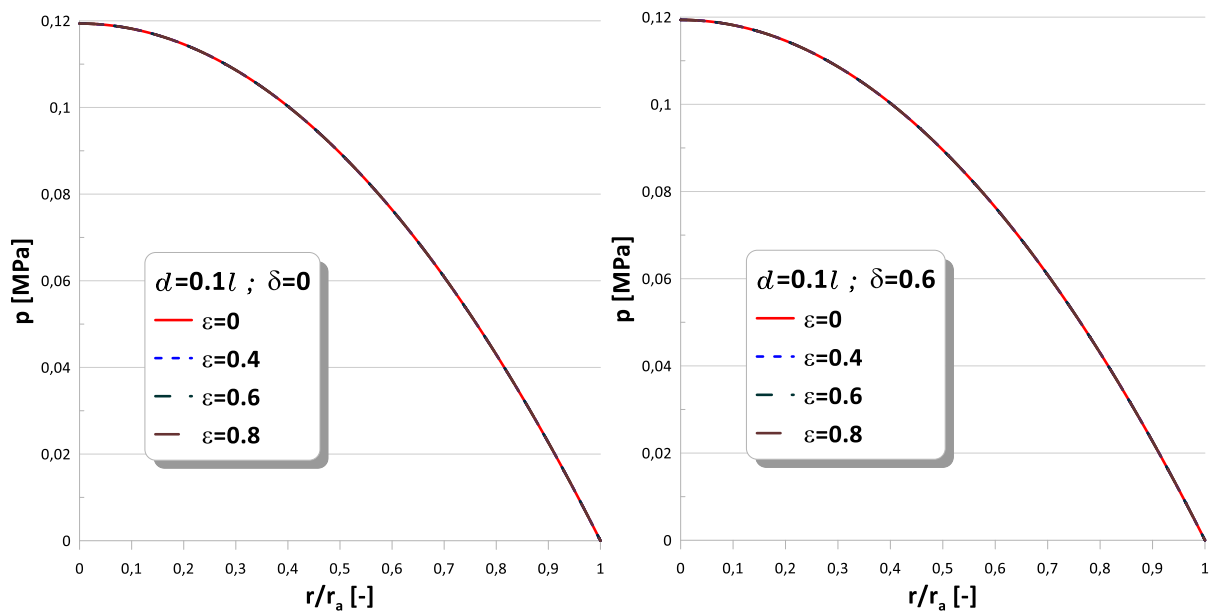


Fig. III.11 Répartitions de la pression PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .

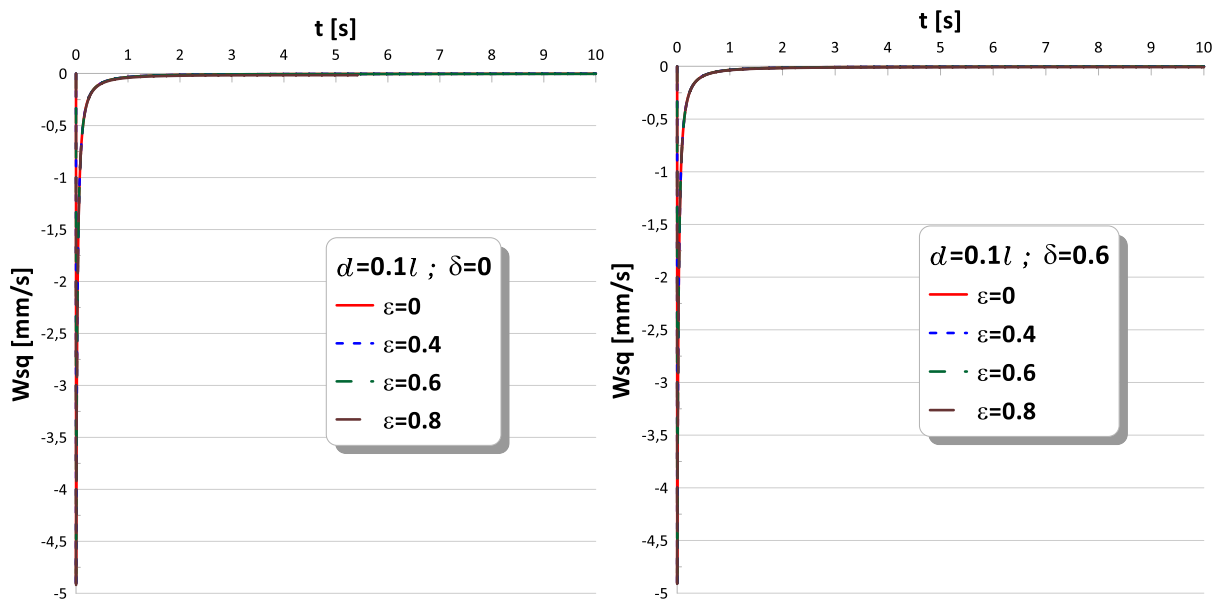


Fig. III.12 Evolution temporelle de la vitesse d'écrasement Wsq calculée par les théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

La **figure III.13** donne une comparaison des profils de vitesse radiale déterminés par les deux théories de lubrification PHD et PEHD pour diverses valeurs de la porosité. Il est observé que la vitesse du fluide à la sortie du contact diminue avec la porosité. De plus, la comparaison des deux graphes révèle que pour une même valeur de la porosité, la vitesse prédite par la théorie PEHD est plus grande que celle obtenue par la théorie PHD.

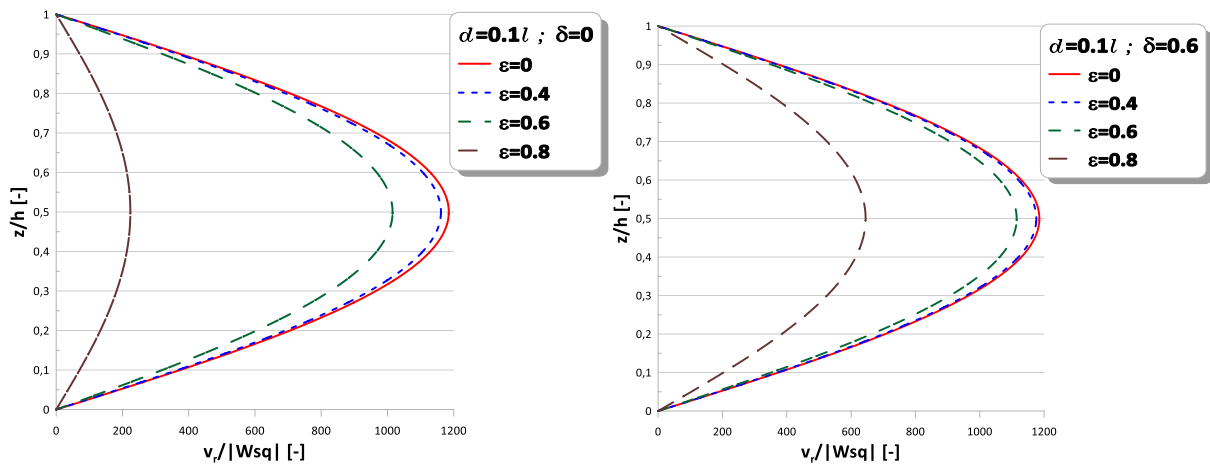


Fig. III.13 Profils de vitesse radiale au bord du disque calculée par les théories PHD et PEHD pour différentes valeurs de la porosité ε .

Chapitre III : Ecrasement d'un fluide à couple de contrainte en présence de milieu poro-élastique

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les théories PHD et PEHD simplifiées basées sur l'approximation de Morgan-Cameron qui nous a permis de dériver une équation de pression plus complète appelée équation de Reynolds modifiée qui intègre quatre paramètres physiques importants à savoir : la perméabilité, la longueur caractéristique des particules, la concentration en particules, et le paramètre adimensionnel d'élasticité. Dans ces deux théories, les effets d'inertie aussi bien du disque supérieur que du fluide ont été ignorés par hypothèse.

L'étude paramétrique menée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les effets de la porosité ou de la perméabilité ainsi que l'influence de la poro-élasticité du disque inférieur sur certaines performances hydrodynamique du contact lubrifié pour deux conditions de fonctionnement complètement différentes : fonctionnement à vitesse constante imposée et fonctionnement à charge constante imposée.

Cette étude nous a conduit aux conclusions suivantes :

Ecrasement à vitesse constante :

- une diminution de la pression HD, la capacité de charge, et la vitesse radiale d'écoulement avec la porosité ou la perméabilité ;
- une augmentation de la pression HD, la capacité de charge, et la vitesse radiale d'écoulement avec le paramètre d'élasticité.

Ecrasement à charge constante :

- une diminution du temps d'écrasement et de la vitesse radiale d'écoulement avec la porosité ou la perméabilité ;
- une augmentation du temps d'écrasement et de la vitesse radiale d'écoulement avec le paramètre d'élasticité.

Chapitre IV
Lubrification EX-Poro-
hydrodynamique (XPHD)

IV.1. Introduction

La lubrification EX-Poro-hydrodynamique (XPHD, en abrégé) est un mécanisme de lubrification d'inspiration biomimétique. Il s'agit essentiellement d'un écoulement dans une matrice poreuse dont la phase solide induit des forces élastiques de compression négligeables devant les forces hydrodynamiques (HD) générées au sein du milieu. Le concept essentiel de la lubrification XPHD consiste à remplacer les revêtements de surface et le film lubrifiant traditionnellement utilisés comme solutions technologiques en vue de réduire le frottement et l'usure, par une matrice ou une couche poreuse imbibée d'un fluide qui fournit une plus grande capacité de charge. Ce mode de lubrification, copié sur la nature, simule parfaitement le mécanisme de lubrification rencontré dans l'articulation fémoro-tibiale où le fluide et la couche poreuse sont respectivement représentés par le liquide synovial et le cartilage osseux.

Sur le plan industriel, ce type de lubrification représente une solution technologique inédite permettant d'éviter l'usage des lubrifiants d'origine minérale formulés à partir du raffinage du pétrole brut, d'utiliser des tribo-systèmes autolubrifiants plus écologiques et moins coûteux.

La lubrification XPHD est un sujet de recherche multiphysique et innovant qui constitue une nouvelle solution technologique intéressante tant sur le plan économique que technique et ce pour diverses applications telles que les paliers, les butées, les prothèses, etc.

La théorie du mécanisme (ou mode) de lubrification XPHD se base sur la construction d'une équation aux dérivées partielles scalaire de type Reynolds dérivée à partir de l'équation vectorielle de Darcy-Brinkman [16] au lieu de l'équation de Navier, et de l'équation de continuité pour un écoulement laminaire incompressible dans un milieu poreux de faible épaisseur. Le milieu poreux, supposé isotrope, est caractérisé par deux paramètres, à savoir : la porosité ε et la perméabilité k . Cette dernière peut être calculée en utilisant la loi de Kozeny-Carmant reliant la perméabilité à la porosité du milieu poreux.

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

Les principales hypothèses de la lubrification XPHD sont quasiment similaires à celles établies par Osborne Reynolds dans le cadre de la théorie de la lubrification hydrodynamique en 1886 dont il est le fondateur [19]. Parmi ces hypothèses, nous citons :

- le milieu fluide est supposé continue ce qui permet d'utiliser les lois de conservation de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus,
- le fluide est iso-volume et Newtonien ou visqueux linéaire,
- l'écoulement est laminaire ce qui justifie l'emploi de l'équation de Darcy-Brinkman au lieu de l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer,
- la pression est constante suivant l'épaisseur du milieu poreux ; c-à-d $\frac{\partial p}{\partial y}$ ou $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

Ces hypothèses sont similaires à celles utilisées en lubrification HD classique où le mécanisme de génération de la pression dans le film lubrifiant s'effectue soit par effet de coin d'huile (wedge effect) ou d'étirement (stretching effect) ou encore par effet d'écrasement du film (squeeze film effect). Chaque effet correspond à un mécanisme ou mode de lubrification. Notons que le deuxième effet est surtout rencontré lors du formage plasto-hydrodynamique des métaux (laminage). Notons également que ces trois effets sont mathématiquement représentés par les termes figurant dans le second membre de l'équation de pression dite aussi équation de Reynolds. [19].

Dans le prochain paragraphe, nous présenterons en détails le processus de dérivation de l'équation de Reynolds modifiée qui sera considérée comme l'équation de base de la théorie de la lubrification XPHD ou XPEHD (Ex-Poro-Elasto-Hydrodynamique) lorsque nous tenons en compte les déformations élastiques de la matrice dues aux pressions. Notons que la prise en considération de l'élasticité de la matrice poreuse et la piézo-viscosité du fluide rend le problème de lubrification fortement non linéaire ce qui nécessite l'emploi de méthodes numériques appropriées pour trouver une solution approchée du problème.

IV.2. Equations en coordonnées cartésiennes pour un fluide newtonien

Le développement du modèle de lubrification XPHD est particulièrement présenté pour le cas d'écrasement d'un fluide Newtonien ou non-Newtonien (fluide polaire) entre deux surfaces planes parallèles (figures IV.1 & IV.2). Pour un écoulement incompressible unidirectionnel (1-D), l'équation de Darcy-Brinkman peut être écrite en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{k}u + \mu' \frac{d^2 u(y)}{dy^2} \quad (IV.1)$$

où $\mu' = \frac{\mu}{\varepsilon}$ est la viscosité effective.

La solution générale de l'équation différentiel à coefficient constants non homogène (IV.1) est de la forme :

$$u(y) = \underbrace{A \sinh(\omega y) + B \cosh(\omega y)}_{\text{solution de l'équation différentielle homogène}} - \underbrace{\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{solution particulière}} \quad (IV.2)$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\mu' k}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}$$

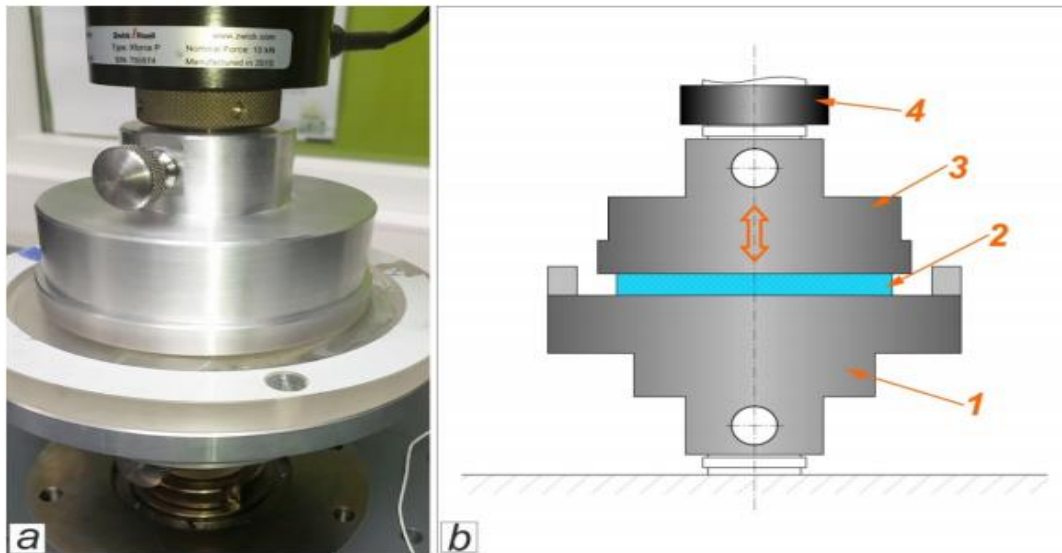


Fig. IV.1 Compression d'une matrice poreuse sèche ou imbibée [1-plateau réservoir, 2-mousse sèche ou imbibée, 3-disque de compression, 4-capteur de force] [12].

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

IV.2.1. Conditions limites associées

Les conditions limites associées à l'équation (IV.1) sont :

$$u(y = 0) = 0 ; u(y = h) = 0 \quad (IV.3a)$$

$$v(y = h) = \frac{dh}{dt} = v_{sq} ; v(y = 0) = 0 \quad (IV.3b)$$

Compte-tenu des conditions limites (IV.3), nous avons :

$$B = \frac{k dp}{\mu dx}$$

$$0 = A \sinh(\omega h) + B \cosh(\omega h) - \frac{k dp}{\mu dx}$$

$$0 = A \sinh(\omega h) + \frac{k dp}{\mu dx} [\cosh(\omega h) - 1]$$

Soit :

$$A = -\frac{k dp}{\mu dx} \left[\frac{\cosh(\omega h) - 1}{\sinh(\omega h)} \right]$$

Soit par conséquent :

$$u(y) = -\frac{k dp}{\mu dx} \left[\frac{\cosh(\omega h) - 1}{\sinh(\omega h)} \right] \sinh(\omega y) + \frac{k dp}{\mu dx} \cosh(\omega y) - \frac{k dp}{\mu dx}$$

ou encore :

$$u(y) = -\frac{k dp}{\mu dx} \left\{ [\cosh(\omega h) - 1] \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega h)} - \cosh(\omega y) + 1 \right\} \quad (IV.4)$$

Le signe moins (-) précédant le gradient de pression signifie que l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens des pressions décroissantes.

IV.2.2. Débit volumique

Le débit volumique par unité de largeur se calcule par la relation suivante :

$$Q_x = \int_{h_0}^h u \, dy$$

Soit :

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \left[\frac{\cosh(\omega h) - 1}{\sinh(\omega h)} \right] \left[\frac{1}{\omega} \cosh(\omega y) \right]_{h_0}^h - \frac{1}{\omega} [\sinh(\omega y)]_{h_0}^h + y \Big|_{h_0}^h \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{[\cosh(\omega h) - 1]}{\omega \sinh(\omega h)} [\cosh(\omega h) - 1] - \frac{1}{\omega} \sinh(\omega h) + h \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{(\cosh(\omega h) - 1)^2}{\omega \sinh(\omega h)} - \frac{\sinh(\omega h)}{\omega} + \frac{h \, \omega}{\omega} \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{(\cosh(\omega h) - 1)^2 - \sinh^2(\omega h) + h \, \omega \sinh(\omega h)}{\omega \sinh(\omega h)} \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{\cosh^2(\omega h) + 1 - 2\cosh(\omega h) - \sinh^2(\omega h) + h \, \omega \sinh(\omega h)}{\omega \sinh(\omega h)} \right\}$$

où par définition : $\cosh^2(\omega h) - \sinh^2(\omega h) = 1$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{2 - 2\cosh(\omega h) + h \, \omega \sinh(\omega h)}{\omega \sinh(\omega h)} \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \left\{ \frac{2(1 - \cosh(\omega h))}{\omega \sinh(\omega h)} + h \right\}$$

En posant $C = \frac{\cosh(\omega h) - 1}{\omega \sinh(\omega h)}$, il vient

$$Q_x = -\frac{k \, dp}{\mu \, dx} \{h - 2C\} \tag{IV.4}$$

IV.2.3. Intégration de l'équation de continuité : Dérivation de l'équation de base

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$\underbrace{\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = \frac{\partial Q_x}{\partial x}} + \underbrace{\int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy}_{=v(h)-v(0)=\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}} = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} (h - 2C) \right] = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.5})$$

C'est l'équation de Reynolds modifiée. Cette équation peut être généralisée au cas d'un écoulement bidimensionnel (2-D) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} (h - 2C) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dz} (h - 2C) \right] = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.6})$$

Si $k = cte$, $\mu = cte$, $h = h(t)$ l'équation devient :

$$\nabla^2 p(x, z, t) = \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.7})$$

Les conditions limites associées à l'équation de Reynolds modifiée (IV.7) portent généralement sur la pression aux bords du domaine d'intégration, et ses gradients lorsqu'il s'agit d'un écoulement symétrique ou axisymétrique.

IV.2.4. Vitesse moyenne en un point de l'écoulement

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = \frac{Q_x}{h}$$

$$\text{Soit : } \langle u \rangle = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \left\{ 1 - \frac{2C}{h} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

La distribution de la vitesse suivant l'épaisseur de l'écoulement y peut être calculée à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

en faisant une intégration par rapport à y sachant que u est donnée par l'expression (IV.4) :

$$\int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy \quad (IV.9)$$

avec la condition à la paroi :

$$v(y = 0) = v_0 \quad (IV.10)$$

IV.3. Equations en coordonnées cylindriques

Pour la géométrie du contact représentée dans la **figure (IV.3)** schématisant un écoulement newtonien axisymétrique entre deux disques parallèles, il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . L'utilisation de l'hypothèse de symétrie circonférentielle permettra de simplifier les équations en annulant toutes les dérivées partielles par rapport à la coordonnée circonférentielle ; c-à-d : $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$.

En utilisant les hypothèses traditionnelles de la lubrification par film mince, les équations gouvernantes prennent la forme suivante :

- **Equation de continuité :**

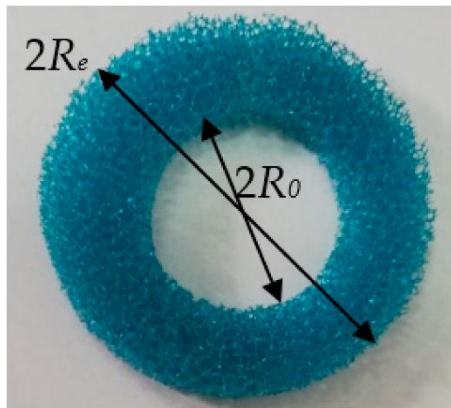
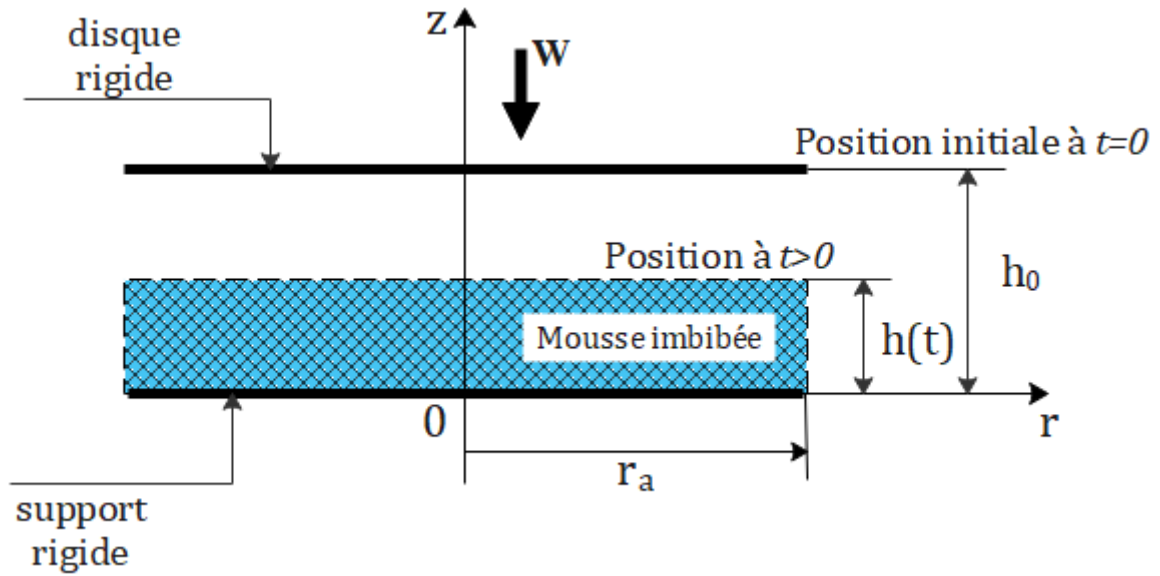
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (IV.11)$$

- **Equation de Darcy-Brinkman :**

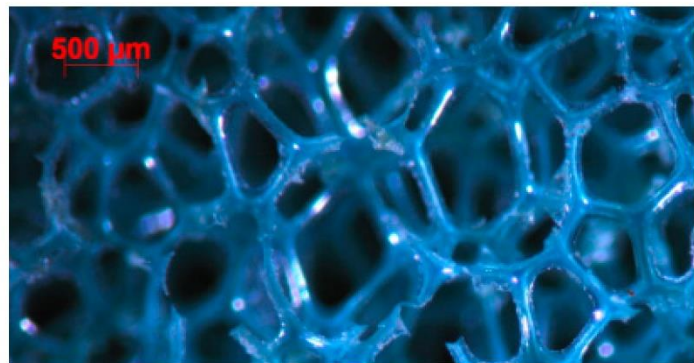
$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{k} v_r + \mu' \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (IV.12)$$

dont les conditions limites associées sont :

$$v_r(z = 0) = v_r(z = h(t)) = 0 \quad (IV.13)$$



(a)



(b)

Fig. IV.2 Ecrasement d'une matrice poreuse imbibée entre 2 disques

Compte-tenu des conditions de non glissement (IV.13), la solution de l'équation (IV.12) est donnée par l'équation (IV.14a)

$$v_r(z) = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left\{ [\cosh(\omega h) - 1] \frac{\sinh(\omega z)}{\sinh(\omega h)} - \cosh(\omega z) + 1 \right\} \quad (\text{IV.14a})$$

La dérivation de l'équation de continuité (IV.11) une fois par rapport à z puis l'intégration de l'équation obtenue deux fois par rapport à z et compte tenu des conditions limites sur v_z ($v_z(h) = \frac{\partial h}{\partial t}$ et $v_z(0) = 0$).

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

Nous dérivons l'expression de la vitesse axiale :

$$v_z(z) = \frac{\frac{dh}{dt}}{(h-2c)} \left\{ [\cosh(\omega z) - 1]C - \frac{\sinh(\omega z)}{\omega} + \frac{Cz}{h} (1 - \cosh(\omega h)) + \frac{z \sinh(\omega h)}{\omega h} \right\} + \frac{z \frac{dh}{dt}}{h} \quad (\text{IV.14b})$$

A partir des équations de vitesse radiale et axiale (IV.14a-b), nous pouvons intégrer les équations de vitesse moyenne suivants :

$$\langle v_r \rangle = -\frac{\frac{dh}{dt} r_a}{2h(h-2c)} \left\{ [\cosh(\omega z) - 1]C - \frac{\sinh(\omega h)}{\omega} + h \right\}$$

$$\langle v_z \rangle = -\frac{\frac{dh}{dt}}{h(h-2c)} \left\{ \left[\frac{\sinh(\omega h)}{\omega} - 1 \right] C - \frac{\cosh(\omega h)}{\omega^2} + \frac{C h}{2} [1 - \cosh(\omega h)] + \frac{h \sinh(\omega h)}{2\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right\} - \frac{\frac{dh}{dt}}{2}$$

- Equation de pression :

En procédant de la même manière qu'en lubrification HD, l'intégration de l'équation de continuité (IV.11) moyennant les conditions limites sur la vitesse axiale ($v_z(h) = \frac{\partial h}{\partial t}$ et $v_z(0) = 0$) conduit à la dérivation d'une équation de pression dont l'inconnue est la pression générée dans le milieu poreux pendant la phase d'écrasement dû au mouvement d'approche ou de descente du disque supérieur.

Le processus de dérivation de l'équation de pression est détaillé ci-dessous :

Tout d'abord, nous intégrons l'équation de continuité à travers la hauteur de la matrice poreuse sachant que $h = h(t)$,

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

soit :

$$\frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) dz + \int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = 0$$

$$\text{avec : } \frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) dz = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h r \cdot v_r dz$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^h v_r dz \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot Q_r)$$

$$\text{tel que : } Q_r = \int_0^h v_r dz = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (h - 2C) \text{ où } C = \frac{\cosh(\omega h) - 1}{\omega \sinh(\omega h)}$$

Soit par conséquent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} (h - 2C) \right] = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.15})$$

Si la viscosité dynamique μ et la perméabilité k sont des constantes, l'équation (IV.15) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial p}{\partial r} (h - 2C) \right] = \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV.16})$$

Les conditions limites associées à l'équation de pression (IV.16) sont :

- Pour $r = 0$, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ (symétrie circonférentielle) (IV.17)

- Pour $r = r_a$, $p = 0$ ou $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_a} = 0$ si le bord du disque poreux est étanche.

- **Cas particulier :**

Si $h = h(t)$, l'équation (IV.16) peut admettre une solution analytique :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{\mu}{k} \frac{dh}{dt} r$$

Après deux intégrations par rapport à r , nous trouvons :

$$p(r, t) = \frac{\mu}{4k} \frac{dh}{dt} r^2 + A(t) \ln(r) + B(t)$$

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

L'utilisation des Conditions limites sur p permettra de déterminer les constantes d'intégration A et B , soit :

- Pour $r = 0$, la pression $p(0, t)$ est finie, la constante A est alors nulle.
- Pour $r = r_a$, la pression doit être nulle (dans le cas où le bord du disque poreux est libre), donc $B = -\frac{\frac{\mu}{k} \frac{dh}{dt}}{4(h-2C)} r_a^2$

Soit par conséquent :

$$p(r, t) = \frac{\frac{\mu}{k} \frac{dh}{dt}}{4(h-2C)} (r^2 - r_a^2) \quad (\text{IV.18})$$

D'après cette équation, nous remarquons que p est positive si la vitesse d'écrasement $\frac{dh}{dt}$ est négative (positive squeeze). L'intégration de la pression sur la surface du disque permettra de calculer la capacité de charge du système ou l'action du fluide sur le disque supérieur :

$$F(t) = \int p \, dS = 2\pi \int_0^{r_a} p(r, t) r \, dr \quad (\text{IV.19})$$

IV.4. Etude comparative

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats obtenus par les codes de calcul élaborés en utilisant les trois approches PHD, PEHD, et XPHD développées dans les chapitres trois et quatre. Ces résultats concernent la position instantanée du disque supérieur, la vitesse instantanée d'écrasement, la pression créée dans le troisième corps, et la vitesse radiale d'écoulement au bord du disque. Les données relatives à cette étude comparatives sont données dans le [tableau IV.1](#).

Tableau IV.1 Données géométriques et conditions de fonctionnement relatives à l'étude comparative

W [N]	r_a [m]	h_0 [m]	t_f [s]	d [m]	μ_0 [Pa.s]	δ [-]
300	4×10^{-2}	4×10^{-1}	100	$4 * 10^{-5}$	0.1	0.8

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

Sur les graphes des figures IV.3 à IV.5, nous comparons les courbes de variation de la position relative du disque mobile supérieur, de la vitesse d'écrasement du troisième corps (film fluide ou mousse imbibée), et des profils de vitesse radiale au bord du disque pour les deux modes de lubrification par compression, à savoir : le mode PHD & PEHD classique, et le nouveau mode XPHD dans lequel le film fluide est substitué par une mousse imbibée. Rappelons que la théorie du nouveau mode de lubrification XPHD est essentiellement basée sur les équations de Darcy-Brinkman au lieu des équations de Navier-Stokes.

Pour les deux modes de lubrification, la perméabilité est calculée à partir de la loi de Kozney-Carman présentée dans le troisième chapitre.

D'après ces figures, il a été constaté ce qui suit :

- La nouvelle théorie XPHD prédit un temps d'écrasement vachement élevé par comparaison aux théories PHD & PEHD classiques. Ce temps est d'autant plus long que la porosité est faible. En effet, la théorie XPHD donne à titre d'exemple, pour une porosité $\varepsilon = 0.8$, un temps d'écrasement de 30 secondes environ pour atteindre une hauteur minimale de 10 microns alors que le temps obtenu par la théorie PHD classique est d'environ 0.1 seconde.
- Le temps de ralentissement du disque supérieur calculé par la nouvelle théorie est largement plus grand que celui déterminé par la théorie de lubrification classique basée sur le couplage des équations de Reynolds et de Darcy.
- Pour une faible porosité, nous remarquons un léger écart entre les vitesses radiales d'écoulement au bord du disque prédites par la théorie XPHD et les deux autres théories PHD & PEHD. En revanche, lorsque la porosité est élevée, les vitesses d'écoulement calculées par les théories XPHD & PEHD sont presque confondues mais elles sont nettement plus faibles que celle prédite par la théorie PHD classique.

Chapitre IV : Lubrification EX-Poro-Hydrodynamique (XPHD)

Comme prévu, les profils de pression déterminés par les différentes théories et présentés sur la [figure IV.6](#) sont identiques puisque le processus d'écrasement s'effectue à charge constante imposée (problème de lubrification inverse). Ces résultats permettent de confirmer la précision des résultats et par conséquent la validité des codes de calcul développés dans le cadre des différentes théories de lubrification présentées précédemment.

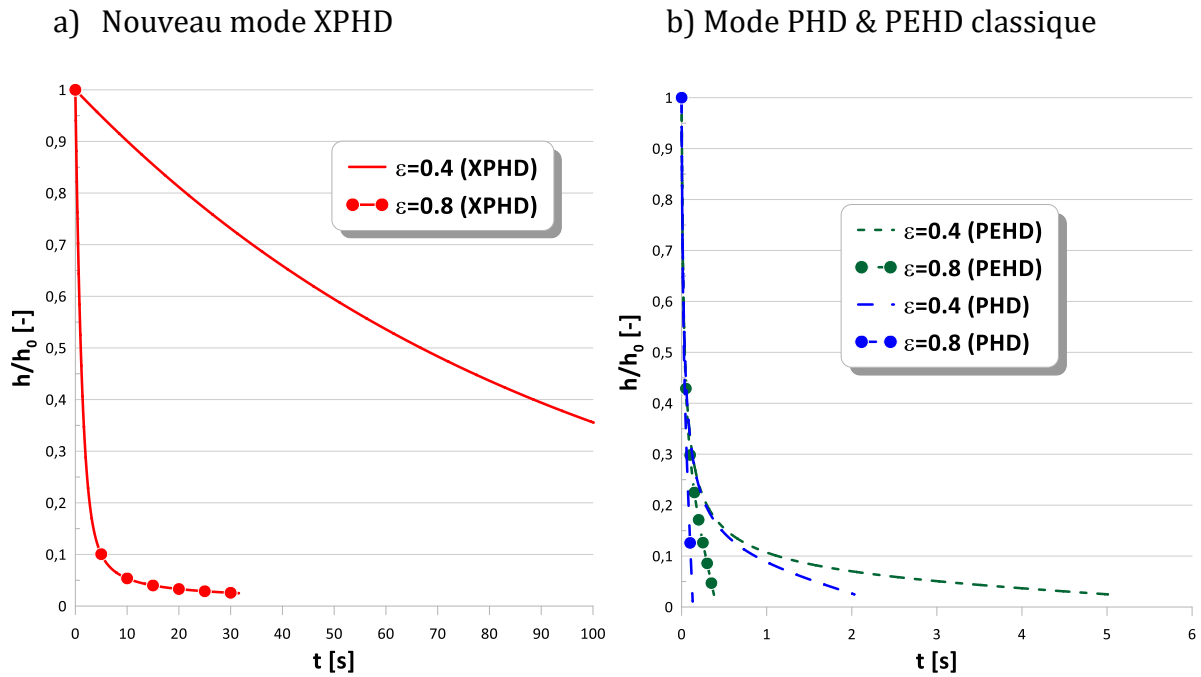


Fig. IV.3 Comparaison des courbes de variation temporelle de la position relative du disque supérieur pour deux valeurs de la porosité

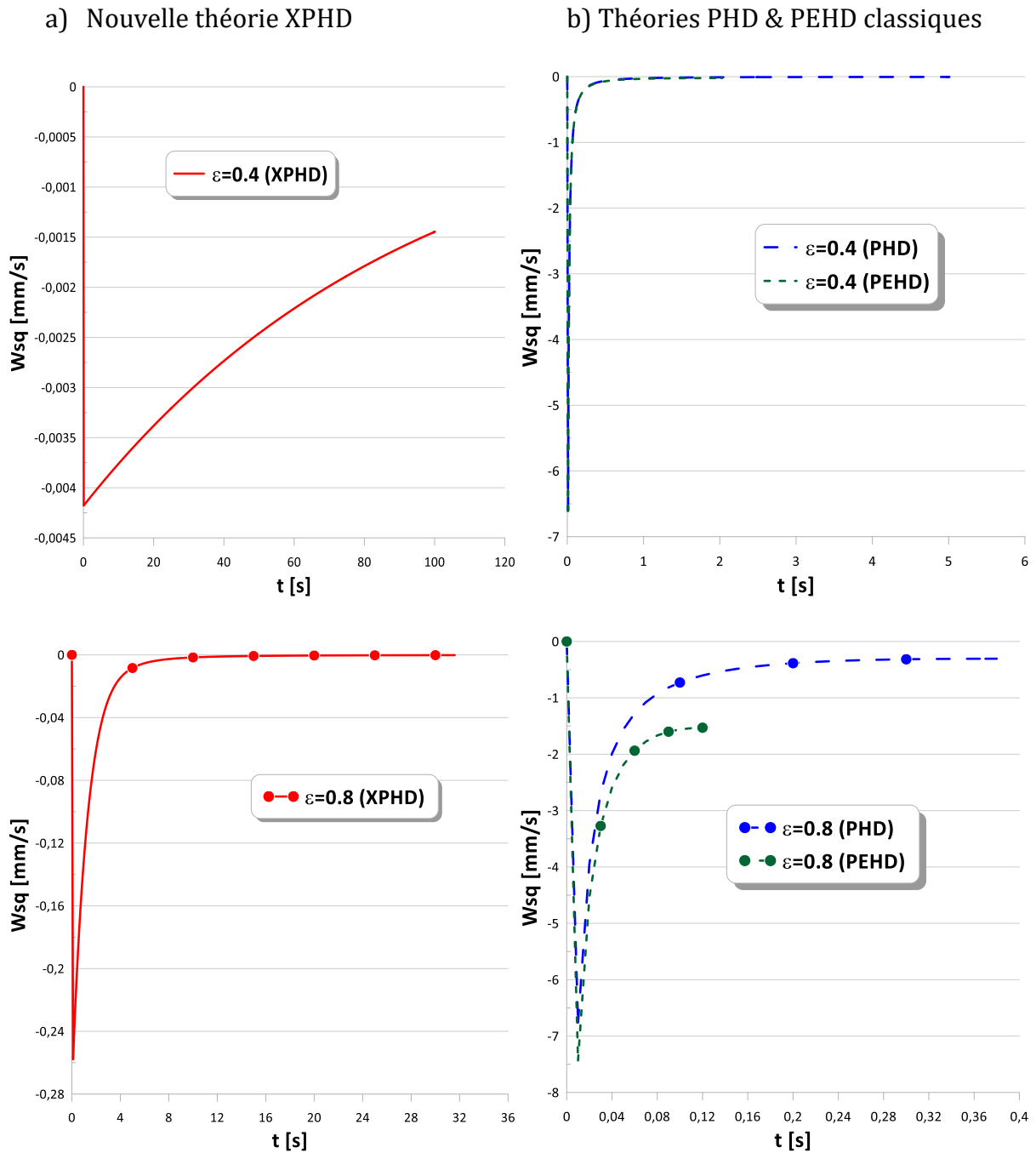


Fig. IV.4 Comparaison des courbes de variation temporelle de la vitesse d'écrasement du disque supérieur pour deux valeurs de la porosité

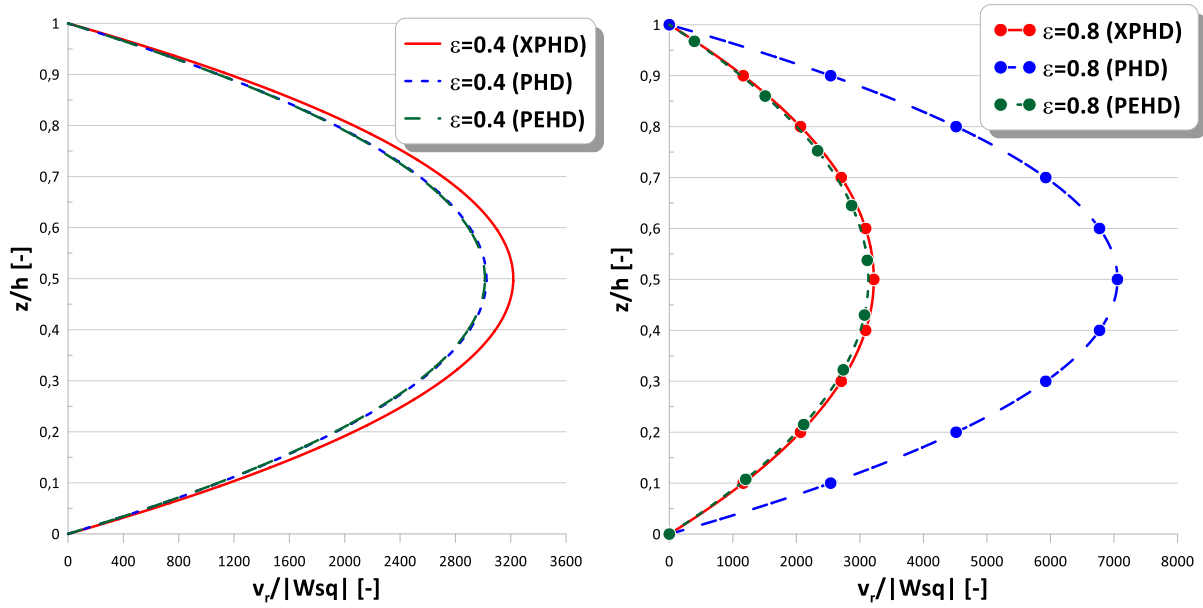


Fig. IV.5 Comparaison des profils de vitesse radiale d'écoulement calculée au bord du disque pour deux valeurs de la porosité.

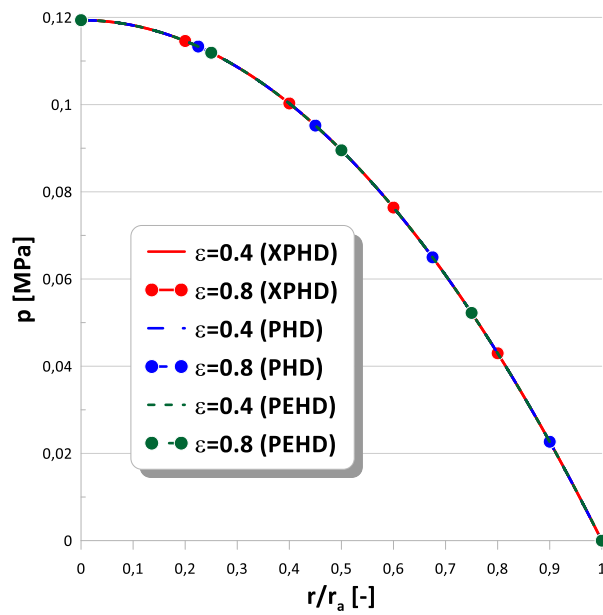


Fig. IV.6 Profils de pression calculés pour une charge constante imposée et deux valeurs de la porosité.

IV.5. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre en détail la théorie de la lubrification Ex-Poro-Hydrodynamique (XPHD) considérée comme un nouveau mécanisme de génération de pression hydrodynamique au sein d'une mousse en polyuréthane imbibée jouant le rôle d'un troisième corps. Le choix de ce matériau est principalement lié à ses performances tribologiques qui sont la résistance au frottement et à l'usure ainsi que sa capacité d'imbibition et de ré-imbibition accrue. D'autre part, la mousse s'imbibe plus facilement avec un fluide dont la viscosité est plus faible.

Les résultats de l'étude comparative effectuée sont d'un intérêt industriel et médical certain. Ces résultats ont permis de confirmer théoriquement la capacité d'une prothèse fonctionnant en mode de lubrification XPHD de supporter une charge donnée (poids) en intercalant entre les deux premiers corps solides une matrice poreuse mince imbibée. Ceci est principalement dû au temps d'écrasement nettement plus long que celui obtenu par le mode classique de lubrification dont le troisième corps est un film fluide.

Conclusion générale & Perspectives

Le travail effectué dans le cadre de ce projet de fin d'études est une contribution à l'étude théorique et numérique de la lubrification d'une prothèse de genou par effet d'écrasement soit d'un film fluide suffisamment visqueux ou d'une matrice poreuse mince imbibée. L'effet d'écrasement d'un film fluide correspond au mode de lubrification traditionnel appelé lubrification PHD ou PEHD décrit par l'équation de Reynolds couplée à l'équation de Darcy tandis que celui de l'écrasement d'une couche poreuse constitue une solution technologique innovante totalement nouvelle qui remplacera certainement un jour le mode de lubrification traditionnel car elle permet de concevoir des prothèses autolubrifiantes. Il s'agit d'un nouveau mode de lubrification désigné par l'acronyme XPHD dont la description théorique est basée sur les équations de Darcy-Brinkman et l'équation de continuité.

A partir de ces équations et moyennant les hypothèses traditionnelles de la lubrification par film mince établies par son fondateur Osborne Reynolds, nous avons pu dériver une équation de base de la lubrification XPHD dont l'inconnue est la pression générée dans la couche poreuse pendant le processus d'écrasement.

Ce travail comprend deux parties distinctes : la première partie concerne la lubrification traditionnelle HD, PHD & PEHD, la seconde est dédiée au nouveau concept de lubrification désigné par l'acronyme XPHD présentée dans le dernier chapitre.

Les codes de calcul élaborés permettent d'effectuer des calculs à vitesse imposée (problème direct) et à charge constante ou sinusoïdale imposée (problème inverse reflétant la réalité de fonctionnement d'une prothèse).

Les résultats obtenus dans la première partie de ce travail pour le cas réel d'une charge imposée ont permis de mettre en évidence les effets positifs des couples de contraintes dus à la présence des particules dans le fluide suspendant, de la concentration, et de la poro-élasticité sur les performances HD telles que la pression, la vitesse d'écrasement, la vitesse d'écoulement, la capacité de charge, le débit de fuite et la puissance dissipée.

Les résultats obtenus dans la seconde partie ont montré que la nouvelle solution technologique est prometteuse surtout sur le plan des performances tribologiques car elle permet d'avoir des temps d'écrasement de la matrice poreuse largement plus longs par comparaison aux prothèses ancienne génération.

Conclusion générale & Perspectives

Les prolongements possibles de cette étude sont :

- Utilisation des théories Poro-Visco-Elasto-Hydrodynamique & Thermo-Poro-Elasto-Hydrodynamique pour étudier de façon rigoureuse le comportement des nouvelles prothèses.
- Utilisation de lubrifiants à rhéologie complexe tels que les fluides visco-élastiques et visco-plastiques : PTT, Fene-P, Bingham, etc .
- Extension de la théorie XPHD par la prise en considération de l'élasticité de la matrice poreuse et de l'aspect non Newtonien du fluide lubrifiant.
- Prise en considération des effets d'inertie dans les parties solide et fluide du contact.
- Prise en considération de l'inclinaison de l'axe du disque supérieur pendant le processus d'écrasement.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Frank H. Netter, MD ; Atlas d'anatomie humaine, 6eme édition ; par Saunders, marque d'éditeur de Elsevier Inc. ; 2014
- [2] Yousfi Mahdia ; Etude Biomécanique de l'Articulation du Genou Humain. Caractérisation Mécanique et Modélisation de l'Écoulement du Fluide Synovial en Ecrasement Lors d'un Cycle de Marche ; Université 20 Août 1955 de Skikda ; 2013
- [3] <https://www.alleviatepainclinic.com/knee-pain/anatomy-of-the-knee/> ; le 09/05/2020
- [4] Ana-Maria TRUNFIO SFARGHIU ; Modèle bio-tribologique des articulations : Rôle mécanique et physicochimique des assemblages moléculaires du fluide synovial ; Université de Iasi, Roumanie ; 2006
- [5] <https://www.mon-arthrose.com/arthrose-du-genou/les-articulations/structure-cartilage/> ; le 09/05/2020
- [6] M. NABHANI ; Contribution à l'Étude du Phénomène de l'Ecrasement de Lubrifiants Non Newtoniens en Présence de Milieux Poroélastiques ; École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique ; 2010
- [7] W.M. Lai, V.C. Mow; Drag induced compression of articular cartilage during a permeation; *Biorheol* ;1980
- [8] Caygill, J.C. and West, G.H.; The rheological behavior of synovial fluid and its possible relation to joint lubrication. *Med Biol Eng.*, 1969
- [9] Magdalena Corneci ; Fonctionnement tribologique des articulations synoviales pathologiques rôle des interfaces phospholipidique ; INSA de Lyon, 2012
- [10] FERRER L.M., DUCHOWICZ R., CARRASCO B. et al.; The Conformation of Serum Albumin in Solution: A Combined Phosphorescence Depolarization Hydrodynamic Modeling Study; *Biophysical Journal*; 2001
- [11] V. Wright and D. Dowson; Lubrication and cartilage, *J. Anat.*; 1976
- [12] Serguei (Siarhei) KUNIK ; Étude numérique et expérimentale du mécanisme de lubrification eX-Poro-HydroDynamique (XPHD) ; École doctorale : Sciences et ingénierie en matériaux, mécanique, énergétique et aéronautique ; 2018
- [13] M. Etchessahar, S. Sahraoui, B. Brouard; Vibrations of poroelastic plates: Mixed displacement-pressure modelisation and experiments; *ACTA Acustica united with Acustica*; 2009
- [14] M. SAKIM Anas ; Contribution à l'étude de la lubrification EHD par fluides non newtoniens des paliers à coussinet poreux ; Université Hassan II de Casablanca ; 2019
- [15] H. Darcy ; Les fontaines publique de la ville de Dijon ; E, Vecteur Dalmont, libraire des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines ; 1856
- [16] H. C. Brinkman; A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles; *Appl. Sci. Res.*, Vol. 1, No. 1; 1947

Bibliographie

- [17] V.K. Stokes; Couple stresses in fluids; Article; Department of mechanical engineering, Indian institute of technology, Kanpur, India; 1966
- [18] V.K. Stokes; Theories of Fluids with Microstructure; Department of Mechanical Engineering Indian Institute of Technology Kanpur, India and Corporate Research and Development General Electric Company Schenectady, New York, USA; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; Softcover reprint of the hardcover 1st edition; 1984
- [19] O. Reynolds; On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments; Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 177 ; 1886
- [20] K. Zarbane ; ÉTUDE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT D'UN FILM LUBRIFIANT SOUMIS A UN CHARGEMENT PÉRIODIQUE ; Sciences de l'ingénieur ; Université de Poitiers ; 2009
- [21] Y. Hori; Hydrodynamic lubrication; Livre; Published by Yokendo Ltd 2002; Springer-Verlag Tokyo 2006
- [22] Mohamed Ez-zini et Sofyane Bouameur ; Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et application ; D'département de Mathématique, Informatique et Gestion Filière Sciences Mathématiques et Informatiques ; 2017
- [23] I.M. Krieger, T.J. Dougherty; A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Sphere; J. Rheol, 137 (1959)
- [24] B. Boussaha et al; Non-Newtonian couple-stress squeeze film behaviour between oscillating anisotropic porous circular discs with sealed boundary; Mechanics & Industry 21; published by EDP Sciences 2020
- [25] N.M. Bujurke, R.B. Kudenatti; Surface roughness effects on squeeze film poroelastic bearings, article; Applied mathematics and computation 174 (2006) 1181-1195
- [26] V. Morgan and A. Cameron; "Mechanismus of lubrication in porous metal bearing"; Proc. Conf. on Lubrication and Wear, Inst. Mech. Eng, London; 1957.
- [27] A. Cameron; Basic lubrication theory, livre; Longman, ISBN-13:978-0582449046; 1971
- [28] Chahid K. Ghaddar; "On the permeability of unidirectional fibrous media: A parallel computational approach"; Computer Aided Process Engineering, Inc., Suite 220, 888 Worcester Street, Wellesley, Massachusetts 02181; AIP Publishing; 1995.

Annexes

Annexe A

Equations de la dynamique

des fluides Newtoniens & visco-élastiques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \text{div} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{avec : } \bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (\text{A.3})$$

1. Fluides Newtonien

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D} = \mu\bar{\gamma} = \mu \left(\bar{\nabla}\vec{v} + (\bar{\nabla}\vec{v})^T \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Soit : } \bar{\sigma} = -p\bar{I} + \mu \left(\bar{\nabla}\vec{v} + (\bar{\nabla}\vec{v})^T \right) \quad (\text{A.5})$$

En substituant l'équation (A.5) dans l'équation (A.2), nous obtenons les équations de Navier-stokes (A.6) :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) - \mu \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (\text{A.6})$$

2. Fluides viscoélastiques : Fluides polymériques

Nous décomposons le tenseur des extra-contraintes $\bar{\tau}$ figurant dans l'équation (A.3) en une contribution Newtonienne du solvant et une contribution due aux polymères :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_s + \bar{\tau}_p \quad (\text{A.7})$$

où : $\bar{\tau}_s = \mu_s \bar{\gamma} = 2\mu_s \bar{D}$, μ_s étant la viscosité du solvant. Le tenseur $\bar{\tau}_p$ est la partie du tenseur des extra-contraintes dues aux polymères.

L'objectif des modèles mathématiques est de trouver une formule donnant le tenseur $\bar{\tau}_p$ en fonction de l'histoire de la déformation du fluide. Cette relation s'appelle une loi de comportement qui peut être sous forme différentielle ou intégrale.

Annexes

La simulation d'un écoulement complet nécessite donc la résolution du système d'EDPs (A.1) et (A.2), avec $\bar{\sigma}$ et $\bar{\tau}$ définis respectivement par (A.3) et d'une relation donnant $\bar{\tau}$. C'est un problème à trois champs inconnus : la vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$, la pression $p(\vec{x}, t)$, et le tenseur des contraintes aux polymères $\bar{\tau}_p(\vec{x}, t)$. Quand l'équation sur $\bar{\tau}_p$ est une équation différentielle ou intégrale, on parle de modèles macroscopiques (ou modèles macro-macro). Quand l'équation de $\bar{\tau}_p$ implique des variables microscopiques dont on modélise l'évolution dans le fluide, on parle de modèles micro-macro.

3. Modèles macroscopiques pour les fluides polymériques

3.1. Modèles différentiels

Le modèle de base pour les fluides viscoélastiques est le modèle de Maxwell [figure A.1](#).

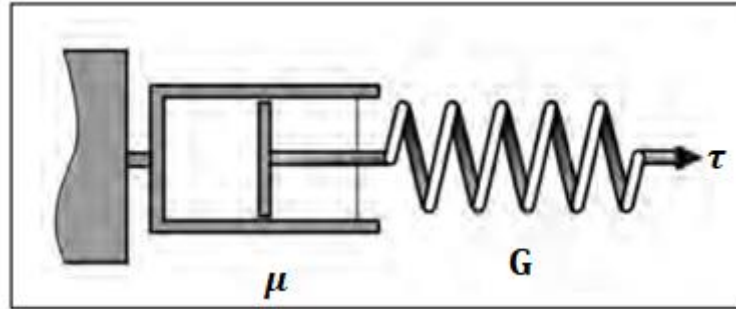


Fig. A.1 Schéma 1-D du modèle de Maxwell

Si nous notons τ la contrainte et $\dot{\gamma}$ la vitesse de déformation, nous obtenons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} \quad (\text{A.8})$$

ou encore :

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} + \tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{A.9})$$

où λ est un temps de relaxation du système.

Pour passer au modèle de Maxwell tensoriel (3-D), on doit remplacer la dérivée temporelle dans (A.9) par une dérivée convective d'un tenseur.

Annexes

Par des arguments d'invariance par : changement de référentiel (nous parlerons aussi de dérivées objectives). Soit :

$$\lambda \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{\tau}_p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \bar{\tau}_p}_{\frac{D\bar{\tau}_p}{Dt}} - \nabla \vec{v} \bar{\tau}_p - \bar{\tau}_p (\nabla \vec{v})^T \right) + \dots$$

$$\dots \bar{\tau}_p = \mu_p \dot{\bar{\gamma}} = 2\mu_p \bar{D} \quad (\text{A.10})$$

où λ est un temps de relaxation, et μ_p une viscosité due aux polymères, nous rappelons que le tenseur total des extra-contraintes $\bar{\tau}_p$ est ensuite conduit à partir de l'équation (A.7). Dans le cas où $\mu_s = 0$, nous parlerons du modèle Upper Convected Maxwell (UCM).

Dans le cas où $\mu_s \neq 0$, nous parlerons du modèle Oldroyd-B ou modèle de Jeffreys.

Il convient de noter que dans l'équation (A.10), le terme générique du tenseur gradient de vitesse est $(\nabla \vec{v})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ et non $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ qui sont largement employée dans les livres de physique anglo-saxons (cf. Bird par exemple).

Il faut également noter que la dérivée convective apparaissant dans (A.10), notée le premier terme de l'équation (terme entre parenthèse).

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\tau}_p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \bar{\tau}_p}_{\frac{D\bar{\tau}_p}{Dt} \text{ dérivée particulière}} - \nabla \vec{v} \bar{\tau}_p - \bar{\tau}_p (\nabla \vec{v})^T$$

S'appelle la Upper-convected derivative ou dérivée sur-convectée. Il existe d'autres dérivées convectives pour les tenseurs qui satisfait l'invariance par changement de référentielle que la, lower-convected derivative ou dérivée sous-convectée $\hat{\bar{\tau}}_p$, la dérivée co-rotationnelle appelée aussi dérivée de Jaumann et qui sont la moyenne des deux dérivées sur et sous-convectées.

Dans ce qui suit, nous emploierons exclusivement la dérivée sur-convectée car c'est elle qui est utilisée dans la plupart des modèles macroscopiques (Modèles de Phan-Thien Tanner (PTT), de Giesekus ou FENE-P).

Annexes

Des modèles macroscopiques permettant d'obtenir des résultats qualitativement plus en accord avec les expériences ont alors été développés de manière générale, ces modèles s'écrivent :

$$\lambda \check{\bar{\tau}}_p + \bar{T}(\bar{\tau}_p, \check{\bar{\gamma}}) = \mu_p \check{\bar{\gamma}} \quad (\text{A.11})$$

où $\bar{T}(\bar{\tau}_p, \check{\bar{\gamma}})$ dépend ... de manière non-linéaire de $\check{\bar{\tau}}_p$. Citons à titre d'exemple, 2 modèles non-linéaires. Parmi les modèles les plus utilisés :

- **Modèle de Giesekus**

$$\lambda \check{\bar{\tau}}_p + \bar{\tau}_p + \alpha \frac{\lambda}{\mu_p} \bar{\tau}_p \bar{\tau}_p = \mu_p \check{\bar{\gamma}} \quad (\text{A.12})$$

où : $\alpha = cte, \check{\bar{\gamma}} = 2\bar{D}$

- **Modèle de PTT**

$$\lambda \check{\bar{\tau}}_p + Z\left(\text{tr}(\bar{\tau}_p)\right) \bar{\tau}_p + \frac{\xi}{\tau} \lambda (\check{\bar{\gamma}} \bar{\tau}_p + \bar{\tau}_p \check{\bar{\gamma}}) = \mu_p \check{\bar{\gamma}} \quad (\text{A.13})$$

Avec deux choix possibles pour la fonction Z

$$Z\left(\text{tr}(\bar{\tau}_p)\right) = \begin{cases} 1 + \varepsilon \lambda \frac{\text{tr}(\bar{\tau}_p)}{\mu_p} \\ e^{\left(\frac{\text{tr}(\bar{\tau}_p)}{\mu_p}\right)} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où : ξ et ε sont des cts.

Si $\xi = 0$, nous obtenons le modèle PTT simplifié SPTT (Simplified PTT).

- **Modèle FENE-P**

$$\lambda \check{\bar{\tau}}_p + Z\left(\text{tr}(\bar{\tau}_p)\right) \bar{\tau}_p - \lambda \left(\bar{\tau}_p + \frac{\mu_p}{\lambda} \bar{I}\right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\nabla\right) \ln\left(Z\left(\text{tr}(\bar{\tau}_p)\right)\right)\right) = \mu_p \check{\bar{\gamma}} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{avec : } Z\left(\text{tr}(\bar{\tau}_p)\right) = 1 + \frac{d}{b} \left(1 + \lambda \frac{\text{tr}(\bar{\tau}_p)}{b \mu_p}\right) \quad (\text{A.16})$$

où : d est la dimension de l'espace et b est une constante.

Annexe B

Éléments de la théorie de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes

Lorsque les forces du volume b_i et les couples de volume ℓ_i par unité de masse du continuum sont considérés figure B.1, le mouvement du fluide à couple de contraintes compressible isotrope et homogène est régi par les équations suivantes :

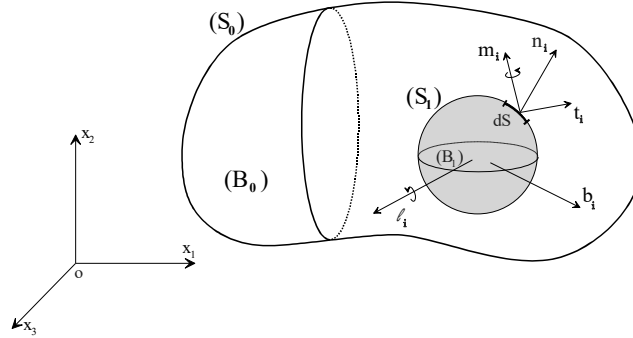


Fig. B.1 : Bilan des forces et des couples agissant sur un volume élémentaire selon la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.

- **Equation de continuité:**

Considérons une partie arbitraire d'un continuum (milieu fluide compressible) occupant un volume fixe (V) délimité par la surface (S) à la configuration actuelle à l'instant t . L'équation de continuité est :

$$\int_S \rho v_i n_i dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (B.1)$$

où ρ est la masse volumique et v_i le champ de vitesse du continuum en coordonnées cartésiennes. En appliquant le théorème de divergence, et en remarquant que le volume (V) est arbitraire, on obtient la forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (B.2)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ présente la dérivé matérielle ou particulière ou encore total et $i,j=1,2,3$

Annexes

- Equations du mouvement :

Les équations de bilan de mouvement linéaire et angulaire sont :

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV \quad (B.3)$$

$$\int_S (\varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} + m_i^{(n)}) dS + \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k + \rho c_i) dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \quad (B.4)$$

Où $t_i^{(n)} = T_{ji} n_j$ et $m_i^{(n)} = M_{ji} n_j$ sont des vecteurs de force et de moment de traction, respectivement. Les forces de surface et les couples sont ensuite représentés par des tenseurs du second ordre non-symétriques T_{ij} et des couples de contraintes M_{ij} , respectivement. ε_{ijk} étant le tenseur de permutation de troisième ordre non symétrique ou le symbole de Levi-Cevita.

En appliquant le théorème de divergence pour les intégrales de surface et en remarquant que le volume V est arbitraire, nous obtenons la forme différentielle des équations des mouvements linéaires et angulaires :

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (B.5)$$

$$M_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} T_{jk} + \rho c_i = 0 \quad (B.6)$$

où $M_{ji} = -8\eta K_{ji} = 8\eta K_{ij} = 4\eta(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$ puisque $K_{ij} = \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} - \omega_{j,i})$ qui est le tenseur de courbure antisymétrique.

Dans les équations suivantes ci-dessus, la virgule indique la différenciation partielle par rapport aux coordonnées spatiales ou eulériennes.

Le vecteur de spin ω_i dual du tenseur de spin non symétrique Ω_{ij} est défini par :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad (B.7)$$

Le bilan d'énergie basé sur la première loi de la thermodynamique polaire du continuum est

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_S m_i^{(n)} \omega_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV + \\ \int_V \rho c_i \omega_i dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho s dV \end{aligned} \quad (B.8)$$

où e est l'énergie interne par unité de masse, q_i est le vecteur du flux de chaleur, et s est la source de chaleur par unite de masse.

Annexes

Cette équation montre que le taux de variation de l'énergie totale du système en volume V est équivalent à la puissance des forces et des couples externes, de la chaleur générée et de la chaleur introduite.

La forme différentielle de l'équation d'énergie est

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ji} D_{ij} + M_{ji} K_{ij} - q_{i,i} + \rho s \quad (\text{B.9})$$

Où $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ est le tenseur des taux de déformation symétrique, et $q_i = -kT_{,i}$ est la relation du Fourier. k et T étant respectivement la conductivité du fluide et la température du fluide.

Les termes $\Phi_1 = T_{ji} D_{ij} = T_{(ji)} D_{ij}$ et $\Phi_2 = M_{ji} K_{ij}$ sont respectivement appelés puissance de force de contraintes et couple de contraintes par unité de volume.

Pour un milieu sans source, l'équation d'énergie (B.9) peut être réécrite comme suit :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Où } \Phi = \lambda D_{kk} D_{pp} + 2\mu D_{ij} D_{ij} + 16\eta K_i K_i \quad (\text{B.11})$$

et $K_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{k,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} K_{kj} = \frac{1}{2} \Omega_{ji,j} = \frac{1}{4} v_{k,ki} - \frac{1}{4} \nabla^2 v_i = \frac{1}{4} v_{k,ki} - \frac{1}{4} v_{i,jj}$ est le vecteur du taux de courbure moyen.

C_p et $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ sont respectivement la chaleur spécifique et la dilatation thermique du fluide à pression.

- **Equation constitutives :**

Nous pouvons démontrer que le tenseur de contraintes total peut être écrit ainsi :

$$T_{ji} = \underbrace{-p\delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}}_{\text{Partie symétrique}} + \underbrace{2\eta \nabla^2 \Omega_{ji}}_{\text{Partie anti-symétrique}} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Où } \Omega_{ji} = -\Omega_{ij} = -v_{[i,j]} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$$

L'équation (B.10) peut également être écrite comme suit:

$$T_{ji} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\eta \nabla^2 \Omega_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) - \eta \nabla^2 (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (\text{B.11})$$

Annexes

- Équations de mouvement :

Lorsque le tenseur des contraintes (B.11) est appliqué aux équations du mouvement linéaire (B.5), on obtient

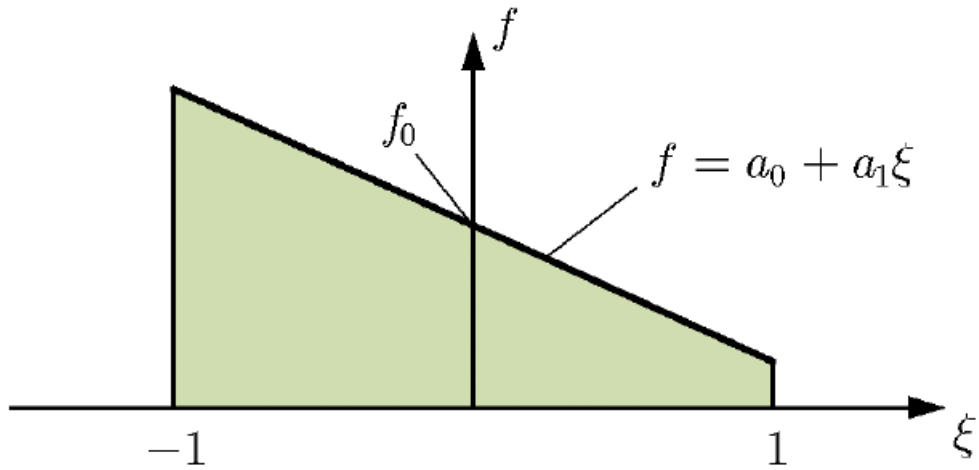
$$-p_{,i} + (\lambda + \mu + \eta \nabla^2) v_{k,ki} + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 v_i + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Paramètres de la quadrature de Gauss-Legendre

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) w_k$$

n	$\pm \xi_k$	w_k
$n = 2$	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n = 3$	0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556
$n = 4$	0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
$n = 5$	0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189
$n = 6$	0.23861 91860 83197 0.66120 93864 66265 0.93246 95142 03152	0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.17132 44923 79170
$n = 7$	0.00000 00000 00000 0.40584 51513 77397 0.74153 11855 99394 0.94910 79123 42759	0.41795 91836 73469 0.38183 00505 05119 0.27970 53914 89277 0.12948 49661 68870
$n = 8$	0.18343 46424 95650 0.52553 24099 16329 0.79666 64774 13627 0.96028 98564 97536	0.36268 37833 78362 0.31370 66458 77887 0.22238 10344 53374 0.10122 85362 90376
$n = 9$	0.00000 00000 00000 0.32425 34234 03809 0.61337 14327 00590 0.83603 11073 26636 0.96816 02395 07626	0.33023 93550 01260 0.31234 70770 40003 0.26061 06964 02935 0.18064 81606 94857 0.08127 43883 61574
$n = 10$	0.14887 43389 81631 0.43339 53941 29247 0.67940 95682 99024 0.86506 33666 88985 0.97390 65285 17172	0.29552 42247 14753 0.26926 67193 09996 0.21908 63625 15982 0.14945 13491 50581 0.06667 13443 08688
$n = 12$	0.12523 34085 11469 0.36783 14989 98180 0.58731 79542 86617 0.76990 26741 94305 0.90411 72563 70475 0.98156 06342 46719	0.24914 70458 13403 0.23349 25365 38355 0.20316 74267 23066 0.16007 83285 43346 0.10693 93259 95318 0.04717 53363 86512
$n = 16$	0.09501 25098 37637 0.28160 35507 79258 0.45801 67776 57227 0.61787 62444 02643 0.75540 44083 55003 0.86563 12023 87831 0.94457 50230 73232 0.98940 09349 91649	0.18945 06104 55068 0.18260 34150 44923 0.16915 65193 95002 0.14959 59888 16576 0.12462 89712 55533 0.09515 85116 82492 0.06225 35239 38647 0.02715 24594 11754



Cas d'un polynôme simple de degré un

n	ξ_k	w_k	$\int_1^3 \frac{\sin^2 x}{x} dx$
1	$\xi_1 = 0$	$w_1 = 2.0000000000$	0.82682181
2	$\xi_1 = -0.5773502692$ $\xi_2 = -\xi_1$	$w_1 = 1.0000000000$ $w_2 = w_1$	0.79856002
3	$\xi_1 = -0.7745966692$ $\xi_2 = 0$ $\xi_3 = -\xi_1$	$w_1 = 0.5555555556$ $w_2 = 0.8888888889$ $w_3 = w_1$	0.79465269
4	$\xi_1 = -0.8611363116$ $\xi_2 = -0.3399810436$ $\xi_3 = -\xi_2$ $\xi_4 = -\xi_1$	$w_1 = 0.3478548451$ $w_2 = 0.6521451549$ $w_3 = w_2$ $w_4 = w_1$	0.79482835
5	$\xi_1 = -0.9061798459$ $\xi_2 = -0.5384693101$ $\xi_3 = 0$ $\xi_4 = -\xi_2$ $\xi_5 = -\xi_1$	$w_1 = 0.2369268851$ $w_2 = 0.4786286705$ $w_3 = 0.5688888889$ $w_4 = w_2$ $w_5 = w_1$	0.79482516
Exact value			0.79482518