

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'étude

Présenté par : MOSBAH Nadjib

Master

Option : Construction Mécanique

*Etude théorique et simulation numérique du
comportement dynamique en flexion d'un rotor
amorti*

Sous la direction de : Dr. REZAIGUIA Abdelouahab

Année universitaire : 2019/2020

SOMMAIRE

Introduction générale	1
CHAPITRE 1 : Recherche Bibliographique	2
1.1 Introduction	3
1.2 Historique de la dynamique des rotors	3
1.3 Amortissement en dynamique des rotors	7
1.4 Instabilité en dynamique des rotors	9
1.5 Méthode des éléments finis en dynamique des rotors	11
1.6 Logiciels d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors	12
CHAPITRE 2 : Etude théorique du comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti	13
2.1 Introduction	14
2.2 Caractéristiques des éléments de rotor	14
2.2.1 Système d'axes et de coordonnées.....	14
2.2.2 Énergie cinétique du disque	15
2.2.3 Énergie cinétique de l'arbre	16
2.2.4 Énergie de déformation de l'arbre	17
2.2.5 Energie cinétique du balourd	19
2.2.6 Travail virtuel des forces du au palier hydrodynamique	20
2.3 Application numérique	21
2.3.1 Données numériques	21
2.3.2 Equations de mouvement	21
2.3.3 Résultats numériques	22
2.3.3.1 Diagramme de Campbell	22
2.3.3.2 Réponse due au balourd	25
2.3.3.3 Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor	26
2.4. Conclusion	27

CHAPITRE 3 : Etude numérique du comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti	28
3.1 Introduction	29
3.2 Modélisation des éléments de rotor par éléments finis	29
3.2.1 Disque	29
3.2.2 Arbre	30
3.2.2.1 Énergie cinétique de l'arbre	31
3.2.2.2 Énergie de déformation de l'arbre	34
3.2.3 Masse de balourd	36
3.2.4 Palier hydrodynamique	37
3.3 Equations du mouvement	38
3.4 Résolution par la méthode pseudo-modale	38
3.5 Application numérique	39
3.5.1 Données numériques	39
3.5.2 Organisation du logiciel ROTORINSA	40
3.5.3 Géométrie et modèle éléments finis du rotor	42
3.5.4 Diagrammes de Campbell	43
3.5.5 Réponses au balourd	45
3.5.6 Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor.....	46
Conclusion générale	48
Références bibliographiques	49
Annexe 1 : Détermination du vecteur rotation du disque	52
Annexe 2 : Détermination de la matrice d'inertie du disque	54
Annexe 3 : Énergie de déformation d'un arbre en flexion	55

Introduction Générale

L'étude de la stabilité des machines tournantes concerne particulièrement les rotors supportés par des paliers hydrodynamiques. Ces paliers sont influencés par des phénomènes internes. Quand la vitesse de rotation augmente, l'amplitude de vibration passe souvent par un maximum à une vitesse bien déterminée appelée vitesse critique. Cette amplitude est généralement excitée par un déséquilibre. En plus, les machines tournantes développent souvent des instabilités qui sont liés à la composition interne des rotors.

Ce mémoire de fin d'étude concerne l'étude théorique suivi par une validation numérique du comportement dynamique en flexion d'un rotor comportant un palier hydrodynamique. L'objectif majeur de cette étude est de voir l'influence de l'amortissement et de la rigidité du palier sur la stabilité du mouvement de flexion du rotor.

Dans le premier chapitre, nous avons fait une recherche bibliographique de plusieurs articles dans ce domaine. Le but est de donner une historique sur la dynamique des rotors, sur les phénomènes de base spécifiques en dynamique des rotors tels que l'effet d'amortissement, la stabilité et l'effet gyroscopique. Nous avons également présenté l'application de la méthode des éléments finis et cité quelques logiciels spécifiques en dynamique des rotors des machines tournantes.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait une étude théorique du comportement dynamique en flexion d'un rotor de Lalanne-Ferraris comportant un palier viscoélastique. La démarche commence par la détermination des caractéristiques des éléments de rotors : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, énergie de déformation de l'arbre et le travail virtuel des forces viscoélastiques du au palier agissants sur l'arbre. Nous avons utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange pour déterminer les équations de mouvement du rotor. Plusieurs résultats numériques sont présentés : diagramme de Campbell, réponse au balourd, effet de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor.

Le troisième chapitre concerne la discrétisation en éléments finis des éléments constitutifs du rotor du chapitre deux (disque, arbre et palier), et de représenter les forces dues aux balourds. Pour cela l'effet gyroscopique doit être pris en considération. Les matrices élémentaires des différents éléments de rotor sont présentées d'une manière explicite en utilisant les équations de Lagrange. La forme générale des équations du mouvement sous forme matricielle ainsi que la méthode de leurs résolutions (pseudo-modale) sont présentées. Nous avons fait une application numérique concernant le même rotor du chapitre 2, en utilisant le logiciel d'éléments finis ROTORINSA. Plusieurs résultats sont présentés, commentés et validés avec la théorie.

En fin, le mémoire est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Recherche Bibliographique

Sommaire

1.1 Introduction	2
1.2 Historique de la dynamique des rotors	3
1.3 Amortissement en dynamique des rotors	7
1.4 Instabilité en dynamique des rotors	9
1.5 Méthode des éléments finis en dynamique des rotors	10
1.6 Logiciels d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors	12

1.1 Introduction

La dynamique des rotors des machines tournantes est une branche de la dynamique des systèmes tournants en particulier des ensembles mécaniques dans lesquels au moins une partie; généralement définie comme rotor; tourne à une vitesse angulaire autour d'une ligne de rotation [1]. Elle a pour but l'étude du comportement dynamique, de la stabilité et la conception des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Les machines tournantes trouvent des applications industrielles et dans la vie courante très diverses : machines-outils, turbines, compresseurs, turbines d'avions, moteurs d'automobiles, propulsion marine, etc.

Dans la dynamique des rotors des machines tournantes, on distingue trois principaux mouvements à savoir : les vibrations de torsion, les vibrations axiales qui sont généralement négligées et les vibrations de flexion dans deux plans latéraux.

Comme la vitesse de rotation peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement (à cause de l'effet gyroscopique dû aux disques, aux arbres et aux caractéristiques des liaisons), les fréquences propres d'une machine tournante peuvent dépendre de la vitesse de rotation. Lorsque cela se produit, le comportement libre du système est généralement résumé par le traçage de l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation (diagramme de Campbell).

Les vitesses critiques sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude du déplacement passe par un maximum. Elles sont particulièrement dangereuses. En l'absence de l'amortissement, une vitesse critique de rotation coïncide exactement avec une fréquence propre du rotor. Les vitesses critiques peuvent être donc déterminées à partir du diagramme de Campbell par les intersections des courbes relatives aux fréquences naturelles avec celles liées aux fréquences de rotation.

Les effets gyroscopiques décomposent les modes propres en un mode à **précession directe (Pr.D)** (la déformée se déplace dans le sens de rotation du rotor), excitable par le balourd, et un mode à **précession inverse (Pr.I)**, excitable par des frottements.

1.2 Historique de la dynamique des rotors

L'histoire de la dynamique des rotors s'étend sur au moins 140 ans. Elle commence avec l'apparition du premier article sur la dynamique des rotors publié en 1869 par **William John Macquorn Rankine** dans le journal 'The Engineer', dont l'intitulé est 'On the centrifugal force on rotating shafts' [2]. Dans cet article, l'auteur tente d'expliquer le comportement des machines tournantes lors du passage de certaine vitesse dite vitesse critique.

La recherche a progressée de manière significative à la fin du 19^{ème} siècle avec des contributions de **Carl Gustaf Patrik De Laval (1845-1913)**, ingénieur suédois qui fit fonctionner une turbine à

vapeur en régime supercritique en **1889** en opérant à une vitesse de rotation d'environ sept fois la vitesse critique [3].

Au Début, la préoccupation majeure pour les chercheurs et les concepteurs des machines tournantes était de prédire les vitesses critiques pour éviter la résonance. **Dunkerley** en **1894** [4], dérive une formule empirique permettant de calculer la plus faible vitesse critique d'un système tournant à plusieurs disques, Il a été le premier qui a utilisé le terme " **Vitesse critique** " pour la vitesse de rotation de résonance.

Le premier papier entièrement consacré à la dynamique des rotors est celui de **Henry Homan Jeffcott** (1877-1965) [5], publié en **1919** dans "Philosophical Magazine", intitulé "**The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a wirling speed : the effect of want of balance**". Il a confirmé l'existence des vitesses supercritiques stables. Il proposa un modèle connu sous le nom de rotor de **Jeffcott** mais aussi sur le continent européen de **De Laval**. Le modèle présenté par Jeffcott est constitué d'un arbre flexible de masse négligeable monté sur appuis simples (rigides) et d'un disque rigide placé en son milieu dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre géométrique (présence d'un balourd) (Fig. 1.1).

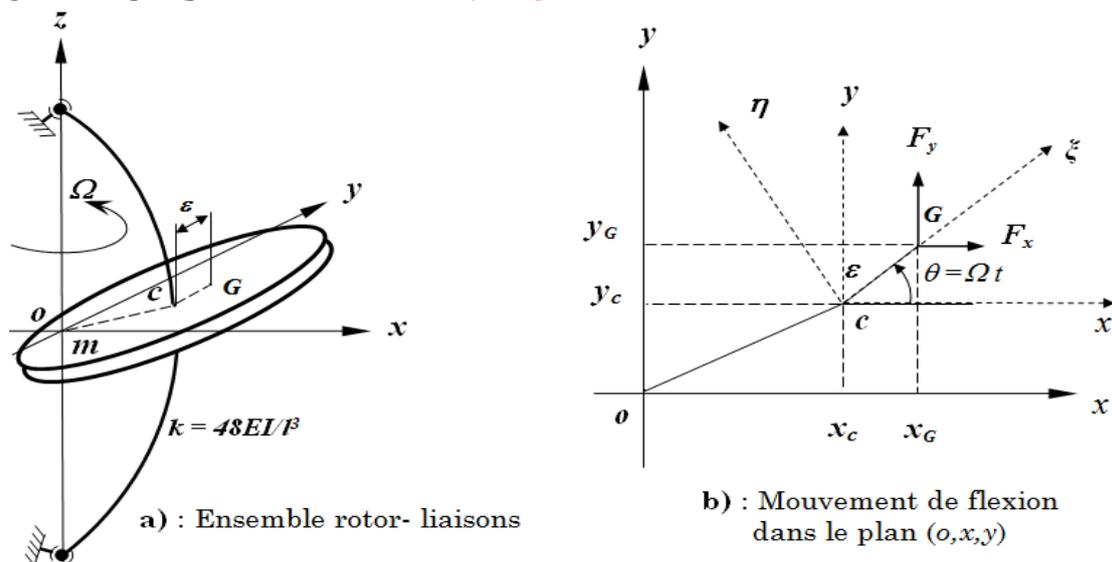


Fig.1.1 : Rotor de Jeffcott ou de De Laval [5]

Le modèle à deux degrés de liberté de Jeffcott (déplacements du centre du disque c), a été largement étendu par la suite pour prendre en compte l'amortissement interne, les paliers flexibles et l'effet gyroscopique. Ce type de modèle peut être représentatif pour des rotors courts, qui sont plus rigides, comme par exemple un banc d'essai en laboratoire pour exprimer clairement les phénomènes de bases, mais ne convient pas pour décrire le comportement vibratoire des turbines modernes, qui sont des structures élancées [6].

Après la deuxième guerre mondiale, le centre de recherche de l'Europe a été déplacé vers les États-Unis où la portée de la dynamique des rotors a été élargie pour tenir compte de divers autres phénomènes. **Campbell** en **1924** [7], a publié un article dans le journal "ASME" intitulé "**The**

protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration", où il détailla les vibrations des turbines à vapeur. Leur diagramme représentant la vitesse critique par rapport aux points de croisement des courbes de fréquences naturelles et les lignes droites proportionnelles à la vitesse de rotation est maintenant largement utilisées et appelé le **diagramme de Campbell (Fig.1.2) [8]**.

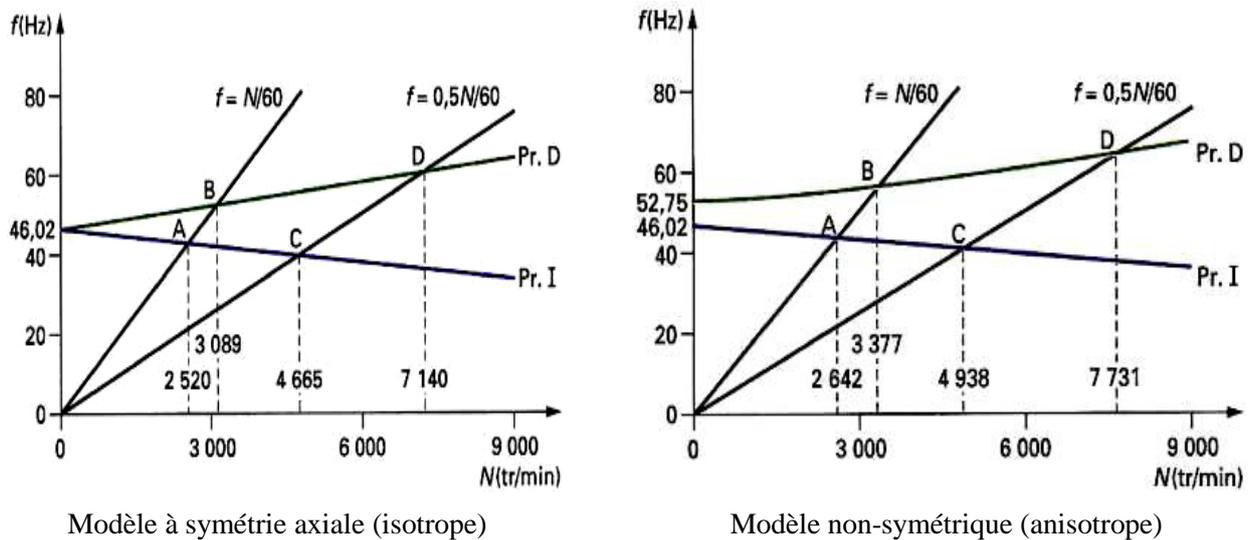


Fig.1.2 : Exemple de diagramme de Campbell d'un rotor flexible [8].

Comme la vitesse de rotation peut augmenter au dessus de la première vitesse critique, l'apparition des vibrations **auto-excitées** est devenue un problème grave. Dans certaines circonstances et sur un fonctionnement très particulier, il a été observé sur le comportement dynamique des machines tournantes le phénomène de "**oil whip**" chez les Anglo-saxons et le "**fouet d'huile**" chez les Français. **Newkirk [9]** et **Kimball [10]**, ont publiés deux articles intitulés "**Shaft Whipping**" et "**Internal friction theory of shaft whirling**" respectivement dans la revue "General Electric". Ils ont montré que le frottement interne des matériaux pourrait provoquer un mouvement **instable**. Ces phénomènes ; "**oil whip**" et "**oil whirl**", dans lequel le frottement qui amortit les vibrations provoque habituellement une vibration d'**auto-excitation**, ont attiré l'attention de nombreux chercheurs. En Aout 1925, **Newkirk** et **Taylor [11]**, publient dans cette même revue un article intitulé "**Shaft whipping due to oil action in journal bearings**". Ils ont étudié une vibration instable appelée "**fouet d'huile**", due à un film d'huile dans les paliers. **Hummel [12]** et **Newkirk [13]**, ont confirmés à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant provoqué par les paliers à film d'huile. Ils ont observé par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé; l'arbre est animé d'un mouvement de précession avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation "**half frequency whirl**", alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes), le système redevient stable.

En 1926, **Newkirk [14]** a observé un tourbillon en précession directe induite par un point chaud sur la surface du rotor, qui a été générée par le contact du rotor et du stator. Cette instabilité du point chaud "hot spot" est appelé l'**effet de Newkirk (Fig.1.3)**.

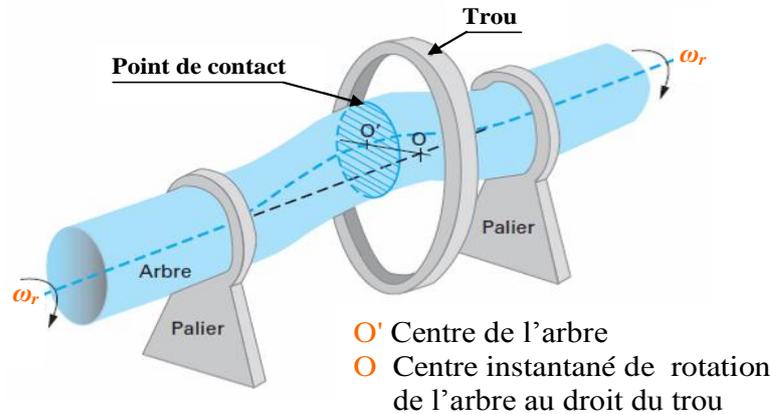


Fig.1.3 Phénomènes de frottement-échauffement : effet de Newkirk [15].

Au milieu du 20^{ème} siècle, **Hori en 1959 [16]**, a réussi à expliquer les différentes caractéristiques fondamentales du **fouet d'huile**. Il a étudié la **stabilité** des mouvements de l'arbre en tenant en compte des forces de pression dues aux films d'huile. À peu près au même moment, d'autres types de vibrations induites ont attiré l'attention de nombreux chercheurs.

Traditionnellement, le nom "**tourbillon / fouet d'huile**" a été associée aux problèmes d'instabilité des paliers lubrifiés à huile qui historiquement, ont d'abord été reconnus et analysés. Au cours des dernières décennies, d'autres formes d'instabilités liées aux rotors à fluide ont été identifiées et signalés [17]. C'est pourquoi le mot "**huile**" a été supprimé et remplacé par le mot générique "**fluide**", ce qui implique que non seulement l'huile comme un lubrifiant, a été responsable de l'instabilité du rotor. D'autres noms ont également été associés à des vibrations latérales asynchrones du rotor tel que le "**tourbillon**". Ces derniers temps, ce nom est devenu populaire pour les paliers à fluide (**Ambrosch et al. [18]**, **Miller [19]**, **Kirk et al. [20]**, **Wyssmann [21]**, **Brown et al. [22]**, **Muszynska et al. [23]**, **Bentley et al. [24]**). Comme les phénomènes rapportés ci-dessous, sont cependant très similaires à un tourbillon et/ou à un fouet de fluide, les modèles mathématiques sont similaires. Il semble donc plus logique de choisir un nom commun. C'est pourquoi les vibrations **auto-excitées** ; décrites ci-dessus ; sont appelés "**tourbillon de fluide**" et ou "**fouet de fluide**".

Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de **recherche** très actif. Plusieurs chercheurs travail non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire des rotors à vitesses variables et dans le **control actif** des machines tournantes (**Fig.1.4**). Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le nombre de documents publiés dans des revues scientifiques spécifiques et des livres augmente d'une manière importante.

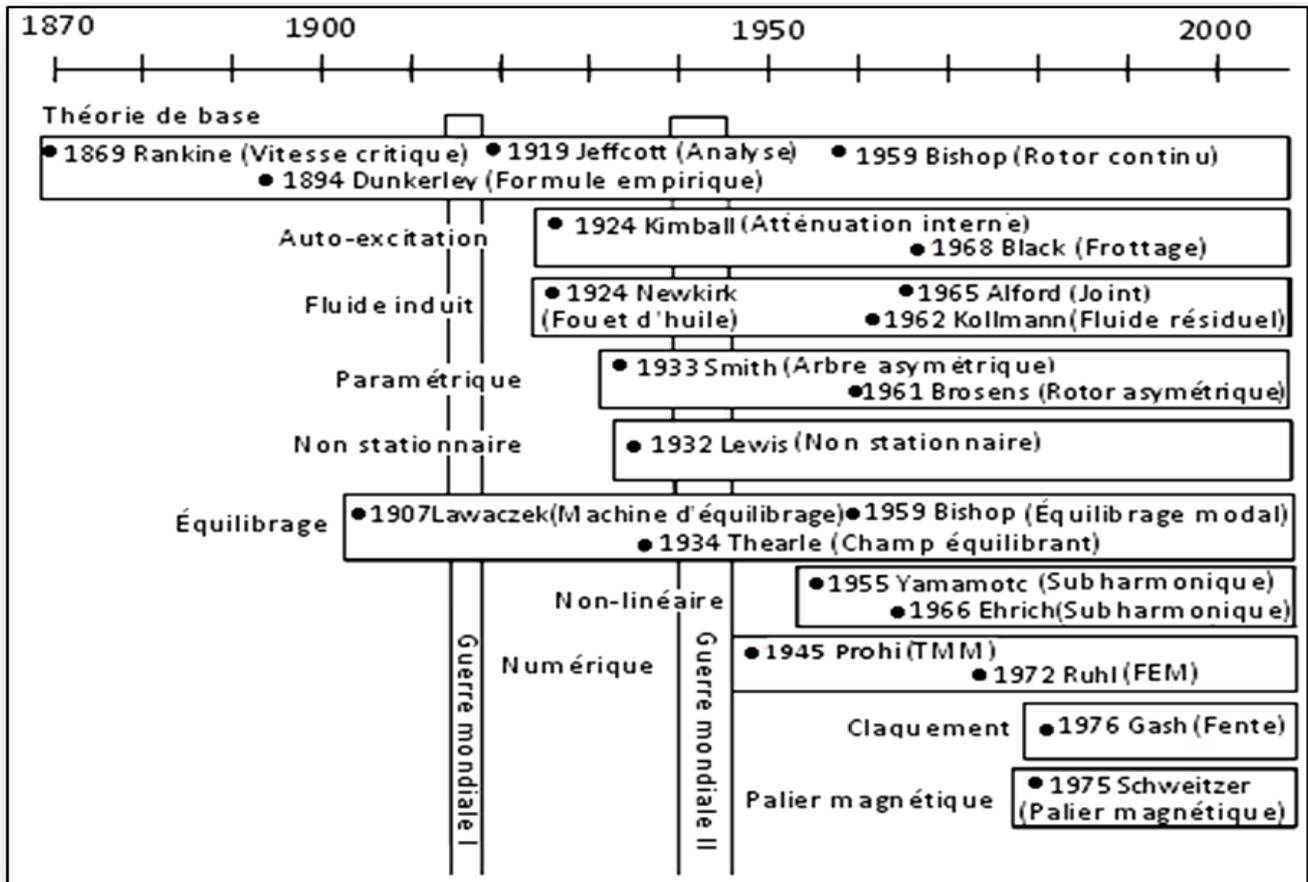


Fig.1.4 : Historique de la dynamique des rotors [25].

1.3. Amortissement en dynamique des rotors

L'amortissement représente la capacité d'un système à limiter l'amplitude de réponse à des excitations proches des fréquences propres. Un amortissement négatif entraîne des contacts rotor-stator par instabilité vibratoire et est donc à proscrire. Un amortissement positif faible réduira la fiabilité de l'installation. L'obtention d'amortissements importants est l'une des principales difficultés de la dynamique des rotors de turbomachines.

Dans le cas des vibrations libres, l'amortissement réduit à zéro l'amplitude des vibrations. Cette réduction est habituellement progressive. Si l'amortissement est suffisamment élevé, les vibrations libres cesseront même avant que le premier cycle ne soit complété. Dans les cas extrêmes, l'objet ne retournera même pas à sa position d'équilibre initiale après avoir été déplacé.

Dans le cas des vibrations forcées, l'amortissement a pour effet d'absorber l'énergie mécanique produite par la force d'excitation exercée sur l'objet. L'amplitude des vibrations se stabilise à une valeur à laquelle l'énergie produite est égale à l'énergie absorbée.

En conséquence, plus l'amortissement est élevé, plus faible est l'amplitude. L'amortissement est principalement causé par :

- le frottement interne dans le matériau constitutif de l'objet vibrant (amortissement tournant);
- le frottement entre les surfaces de l'objet vibrant et un autre objet (amortissement non tournant);
- le frottement entre la surface de l'objet et le liquide avec lequel elle est en contact (amortissement par un liquide).

Dans la dynamique des machines tournantes, l'amortissement interne (tournant) représente une source potentielle des vibrations auto-excitées (instabilité des systèmes tournants). Cet amortissement donne naissance à des forces tangentielles, nommées forces circulatoires, dans la direction de la précession et dans le sens opposé à la force d'amortissement externe. Lorsque ces forces, proportionnelles au déplacement et à la vitesse de rotation, deviennent supérieures aux forces externes d'amortissement, une instabilité se déclenche. Afin d'expliquer les aspects phénoménologiques liés à cet amortissement, on considère le rotor de **Jeffcott** de la **figure 1.5**, de masse m qui tourne sans effet gyroscopique à une vitesse constante Ω , possédant un amortissement tournant c_r , supporté par deux liaisons viscoélastiques identiques de raideur équivalente k_n et d'amortissement équivalent non tournant (externe) c_n . Il a été démontré que la vitesse seuil d'instabilité Ω_{seuil} à partir de laquelle l'instabilité démarre est [26]:

$$\Omega_{seuil} = \Omega_{cr} \left(1 + \frac{c_n}{c_r} \right)$$

Où Ω_{cr} est la vitesse critique de rotation du système considéré. L'expression précédente montre que l'instabilité apparaît à des vitesses supérieures à la vitesse critique et que l'ajout d'amortissement externe augmente Ω_{seuil} .

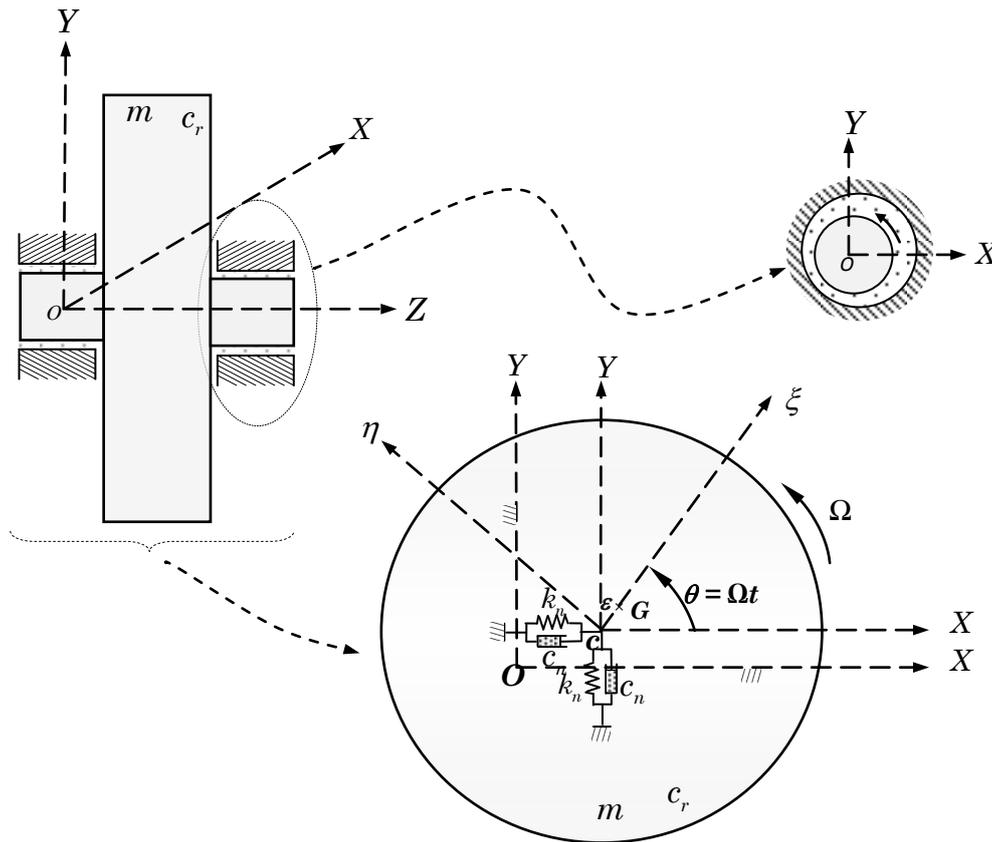


Fig.1.5. Rotor de Jeffcott très court amorti supporté par des liaisons viscoélastiques.

1.4 Instabilité en dynamique des rotors

Les termes ‘oil whip’, ‘oil whirl’, et ‘vibrations auto-excitées’ définissent tous l’instabilité. Selon Muszynska [17], une machine tournante est stable si son rotor effectue un mouvement de rotation pur autour d’un axe à une vitesse de rotation et ce mouvement n’est pas accompagnée par d’autres modes de vibrations du rotor, de ses éléments ou d’autres parties fixes de la machine, leurs amplitudes de vibration ne dépassent pas des valeurs acceptables admis. La machine stable en rotation est à l’abri de forces perturbatrices externes. C’est-à-dire, toute perturbation aléatoire ne peut pas changer radicalement son comportement. Selon Roland [27] : un ensemble rotor-liaisons, soumis à une action qui crée une perturbation peut, après sa suppression, revenir ou non à son état initial ; il peut y revenir avec ou sans oscillation : on dit alors qu’il est stable ; il peut s’écarter de son état initial en oscillant ou sans osciller : on dit qu’il est instable. Ces définitions de l’instabilité sont générales. Lalanne et Ferraris [8], donnent une définition plus précise : Lorsque le rotor n’est pas soumis à des forces extérieures et est en mouvement libre sous l’action de conditions initiales, son mouvement peut croître indéfiniment avec le temps : le rotor est instable.

Il existe plusieurs critères de stabilité à savoir, le critère de **Nyquist**, le critère de **Lyapunov** et le critère de **Routh-Hurwitz**. Ce dernier est très bien adapté aux systèmes à faible nombre de degrés de liberté. Il s’applique au Polynôme caractéristique à coefficients réels ou complexes [28]. Les fréquences du système sont les racines de l’équation caractéristique à coefficients réels ($m = 2n$) :

$$P_m(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

La matrice [H] suivante est construite :

$$[H] = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2m-5} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

Où les sous déterminants suivants sont définis :

$$h_1 = a_1 \quad h_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad h_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad \dots \quad h_m = |H|$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est que tous les coefficients a_0, \dots, a_m doivent être positifs et aussi tous les sous déterminants h_1, \dots, h_m doivent être positifs.

Le critère de Routh-Hurwitz peut également être appliqué à un polynôme caractéristique à coefficients complexes :

$$P_m(s) = (a_0 + ib_0)s^m + (a_1 + ib_1)s^{m-1} + \dots + (a_{m-1} + ib_{m-1})s + (a_m + ib_m) = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

La solution devient stable lorsque toutes les racines s ont des coefficients positifs de leurs parties imaginaires. La condition nécessaire et suffisante est :

$$m=1 \quad (-1)^1 \Delta_2 = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad m=2 \quad (-1)^2 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$$

⋮

$$m=m \quad (-1)^m \Delta_{2m} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix} > 0$$

1.5 Méthode des éléments finis et dynamique des rotors

L'apparition de la méthode des éléments finis a également et profondément influencée le domaine de la dynamique des rotors. Au départ, les codes de calcul des éléments finis ne peuvent pas être utilisés pour la dynamique des rotors à cause de manque de considération des effets gyroscopiques. Par la suite, la matrice gyroscopique est prise en compte dans la formulation éléments finis. Dans la dynamique des rotors, la méthode des éléments finis est plus souvent appliquée pour la discrétisation spatiale des éléments d'un système, telle que discutée par Dokainish [29], Ruhl et al. [30], Nelson et al. [31], Meirovitch [32], Ohga et al. [33], Degen et al. [34], Subbiah et al. [35], et d'autres. Pour un modèle général du système rotor/palier, la MEF est nécessaire pour faire face aux problèmes de fréquences propres complexes et à la dépendance de la vitesse de rotation, ainsi que l'augmentation du nombre d'opérations de calculs nécessaires pour la solution. Si le nombre de degrés de liberté du système est grand, ce qui est généralement le cas, l'analyse consiste à la répétition de la résolution d'un problème de fréquences propres de grande taille pour différentes vitesses de rotation du rotor.

Il existe plusieurs techniques pour réduire la taille du modèle éléments finis, tout en conservant les fréquences et les déformés modales fondamentales du modèle d'origine. Certaines méthodes, telles que la méthode de réduction dynamique généralisée (Schaeffer, [36]), la méthode de Lanczos (Nour-Omid et al, [37]), et la méthode du vecteur de Ritz (Wilson et al, [38]; Arnold et al, [39]), de réduire le nombre de variables modales et directement résoudre le problème aux valeurs et vecteurs propres. La méthode la plus populaire, qui constitue la base pour d'autres méthodes, est celle de réduction du Guyan [40], comme expliquée par exemple par Kidder [41], Rouch et al. [42], Downs [43], Shah et al. [44], Subbiah et al. [45], Kane et al. [46] et Ratan et al. [47]. Les degrés de liberté retenus dans l'algorithme de Guyan sont spécifiquement choisis et le système d'origine est réduit à la taille des degrés de liberté retenus. En plus, le développement des méthodes de réduction a apporté plusieurs améliorations dans les algorithmes de calcul ainsi qu'une plus grande précision dans la représentation des modes, possibilité de manipuler des matrices non symétriques (comme discuté par Kidder [41] et Shah et al. [44]), la présentation de la matrice de masse et la matrice de rigidité réduites et la réduction des matrices d'espace d'état en balayant les modes indésirables (Kane et al. [46], Fuh et al. [48]).

La Méthode des Matrices de Transfert (MMT), souvent combiné avec la méthode des éléments finis, traite des matrices de plus petite taille que celle dans la méthode des éléments finis. La MMT est utilisée à la fois dans les domaines d'analyse fréquentielle et temporelle (Dokainish, [29]; Ohga et al, [33]; Degen et al, [34]; Lund et al, [49]; Mucino et al, [50].

1.6 Logiciel d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors

Il existe plusieurs logiciels d'éléments finis très sophistiqués en dynamiques des rotors en flexion et/ou en torsion. On citera par exemple, cinq codes basés sur une modélisation en poutres de Timoshenko avec des disques rigides [51]:

- **CADYAC** : développé par la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France ;
- **ROTORINSA** : développé par le Laboratoire de Mécanique de Contact et de Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon ;
- **MADYN** : développé par l'Université Technique de Darmstadt dans l'environnement MATLAB, incluant des modules de caractérisation des paliers hydrodynamiques, des étanchéités et un module de paliers magnétiques actifs ;
- **XLTRC** : développé par le laboratoire des Turbomachines du TAMU (Université Texas), qui est un ensemble complet incluant la caractérisation dynamique des paliers hydrodynamiques et des étanchéités gaz à labyrinthes ou nids d'abeilles.
- **TORSION** : développé par le Laboratoire de Mécanique de Contact et de Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon.

Chapitre 2

Etude théorique du comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti

Sommaire

2.1 Introduction	14
2.2 Caractéristiques des éléments de rotor	14
2.3 Application numérique	21
2.4. Conclusion	27

2.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre, la stabilité d'un modèle de rotor de Lalanne-Ferraris à travers l'équation aux fréquences propres. Après formulation des expressions générales des caractéristiques des différents éléments du rotor étudié, le développement des équations du mouvement est nécessaire pour prévoir leur comportement dynamique et leur stabilité. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée comme méthode de résolution pour offrir un modèle permettant de mettre en évidence et de traiter des phénomènes basic de ce système. L'application des équations de Lagrange conduit a l'obtention des équations du mouvement. Une application numérique est également présentée.

2.2 Caractéristiques des éléments de rotor

Le modèle mathématique que l'on s'est proposé d'étudier dans ce mémoire de fin d'études est celui de Lalanne et Ferraris [8]. Il est constitué d'un arbre flexible de longueur L de section circulaire constante S , d'un disque rigide balourdé de masse M_D situé à $y = L_1$, d'un palier hydrodynamique situé à $y = L_2$ et de deux paliers rigides (Fig.2.1). Le rotor tourne à une vitesse de rotation constante Ω . Un seul degré de liberté est utilisé pour chaque déplacement dans les directions X et Z qui sont respectivement $u(y,t)$ et $w(y,t)$. Chaque point sur l'arbre procède deux degrés de liberté.

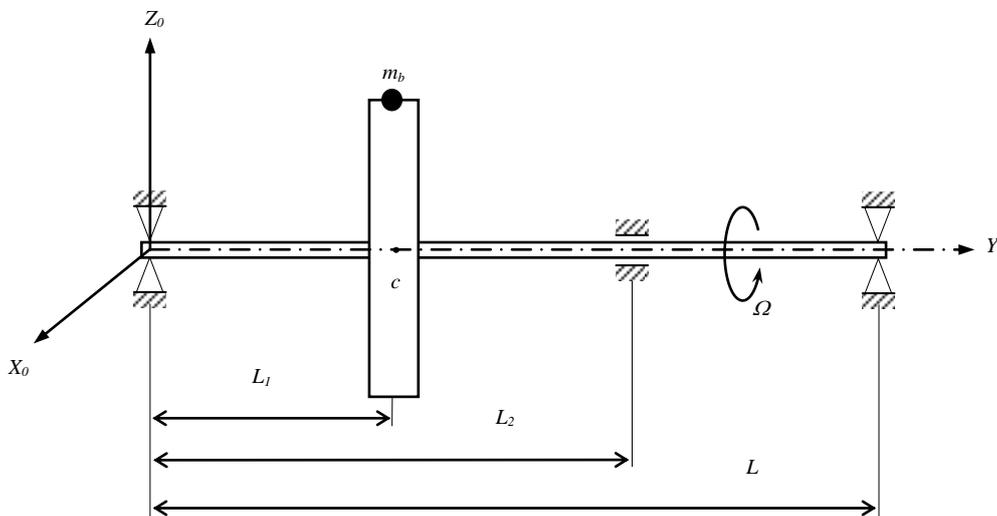


Fig. 2.1 : Modèle mathématique du rotor étudié [8].

2.2.1 Système d'axes et de coordonnées

Les différents repères utilisés dans l'étude de la cinématique et la dynamique du rotor sont présentés sur la Figure 2.2. $R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$ est un repère fixe lié au bâti de la machine, $R(C, X, Y, Z)$ est un repère finale lié au disque tournant. L'axe (C, Y) perpendiculaire au disque, coïncide avec l'axe de rotation du disque à l'état déformée de l'arbre. Le système de coordonnées (x, y, z) est

relié au système de coordonnées (x_0, y_0, z_0) par l'intermédiaire des angles ψ, θ et ϕ . Les deux premiers angles caractérisent le mouvement de voilement du disque et de l'arbre (**effet gyroscopique**). Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe (C, Z_0) puis d'un angle θ autour du nouvel axe (C, X_1) , enfin d'un angle ϕ autour de l'axe de rotation propre du disque (C, Y) .

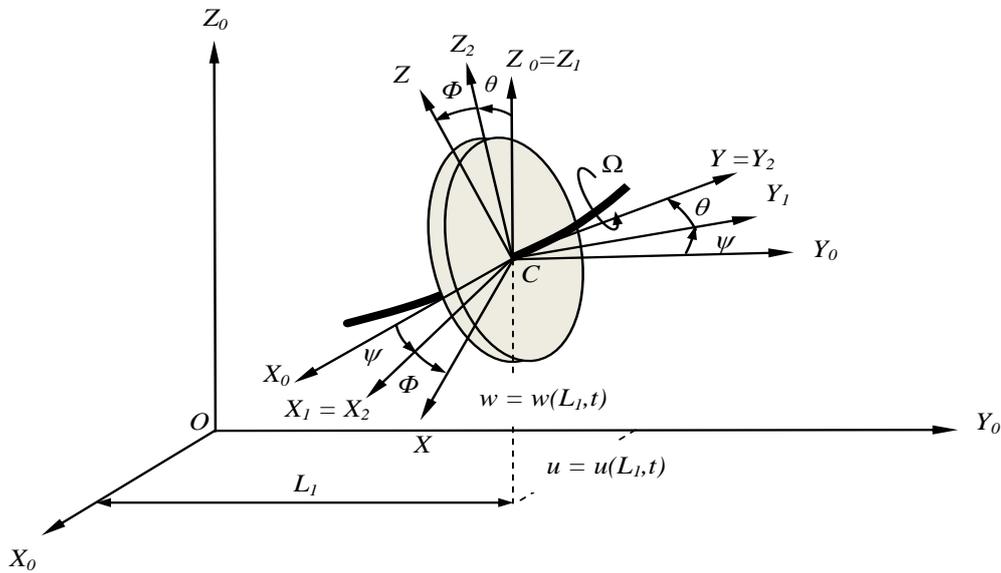


Fig. 2.2 : Différents repères liés au disque rigide et à l'arbre flexible.

Le vecteur de l'orientation instantané du disque $\vec{\omega}(R/R_0)$ s'exprime par (**voir annexe 1**) :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (2.1)$$

Comme (C, X) , (C, Y) et (C, Z) sont des directions principales d'inertie, le tenseur d'inertie du disque a comme expression (**voir annexe 2**):

$$[I_C(D)] = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (2.2)$$

2.2.2 Énergie cinétique du disque

L'énergie cinétique du disque est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation du centre de masse C :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\vec{V}(C/R_0))^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}_R^T [I_C(D)] \{\omega\}_R \quad (2.3)$$

Avec $\vec{V}(C/R_0)$ est le vecteur vitesse absolue de C , exprimé dans R_0 , obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position $O\vec{C}$ avec $\dot{\phi} = \Omega$ constante :

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{d\vec{OC}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt}(u \vec{x}_0 + L_1 \vec{y}_0 + w \vec{z}_0) = \dot{u} \vec{x}_0 + \dot{w} \vec{z}_0 \quad (2.4)$$

Remplaçons (2.1), (2.2) et (2.4) dans (2.3), l'expression de l'énergie cinétique du disque devient alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (2.5)$$

L'expression (2.5) peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{Dx} = I_{Dz}$), les angles θ et ψ sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire $\dot{\phi} = \Omega$ est constante. L'expression (2.5) devient alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (2.6)$$

L'expression (2.6) peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{Dx} = I_{Dz}$), les angles θ et ψ sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire $\dot{\phi} = \Omega$ est constante. L'expression (2.6) devient alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (2.7)$$

Le terme $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'**effet gyroscopique**.

2.2.3 Énergie cinétique de l'arbre

L'arbre est représenté par une **poutre continue** de section circulaire constante, caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en intégrant sur la longueur de l'arbre. Sur la **Figure 2.3**, on présente un élément d'arbre considéré comme un disque élémentaire. L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T_a &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} m_a (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{ax} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{ay} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.8) \end{aligned}$$

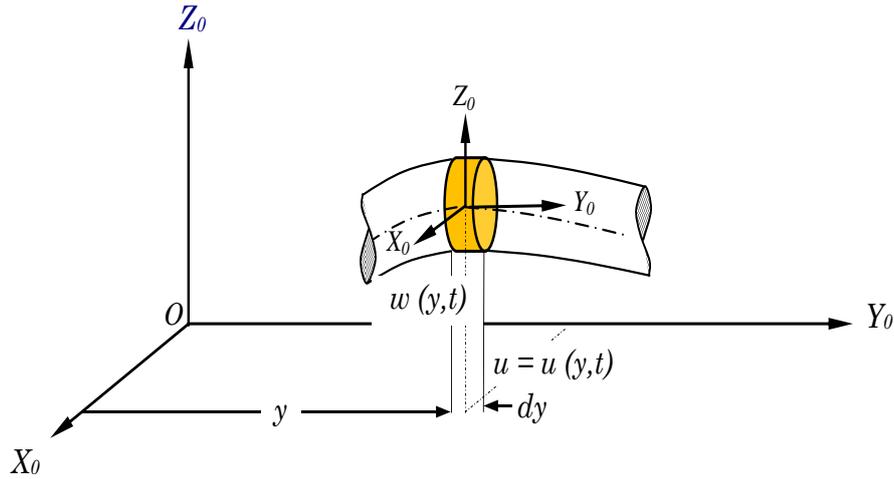


Fig. 2.3 : Élément d'arbre en flexion

Où ρ est la masse volumique de l'arbre, m_a est la masse par unité de longueur de l'arbre, S est l'aire de la section droite de l'arbre et $I = \frac{\pi R_1^4}{4}$ est le moment d'inertie diamétral ($I_{ax} = \rho I dy$; $I_{ay} = 2\rho I dy$), R_1 est le rayon de l'arbre.

- La première intégrale de (2.8) est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- La seconde intégrale de (2.8) correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation.
- Le terme $\rho I L \Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement.
- La dernière intégrale de (2.8) représente l'**effet gyroscopique**.

2.2.4 Énergie de déformation de l'arbre

Le point O_1 de la **Figure 2.4** est le centre géométrique d'une section de la poutre à l'état déformée, $B(x,z)$ est un point de cette section droite, u^* et w^* sont les déplacements du centre O_1 par rapport aux axes (O, X) et (O, Z) . La déformation longitudinale du point B s'écrit (**Annexe 3**) :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression (**voir Annexe 3**) :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV \quad (2.10)$$

Avec V est le volume de la poutre, σ_{yy} est la contrainte longitudinale. La relation entre la contrainte et la déformation est (**voir Annexe 3**) :

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (2.11)$$

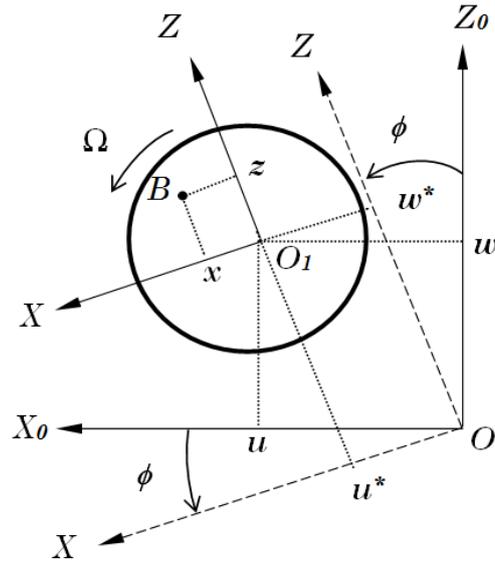


Fig. 2.4 : Section droite de l'arbre, mouvement dans le plan (O, X_0, Z_0)

Compte tenu de (2.11), l'expression (2.10) devient :

$$U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV \quad (2.12)$$

En tenant compte de l'expression (2.9), l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (2.13) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à (O, X) et à (O, Z) on a :

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad ; \quad I_z = \int_s x^2 ds \quad (2.14) \quad (2.15)$$

et l'énergie de déformation de l'arbre a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.16)$$

De préférable exprimer U_a en fonction des déplacements u et w . Le passage de u, w à u^*, w^* s'écrit (voir Fig.2.4) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (2.17)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (2.18)$$

En tenant en compte de (2.17) et (2.18), l'expression (2.16) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.19)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation se simplifie à :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.20)$$

Remarque : si l'arbre est soumis à une force axiale constante F_0 , l'expression de l'énergie cinétique (2.20) s'écrit [8]:

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2.21)$$

2.2.5 Energie cinétique du balourd

Le balourd (**Fig. 2.5**) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique C du disque et sa énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (O, Y) et sa coordonnée selon cet axe est constante. Dans le repère R_0 , les coordonnées de la masse m_b sont :

$$O\vec{D} = O\vec{C} + C\vec{D} = \begin{cases} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{cases}_{R_0} \quad (2.22)$$

D'où la vitesse absolue :

$$\vec{V}(D/R_0) = \left[\frac{dO\vec{D}}{dt} \right]_{R_0} = \begin{cases} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{cases}_{R_0} \quad (2.23)$$

et l'énergie cinétique sera :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b \left[\vec{V}(D/R_0) \right]^2 = \frac{1}{2} m_b \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \right) \quad (2.24)$$

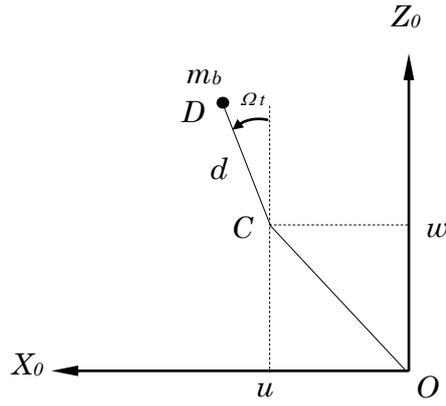


Fig. 2.5 : Paramétrage du balourd élémentaire

Le terme $m_b \Omega^2 d^2 / 2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est négligée devant celle du disque, alors l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2.25)$$

2.2.6 Travail virtuel des forces du au palier hydrodynamique

Les caractéristiques de raideurs et d'amortissements sont supposées connues. Le travail virtuel δW des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme (**Fig. 2.6**):

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (2.26)$$

F_u et F_w sont les composants de la force généralisée qui s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Les rigidités et les amortissements du palier hydrodynamique sont supposés connus. Le travail virtuel des forces agissantes sur l'arbre dues au palier hydrodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W &= -(k_{XX} u + k_{XZ} w + c_{XX} \dot{u} + c_{XZ} \dot{w}) \delta u - (k_{ZZ} w + k_{ZX} u + c_{ZZ} \dot{w} + c_{ZX} \dot{u}) \delta w \\ &= F_u \delta u + F_w \delta w \end{aligned} \quad (2.28)$$

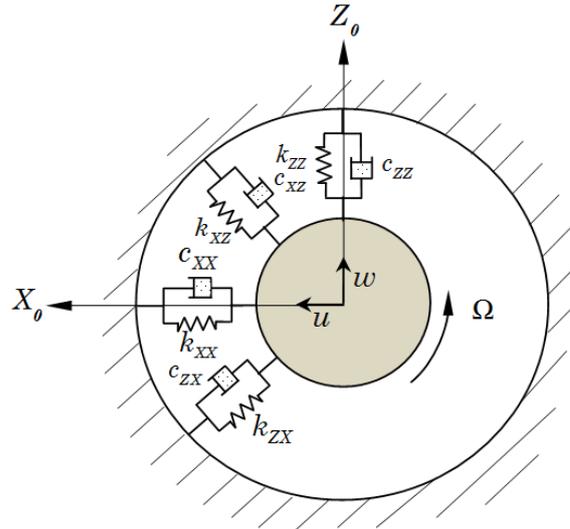


Fig. 2.6 : Amortissements et raideurs du palier

2.3 Application numérique

2.3.1 Données numériques

Le disque est en acier de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, de module d'Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, de rayon intérieur $R_1 = 0.01 \text{ m}$, de rayon extérieur $R_2 = 0.15 \text{ m}$, d'épaisseur $h = 0.03 \text{ m}$, situé à une distance sur l'arbre $L_1 = L/3$. L'arbre est en acier, de longueur $L = 0.4 \text{ m}$ et de rayon $R_1 = 0.01 \text{ m}$. La masse du balourd est égale à $m_b = 10^{-4} \text{ kg}$, situé à une circonférence distant de $d = 0.15 \text{ m}$ du centre du disque. Le palier hydrodynamique est situé à une distance sur l'arbre $L_2 = 2L/3$, caractérisé par : $k_{XX} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$, $k_{ZZ} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c_{XX} = \xi k_{XX}$, $c_{ZZ} = \xi k_{ZZ}$, $k_{XZ} = k_{ZX} = c_{XZ} = c_{ZX} = 0$, avec ξ est un facteur d'amortissement (Lalanne et Feraris [8]).

2.3.2 Equations de mouvement

La méthode de **Rayleigh-Ritz** est utilisée comme méthode de résolution. D'après la théorie des poutres en flexion, le premier mode propre est dominant sur la réponse jusqu'à 95 %, alors les déplacements u et w , projetés dans la base modale peuvent s'écrire :

$$u(y,t) = \phi(y) q_1(t) \quad ; \quad w(y,t) = \phi(y) q_2(t) \quad (2.29)$$

Avec $\phi(y) = \sin(\pi y/l)$, est le premier mode propre de flexion d'une poutre sur deux appuis simples, q_1 et q_2 sont les coordonnées modales à déterminer.

Les angles ψ et θ sont petites, ils peuvent être approximés par les expressions suivantes :

$$\theta(y,t) = \frac{\partial w(y,t)}{\partial y} \quad ; \quad \psi(y,t) = -\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \quad (2.30)$$

Les moments d'inertie du disque sont déterminés en tenant en compte de toutes les caractéristiques géométriques de ce dernier. En tenant compte de toutes les données numériques présentées dans le paragraphe 2.3.1 et des expressions (2.29) et (2.30), l'énergie cinétique totale du système ($T_D + T_a + T_b$), et l'énergie de déformation de l'arbre, projetées dans la base modale (2.29) s'écrivent :

$$T = 7.14(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87\Omega\dot{q}_1q_2 + 1.3 \times 10^{-5}\Omega(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (2.31)$$

$$U_a = 5.97 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2) \quad (2.32)$$

Les expressions finales des forces généralisées s'écrivent :

$$F_{q_1} = -0.15 \times 10^6 q_1 - \xi \times 1.5 \times 10^5 \dot{q}_1 \quad ; \quad F_{q_2} = -0.37 \times 10^6 q_2 - \xi \times 3.75 \times 10^5 \dot{q}_2 \quad (2.33)$$

L'application des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U_a}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.34)$$

Conduisent aux équations de mouvement suivantes :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m_b d\phi(l_1) \Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.35.1)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = m_b \phi(l_1) d \Omega^2 \cos \Omega t \quad (2.35.2)$$

Avec

$$m = 14.29 \quad ; \quad a = 2.87 \quad ; \quad c_1 = \xi \times 1.5 \times 10^5 \quad ; \quad c_2 = \xi \times 3.75 \times 10^5 \quad ;$$

$$k_1 = 1.34 \times 10^6 \quad ; \quad k_2 = 1.57 \times 10^6 \quad \text{et} \quad m_b d\phi(l_1) = 1.3 \times 10^{-5}.$$

2.3.3 Résultats numériques

3.3.3.1 Diagramme de Campbell

Pour la détermination du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, le rotor doit tout d'abord être étudiée en mouvement libre. Seules les solutions de (2.35) sans second membre sont considérées :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0 \quad (2.36.1)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0 \quad (2.36.2)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{rt} \quad ; \quad q_2(t) = Q_2 e^{rt} \quad (2.37)$$

En rapportant (2.37) dans (2.36), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Pour une solution non triviale de (2.38), le déterminant doit être nul, d'où le polynôme caractéristique d'ordre 4 suivant :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + a^2\Omega^2)r^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)r + k_1k_2 = 0 \quad (2.39)$$

En général, les valeurs des coefficients d'amortissements c_1 et c_2 sont telles que les racines de (2.39) sont des paires de quantités complexes conjuguées qui se mettent sous la forme :

$$r(\Omega) = \sigma(\Omega) + j\omega(\Omega) \quad (2.40)$$

Avec $r(\Omega)$ et la fréquence complexe, $\omega(\Omega)$ est la fréquence propre du mouvement libre du système, $\sigma(\Omega)$ est le taux de décroissance (c'est-à-dire, le taux à lequel l'amplitude diminue dans le temps) qui change de signe : une valeur négative de σ_i caractérise un mouvement qui diminue dans le temps (mouvement stable), tandis qu'une valeur positive caractérise une croissance exponentielle du mouvement dans le temps (mouvement instable).

La résolution de (2.39) s'effectue à l'aide d'un programme en langage **FORTRAN**. La figure 2.7 représente l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation $N = 30\Omega/\pi$ pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min (points A et B). Pour $\xi = 0.015$, on remarque que l'évolution est différente et les vitesses critiques diminuent.

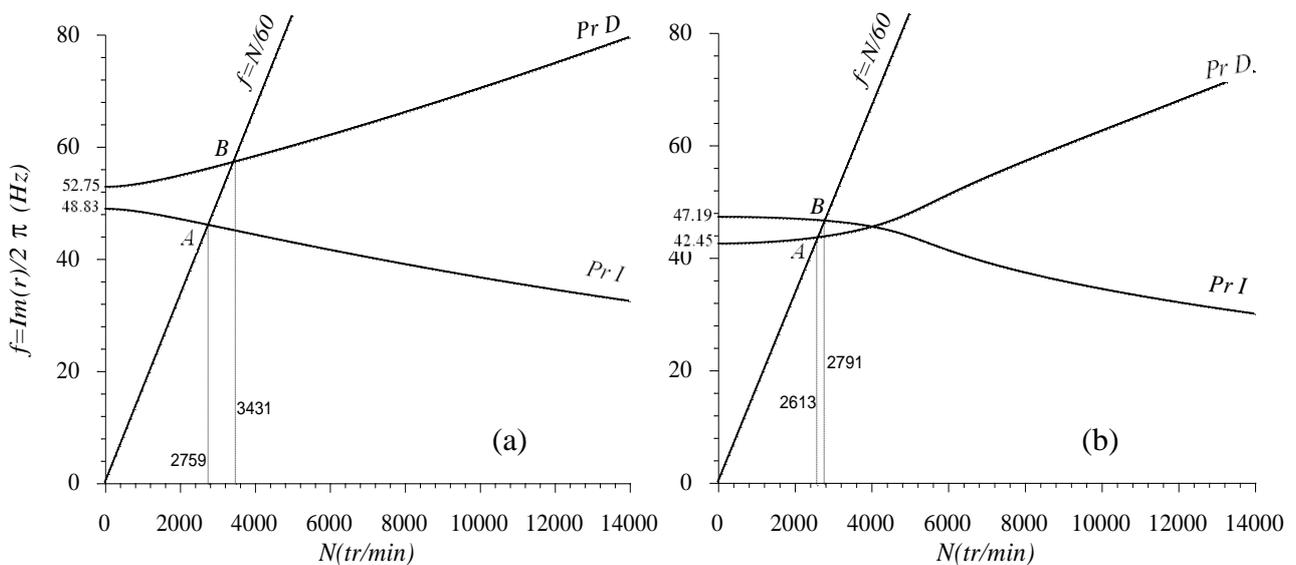


Fig. 2.7 : Diagramme de Campbell du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 2.8 représente la variation du taux de décroissance σ en fonction de la vitesse de rotation N pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . On remarque une distinction de la variation du taux de décroissance avec l'augmentation du facteur d'amortissement ξ et que toutes les valeurs du taux de décroissances sont négatives. Ces valeurs négatives de σ caractérisent un mouvement qui diminue dans le temps, alors le rotor est stable.

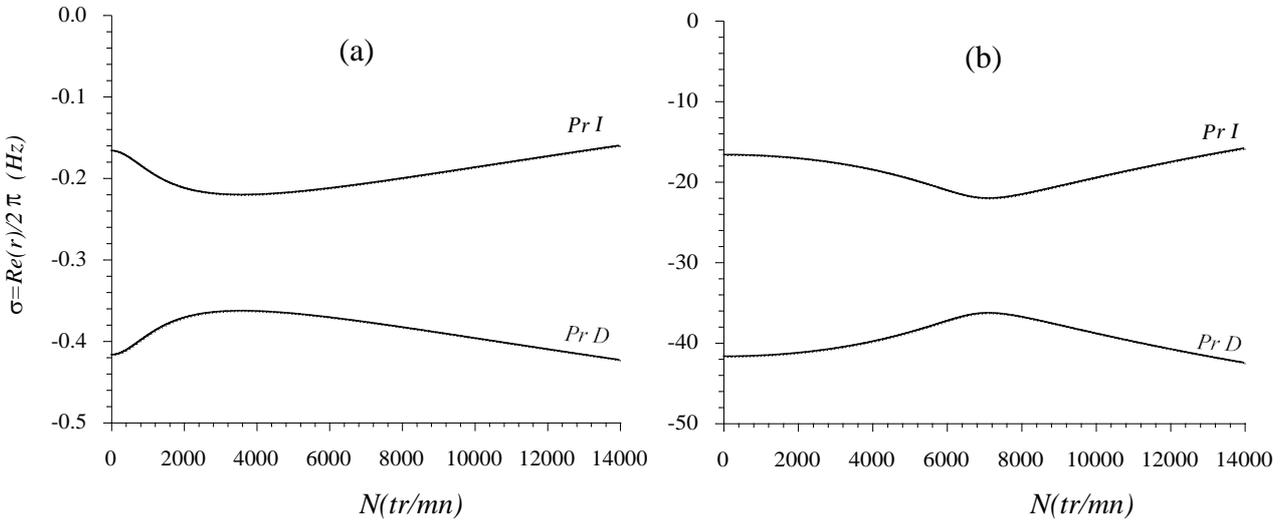


Fig. 2.8 : Taux de décroissance du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 2.9 représente la variation du sens de précession du centre géométrique du disque en fonction de la vitesse de rotation. Précession peut être définie comme un changement de direction de l'axe de rotation. Il existe deux types de précession: précession directe et inverse. Pour la précession directe le centre géométrique de rotor tourne dans le même sens de rotation et vice versa pour la précession inverse. On observe en particulier dans cette figure que les changements de sens de précession ne se produisent pas au passage des vitesses critiques. Lorsque le rotor tourne à des vitesses très grandes, la trajectoire du centre du tourillon devient circulaire.

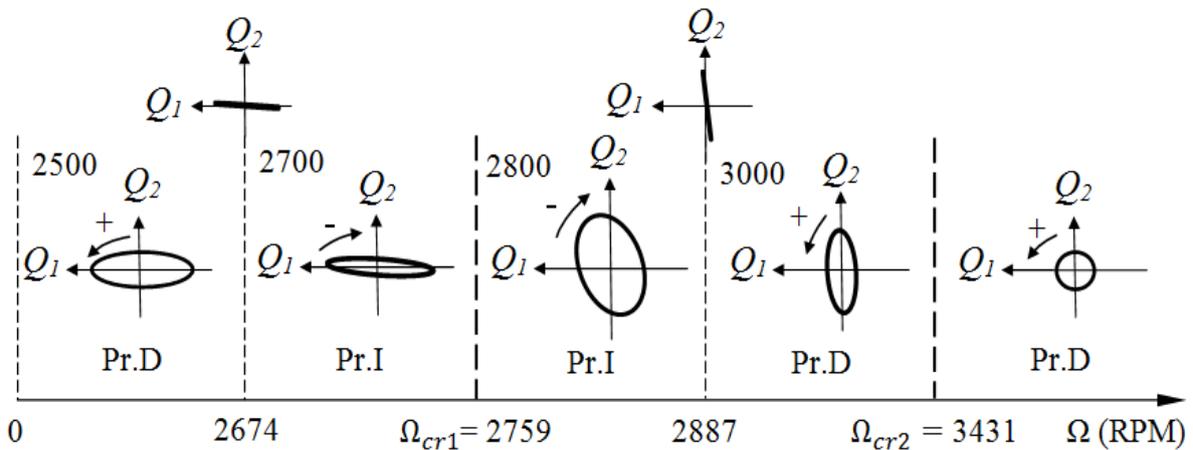


Fig. 2.9 : Variation du sens de la précession en fonction de la vitesse de rotation

3.3.3.2 Réponse due au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système (2.35) avec second membre. Comme le système est amorti, la réponse n'est en générale pas en phase avec la force du balourd, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t, \quad q_2(t) = A_2 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t \tag{2.41}$$

Ces expressions (2.41) sont reportées dans les équations du mouvement (2.35) et chaque équation conduit à deux équations traduisant l'égalité des facteurs de $\sin \Omega t$ et $\cos \Omega t$. Cela donne un ensemble d'équations algébrique linéaire qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -c_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ c_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -c_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & c_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m^* d\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ m^* d\Omega^2 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

Pour une valeur de Ω , la résolution de (2.42) donne $Q_1(\Omega)$ et $Q_2(\Omega)$ à partir de :

$$Q_1(\Omega) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad ; \quad Q_2(\Omega) = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \tag{2.43}$$

La résolution du système algébrique linéaire (2.42) s'effectue par la méthode directe de **Gauss-Jordan** à l'aide d'un programme **FORTRAN**. La figure 2.10 représente l'évolution de l'amplitude de la réponse au balourd en fonction de la vitesse de rotation du rotor $N = 30\Omega/\pi$ pour deux valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux pics correspondants aux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min. Ce sont les mêmes vitesses critiques obtenues par le diagramme de Campbell (Figure 2.7.a, points A et B). Pour l'autre réponse ($\xi = 0.015$), on remarque la diminution des amplitudes des pics correspondants aux vitesses critiques 2613 tr/min et 2791 tr/min (Figure 2.7.b, points A et B).

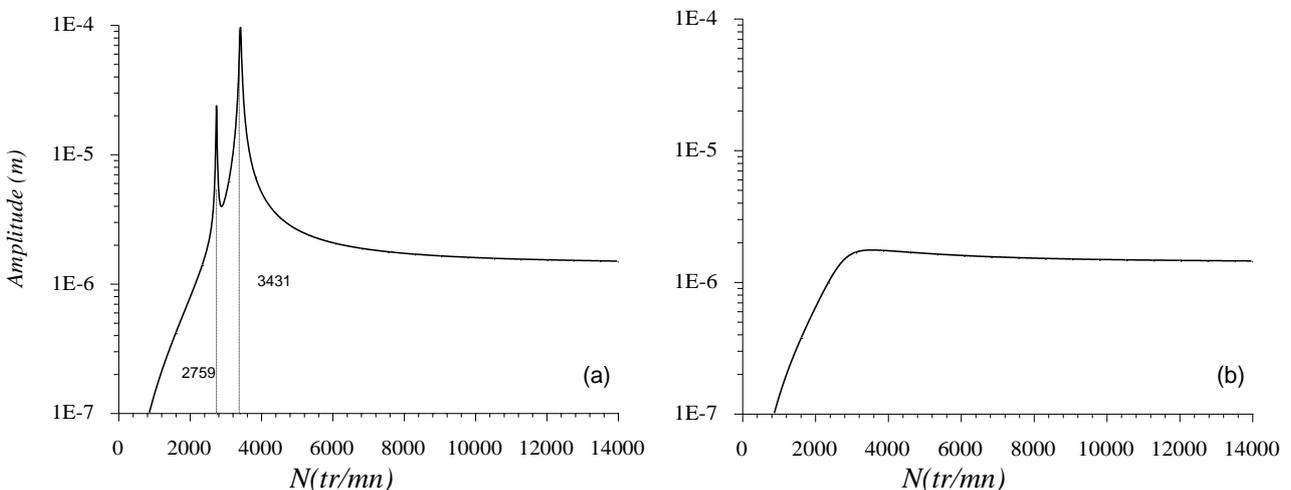


Fig. 2.10 : Amplitude de la réponse au balourd du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

2.3.3.3 Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor

Supposons que les caractéristiques de rigidité et d'amortissement sont les suivantes : $k_{xx} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$; $k_{zz} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$; $k_{xz} = -k_{zx} = 4 \times 10^4 \text{ Ns/m}$; $c_{xx} = c_{zz} = 10^2 \text{ Ns/m}$; $c_{xz} = c_{zx} = 0$. Les équations de mouvement libre (2.36) deviennent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a \Omega \dot{q}_2 + c \dot{q}_1 + k_1 q_1 + k_{12} q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a \Omega \dot{q}_1 + c \dot{q}_2 + k_2 q_2 + k_{21} q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= k + k_{xx} \phi^2 (l_2) = 1.34 \times 10^6 \text{ N/m} \\ k_2 &= k + k_{zz} \phi^2 (l_2) = 1.57 \times 10^6 \text{ N/m} \\ k_{12} &= k_{xz} \phi^2 (l_2) = 3 \times 10^4 \text{ N/m} \\ k_{21} &= k_{zx} \phi^2 (l_2) = -3 \times 10^4 \text{ N/m} \\ c &= c_{xx} \phi^2 (l_2) = c_{zz} \phi^2 (l_2) = 75 \text{ Ns/m} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Les solutions des équations en mouvement libre (2.44) ont la même forme (2.41) ; en rapportant (2.41) dans (2.44), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + cr + k_1 & -a\Omega r + k_{12} \\ a\Omega r + k_{21} & mr^2 + cr + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

D'où le polynôme caractéristique suivant :

$$r^4 + \frac{2c}{m} r^3 + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{c^2}{m^2} + \frac{a^2 \Omega^2}{m^2} \right) r^2 + \left(\frac{ck_1}{m^2} + \frac{ck_2}{m^2} + \frac{a}{m^2} (k_{21} - k_{12}) \Omega \right) r + \frac{k_1 k_2 - k_{12} k_{21}}{m^2} = 0 \quad (2.47)$$

Pour voir l'influence de la rigidité du palier sur la stabilité du rotor, la figure 2.11 représente le diagramme de Campbell et le taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation N . On remarque que ce système devient instable pour $N > 1395 \text{ tr/min}$, cette vitesse ; dite vitesse seuil d'instabilité ; correspond au changement de signe du taux de décroissance d'une valeur négative à une valeur positive. Le rotor est instable à partir de cette vitesse.

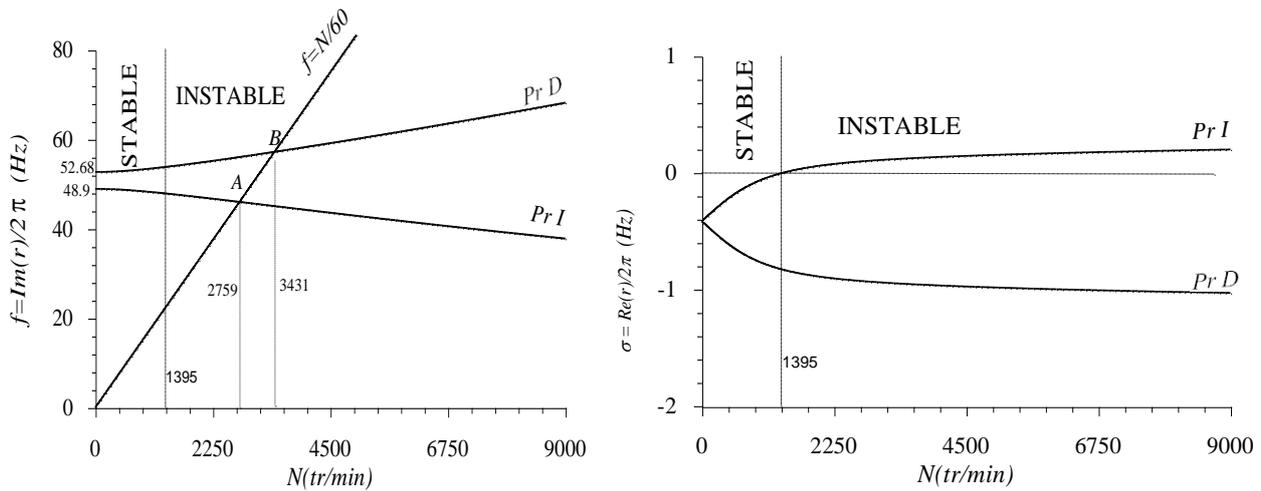


Fig. 2.11 : Influence de la rigidité du palier hydrodynamique sur la stabilité du rotor

2.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif l'étude théorique du comportement dynamique en flexion d'un comportant un palier hydrodynamique. Les différentes expressions, qui caractérisent les éléments de rotor, sont déterminées. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange. La prise en compte de l'effet gyroscopique dû au disque ou à l'arbre ainsi que les caractéristiques du palier hydrodynamique rond les fréquences propres varient en fonction de la vitesse de rotation. Le comportement libre du rotor est résumé par le traçage du diagramme de Campbell. Ce dernier constitue l'un des outils de base pour la détermination des vitesses critiques du système. Dans ce modèle étudié, la dissymétrie est introduite par les raideurs et les amortisseurs du palier hydrodynamique. Avec la présence de l'amortissement, les racines du polynôme caractéristique sont des paires de quantités complexes conjuguées. L'augmentation du facteur d'amortissement a une influence sur l'évolution des fréquences propres et la variation du taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation. L'analyse de la stabilité est l'un des outils les plus puissants pour étudier et améliorer le comportement dynamique des machines tournantes. Le critère utilisé est très fiable pour l'étude de la stabilité et la détermination de la vitesse pour laquelle l'instabilité se manifeste.

Chapitre 3

Etude numérique du comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti

Sommaire

3.1 Introduction	29
3.2 Modélisation des éléments de rotor par éléments finis	29
3.3 Equations du mouvement	38
3.4 Résolution par la méthode pseudo-modale	38
3.5 Application numérique	39

3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre, le comportement dynamique en flexion du rotor présenté par la figure 2.1 du chapitre 2 et cela par éléments finis en utilisant une version démonstration du logiciel ROTORINSA. Le disque est modélisé par un nœud à quatre degrés de liberté. L'arbre est modélisé par des éléments poutre à quatre degrés de liberté par nœud. En s'appuyant sur les expressions des énergies cinétiques et potentielles des différents éléments de rotor ainsi que le travail virtuel des efforts dus au palier viscoélastique présentées dans le chapitre 2, les matrices élémentaires dans un repère fixe sont construites à partir des équations de Lagrange. La méthode pseudo-modale est utilisée pour la résolution du système d'équations globale après réduction.....

3.2 Modélisation des éléments de rotor par éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à **discrétiser** la structure en éléments de **dimensions finis** qui sont réunis en des points appelés **nœuds** situés sur leur contour. Il est nécessaire de définir les modèles éléments finis des éléments constitutifs d'un rotor : disque, arbre, paliers et de représenter les forces extérieures et en particulier celles dues aux balourds. Pour cela l'effet gyroscopique doit être pris en considération et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

3.2.1 Disque

Un nœud du maillage éléments finis correspond au disque rigide contient quatre degrés de liberté : deux déplacements latéraux u et w selon X_0 et Z_0 respectivement, et deux rotations associées θ et ψ autour de X_0 et Z_0 respectivement (**Fig. 3.1**). Ainsi, si un disque est positionné en son centre de masse c , le vecteur $\{\delta\}$ des déplacements nodaux s'écrit :

$$\langle \delta \rangle = \langle u \quad w \quad \theta \quad \psi \rangle \quad (3.1)$$

L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse c est calculée en utilisant un repère fixe. Le disque est supposé symétrique, les angles θ et ψ sont petits et la vitesse de rotation est constante ($\dot{\phi} = \Omega$). L'expression de l'énergie cinétique d'un élément fini de disque se simplifie à (**voir chap. 2**) :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.2)$$

Avec M_d est la masse du disque, I_{dx} et I_{dy} sont les moments d'inertie du disque.

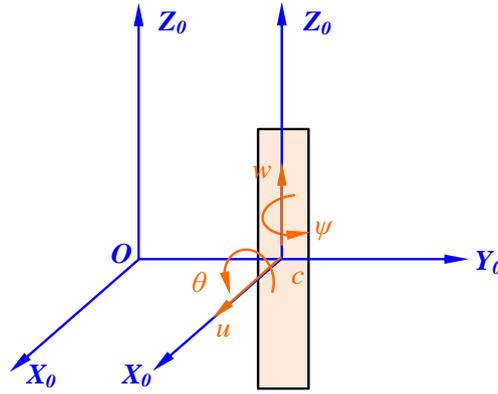


Fig.3.1 : Degrés de liberté possibles d'un élément fini de disque

La matrice de masse et la matrice gyroscopique d'un élément disque sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (3.2), soit :

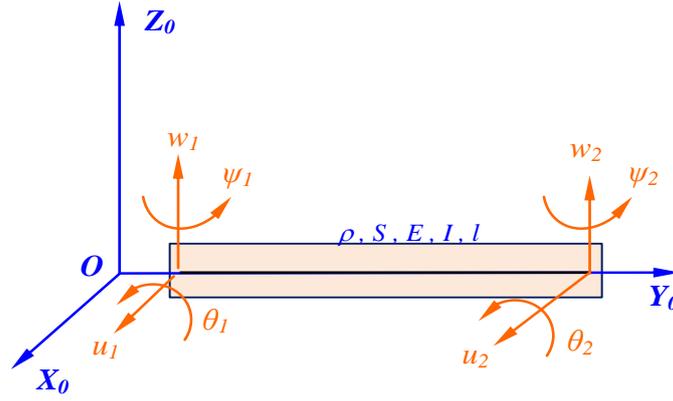
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left(\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \right\} \quad (3.3)$$

On aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de masse élémentaire } [M_D^c]} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \underbrace{\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice gyroscopique élémentaire } [G_D^c]} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2.2 Arbre

L'arbre du rotor peut être modélisé à l'aide d'**éléments finis de poutre de Timoshenko** de section circulaire constante. L'utilisation de l'élément fini classique qui possède 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœud permis d'aboutir à des matrices élémentaires de tailles 8×8 (**Fig. 3.2**).


Fig.3.2 : Degrés de liberté d'un élément d'arbre.

Les expressions (3.5) expriment les relations entre les pentes et les déplacements :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.5)$$

L'expression (3.6) présente le vecteur des déplacements nodaux :

$$\langle \delta \rangle = \langle u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2 \rangle \quad (3.6)$$

De plus, on définit les vecteurs $\{\delta u\}$ et $\{\delta w\}$ correspondants aux mouvements dans les plans (O, X_0, Y_0) et (O, Y_0, Z_0) respectivement :

$$\langle \delta u \rangle = \langle u_1, \psi_1, u_2, \psi_2 \rangle \quad \langle \delta w \rangle = \langle w_1, \theta_1, w_2, \theta_2 \rangle \quad (3.7)$$

Ensuite, on construit les matrices caractéristiques à partir des expressions (3.8) :

$$u = \langle N_1(y) \rangle \{\delta u\} \quad w = \langle N_2(y) \rangle \{\delta w\} \quad (3.8)$$

Où $\langle N_1(y) \rangle$ et $\langle N_2(y) \rangle$ sont les fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion données par [26]:

$$\begin{aligned} \langle N_1(y) \rangle &= \left\langle 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} ; -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} ; \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} ; \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \right\rangle \\ \langle N_2(y) \rangle &= \left\langle 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} ; y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} ; \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} ; -\frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.2.1 Énergie cinétique de l'arbre

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est obtenue par extension du cas du disque [52] : l'énergie d'une tranche de poutre, de longueur infinitésimale dy , est celle d'un disque de même dimension. Ainsi, en intégrant cette formule sur la longueur de **l'élément de l'arbre**, il vient :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I l \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^l \dot{\psi} \theta dy \quad (3.10)$$

Avec l est la longueur de l'élément de l'arbre, ρ est la masse par unité de volume ; S est l'aire de la section droite de la poutre ; I est le moment d'inertie diamétral ; $\frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$ est l'expression classique de l'énergie cinétique d'un élément poutre en flexion ; $\frac{\rho I}{2} \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$ est l'effet secondaire d'inertie de rotation (poutre de Timoshenko) ; $\rho I l \Omega^2$ est un terme constant représentant l'énergie de rotation de l'élément de l'arbre et n'a pas d'influence sur les équations du mouvement ; $2\rho I \Omega \int_0^l \dot{\psi} \dot{\theta} dy$ représente l'effet gyroscopique.

Après substitution des expressions (3.5) et (3.8), ainsi que leurs dérivées dans l'équation (3.10), on obtient pour un **élément d'arbre** :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{\rho S}{2} \int_0^l \left[\langle \delta \dot{u} \rangle \{ N_1 \} \langle N_1 \rangle \{ \delta \dot{u} \} + \langle \delta \dot{w} \rangle \{ N_2 \} \langle N_2 \rangle \{ \delta \dot{w} \} \right] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^l \left[\langle \delta \dot{u} \rangle \{ N'_1 \} \langle N'_1 \rangle \{ \delta \dot{u} \} + \langle \delta \dot{w} \rangle \{ N'_2 \} \langle N'_2 \rangle \{ \delta \dot{w} \} \right] dy \\ & + \rho I l \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^l \left[\langle \delta \dot{u} \rangle \{ N'_1 \} \langle N'_2 \rangle \{ \delta \dot{w} \} \right] dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

Et en tenant compte des fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion données par les expressions (3.9) et de leurs dérivées, l'expression (3.11) prend la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \langle \delta \dot{u} \rangle [M_1] \{ \delta \dot{u} \} + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{w} \rangle [M_2] \{ \delta \dot{w} \} + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{u} \rangle [M_3] \{ \delta \dot{u} \} + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{w} \rangle [M_4] \{ \delta \dot{w} \} + \langle \delta \dot{u} \rangle [M_5] \{ \delta \dot{w} \} + \rho I l \Omega^2 \quad (3.12)$$

Avec $[M_1]$ et $[M_2]$ représentent les matrices classiques de masse ; $[M_3]$ et $[M_4]$ représentent l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre ; $[M_5]$ représente l'effet gyroscopique et $\rho I l \Omega^2$ est le terme constant. Ces matrices sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} [M_1] &= \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} & [M_2] &= \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \\ [M_3] &= \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} & [M_4] &= \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \\ [M_5] &= \frac{\rho I \Omega}{15l} \begin{bmatrix} -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par application des équations de Lagrange sur la forme compacte de l'énergie cinétique de l'élément de l'arbre (3.12), et en tenant compte que le terme constant a une contribution nulle, on aboutit à l'expression suivante :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta_i} = \left([M_a^e] + [M_s^e] \right) \{ \ddot{\delta} \} + [C_a^e] \{ \dot{\delta} \}} \quad (3.14)$$

Avec $[M_a^e]$ est déduite de $[M_1]$ et $[M_2]$; $[M_s^e]$ est déduite de $[M_3]$ et $[M_4]$; $[C_a^e]$ vient de $[M_5]$. De ce fait, les matrices $[M_a^e]$, $[M_s^e]$ et $[C_a^e]$ sont donnés par les expressions suivantes :

Matrice de masse élémentaire (arbre) :

$$[M_a^e] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Matrice de l'inertie de rotation (arbre) :

$$[M_s^e] = \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Matrice de l'effet gyroscopique (arbre) :

$$[C_a^e] = \frac{\rho I \Omega}{15l} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.2.2 Énergie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Seules les déformations dues à la flexion et à la force axiale F_0 sont prises en compte (les effets du cisaillement sont négligés). L'énergie de déformation d'un **élément de poutre de Timoshenko** en flexion pour le cas le plus courant est donnée par (3.18) :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.18)$$

Dérivons (3.9) par rapport à y et remplaçons dans (3.18), il vient :

$$U_a = \frac{1}{2} \left[\langle \delta u \rangle \left(EI \int_0^l \{N_1''\} \langle N_1'' \rangle dy \right) \{ \delta u \} + \langle \delta w \rangle \left(EI \int_0^l \{N_2''\} \langle N_2'' \rangle dy \right) \{ \delta w \} \right] + \frac{1}{2} \left[\langle \delta u \rangle \left(F_0 \int_0^l \{N_1'\} \langle N_1' \rangle dy \right) \{ \delta u \} + \langle \delta w \rangle \left(F_0 \int_0^l \{N_2'\} \langle N_2' \rangle dy \right) \{ \delta w \} \right] \quad (3.19)$$

Après intégration, l'expression (3.19), sous forme plus compacte, s'écrit :

$$U_a = \frac{1}{2} \langle \delta u \rangle [K_1] \{ \delta u \} + \frac{1}{2} \langle \delta w \rangle [K_2] \{ \delta w \} + \frac{1}{2} \langle \delta u \rangle [K_3] \{ \delta u \} + \frac{1}{2} \langle \delta w \rangle [K_4] \{ \delta w \} \quad (3.20)$$

Avec $[K_1]$ et $[K_2]$ sont les matrices classiques de raideur :

$$[K_1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad [K_2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$[K_3]$ et $[K_4]$ sont données par :

$$[K_3] = \frac{F_0}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad [K_4] = \frac{F_0}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Il est fréquemment nécessaire de prendre en considération l'**effet de cisaillement** a qui modifie la matrice classique de raideur. Il a comme expression :

$$a = \frac{12EI}{GS_r l^2} \quad (3.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.24)$$

Avec G représente le module de cisaillement ; ν : représente le coefficient de Poisson ; S_r est la section réduite.

La matrice classique élémentaire de rigidité $[K_c^e]$ est déduite de $[K_1]$ et $[K_2]$, et la matrice élémentaire $[K_F^e]$ due à la force axiale est déduite des matrices $[K_3]$ et $[K_4]$.

Par application des équations de Lagrange sur la forme compacte de l'énergie de déformation de l'arbre (3.20), on aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{\partial U_a}{\partial \delta_i} = [K_a^e] \{\delta\} \quad (3.25)$$

Avec : $[K_a^e] = [K_c^e] + [K_F^e]$

La matrice de rigidité élémentaire de l'énergie de déformation est comme suit :

$$[K_c^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 4l^2 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & -6l & 4l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Avec la prise en compte de l'**effet de cisaillement**, la matrice $[K_c^e]$ prend la forme (3.27) :

$$[K_c^e] = \frac{EI}{(1+a)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & (4+a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (2-a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & (2-a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (4+a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La matrice de rigidité de la force axiale prend la forme finale (3.28) :

$$\left[K_F^e \right] = \frac{F_0}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.2.3 Masse de balourd

Le balourd est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique c du disque et son énergie cinétique T_b doit être calculée. On suppose que la masse m_b reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (O,Y) et sa coordonnée selon cet axe est constante (voir **Fig.2.5 du chap. 2**). Comme la masse m_b est négligée devant la masse du rotor, l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme approchée (3.29):

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.29)$$

L'application des équations de Lagrange sur l'expression générale de l'énergie cinétique due à un balourd (3.29), donne (3.30) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial \delta_i} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}} \quad (3.30)$$

Avec :

$$\langle \delta \rangle = \langle u \quad w \rangle \quad (3.31)$$

L'expression (3.30) correspond à la masse du balourd dans un plans perpendiculaire à (O,Y) au temps $t = 0$. Quand des rotors industriels sont étudiés, l'influence de plusieurs masses de balourds agissent simultanément doit être considérée. Pour une masse de balourd à $t=0$, située à une position angulaire α selon l'axe Z , la force devient :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = -m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Qui peut être sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \{F_2\} \sin(\Omega t) + \{F_3\} \cos(\Omega t) \quad (3.33)$$

Avec :

$$\{F_2\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\{F_3\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

3.2.4 Palier viscoélastique

D'une manière générale, les paliers qui induisent des forces extérieures agissantes sur l'arbre comportent des caractéristiques de raideurs et d'amortissement qui sont supposées connues. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la **figure 2.6, chap.2**. Dans celle-ci on a : k_{XX} , k_{ZZ} , c_{XX} , c_{ZZ} sont les rigidités et les amortisseurs selon les directions X_0 et Z_0 respectivement, k_{XZ} , k_{ZX} , c_{XZ} , c_{ZX} sont les rigidités et les amortissements dans une direction (X_0 ou Z_0) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes de couplage.

Le travail virtuel δW des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.36)$$

F_u et F_w sont les composants de la force généralisée qui s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

L'influence des pentes et des moments est habituellement négligée et compte tenu de (3.37) on aura:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{XX} & 0 & k_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ZX} & 0 & k_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[K_p^e]} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} c_{XX} & 0 & c_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{ZX} & 0 & c_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[C_p^e]} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

La première matrice est une matrice de raideur, la seconde est une matrice d'amortissement visqueux. Ces matrices ne sont généralement pas symétriques pour les paliers hydrodynamiques et les termes peuvent varier d'une manière importante en fonction de la vitesse de rotation [52].

3.3 Equations de mouvement

Les équations de Lagrange déjà appliquées, donne le système d'équations générales du mouvement qui, après assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales de la structure étudiée, s'écrit :

$$\boxed{[M]\{\ddot{\delta}\} + [[C] + [G(\Omega)]]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}} \quad (3.39)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{F(t)\} = & \{F_1\} + \{F_2\}\sin \Omega t + \{F_3\}\cos \Omega t + \{F_4\}\sin s\Omega t + \\ & + \{F_5\}\cos s\Omega t + \{F_6\}\sin \omega t + \{F_7\}\cos \omega t \end{aligned} \quad (3.40)$$

- $\{F_1\}$: vecteur incluant des forces constantes dont celles dues à la pesanteur ;
- $\{F_2\}$ et $\{F_3\}$: dus aux effets de balourds ;
- $\{F_4\}$ et $\{F_5\}$: correspondent aux forces asynchrones ;
- $\{F_6\}$ et $\{F_7\}$: correspondent aux forces harmoniques fixes dans l'espace ;
- $\{\delta\}$: vecteur global contenant tous les déplacements nodaux ;
- $[M]$: matrice de masse globale symétrique vient de $[M_D]$; $[M_a]$ et $[M_s]$
- $[C]$: matrice d'amortissements globale non symétrique incluant les caractéristique d'amortissement du palier hydrodynamique ; vient de $[C_p]$
- $[G(\Omega)]$: matrice gyroscopique globale non symétrique, fonction de la vitesse Ω incluant l'effet gyroscopique ; vient de $[G_D]$ et $[C_a]$
- $[K]$: matrice de rigidité globale non symétrique vient de $[K_a]$ et $[K_p]$

3.4 Résolution par la méthode pseudo modale

Pour la résolution du système d'équations (3.39), la méthode *pseudo-modale* est généralement appliquée qui permet une réduction importante de l'ordre du système d'équations [3]. Généralement quelques centaines de degrés de liberté sont suffisants pour modéliser un rotor et l'on s'intéresse à une dizaine de modes : le facteur de réduction est donc significatif (≈ 20 à 30 %), ce qui conduit à un gain appréciable en temps de calcul et en espace mémoire occupé. Un autre atout de cette méthode, réside dans la possibilité de la prise en compte des amortissements modaux connus expérimentalement. De nombreux tests ont montré que la précision de cette méthode est excellente dont l'erreur, par rapport à une méthode numérique exacte, est inférieure à 1% [52].

3.5 Application numérique

3.5.1 Données numériques

- **Disque : acier**

Rayon intérieur $R_1 = 0.01$ m
 Rayon extérieur $R_2 = 0.15$ m
 Épaisseur $h = 0.03$ m
 Masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³
 Module d'Young $E = 2 \times 10^{11}$ N/m²
 Distance sur l'arbre $L_1 = L/3 = 0.133$ m

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi(R_2^2 - R_1^2)\rho h = 16.467 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12}(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) \\ = 9.4273 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$I_{dy} = \frac{M_d(R_1^2 + R_2^2)}{2} = 0.1861 \text{ kg m}^2$$

- **Arbre : acier**

Longueur $L = 0.4$ m
 Rayon de la section droite $R_1 = 0.01$ m
 Masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³
 Module d'Young $E = 2 \times 10^{11}$ N/m²

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral sont :

$$s = \pi R_1^2 = 3.142 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 7.854 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

- **Balourd**

Masse $m_b = 10^{-4}$ kg
 Distance $d = 0.15$ m

- **Palier hydrodynamique**

Distance sur l'arbre $L_2 = 2L/3 = 0.266$ m

$$K_{xx} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$K_{zz} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$C_{xx} = \xi k_{xx}$$

$$C_{zz} = \xi k_{zz}$$

$$k_{xz} = k_{zx} = c_{xz} = c_{zx} = 0$$

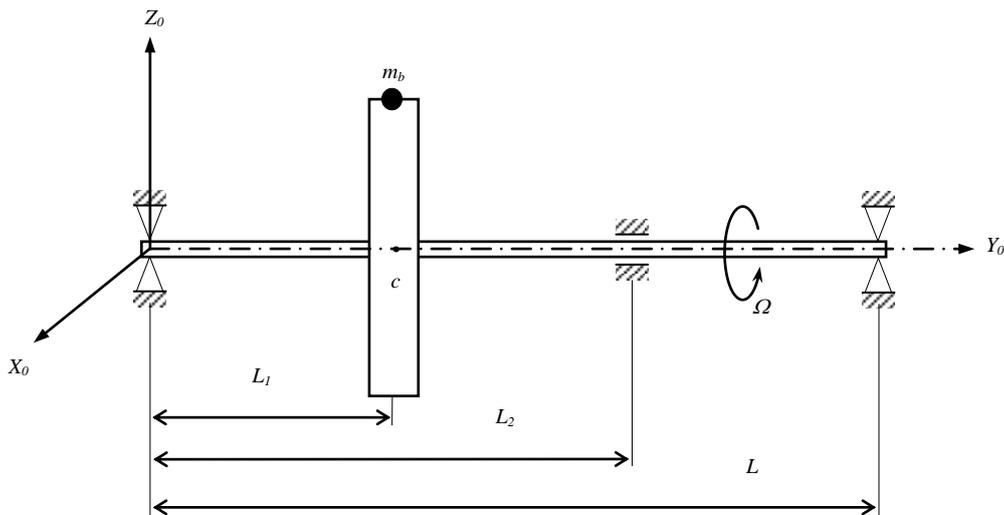


Fig. 3.3 : Modèle mathématique du rotor étudié [8].

3.5.2 Organisation du logiciel ROTORINSA

ROTORINSA ou **Sysrotor**, est un logiciel d'éléments finis, créé par le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon, destiné à prévoir l'analyse du comportement dynamique de rotors en flexion. Cette version gratuite, fonctionne sous Windows et comprend trois grands modules : **Préprocesseur**, **Calcul** et **Postprocesseur**. C'est un fonctionnement par projet. Un projet, par exemple : **rotor1**, correspond à l'analyse du rotor associé au fichier courant de données **rotor1.dat**. Ce fichier est le fichier de référence. Il contient les informations sur les nœuds, les éléments et les propriétés géométriques et physiques du rotor.

Le Préprocesseur permet de créer la géométrie du le fichier (**.int**), et de générer son modèle éléments finis dans le fichier (**.dat**). A partir de ce fichier (**.dat**), l'utilisateur lance différents calculs en dynamique ou en statique et visualise graphiquement les différents résultats concernant le même rotor. Il est conseillé de consulter les fichiers de données (**.dat**) et de résultats (**.lis**), afin de vérifier que le modèle construit correspond bien au modèle souhaité.

Le schéma de fonctionnement du logiciel est présenté par la **Figure 3.3**. Comme mentionner ci dessus, Il est constitué de trois modules : un **Préprocesseur** permettant de visualiser la modélisation effectuée, un **Solveur** permettant de résoudre les équations de mouvement et un **Postprocesseur** permettant de visualiser et de tracer les diagrammes de Campbell, des réponses, des modes et des déformées modales et sous rotation. Actuellement il existe des versions, en Français et en Anglais, sur PC et stations de travail. Nous disposons seulement d'une **version démonstration 4.0.6 limitée à 4 fréquences et 10 nœuds**.

La mise au point des données s'effectué par des allers et retours entre l'option **Préprocesseur** et l'éditeur de texte. Les éléments de la géométrie et les messages d'erreur sont fournis par un fichier de sortie (**trageo.txt**). L'option **Solveur** utilise le fichier **.dat** (données) en entrée et le fichier **.arc** (archive) en entrée-sortie, suivant qu'il s'agit d'une reprise ou d'un calcul initial. Le fichier **.lis** (listing) contient toutes les données et tous les résultats de calcul ; il peut être consulté à l'écran et imprimé. Le fichier **.tra** (tracé) généré contient les informations nécessaires au **Postprocesseur**. Enfin le fichier **trarot.txt** garde la trace de l'exécution et contient les messages d'erreur. Les tracés sur papier peuvent être réalisés avec une imprimante couleur ou noir et blanc. Les fichiers de sortie sont notés **.ps** (format postscript), **.hp** (format hpgl) ou **.bmp** (format bitmap). Le fichier **.tri** garde la trace du tri des fréquences afin d'obtenir le diagramme de Campbell. Le *solveur* permet essentiellement le calcul des fréquences, des modes et des réponses.

Comme **ROTORINSA** est un logiciel d'éléments finis, ceci impose pour la modélisation éléments finis, la nécessité de fournir des données relatives à la géométrie du rotor (coordonnées des noeuds, conditions aux limites, description des éléments : arbre, disque, paliers, éléments supplémentaires), de données mécaniques (caractéristiques des matériaux, de raideur et d'amortissement des paliers

en fonction de la vitesse de rotation) et d'informations relatives aux excitations. Les éléments supplémentaires, de type masse, raideur, effet gyroscopique, amortissement permettent la modélisation de nombreuses particularités : accouplements, prise en compte du bâti, de supports... Le logiciel utilisant la méthode **Pseudo-modale** permet la prise en compte d'amortissements modaux.

Le répertoire où se trouve le fichier projet (**.prj**) et le fichier de données (**.dat**) est le répertoire courant de travail. Tous les fichiers générés durant la session sont stockés dans ce répertoire.

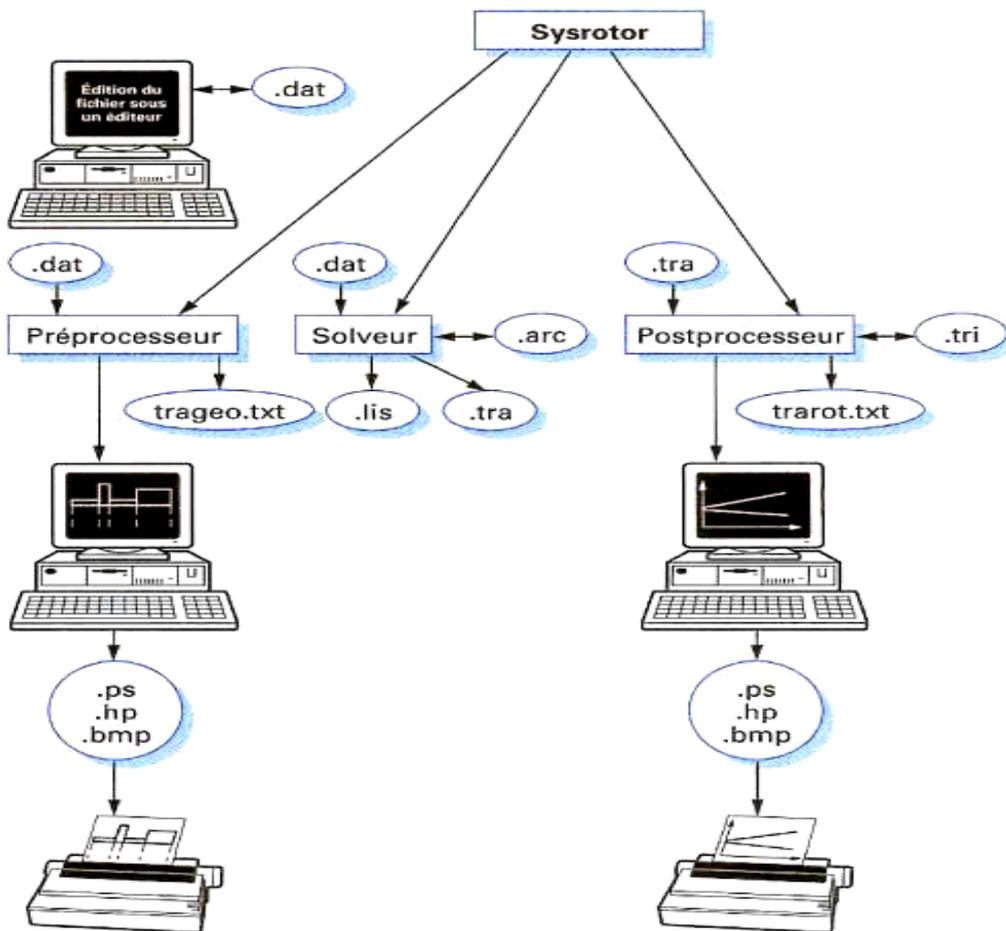


Fig. 3.3 : Schéma de fonctionnement de ROTORINSA

3.5.3 Géométrie et modèle éléments finis du rotor

Le préprocesseur permet de décrire les éléments du rotor et de générer le fichier de données. Afin de générer le fichier de données nécessaire pour la modélisation sous le logiciel **ROTORINSA** du rotor à étudié, il faut décrire tous ces éléments à savoir l'arbre, le disque et les paliers. Le rotor (**Fig.3.4**), comporte 3 éléments d'arbres, 1 élément de disque et 2 éléments de paliers rigides et 1 élément de palier viscoélastique. Une propriété physique est affectée à chaque élément (caractéristiques des arbres, disque, paliers).

Lors de la génération du fichier de données, un mailleur automatique discrétise les éléments d'arbre en plusieurs éléments finis suivant leurs tailles respectives. Pour le rotor étudié, le nombre d'éléments finis choisi dans l'élément d'arbre le plus court est 2 et le nombre d'éléments finis choisi dans l'élément d'arbre le plus long est 3 parce que nous disposons d'une version démonstration limitée à 10 nœuds. Le modèle **éléments finis** du rotor est présenté sur la figure 3.5.

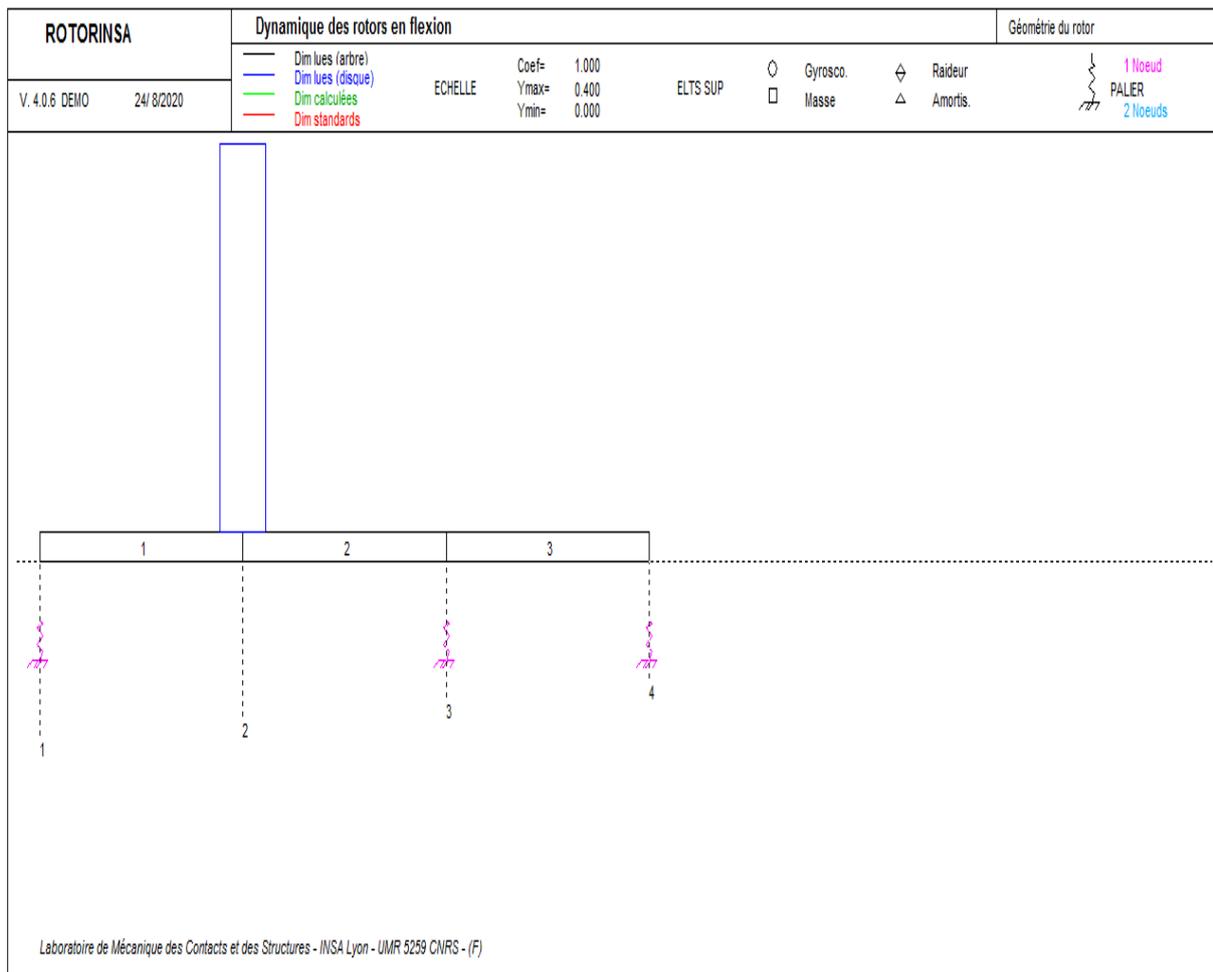


Fig.3.4 : Géométrie du rotor générée par ROTORINSA

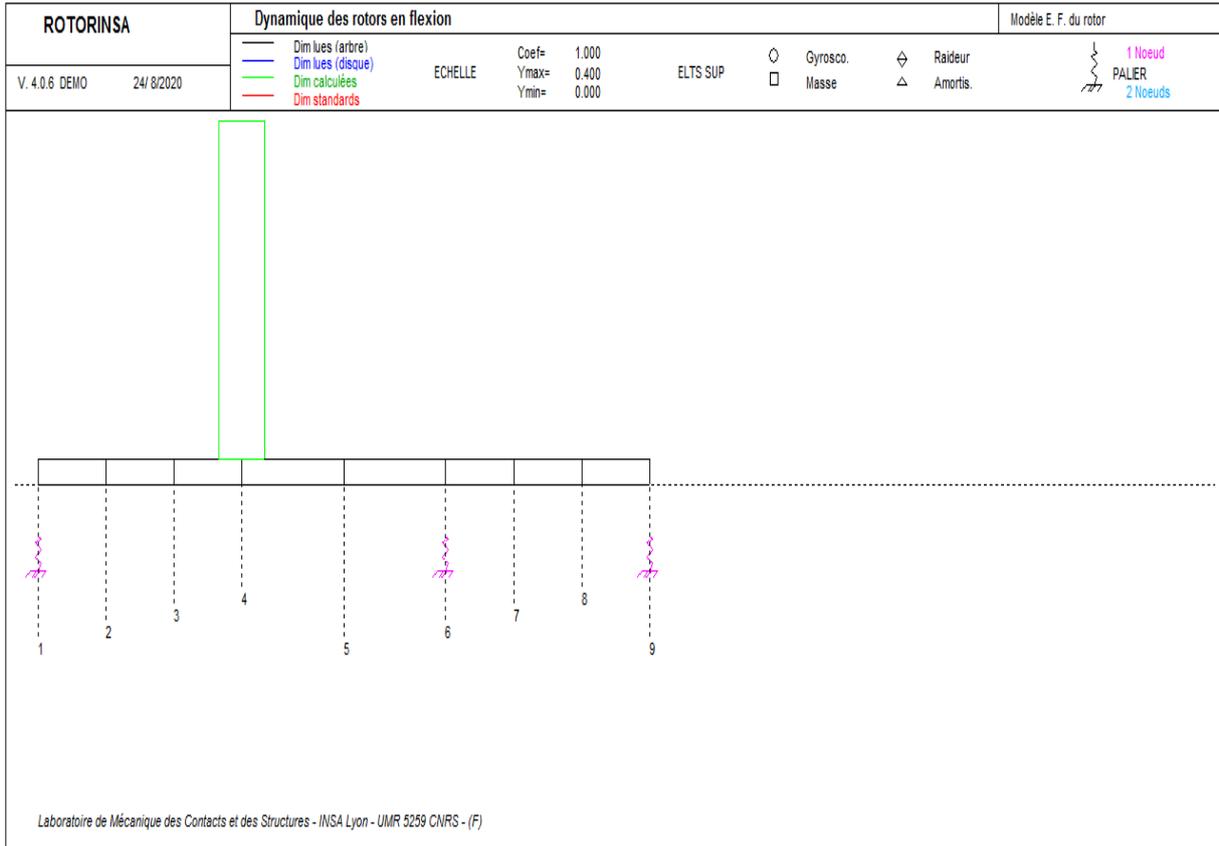


Fig.3.5 : Modèle éléments finis du rotor généré par ROTORINSA

3.5.4 Diagrammes de Campbell

Comme la vitesse de rotation Ω du rotor peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement, à cause de l'effet gyroscopique dû aux disques, à l'arbre et les caractéristiques des liaisons, les fréquences propres d'une machine tournante peuvent dépendre de la vitesse de rotation.

La figure 3.6 montre l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation du rotor connu sous le nom diagramme de Campbell pour un facteur d'amortissement très faible du palier $\xi = 0.0002$. Pour $\xi = 0.015$, le diagramme est un peut différent (Fig.3.7). Les vitesses critiques sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude du déplacement passe par un maximum. Elles sont particulièrement dangereuses. En l'absence de l'amortissement, une vitesse critique de rotation coïncide exactement avec une fréquence propre du rotor. Les vitesses critiques peuvent être donc déterminées à partir du diagramme de Campbell par les intersections des courbes relatives aux fréquences naturelles avec celles liées aux fréquences de rotation (ligne droite $\omega = s\Omega$, avec $s = 1$ pour une force synchrone telle que la force du balourd, $s \neq 1$ pour une force asynchrone). D'après la figure 3.6, on constate que le comportement du rotor est stable, non symétrique et de précession directe ou inverse. L'intersection de $f_1(N)$ et $f_2(N)$ avec les droites $f(N) = N/60$ et $f(N) = 0,5.N/60$, aux points **A**, **B**, **C** et **D** donne les vitesses critiques :

Force synchrone : balourd ($s = 1$):

- Au point **A** : $N_A = 2692.99$ tr/mn et $f_A = 44.88$ Hz
- Au point **B** : $N_B = 3250.82$ tr/mn et $f_B = 54.18$ Hz

Force asynchrone ($s = 0.5$) :

- Au point **C** : $N_C = 5038.22$ tr/mn et $f_C = 41.99$ Hz
- Au point **D** : $N_D = 7306.19$ tr/mn et $f_D = 60.88$ Hz

et les fréquences propres à l'arrêt ($\Omega = 0$ rad/s) :

$$f_{10} \approx 47.99 \text{ Hz} \quad f_{20} \approx 51.02 \text{ Hz}$$

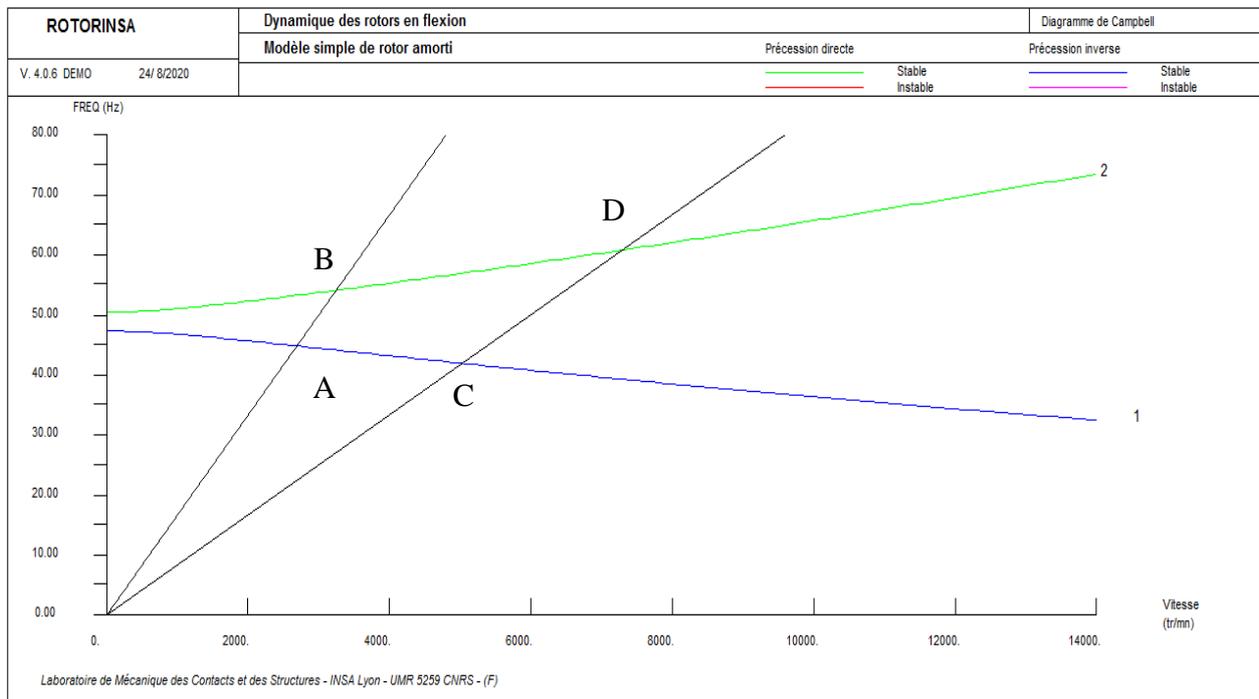


Fig.3.6 : Diagramme de Campbell, $\xi = 0.0002$

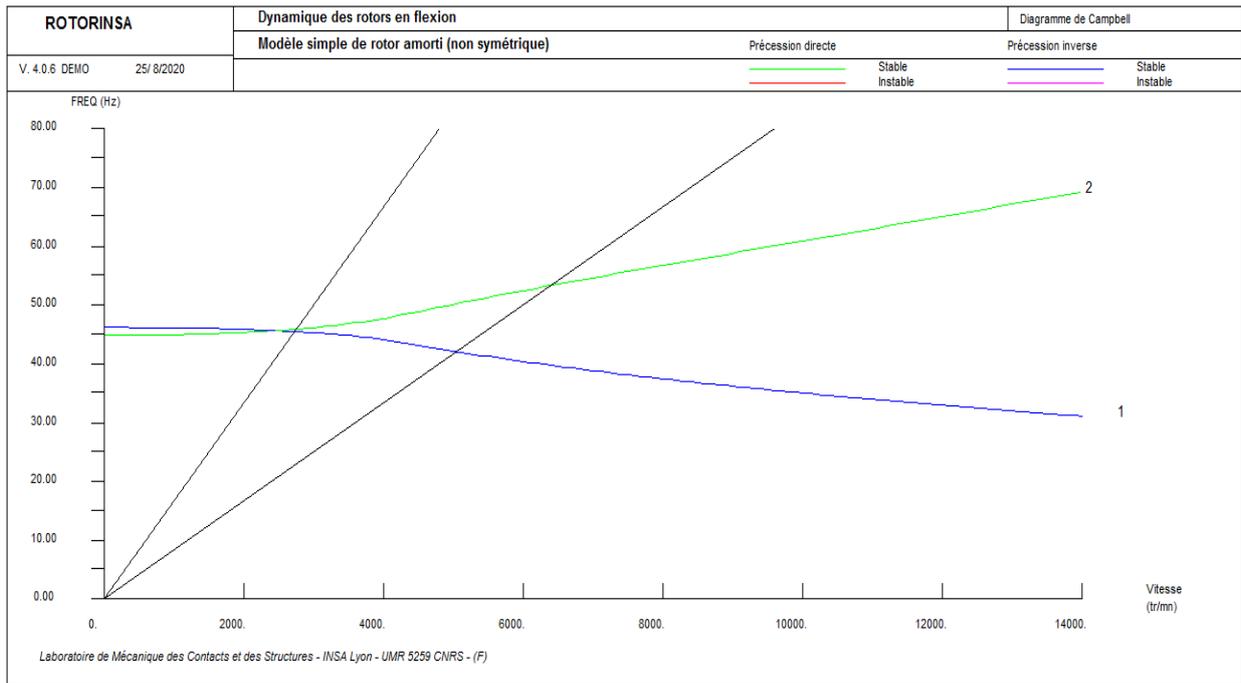


Fig.3.7 : Diagramme de Campbell, $\xi = 0.015$

3.5.5 Réponses au balourd

Les figures 3.8 et 3.9 illustrent les amplitudes de vibration du rotor au nœud 4 (nœud du disque) en fonction de la vitesse de rotation du rotor N , dus à un balourd de masse 10^{-4} kg, appliquée au périmètre du disque de rayon 0.15 m pour $\xi = 0.0002$ et $\xi = 0.015$ respectivement. Le diagramme de Campbell figure 3.6, donne l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation et permet de visualiser approximativement les vitesses critiques dues au balourd (points A, B, C et D) à cause de la présence de l'amortissement. Les vitesses critiques ne sont vraiment déterminées que lors de la réponse aux balourds ou de la réponse à une force asynchrone. Autrement, les vitesses critiques dues à un balourd ou à une force asynchrone ne correspondent pas exactement à l'intersection de courbes de fréquences avec la droite $f = N/60$ du diagramme de Campbell. Les vitesses critiques et les fréquences correspondantes sont (Fig.3.8) :

- $N_1 = 2692.99$ tr/mn $f_1 = 44.88$ Hz
- $N_2 = 3250.82$ tr/mn $f_2 = 54.18$ Hz

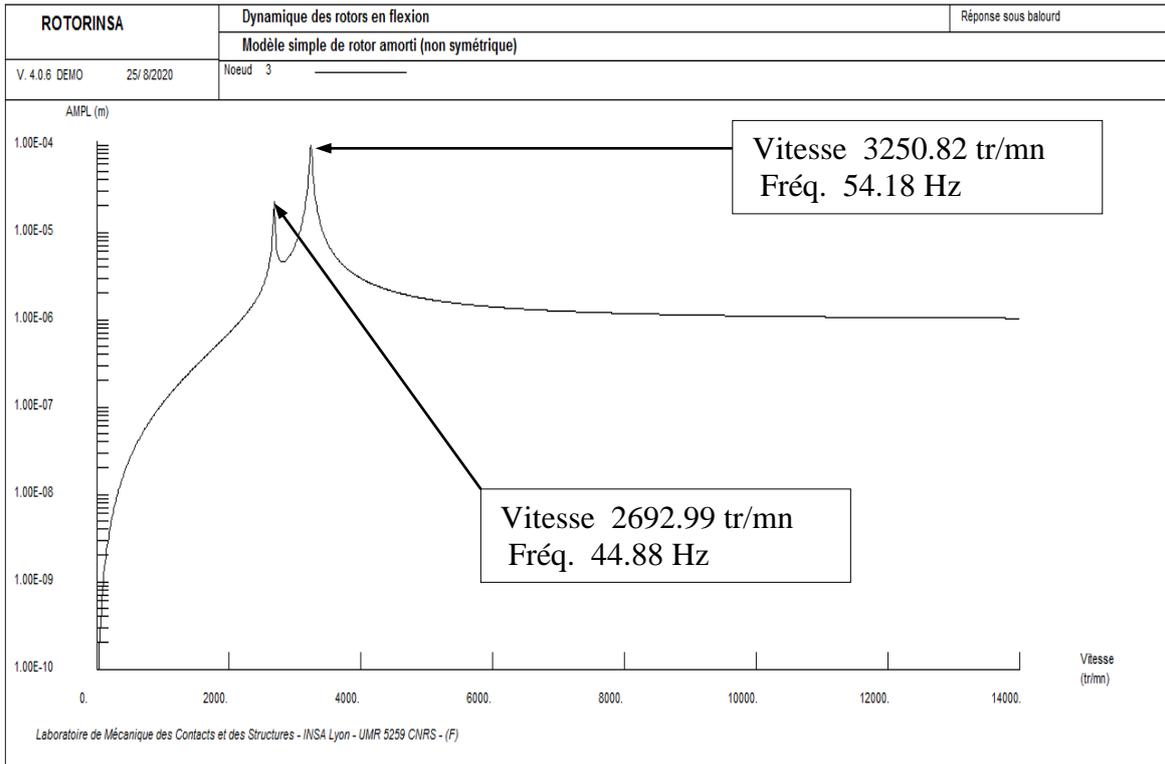


Fig. 3.8 : Réponse au balourd, $\xi = 0.0002$

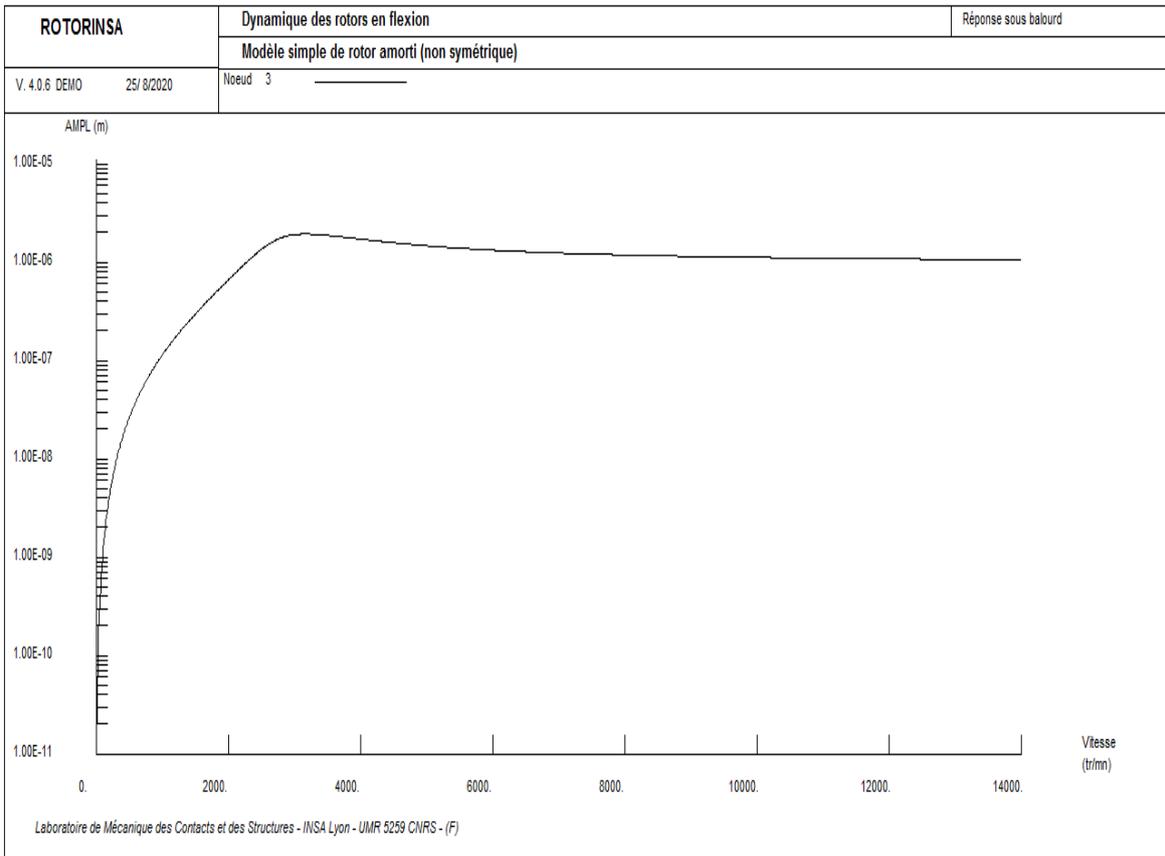


Fig. 3.9 : Réponse au balourd, $\xi = 0.015$

3.5.6 Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor

Pour voir l'influence de la rigidité et l'amortissement du palier viscoélastique sur la stabilité du rotor, supposons que les caractéristiques de rigidité et d'amortissement sont les suivantes : $k_{xx} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$; $k_{zz} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$; $k_{xz} = -k_{zx} = 4 \times 10^4 \text{ Ns/m}$; $c_{xx} = c_{zz} = 10^2 \text{ Ns/m}$; $c_{xz} = c_{zx} = 0$. La figure 3.10 représente le diagramme de Campbell. On remarque que ce système devient instable pour $N > 1345 \text{ tr/min}$, cette vitesse est dite vitesse seuil d'instabilité. Dans le logiciel ROTORINSA, le critère d'instabilité appliqué est celui de Routh-Hurwitz (voir chapitre 1). L'intersection de $f_1(N)$ et $f_2(N)$ avec les droites $f(N) = N/60$ et $f(N) = 0,5.N/60$, aux points **A**, **B**, **C** et **D** donne les vitesses critiques :

Force synchrone : balourd ($s = 1$):

- Au point **A** : $N_A = 2693.65 \text{ tr/mn}$ et $f_A = 44.89 \text{ Hz}$
- Au point **B** : $N_B = 3250.09 \text{ tr/mn}$ et $f_B = 54.17 \text{ Hz}$

Force asynchrone ($s = 0.5$) :

- Au point **C** : $N_C = 5039.88 \text{ tr/mn}$ et $f_C = 42.00 \text{ Hz}$
- Au point **D** : $N_D = 7302.08 \text{ tr/mn}$ et $f_D = 60.85 \text{ Hz}$

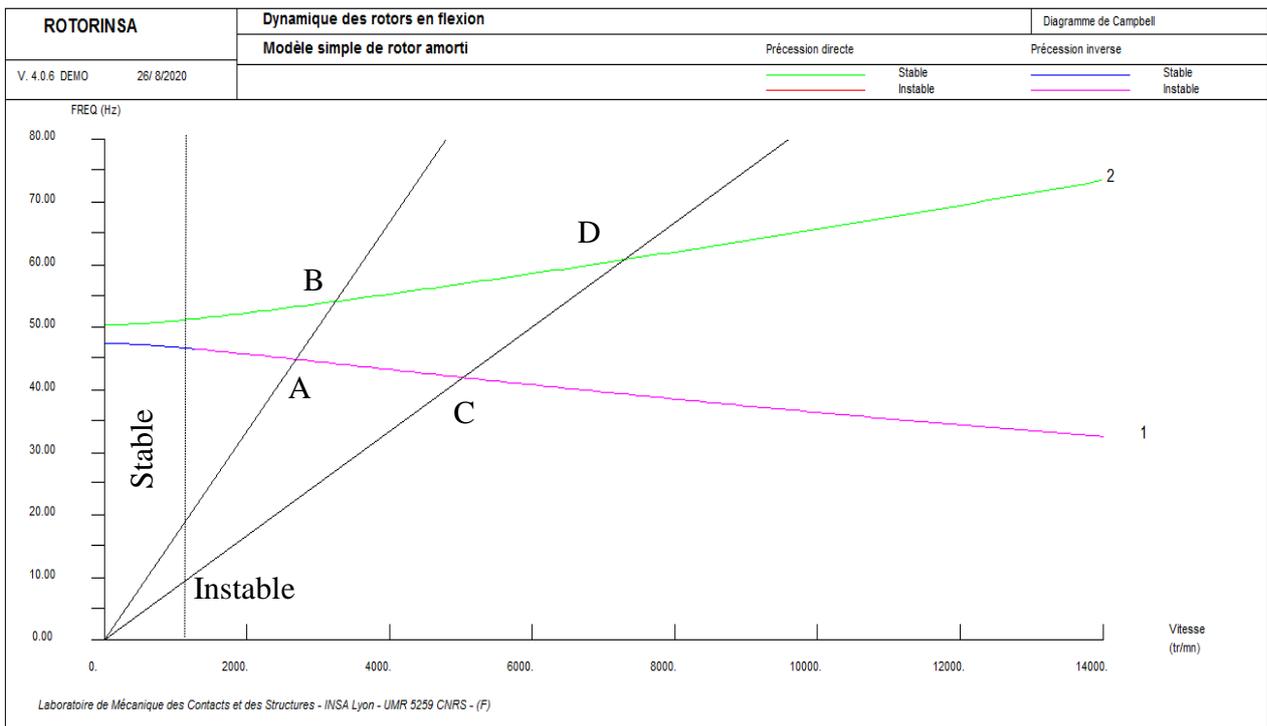


Fig. 3.10 : Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor

Conclusion Générale

Ce travail concerne l'étude théorique et la validation numérique du comportement dynamique en flexion d'un rotor simple anisotrope de type Lalane-Ferraris. L'anisotropie est due à la présence d'un palier viscoélastique.

Pour l'étude théorique, les équations du mouvement ont été obtenues en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange. Les fréquences propres varient en fonction de la vitesse de rotation à cause de l'effet gyroscopique dû au disque ou à l'arbre ainsi que les caractéristiques du palier hydrodynamique. Dans ce modèle étudié, l'anisotropie est introduite par la différence des raideurs et des amortisseurs du palier hydrodynamique selon X_0 est Z_0 . Les racines du polynôme caractéristique sont des paires de quantités complexes conjuguées. L'augmentation du facteur d'amortissement ξ a une influence sur l'évolution des fréquences propres et la variation du taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation. L'analyse de la stabilité est l'un des outils les plus puissants pour étudier et améliorer le comportement dynamique des machines tournantes. Le critère utilisé est très fiable pour l'étude de la stabilité et la détermination de la vitesse pour laquelle l'instabilité se manifeste.

Pour l'étude numérique, la méthode des éléments finis a été utilisée pour discrétiser les différents éléments du rotor. Une version démonstration du logiciel d'élément finis ROTORINSA a été utilisée pour l'application numérique. La formulation matricielle des équations du mouvement en dynamique des rotors en flexion par la méthode des éléments finis a été présentée en utilisant le formalisme de Lagrange. La méthode pseudo modale a été utilisée pour la résolution des équations du mouvement, est présentée à la fin du chapitre. Une application numérique d'un rotor du rotor du chapitre 2 a été présentée et commentée. Quelques résultats ont été présentés et commentés : le diagramme de Campbell et les instabilités et la réponse au balourd.

D'après les résultats obtenus, nous avons conclu :

- Les résultats théoriques et numériques sont très proches. La différence peut être due au nombre de modes insuffisant choisi dans la partie théorique ainsi que au maillage dans la partie numérique ;
- La prise en compte de l'effet gyroscopique dû aux disques ou aux arbres rend les fréquences propres du rotor varient en fonction de la vitesse de rotation. Le comportement libre du rotor est alors résumé par le traçage du diagramme de Campbell ;
- A partir du diagramme de Campbell, on peut déterminer les vitesses critiques de rotation dues aux balourds ou à des et forces extérieures asynchrones ; Les caractéristiques viscoélastiques du palier hydrodynamique rendent le modèle mathématique du rotor anisotrope et par conséquent les équations du mouvement sont non symétriques ;

Conclusion générale

- A cause de la présence de l'amortissement, le rotor peut devenir instable ;
- Dans le cas d'un modèle de rotor non symétrique, les trajectoires des nœuds de l'axe de rotation sont elliptiques ;
- Le nombre d'évolution des fréquences propres et le nombre de vitesse critiques est égales au nombre de modes choisis ;
- Le logiciel ROTORINSA est efficace en dynamique des rotors en flexion et permet de faire des applications industrielles sur de petites machines comme de grosses machines tournantes telles que les turboalternateurs.

Références bibliographiques

- [1] G. Genta, 'Dynamic of rotating systems', Mechanical Engineering series, Edition Springer, 2005.
- [2] J.S. Rao, "History of Rotating Machinery Dynamics", History of Mechanism and Machine, Science Series, Vol. 20, Springer Science & Business Media B.V. 2011.
- [3] A. Stodola, Dampf und Gas-Turbinen, Verlag von Julius Springer, Berlin. (English translation (1927) Steam and Gas Turbines, McGraw-Hill, New York, 1924.
- [4] S. Dunkerley, On the whirling and vibration of shaft. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 185, 279–359, 1894.
- [5] H. H. Jeffcott, The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance, Philos. Mag. 37, 304–315, 1919.
- [6] N. Frederick, "Rotor Dynamics without Equations", 2nd Internat. Journal of COMADEM. 10 (2007) 2–10.
- [7] W. Campbell, The Protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration, Trans. ASME, Vol. 46, 31–160, 1924.
- [8] Lalanne M., Ferraris G., *Rotordynamics Prediction in Engineering*, John Wiley & Sons Ltd, 2^{ème} edition, 1998.
- [9] B. L. Newkirk, Shaft whipping, General Electric Review, Vol. 27, 169-178, 1924.
- [10] A.L. Kimball, Internal friction theory of shaft whirling. Gen. Electric Rev., 27 (4), 244–251, 1924.
- [11] B. L. Newkirk, , H. D. Taylor, Shaft whirling due to oil action in journal bearings, Gen. Electr. Rev., 28 (7), 559–568, 1925.
- [12] B. L. Hummel, Kritische Drehzahlen als folge der Nachgiebigkeit der Schmiermittels im lager, VDI-Forschift, p.287, 1926.
- [13] B. L. Newkirk, Whirling balance shafts, 3rd ICAM, Stockholm, Proc. 3, 1931, pp. 105-110, 1930.
- [14] B.L. Newkirk, Shaft rubbing, Mech. Eng., 48 (8), 830–832, 1926.
- [15] Jacques M., *Surveillance Vibratoire et Maintenance Prédictive*. Techniques de l'Ingénieur, Traité Mesures et Contrôle, Doc. R 6 100, 10 décembre 2002
- [16] Y. Hori, A theory of oil whip. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 26 (2), 189–198, 1959.
- [17] A. Muszynska, "*Rotordynamics*", Boca Raton, Taylor & Francis, 2005.
- [18] Ambrosch F., Schwabel R., Method of and Device for Avoiding Rotor Instability to Enhance Dynamic Power Limit of Turbines and Compressors, United States Patent No. 4, , p. 273, June 1981.
- [19] Miller E.H., Rotor Stabilizing Labyrinth Seal for Steam Turbines, United States Patent No. 4, 1983.
- [20] Kirk R.G., Simpson M., Full Local Shop Testing of 1800 HP Gas Turbine Driven Centrifugal Compressor for Offshore Platform Service: Evaluation of Rotor Dynamics Performance, Proceedings of Symposium, Instability in

- Rotating Machinery, NASA CP 2409, Carson City, NV, 1985.
- [21] Wyssmann H.R., Theory and Measurements of Labyrinth Seal Coefficients for Rotor Stability of Turbocompressors, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, Texas A & M University, NASA Conf. Publ. No. 2443, 1986.
- [22] Brown R.D., Hart A., A Novel Form of Damper for Turbomachinery, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, Texas A & M University, NASA Conf. Publ. 2443, 1986.
- [23] Muszynska A., Bently D.E., Yuan J., Simulation Result for the Oil Whip of a Rotor Supported in a Poorly Lubricated Bearing, BRDRC Report 3, 1998b.
- [24] Bently D., Muszynska A., Anti-Swirl Arrangements Prevent Rotor/Seal Instability, Trans. of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 111, No. 2, , pp. 156–162, April 1989.
- [25] Yukio I., Toshio Y., Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications, Second Edition, 2012.
- [26] Rezaiguia A., Cours dynamique des machines tournantes, 2ème année Master CM, Département de Génie Mécanique, Université 8 Mai 1945-Guelma., 2020.
- [27] Roland B., Vibrations des Machines Tournantes et des Structures. Technique et Documentation, 1980.
- [28] S. S. Rao, Mechanical vibration, 5ème edition, 2005.
- [29] Dokainish, M.A., A New Approach for the Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique, Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, 1972, pp. 526–530.
- [30] Ruhl, R.L., Booker, J.F., A Finite Element Model for Distributed Parameters Turborotor Systems, Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 126–132, 1972.
- [31] Nelson, H.D., Mc. Vaugh, J.M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, pp. 593–600, 1976.
- [32] Meirovitch, L., Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff, Alphen an den Rijn, The Netherlands, 1980.
- [33] Ohga, M., Shigematsu, T., Hara, T., Structural Analysis by a Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, Computers and Structures, Vol. 17, 1983, pp. 321–326.
- [34] Degen, E.E., Shephard, M.S., Loewy, R.G., Combined Finite Element Transfer-Matrix Method Based on a Mixed Formulation, Computers and Structures, Vol. 20, 1985, pp. 173–180.
- [35] Subbiah, R., Kumar, A.S., Sankar, T.S., Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, 1988, pp. 448–452.
- [36] Schaeffer, H.G., MSC NASTRAN Primer, Schaeffer Analysis, Inc., Mount Vernon, New Hampshire, 1984.
- [37] Nour-Omid, B., Clough, R.W., Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, 1989, pp. 565–577.

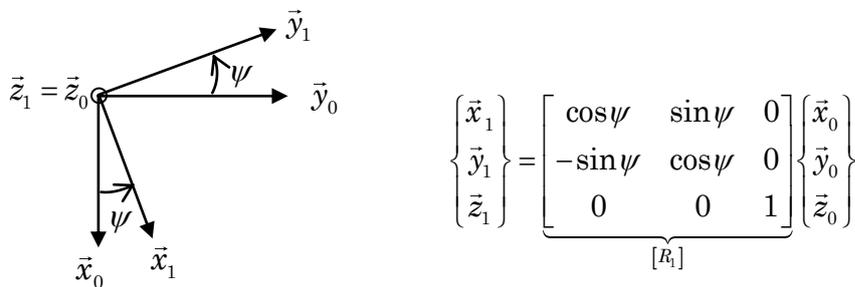
- [38] Wilson, E.L., Yuan, M., Dickens, J.M., Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 1982, pp. 813–821.
- [39] Arnold, R.R., Citerley, R.L., Chargin, M., Galant, D., Application of Ritz Vectors for Dynamic Analysis of Large Structures, *Computers and Structures*, Vol. 21, No. 3, 1985, pp. 461–467.
- [40] Guyan, R.J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, No. 3, 1965, p. 380.
- [41] Kidder, R.L., Reduction of Structural Frequency Equations, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, p. 892, 1973.
- [42] Rouch, K.E., Rao, J.S., Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by Finite Element Method, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 360–68, 1980.
- [43] Downs, B., Accurate Reduction of Stiffness and Mass Matrices for Vibration Analysis and a Rationale for Selecting Master Degrees of Freedom, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, 1980, pp. 412–416.
- [44] Shah, V.N., Raymond M., Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 89–98, 1982.
- [45] Subbiah, R., Bhat, R.B., Sankar, T.S., Dynamic Response of Rotors Using Modal Reduction Technique, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 111, 1989.
- [46] Kane, K., Torby, B.J., The Extended Modal Reduction Method Applied to Rotor Dynamic Problems, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, 1991.
- [47] Ratan, S., Rodriguez, J., Transient Dynamic Analysis of Rotors Using SMAC Techniques, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, October 1992.
- [48] Fuh, J., Chen, S., Berman, A., System Identification of Analytical Models of Damped Structures, *Proc. of AIAA Conference*, Palm Springs, CA, 1984, pp. 112–116.
- [49] Lund, J.W., Orcutt, F.K., Calculation and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor, *ASME Trans., Journal of Engineering for Industry*, Vol. 89, 1967, pp. 785–796.
- [50] Mucino, V.H., Pavelic, V., An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, pp. 295–303, 1981.
- [51] Pugnet J.M., *Dynamique des Machines Tournantes pour la Conception des Turbines à Vapeur et des Compresseurs Centrifuges : de la Théorie à la Pratique*, thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 2010

Annexe 1

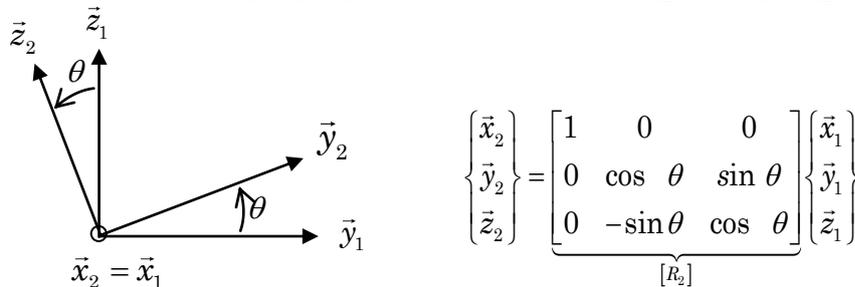
Détermination du vecteur rotation du disque

Le système d'axe et de coordonnées utilisés dans l'étude de la cinématique et dynamique des rotors en flexion est présenté sur la **figure 2.1** du chapitre 2.

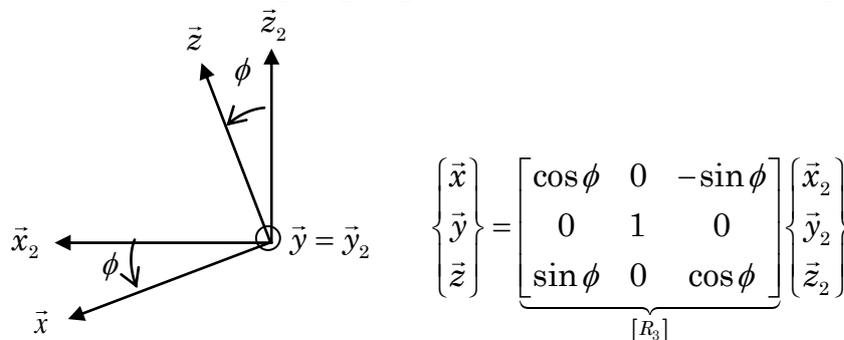
Première rotation : $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{rot}(\psi, Z_0)} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$



Deuxième rotation : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{rot}(\theta, \vec{x}_1)} (\vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$



Troisième rotation : $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \xrightarrow{\text{rot}(\phi, \vec{y}_2)} (\vec{x}, \vec{y} = \vec{y}_2, \vec{z})$



D'où le vecteur rotation :

$$\vec{\omega} (R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\phi} \vec{y}$$

Expression de $\vec{\omega}(R/R_0)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = [R_3] \begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix} = [R_3]^T \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}$$

D'où : $\vec{x}_2 = \cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z}$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} &= [R_3][R_2] \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} = [R_2]^T [R_3]^T \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\vec{z}_1 = -\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}$

Le vecteur rotation exprimé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(R/R_0) &= \dot{\psi} [-\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}] + \dot{\theta} [\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z}] + \dot{\phi} \vec{y} \\ &= (\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) \vec{x} + (\dot{\phi} + \sin \theta) \vec{y} + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \vec{z} \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Annexe 2

Détermination de la matrice d'inertie du disque

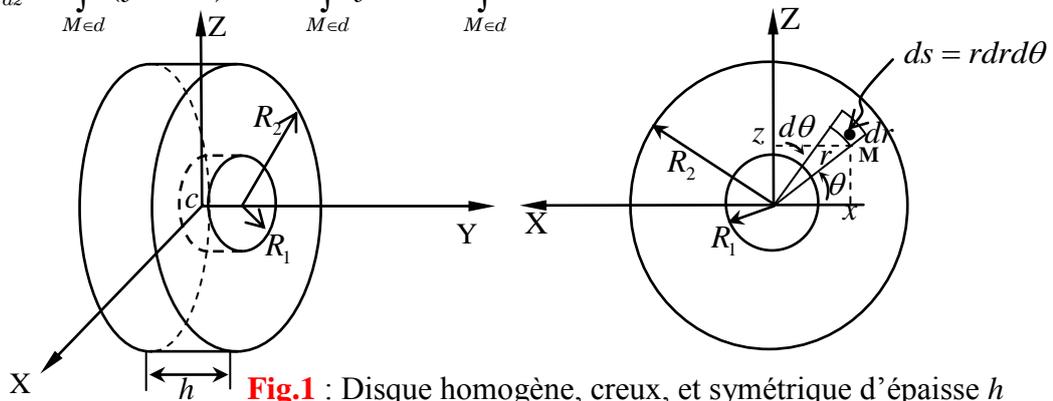
La base finale $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est la base principale d'inertie. Dans cette base, la matrice d'inertie du disque est de la forme suivante :

$$I_C(D) = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les axes (o, \vec{x}) , (o, \vec{y}) et (o, \vec{z}) sont appelés les *axes principaux d'inertie*. Les moments I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} sont appelés les *moments principaux d'inertie*. La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi(R_2^2 - R_1^2)\rho h$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \int_{M \in d} (y^2 + z^2) dm = \int_{M \in d} y^2 dm + \int_{M \in d} z^2 dm$$



Avec

$$\int_{M \in d} y^2 dm = \frac{M_d}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{M_d h^2}{12}$$

$$\int_{M \in d} z^2 dm = \frac{M_d}{s_d} \int_{M \in d} z^2 ds = \frac{M_d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{M \in d} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

$$= \frac{M_d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M_d(R_2^4 - R_1^4)}{4(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{M_d(R_1^2 + R_2^2)}{4}$$

D'où les moments d'inerties du disque :

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2), \quad I_{dy} = \int_{M \in d} (x^2 + z^2) dm = \frac{M_d(R_1^2 + R_2^2)}{2}$$

Énergie de déformation d'un arbre en flexion

3.1 Rappels d'élasticité

Considérons un arbre continu repéré dans une base orthonormée (x,y,z) , un point $B(x,y,z)$ de ce milieu continu qui subit, à un instant donné t , des déplacements (u^*, v^*, w^*) , des déformations ε_{ij} et des contraintes σ_{ij} . Ces grandeurs sont définies et reliées par les relations suivantes :

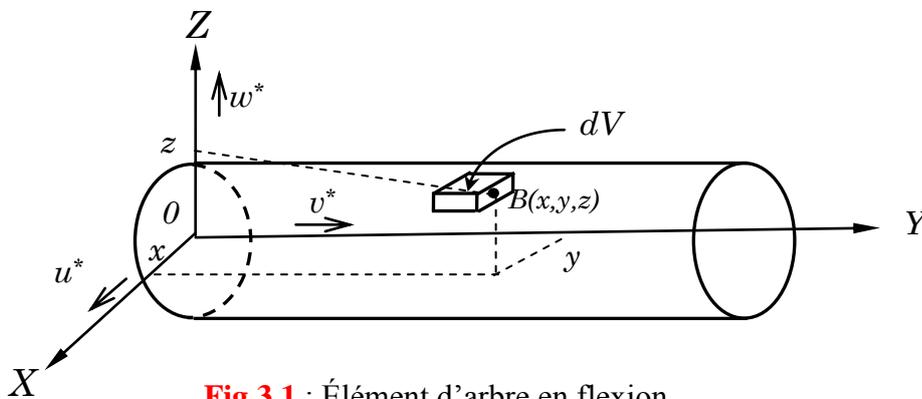


Fig.3.1 : Élément d'arbre en flexion

Déplacements :

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x, y, z, t) \\ v^* &= v^*(x, y, z, t) \\ w^* &= w^*(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} u_i^*, \quad i=1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

Contraintes : Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

Avec

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{ Constantes de Lamé}$$

E : Module d'élasticité d'Young ν : Coefficient de Poisson

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases} \quad \text{Symbole de Kronecker}$$

3.2 Énergie de déformation par unité de volume

L'énergie de déformation par unité de volume est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \quad (3.4)$$

Les contraintes sont liées aux déformations par les relations suivantes (loi de Hooke) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & [0] & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.5)$$

Avec $[D]$ est la matrice des coefficients d'élasticité.

De Saint Venant a démontré que :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (3.6)$$

Avec cette hypothèse, on peut analyser le comportement d'un élément d'arbre qui décrit par les déformations du centre de gravité de la section. La **figure 2** représente les contraintes non nulles sur la face d'un élément d'arbre. Avec les l'hypothèses définies par les relations (C.6), et en tenant compte des relations générales de l'élasticité, on montre que (on néglige les déformations dues à σ_{yz} et à σ_{yx}) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^*}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

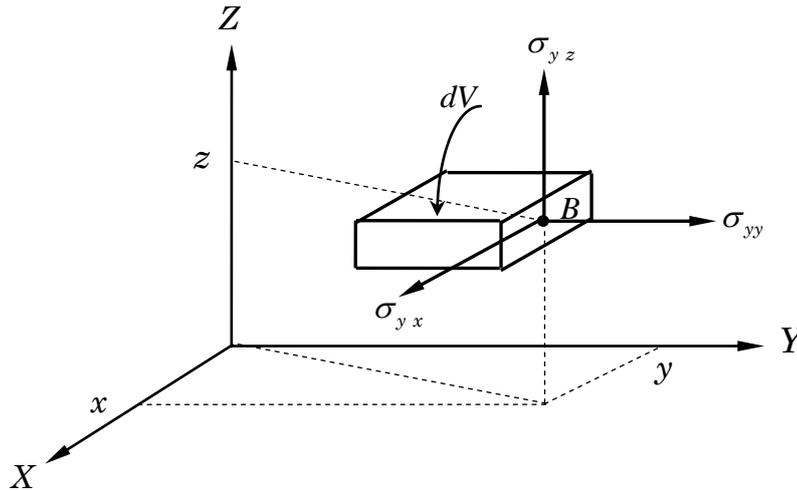


Fig.3.2 : Contraintes non nulles sur une façade d'un élément de volume de l'arbre en flexion

Avec

$\frac{\partial v^*}{\partial y}$: Résulte de la traction- compression suivant l'axe (O, Y)

$z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}$ et $x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}$: Résultent de la flexion dans les plans (O, Y, Z) et (O, X, Y)

L'énergie de déformation par unité de volume se simplifie à :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} \quad (3.8)$$

Selon l'hypothèse de Saint Venant, on peut démontrer que $(\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0 \rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{yy})$:

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (3.9)$$

3.3 Énergie de déformation totale de l'arbre

L'énergie de déformation totale de l'arbre est obtenue en intégrant sur son volume :

$$U_a = \int_V U dV = \int_0^L \int_{S_a} U ds dy = \frac{1}{2} E \int_0^L S \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^L I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^L I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (3.10)$$

Avec S est la section de l'arbre, I_x est le moment d'inertie de section par rapport à l'axe (O, X) ($I_x = \int_s z^2 ds$), I_z est l'inertie de section par à l'axe (O, Z) , ($I_z = \int_s x^2 ds$).

Pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation total se simplifie à :

$$U_a = \underbrace{\frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy}_{\text{Energie de flexion}} + \underbrace{\frac{ES}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} \right)^2 dy}_{\text{Energie de trac-comp}}$$

Résumé

Ce travail concerne l'étude théorique et numérique du comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti pour voir l'influence de l'amortissement et de la rigidité du palier viscoélastique sur la stabilité du mouvement de flexion du rotor. La démarche commence par la détermination des caractéristiques des éléments de rotors : disque, arbre, balourd, et palier viscoélastique. Nous avons utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange dans la partie théorique et la méthode des éléments finis dans la partie numérique. L'application numérique s'effectue par le logiciel ROTORINSA. Plusieurs résultats théoriques et numériques sont présentés : diagramme de Campbell, réponse au balourd et effet de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor.

Mots clés : Rotor flexible, Stabilité, Palier viscoélastiques, ROTORINSA.

Abstract

This work concerns the theoretical and numerical study of the dynamic bending behavior of a damped rotor to see the influence of damping and the stiffness of the viscoelastic bearing on the stability of the bending motion of the rotor. The process begins with determining the characteristics of the rotor elements: disc, shaft, unbalance, and viscoelastic bearing. We used the Rayleigh-Ritz method and Lagrange's equations in the theoretical part and the finite element method in the numerical part. The numerical application is carried out by the ROTORINSA software. Several theoretical and numerical results are presented: Campbell diagram, unbalance response and the effect of stiffness and damping on rotor stability.

Keywords: Flexible rotor, Stability, Viscoelastic bearing, ROTORINSA.

ملخص

هذا العمل هو عبارة عن دراسة نظرية وعددية لسلوك الانحناء الديناميكي لدوار مخمد لمعرفة تأثير التخميد وصلابة المحمل اللزج المرن على استقرار حركة الانحناء للدوار. تبدأ العملية بتحديد خصائص عناصر الدوار: القرص، والعمود، وعدم الاتزان، والمحمل اللزج المرن. استخدمنا طريقة Rayleigh-Ritz ومعادلات Lagrange في الجزء النظري وطريقة العناصر المحدودة في الجزء العددي. يتم تنفيذ التطبيق العددي بواسطة برنامج ROTORINSA تم عرض العديد من النتائج النظرية والعددية: مخطط كامبل واستجابة عدم التوازن وتأثير الصلابة والتخميد على استقرار الدوار.

الكلمات الرئيسية: دوار مرن، ثبات، محمل مطاطي، ROTORINS