**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université 8 Mai 1945 Guelma**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière**
**Département de Mathématiques**

**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

**M<sup></sup>r Bechkit Ala-eddine**

# Intitulé

# Equations stationnaires d'un gaz visqueux

**Dirigé par : Dr. AYACHI A.**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr. *BELHIRECHE H.* | MCA | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. *AYACHI A.* | MCA | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. *MERAD M.* | MCA | Univ-Guelma |

**Session Juin 2020**

# Table des matières

# Remerciements

*Je remercie d'abord et avant tout ALLAH qui m'a donné le courage, la volonté et la patience pour continuer mes études et pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à remercier, particulièrement, Mme A. AYACHI qui a accepté de diriger ce travail. Sa grande disponibilité et ses encouragements ont joué un rôle important dans la réalisation de ce mémoire.*

*Mes remerciements s'adressent également au président et aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.*
*Qu'ils trouvent ici, le gage de mon infinie gratitude.*

*Enfin, je remercie tous ceux, qui de prés ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce mémoire*

# Résumé

*On considère le système d'équations décrivant le mouvement de l'air qui passe sur une montagne, c'est-à-dire sur des lieux élevés pour l'équation monodimentionnelle du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère.*

*Dans la première partie, on montre l'existence d'une solution d'équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre, en utilisant* ***le théorème du point fixe de Schauder****.*

*Dans la deuxième partie, on applique le résultat obtenu dans la première partie pour montrer l'existence d'une solution d'équation du mouvement stationnaire dans un domaine d'une dimension spatiale avec la viscosité et la thermoconductibilité dans un voisinage de la solution d'équation sans viscosité et sans thermoconductibilité, pourvu que les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité soient suffisamment petits.*

# ملخص

سوف نقوم بإعتبار نظام المعادلات الذي يصف حركة الهواء المار فوق الجبل، بمعنى أخر في المرتفعات من اجل معادلة في مجال ذو بعد أحادي الوضعية لحركة ثابتة لغاز لزج ناقل للحرارة.

في الجزء الأول ،سنظهر وجود حل للمعادلة التفاضلية غير الخطية العادية من الدرجة الثانية، باستخدام **نظرية النقطة الثابتة لشاودر.**

في الجزء الثاني،سنطبق النتيجة المقدمة في الجزء الأول لإظهار وجود حل لمعادلة الحركة الثابتة في مجال ذي أبعاد مكانية مع اللزوجة والموصلية الحرارية في جوار حل المعادلة دون اللزوجة و دون الموصلية الحرارية، بالنظر إلى أن معاملات اللزوجة والموصلية الحرارية صغيرة بما فيه الكفاية.

# Abstract

*We consider the system of equations describing the movement of air passing over a mountain, that is to say over elevated places for the onedimensional equation of the stationary movement of a viscous and caloriferous gas.*

*In the first part, we will show the existence of nonlinear second order ordinary differential equation solution, by using* ***the Schauder's Fixed-point theorem****.*

*In the second part, we will apply the result provided in the first part to proof the existence of a solution of stationary movement equation in a spatial dimension domain with viscosity and heat conductivity in the vicinity of the equation solution without viscosity and without heat conductivity.*

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Introduction générale

L'atmosphère terrestre est un mystère considéré comme une immense outil thermique dont le foyer est le soleil qui par ses rayons réchauffent le sol et les nuages. Elle fait partie de notre environnement immédiat : nous y vivons, nous nous y déplaçons et nous respirons son air.

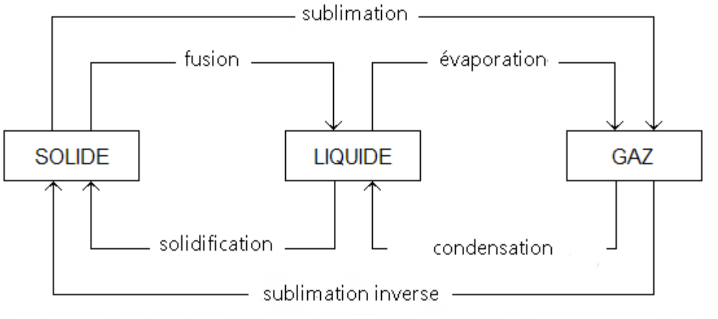
Ce phénomène ou plutôt cette machine thermique sa définition à longtemps été problématique qui a embarrassé les physiciens et les météorologiques malgré les moyens limites dont ils disposent pour étudier l'atmosphère terrestre de celà règne le vide. Ces scientifiques ont été obligés de se contenter le plus souvent d'observation très indirectes et de procéder par induction à la lumière de cette lecture nous montre que par quelques expériences effectuées que les physiciens métérologiques commençent à s'approcher beaucoup de l'explications véritable des phénomène naturels par analogue.

Les nuages sont des masses d'air contenant de l'eau sous forme liquide. Ils se forment donc lorsque l'humidité relative de l'air est supérieure à 100 ils sont portés par le vent. S'ils rencontrent des masses d'air froid, ils se transforment en pluie. Si ce sont des masses d'air chaud qui sont leur chemin, alors ils se désintègrent. En effet, les gouttelettes tombent vers la terre mais l'air les remonte.

## 1.2 Quelques rappels sur les phénomènes physiques

Physiquement, un nuage résulte de la condensation de la vapeur d'eau par refroidissement d'une masse d'air humide. Un nuage est donc un ensemble de minuscules gouttelettes d'eau en suspension dans l'atmosphère.

L'atmosphère contient l'eau à l'état gazeux et avec des proportions dans l'air très variables. A la différence des autres molécules comme $N_2$ où $O_2$ qui restent toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, l'eau ($H_2O$) conçerne les trois états solide, liquide et gazeux et les six types de transition de phase de l'eau, à savoir entre l'état gazeux et liquide on a condensation-fusion, gazeux et solide on a sublimation-sublimation inverse.




Un diagramme d'illustration des phases de l'eau dans la nature

Dans ce mécanisme la quantité appelée pression de la vapeur saturée $\bar{p}_{vs}(T)$ joue un rôle fondamental. En effet, la "condensation" (transition de gaz en liquide) de la vapeur d'eau se réalise lorsque, à une température supérieure à celle de fusion de $H_2O$, la pression de la vapeur d'eau (c'est-à-dire pression partielle de la vapeur dans l'air) dépasse la pression de la vapeur saturée $\bar{p}_{vs}(T)$, valeur critique au-delà de laquelle les molécules de $H_2O$ en état gazeux tendent à s'établir en état liquide. S'il existe une surface de l'eau liquide exposée dans l'air et la pression de la vapeur devient inférieure à la pression de la vapeur saturée $\bar{p}_{vs}(T)$, les molécules de $H_2O$ se trouvant à la surface de l'eau liquide commencent à sortir du liquide, en réalisant le processus "d'évaporation". On rappelle que la valeur de $\bar{p}_{vs}(T)$ est déterminée essentiellement par la température $T$ .

De manière analogue, aux température inférieure à celle de "fusion" et à la présence d'une surface de glace exposée dans l'air, si la pression de la vapeur dépasse la pression de la vapeur saturée relative à l'état solide $\bar{p}_{vs}(T)$, alors il y aura la "sublimation (inverse)" de gaz en solide de la vapeur d'eau présente dans l'air ; autre part, si la pression de la vapeur devient inférieure à la pression de la vapeur saturée relative à l'état solide $\bar{p}_{vs}(T)$, alors il y aura la "sublimation" de solide en gaz à partir de la surface de la glace (pour les détails de ces processus).

D'autre part, la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère fournit la chaleur à l'air (chaleur latente), si la chaleur latente est "absorbée" par le processus d'évaporation. Les mêmes quantités de la chaleur doit être "donnée" par le processus de condensation. La quantité de la chaleur donnée à (ou retirée de) l'air peut être exprimée par le produit de la chaleur latente $L_{gl}$ et de la quantité de condensation $H_{gl}$ qui constitue un facteur important dans les phénomène météorologiques.

L'étude d'un modèle mathématiques du mouvement qui décrit de manière suffisamment complète les phénomènes atmosphériques et météorologiques c'est-à-dire un modèle mathématique cohérent du point de vue physiques et mathématiques. Or, pour formuler un système d'équations qui d'écrive la transition de phase entre tous les deux étas gazeux et liquide de l'eau dans l'atmosphère, il faut d'abord considérer séparément les quantités physiques pour la partie de l'air formée par les molécules différentes de $H_2O$ et les quantités physiques concernant $H_2O$ contenu ou suspendu dans l'atmosphère. Puis on doit décrire le processus de transition de phase dans l'atmosphère au même temps que le mouvement de l'air.

## 1.3 Contenu de le mémoire

Le présent mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre est déduit à l'introduction.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle le système d'équations développé dans [5] [6], Ce système d'équations modélise le mouvement de l'air contenant la vapeur d'eau et prend en considération toutes les transformations de phase de l'eau (pour le modèle en deux états seulement entre le gaz et le liquide). Du point de vue mécanique le modèle s'appuie sur les équations du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère [?] ; on y prend en considération tous les paramètres physiques à savoir, la densité, la température, la vitesse et la pression.

Dans le troisième chapitre, on donne un résultat pour un cadre plus général cas d'équation différentiel ordinaire non linéaire, on montre l'existence de la solution locale, en utilisant ***théorème du point fixe de Schauder.***

Dans le dernier chapitre, on va appliquer ce résultat à notre équation monodimensionnelle dans un régime stationnaire qui représente le phénomène du vent qui traverse une chaîne de montagne c'est-à-dire sur les lieux élevés, on montre l'existence d'une solution avec la condition de l'entrée et de la sortie du domaine du gaz dans un voisinage de la solution de l'équations sans viscosité et sans thermoconductibilité, sous la condition que les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité sont petits. Le continue de ces deux chapitres correspond au contenu de l'article [2].

# Chapitre 2

# Préliminaire : Présentation des équations du mouvement de l'atmosphère

Dans ce chapitre, on va rappeler les équations de la mécanique des fluides (plus précisément les équations d'un gaz visqueux), qui décrivent le mouvement de l'air (voir [8]), en tenant compte les transitions de phase de l'eau et ses conséquences (pour le modèle en deux état seulement gaz-liquide) nous avons suivi des modèles développés dans une série de travaux (voir [3], [5], [6], [13]), qui à leur tour se sont basés sur les descriptions des phénomènes physiques données dans [9], [10], [14]. Avant de rappeler le système d'équations qui modélise le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase d'eau, il est utile de rappeler des quantités physiques que nous devons considérer :

$\rho_0 = \rho_0(t, x)$ la densité de l'air sec.

$\pi = \pi(t, x)$ la densité de $H_2O$ en état gazeux.

$\sigma(m) = \sigma(m, t; x)$ la densité de $H_2O$ en état liquide contenue dans des gouttelettes de masse $m$.

$\nu = \nu(t, x) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\nu_1(t, x), \nu_2(t, x), \nu_3(t, x))$ la vitesse de l'air composé par l'air sec et la vapeur d'eau.

$T = T(t, x)$ la température de l'air.

$p = p(t, x)$ la pression.

## 2.1 Equation de conservation de la masse

Comme il n'y a pas de possibilité de convertir $H_2O$ en l'un des éléments de l'air sec ou vice-versa, la loi de conservation de la masse pour l'air sec (dont la densité est notée $\rho_0$) est exprimée par l'équation classique (absence de transition de phase)

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla.\left(\rho_0 \nu\right) = 0. \tag{2.1}$$

Pour la vapeur d'eau (dont la densité est notée $\pi$), en rappelant que $H_{gl}(T, \pi, \sigma(m))$ représente la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de $H_2O$ qui se transforme du gaz au liquide (son éventuelle valeur négative signifie la quantité de $H_2O$ qui se transforme du liquide au gaz), nous avons l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse pour l'air avec la vapeur d'eau

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla.\left(\pi \nu\right) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma(.)). \tag{2.2}$$

Dans la suite on va préciser la définition de la fonction $H_{gl}$ où la question délicate est la description de la formation et de la disparition des gouttelettes.

## 2.2 Equation de la quantité de mouvement

Comme on le connaît bien (voir[7]), l'équation exprimant la loi de conservation de la quantité du mouvement, est donnée par

$$\rho(\frac{\partial \nu}{\partial t}+(\nu.\nabla)\nu) = \eta\Delta\nu+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.\nu)-\nabla p-[\int_0^\infty \sigma(m)dm+\rho]\nabla\Phi-2\rho\omega\times\nu, \tag{2.3}$$

avec $\rho = \rho_0 + \pi$ ; où nous désignons par $\Phi$ le géopotentiel et par $\eta$ et $\zeta$ les coefficients de viscosité de l'écoulement et volumique, $\omega$ est la vitesse angulaire de la rotation de la terre.

Si on néglige la force de Coriolis, l'équation se réduit à

$$\rho(\frac{\partial \nu}{\partial t}+(\nu.\nabla)\nu)=\eta\Delta\nu+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.\nu)-\nabla p-[\int_0^\infty \sigma(m)dm+\rho]\nabla\Phi. \quad (2.4)$$

On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air n'est pas très différent de celui du gaz idéal, nous pouvons donc supposer que la pression $p$ est donnée par

$$p=\frac{R}{\mu_m}\rho T=R_1\rho T, \quad (2.5)$$

où $R$ et $\mu_m$ sont respectivement la constante universelle du gaz et la masse molaire moyenne de l'air (voir[6] [13]).

## 2.3 Equation du bilan de l'énergie de l'air

En ce qui concerne l'équation du bilan de l'énergie (voir [7]), qui est exprimée en fonction de la température $T$ et avec l'expression de la pression (2.5) et la chaleur latente $L_{gl}$, la forme de l'équation du bilan de l'énergie de l'air est la suivante

$$\begin{aligned}&\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+\nu.\nabla T)=\kappa\Delta T+p\nabla.\nu\\&+\eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.\nu)\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j}+\zeta(\nabla.\nu)^2+L_{gl}(T)H_{gl},\end{aligned} \quad (2.6)$$

où $c_v$ la chaleur spécifique et $\kappa$ le coefficient de conductibilité thermique.

## 2.4 Formation des nuages par le vent passant sur une montagne

Quand l'air monte sur une montagne, la pression diminue, alors à cause de la transformation adiabatique de l'air, la température descend, ainsi la densité de la vapeur saturée diminue, alors la densité réelle de la vapeur peut devenir plus grande que celle de la vapeur saturée c'est-à-dire $[\pi(x)-\bar{\pi}_{vs}(T(x))]>0$, donc la condensation de la vapeur a lieu, finalement se forme les nuages. Après le passage sur la montagne c'est-à-dire le vent descend, alors la température augmente, ainsi la densité de la vapeur saturée augmente, finalement l'aura lieu d'évaporation des gouttelettes d'eau (évaporation des nuages).

Rappelons d'abord les aspects principaux de la transition de phase de $H_2O$ dans l'atmosphère. Comme il est bien connu, pour que l'évaporation du liquide s'effectue il faut apporter de la chaleur (chaleur latente), au contraire, si la chaleur n'est pas fournie de l'extérieur l'évaporation du liquide doit s'accompagner de son refroidissement.

La chaleur latente $L_{gl}$ est donnée approximativement par

$$L_{gl} = L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72T)10^3 \quad (J/kg),$$

(voir [9]).

D'autre part, la quantité de condensation est déterminée par la relation entre la pression de la vapeur saturée (relative à l'état liquide) $\bar{p}_{vs}(T)$ et la quantité de $H_2O$ présente en état gazeux ; $\bar{p}_{vs}(T)$ est une pression correspondante à l'état d'équilibre entre la vapeur et d'eau liquide (la quantité de la vapeur qui se transforme de gaz au liquide est égale à la quantité qui se transforme de liquide au gaz) est donnée approximativement par

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0.10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, E_0 = 6,107 \quad (mbar)$$

(voir[9]).

La vapeur d'eau dans l'air se transforme en liquide quand la densité de la vapeur dépasse la densité de la vapeur saturée, la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ doit être donnée par

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_h}{RT}\bar{p}_{vs}(T)$$

avec

$$\mu_h = 18.01(g/mole) \quad R = 8.314(j/mole)$$

où $\mu_h$ est la masse molaire de $H_2O$ (voir [6], [13]).

Selon les physiciens, la quantité de condensation est donnée par la variation de $H_2O$ dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$, qui peut être écrite par

$$H_{gl} = K\left[\pi(x) - \bar{\pi}_{vs}(T(x))\right]^+,$$

où $[\quad]^+$ désigne la partie positive et $K$ est le coefficient associé à la vitesse de condensation. Le coefficient $K$ est assez grand de sorte que la presque totalité de la partie de la vapeur qui dépasse $\bar{\pi}_{vs}(T(x))$ se transforme en liquide assez rapidement.

## 2.5 Equations du mouvement stationnaire

Comme les quantités physiques telles que la vitesse, la densité et la température ne changent pas dans le temps et que le mouvement reste constant dans le temps, nous devrons considérer l'écoulement stationnaire, en posant

$$\partial_t \rho = 0, \quad \partial_t \nu = 0, \quad \partial_t T = 0.$$

Ainsi, on a le système d'équations à considérer

$$\nabla.(\rho\nu) = 0, \tag{2.7}$$

$$\rho(\nu.\nabla)\nu = \eta\Delta\nu + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.\nu) - \frac{R}{\mu_m}\nabla(\rho T) - [\int_0^\infty \sigma(m)dm + \rho]\nabla\Phi, \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} \rho c_v(\nu.\nabla T) = \kappa\Delta T - \frac{R}{\mu_m}\rho T\Delta.\nu \\ +\eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial\nu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\nu_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.\nu)\frac{\partial\nu_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla.\nu)^2 + L_{gl}(T)H_{gl}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Si nous considérons les équations (2.1),(2.4),(2.6) qui décrivent le mouvement de l'atmosphère, alors nous avons un système d'équations de type paraboliques accouplés avec une équation de type hyperbolique de premier ordre (l'équation (2.1)) est très compliqué à résoudre. Si on passe au système stationnaire (2.7)-(2.9), alors nous aurons un système d'équations de type elliptiques accouplés avec l'équation de continuité de la masse, celà ne signifie pas que la résolution des équations (2.7)-(2.9) soit facile, ce qui implique qu'on a besoin d'une méthode différente pour la résolution.

## 2.6 Modèle du mouvement de l'air monodimensionel dans un régime stationnaire

Afin de simplifier l'aspect mathématique, nous suggérons d'étudier les équations du mouvement stationnaire dans le cas où le champ est réduit à une dimension, car dans le cas que nous avons vu dans la section précédente ce n'est pas facile à résoudre. Cependant, dans cette catégorie, on peut inclure un flux d'air à peu près unidimensionnel passant sur une "montagne", c'est-à-dire sur une surface dont l'altitude varie. Cette approximation peut être utilisée comme un modèle simplifié de la formation des nuages par le vent passant sur une montagne.

Nous supposons que la fonction $h(x_1)$ de la hauteur de la surface terrestre à travers laquelle l'air passe est suffisamment régulière. Pour décrire le modèle de l'écoulement de l'air qui passe sur une montagne, on va considérer cet écoulement dans une couche proche de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$.

Pour modéliser ce phénomène par des équations en une dimension, définissons la vitesse $\omega$ le long de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$.

$$\omega = \left(1 + \left(\frac{dh}{dx_1}\right)^2\right)^{-1/2} \left(\nu_1 + \frac{dh}{dx_1}\nu_3\right),$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ étant le vecteur vitesse, c'est-à-dire $\omega$ est la composante de la vitesse $\nu$ dans la direction

$$\vec{\xi} = (\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}, 0, \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}})^T, \quad (h' = \frac{d}{dx_1}h(x_1)).$$

En outre, on a besoin d'introduire la “section du courant”, qui n'est pas définie à priori, et l'effet de la friction avec la surface terrestre. Pour que la “section du courant”, ou l'épaisseur de la couche, soit déterminée de manière cohérente lors de la description du mouvement de l'air en trois dimensions représentées par le système d'équations (2.7)-(2.9), il faut qu'elle doit être déterminée de sorte que la pression en fonction de la densité et de la température à l'intérieur de l'écoulement dans la couche qui considérée soit coïncide avec celle de l'extérieure.

Nous considérons le mouvement stationnaire de l'air dans une couche près de la surface comme si l'air se déplaçait dans un tube que nous construisons dans notre esprit. Ainsi, dans la suite on écrit simplement $x$ au lieu de $x_1$ nous désignons par $S(x)$ la “section” du courant (ou du tube). Alors, en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction $\vec{\xi}$ et la dérivée par rapport à $x$, pour l'écoulement stationnaire, on déduit l'équation de continuité "en tuyau."

$$\frac{d}{dx}(\frac{\rho S\omega}{\sqrt{1+h'^2}})=0 \tag{2.10}$$

Pour l'équation de la quantité de mouvement, on considère l'équation du mouvement stationnaire (2.8) multipliée par $\vec{\xi}$ ; on y introduit le terme de la friction avec la surface $-\alpha\omega$ et le gradient de la pression de base $\gamma$, de sorte que pour $\omega$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\rho S\omega}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}\omega &= f_1\frac{d^2\omega}{dx^2}+f_2\omega\\ -\frac{R_1}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\rho ST) &- \frac{\rho S}{\sqrt{1+h'^2}}h'g-\alpha\omega+\gamma\end{aligned} \tag{2.11}$$

où

$$f_1=\frac{1}{1+h'^2}[\frac{\eta}{3}(3h'^2+4)+\zeta],$$

$$f_2=\frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2[-\frac{\eta}{3}(h'^2+4)+\zeta(2h'^2-1)]-h'(\zeta+\frac{\eta}{3})h''',$$

$(h''=\frac{d^2}{dx^2}h(x), h'''=\frac{d^3}{dx^3}h(x))$.

L'expression des coefficients $f_1$, $f_2$ résulte des calculs assez longs mais élémentaires.

Pour l'équation du bilan de l'énergie (2.9), les coefficients sont calculés en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction de $\vec{\xi}$ et la dérivée $\frac{d}{dx}$. Si nous négligeons la contribution de la chaleur latente de $L_{gl}(T)H_{gl}$, nous conduisons à

$$\begin{aligned}\frac{\rho S\omega}{\sqrt{1+h'^2}}c_v\frac{dT}{dx} &= \kappa\frac{d^2T}{dx^2}-R_1\rho T\frac{d}{dx}(\frac{S\omega}{\sqrt{1+h'^2}})\\ &+g_1(\frac{d}{dx}\omega)^2+g_2\omega\frac{d}{dx}\omega+g_3\omega^2,\end{aligned} \tag{2.12}$$

où

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2}[\eta(\frac{4}{3}+h'^2)+\zeta],$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2}h''(\frac{\eta}{3}+\zeta),$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2[\eta(1+\frac{4}{3}h'^2)+\zeta h'^2].$$

De l'équation (2.10), on déduit qu'il existe une constante $K_\rho$, telle que

$$\frac{\rho S\omega}{\sqrt{1+h'^2}} = K_\rho.$$

Donc, en posant

$$\rho = \frac{K_\rho\sqrt{1+h'^2}}{S\omega}.$$

De cette dernière relation, le système (2.11)-(2.12) peut se réduit en un système de deux équations avec deux inconnues : la vitesse $\omega$ et la température $T$

$$\begin{aligned} K_\rho\frac{d}{dx}\omega &= f_1\frac{d^2\omega}{dx^2}+f_2\omega \\ &-\frac{R_1K_\rho}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+h'^2}\frac{T}{\omega})-\frac{K_\rho}{\omega}h'g-\alpha\omega+\gamma, \end{aligned} \tag{2.13}$$

et

$$\begin{aligned} K_\rho c_v\frac{dT}{dx} &= \kappa\frac{d^2T}{dx^2}-R_1\frac{K_\rho\sqrt{1+h'^2}}{S\omega}T\frac{d}{dx}(\frac{S\omega}{\sqrt{1+h'^2}}) \\ &+g_1(\frac{d}{dx}\omega)^2+g_2\omega\frac{d}{dx}\omega+g_3\omega^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

# Chapitre 3

# Etude de la solution locale d'un système d'équations différentiels ordinaires

## 3.1 Equation différentielle du second ordre

Avant de commencer l'étude de l'existence de la solution pour le système d'équations monodimensionnelles du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère (2.13)-(2.14), on va s'occuper à l'étude d'équation différentielle du second ordre à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ; qui est un cas plus général.

Nous considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\varepsilon u''(x) + \beta(x, u(x), u'(x)) = g(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

pour une fonction inconnue $u(x) \epsilon \mathbb{R}^n$ avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3.2}$$

Dans (3.1) ; $\varepsilon$ est une constante telle que $0 < \varepsilon \leq 1$, $g(x)$ est une fonction donnée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour la fonction $\beta(x, u, u') : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, nous supposons qu'elle est continûment dérivable par rapport à $u$ et à $u'$ et que

$$\beta(x, 0, 0) = 0. \tag{3.3}$$

Cette dernière condition (3.3) nous permet de considérer $\beta(x,u,u') - \beta(x,0,0)$ au lieu de $\beta(x,u,u')$ et $g(x)-\beta(x,0,0)$ au lieu de $g(x)$ dans (3.1).

Grâce aux conditions sur $\beta(x,u,u')$, l'équation (3.1) se réècrit dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u' + C(x)u = g(x) - R(x,u(x),u'(x)), \tag{3.4}$$

où, pour tout ce qui s'est passé

$$B(x) = B_{ij}(x), \quad B_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x,u,u')}{\partial u'_j}\ |_{u=0,u'=0},$$

$$C(x) = C_{ij}(x), \quad C_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x,u,u')}{\partial u_j}\ |_{u=0,u'=0},$$

$$R_i(x,u(x),u'(x)) = \beta_i(x,u(x),u'(x))$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \beta_i(x,u,u')}{\partial u'_j}\ |_{u=0,u'=0}\ u'_j(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \beta_i(x,u,u')}{\partial u_j}\ |_{u=0,u'=0}\ u_j(x).$$

Pour les matrices $B(x)$ et $C(x)$ nous supposons qu'il existe une matrice définie positive $D(x)$, une matrice $\Gamma$ indépendante de $x\epsilon[0,1]$ et une constante $K_0 > 0$ telles que

$$D(x)\tilde{B}(x)\text{soit symétrique pour tout } x\epsilon[0,1], \tag{3.5}$$

$$u.D(x)\tilde{C}(x)u \leq -K_0 \left|u\right|^2; \quad \forall u\epsilon\mathbb{R}^n, \quad \forall x\epsilon[0,1], \tag{3.6}$$

$$\varepsilon \left\|D'\right\|_{L^\infty}^2 < 4m_D(K_0 - \left\|D\tilde{B}\right\|_{L^\infty} \left\|E'\right\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \left\|\lambda'_k\right\|_{L^\infty}), \tag{3.7}$$

où

$$m_D = \inf\left\{u^t Du; u\epsilon\mathbb{R}^n, |u| = 1\right\},$$

$$\tilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma,$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2,$$

$$\lambda_k; k = 1, \ldots, n \text{ sont les valeurs propres de } D(x)\tilde{B}(x)$$

$E$ est une matrice unitaire telle que $ED\tilde{B}E^{-1}$ soit une matrice diagonale.

D'autre part, pour les fonctions $g(x)$ et $R(x, u, u')$ nous supposons que :

1. Il existe un $R_0$ tel que, si $|u| \leq R_0$, alors on a
$$|R(x, u, u')| \leq c_R(|u|^2 + |u'|\,|u| + \varepsilon\,|u'|^2), \quad \forall x\epsilon[0, 1].$$
où $c_R$ est une constante indépendante de $x\epsilon[0, 1]$.
2. Il existe $R_1 > 0$ tel que l'application $R(., u, u') : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ soit continue dans
$$\left\{u\epsilon H_0^1; \|u\|_{H_0^1} \leq R_1\right\}.$$
3. $g\epsilon L^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

Pour l'étude du problème (3.4) ; on a besoin d'une transformation technique, danc on pose

$$\tilde{u}(x) = e^{\Gamma x}u(x),$$

$$\tilde{g}(x) = e^{\Gamma x}g(x),$$

$$\tilde{R}(x, \tilde{u}, \tilde{u}') = e^{\Gamma x}R(x, u, u').$$

En effet, en utilisant les notions $\tilde{B}(x)$ et $\tilde{C}(x)$ introduites ci-dessus, l'équation (3.1), se tansforme en

$$\varepsilon\tilde{u}(x)'' + \tilde{B}(x)\tilde{u}(x)' + \tilde{C}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{R}(x, \tilde{u}, \tilde{u}'), \tag{3.8}$$

et la condition (3.2), se transforme évidamment en

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \tag{3.9}$$

Il est clair que l'existence d'une solution $\tilde{u}(x)$ du système d'équations (3.8)-(3.9) équivaut à celle du système (3.1)-(3.2). Donc, pour simplifier les notations, nous allons écrire (3.8) sans " $\sim$ ", c'est-à-dire dans la forme

$$\varepsilon u(x)'' + B(x)u(x)' + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u, u'), \tag{3.10}$$

et les conditions (3.5),(3.6),(3.7) dans les formes

$$D(x)B(x)\text{soit symétrique pour tout } x\epsilon[0,1], \tag{3.11}$$

$$u.D(x)C(x)u \leq -K_0 |u|^2 ; \quad \forall u \epsilon \mathbb{R}^n, \quad \forall x \epsilon [0,1], \tag{3.12}$$

$$\varepsilon \|D'\|_{L^\infty}^2 < 4m_D(K_0 - \|DB\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty}). \tag{3.13}$$

Les autres conditions restent invariantes.

## 3.2 Existence et unicité de la solution d'équation linéarisée

L'idée générale adoptée pour l'étude de l'existence de la solution locale sera obtenue à l'aide du ***théorème du point fixe de Schauder***. L'idée générale qui nous adoptons est celle linéarisation, c'est-à-dire de rendre linéaires les équations non linéaire en fixant des données et de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéarisées.

On considère l'équation linéarisée de (3.10)

$$\varepsilon u(x)'' + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = \gamma(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3.14}$$

où $\gamma$ est une fonction appartenant à la classe $L^2(0,1;\mathbb{R}^n)$, avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3.15}$$

D'abord en premier lieu nous rappellons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.14)-(3.15) dans $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

**Lemme 3.2.1** *Le problème (3.14)-(3.15) admet une solution* $u\epsilon H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ *et une seule et on a*

$$\varepsilon\alpha_1 \left\|u'\right\|_{L^2}^2 + \left\|u\right\|_{L^2}^2 \leq c_1 \left\|\gamma\right\|_{L^2}^2, \tag{3.16}$$

*où* $\alpha_1$ *et* $c_1$ *sont deux constantes strictement positives indépendantes de* $\varepsilon$.

**Preuve.** On désigne par $A^t$ la matrice transposée de $A$, de sorte que $u^t$ sera le vecteur ligne $u$. On multiple l'équation (3.14) par $u^tD$ puis on fait l'intégrale sur $[0,1]$, on a

$$\varepsilon\int_0^1 u^t(x)D(x)u''(x)dx + \int_0^1 u^t(x)D(x)B(x)u'(x)dx$$
$$+\int_0^1 u^t(x)D(x)C(x)u(x)dx = \int_0^1 u^t(x)D(x)\gamma(x)dx.$$

On applique l'intégration par partie là où elle est utile, et grâce à la condition (3.15), on obtient

$$-\varepsilon\int_0^1 (u^t(x))'D(x)u'(x)dx - \varepsilon\int_0^1 u^t(x)D'(x)u'(x)dx + \int_0^1 u^t(x)D(x)B(x)u'(x)dx$$
$$+\int_0^1 u^t(x)D(x)C(x)u(x)dx = \int_0^1 u^t(x)D(x)\gamma(x)dx.$$

D'aprés la condition (3.11) $DB$ est une matrice symétrique, il existe une matrice unitaire $E$ telle que $EDBE^{-1}$ soit une matrice diagonale, où $\lambda_1,...,\lambda_n$ les éléments diagonaux, on a donc

$$\begin{aligned} u^tDBu' &= (Eu)^tEDBE^{-1}(Eu)' - u^tDBE^{-1}E'u \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{d}{dx}(\lambda_k(Eu)_k^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k'(Eu)_k^2 - u^tDBE^{-1}E'u, \end{aligned}$$

donc à l'aide de la condition aux limites (3.15), on a

$$\int_0^1 u^t DBu' = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx}(\lambda_k (Eu)_k^2)dx - \int_0^1 u^t DBE^{-1}E'udx,$$

d'où

$$-\varepsilon\int_0^1 (u^t)'Du'dx - \varepsilon\int_0^1 u^t D'u'dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_0^1 \lambda_k'(Eu)_k^2 dx$$
$$-\int_0^1 u^t DBE^{-1}E'udx + \int_0^1 u^t DCudx = \int_0^1 u^t D\gamma dx,$$

et à partir de celà et avec les conditions (3.12)-(3.13), il s'ensuit que

$$\varepsilon m_D(\|u'\|_{L^2})^2 - \varepsilon \|D'\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} + (\|u\|_{L^2})^2(K_0 - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}$$
$$-\frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty}) \leq \|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2}. \tag{3.17}$$

En utilisant la condition (3.13), il existe un nombre $0 < \beta \leq 1$ tel que

$$\varepsilon(\|D'\|_{L^\infty})^2 = 4(1-\beta)m_D(K_0 - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty}),$$

ce qui nous donne

$$\varepsilon m_D(\|D'\|_{L^\infty})^2\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{1-\beta}\varepsilon m_D(\|u'\|_{L^2})^2$$
$$+\sqrt{1-\beta}\|u\|_{L^2}(K_0 - \|DB\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda_k'\|_{L^\infty}).$$

Alors, compte tenu de ce qui suit

$$1-\sqrt{1-\beta} > 0,$$
$$\|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2} \leq \nu\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\|D\|_{L^\infty}^2}{4\nu}\|\gamma\|_{L^2}^2;\quad \forall\nu > 0.$$

Nous pouvons maintenant conclure de (3.17) qu'il existe deux constantes $\alpha_1, c_1$ strictement positives telles que l'inégalité (3.16) est vérifiée, et celà nous confirme l'existence et l'unicité de la solution $u\epsilon H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. ∎

**Lemme 3.2.2** *Si $u$ est la solution du problème (3.14)-(3.15), alors on a*

$$\varepsilon^3 \alpha_2 \left\| u'' \right\|_{L^2}^2 \leq c_1 \left\| \gamma \right\|_{L^2}^2, \tag{3.18}$$

*où $\alpha_2$ une constante strictement positive indépendante de $\varepsilon$.*

**Preuve.** De l'équation (3.14), on obtient

$$\varepsilon \left\| u'' \right\|_{L^2} \leq \left\| B \right\|_{L^\infty} \left\| u' \right\|_{L^2} + \left\| C \right\|_{L^\infty} \left\| u \right\|_{L^2} + \left\| \gamma \right\|_{L^2},$$

on déduit à partir de cette inégalité et l'inégalité (3.16) qu'il existe une constante $\alpha_2$ indépendante de $\varepsilon$ telle que l'inégalité (3.18) soit vérifiée. ∎

## 3.3 Existence d'une solution du système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

On considère l'équation linéarisée

$$\varepsilon u(x)'' + B(x)u(x)' + C(x)u(x) = g(x) - R(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), \tag{3.19}$$

dans le domaine

$$0 < x < 1,$$

où $\bar{u}$ une fonction donnée dans $H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$, avec les conditions aux limites (3.15). Le lemme 3.2.1, joint à la première hypothèse, nous permet de définir l'opérateur

$$\begin{array}{llll} G: & H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) & \rightarrow & H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) \\ & \bar{u} & \rightarrow & G(\bar{u}) = u \end{array},$$

où $u$ la solution de l'équation (3.19).

Maintenant, pour démontrer l'existence de la solution locale nous devons revenir au système d'équations non linéaires (3.14)-(3.15), commençons par le lemme suivant.

**Lemme 3.3.1** *Si*

$$\left\| g \right\|_{L^2} \leq c_\alpha \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \tag{3.20}$$

*où*

$$c_\alpha = \frac{\sqrt{3}\bar{\alpha}}{32 c_1 c_R}, \quad \bar{\alpha} = \min(1, \alpha_1, \alpha_2), \tag{3.21}$$

*alors, on a*

$$G(W_\varepsilon) \subset W_\varepsilon, \tag{3.22}$$

*où*

$$W_\varepsilon = \{u \epsilon H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n);$$

$$\varepsilon^3 \alpha_2 \|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \le \varepsilon^{\frac{3}{2}} K\},$$

$$K = \frac{\bar{\alpha}^2}{64 c_1 c_R^2}. \tag{3.23}$$

**Preuve.** On rappelle qu'en vertu de l'hypothèse **(1)** ; on a

$$\|R(.,u,u')\|_{L^2} \le c_R(\|u\|_{L^\infty}(\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}) + \varepsilon \|u'\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2}),$$

or, comme

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &\le \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|u'\|_{L^\infty} &\le \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u''\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

on a, pour $0 < \varepsilon \le 1$,

$$\begin{aligned} \|R(.,u,u')\|_{L^2} &\le c_R(\|u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|u''\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}) \\ &\le \frac{c_R}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u''\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Nous allons estimer chaque terme séparément, nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} &\le \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|u\|_{L^2} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2})^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{1}{2}(\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}) \\ &\le \frac{1}{2}(\|u\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2}(\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}(\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}) \\
&\leq \frac{1}{2}(\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2}(\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2)),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u''\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u'\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \|u''\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}(\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|u''\|_{L^2}) \\
&\leq \frac{1}{2}(\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2)).
\end{aligned}$$

Enfin, en faisant la somme de ces trois termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|R(.,u,u')\|_{L^2} &\leq c_R \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\|u\|_{L^2}^2 + \tfrac{7}{4}\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2) \\
&\leq \frac{2c_R}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2) \\
&\leq \frac{2c_R}{\bar{\alpha}\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\|u\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$\|g - R(.,\bar{u},\bar{u}')\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + \frac{2c_R}{\bar{\alpha}\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2),$$

d'où on obtient

$$\|g - R(.,\bar{u},\bar{u}')\|_{L^2}^2 \leq 2(\|g\|_{L^2}^2 + (\frac{2c_R}{\bar{\alpha}\varepsilon^{\frac{3}{4}}}(\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2))^2).$$

Donc, par le lemme 3.2.1 et (3.20), nous avons

$$\|u\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon\|u'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3\|u''\|_{L^2}^2 \leq$$

$$4c_1(c_\alpha^2\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}}(\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon\|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3\|\bar{u}''\|_{L^2}^2)^2).$$

ce qui implique que, si

$$\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon\|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3\|\bar{u}''\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}}K$$

Nous avons défini la constante $K$ dans (3.23), puis

$$\|u\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon\|u'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3\|u''\|_{L^2}^2 \quad \leq 4c_1(c_\alpha^2\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\frac{(\varepsilon^{\frac{3}{2}})^2\bar{\alpha}^4}{(64)^2c_1^2c_R^4}),$$

et

$$\begin{aligned} 4c_1(c_\alpha^2\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\frac{(\varepsilon^{\frac{3}{2}})^2\bar{\alpha}^4}{(64)^2c_1^2c_R^4}) &= 4c_1(\frac{3\bar{\alpha}^2}{(32)^2c_1^2c_R^2}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \frac{4\bar{\alpha}^2}{(64)^2c_1^2c_R^2}\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\ &= 4c_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{3\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^2}{(32)^2c_1^2c_R^2}) \\ &= \varepsilon^{\frac{3}{2}}\frac{16\bar{\alpha}^2}{(32)^2c_1c_R^2} \\ &= \varepsilon^{\frac{3}{2}}K, \end{aligned}$$

alors

$$\|u\|_{L^2}^2 + \alpha_1\varepsilon\|u'\|_{L^2}^2 + \alpha_2\varepsilon^3\|u''\|_{L^2}^2 \quad \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}}K.$$

Ainsi, nous avons vérifié la relation (3.22). ■

**Proposition 3.3.1** *Si $g$ vérifie la condition (3.20)-(3.21), alors l'équation (3.10) admet au moins une solution $u$ appartenant à $H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** En rappelant l'hypothèse **(2)**, on peut conclure que l'opérateur $G$ est continu dans la topologie de $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) \to H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

En effet, l'application

$$W_\varepsilon \ni \bar{u} \to g(x) - R(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\epsilon H^{-1}$$

(dans la topologie de $\bar{u}\epsilon H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$) est continue.

D'autre part, pour les solutions $u^{(i)}$ du problème (3.14)-(3.15) avec les deux fonctions données $\gamma = \gamma_i$ ; $i = 1,2$. En raisonnent de la manière analogue à la démonstration du lemme 3.2.1 ; on obtient

$$\varepsilon \left\| u^{(1)\prime} - u^{(2)\prime} \right\|_{L^2}^2 + \tilde{c}_1 \left\| u^{(1)} - u^{(2)} \right\|_{L^2}^2 \leq \tilde{c}_2 \left\| \gamma_1 - \gamma_2 \right\|_{H^{-1}},$$

avec deux constontes $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$.

On déduit la continuité de $G$ comme opérateur :$H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) \to H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ restreint à $W_\varepsilon$, pourvu que

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} K + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{K}{\alpha_1} \leq R_1^2.$$

Comme $W_\varepsilon$ est borné dans $H^2(0,1;\mathbb{R}^n)$ et fermé aussi dans $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$, alors $W_\varepsilon$ est compact dans $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$, d'après le théorème de l'injection compacte. Il est en outre convexe. Donc d'après ***le théorème du point fixe de Schauder***, il existe un élément $u$ de $W_\varepsilon$ tel que $G(u) = u$ ce qui achève la preuve. ■

# Chapitre 4

# Existence d'une solution du mouvement de l'air dans un régime stationnaire

Dans ce chapitre, en nous basant sur les résultats trouvés dans le chapitre précédent pour l'étude d'un système différentiel ordinaire non linéaire du second ordre, on va appliquer ce résultat pour montrer l'existence d'une solution du système d'équation de mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère en une dimension, dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et sans diffusion de la chaleur. Il nous faut rappeler que les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité sont très petits devant les coefficients des termes dérivés premières.

## 4.1 Retour à l'équation d'un gaz

Considérez l'écoulement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère dans une couche proche de la surface ou son équivalent, mais facile à imaginer, dans un tube imaginaire que nous construisons dans nos esprits. Il nous est commode pour nous le décrire dans une approximation, par un système d'équations dans une dimension, en utilisant les variables spatiales qui représentent la position dans le tube dans la direction du tube. Une forme de système d'équations qui s'applique à différentes situations est

$$\frac{d}{dx}(\rho S \omega) = 0, \tag{4.1}$$

$$\rho\omega\omega' + p' = \varepsilon(a_0\omega + a_1\omega' + a_2\omega'') + \rho f + f_0, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\rho c_\nu \omega T' + p\omega' = \varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') \\ &+\varepsilon(d_0\omega^2 + d_1\omega\omega' + d_2(\omega'')^2) + \rho h + h_0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où le terme $\varepsilon(a_0\omega + a_1\omega' + a_2\omega'')$ dans l'équation (4.2) correspond à la viscosité, ainsi les termes $\varepsilon(b_0T + b_1T' + b_2T'')$ et $\varepsilon(d_0\omega^2 + d_1\omega\omega' + d_2(\omega'')^2)$ dans l'équation (4.3) correspond respectivement à la conductibilité thermique et à la source de la chaleur due à la friction interne du gaz, $\varepsilon$ étant une constante positive. Nous supposons que

$$\inf_x a_2(x) > 0, \quad \inf_x b_2(x) > 0.$$

Dans tout ce qui précède, nous supposons que les coefficients $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_0$, $b_1$, $b_2$, $d_0$, $d_1$, $d_2$ ainsi que les fonctions $f$, $f_0$, $h$, $h_0$ sont régulières et bornées.

Le système d'équations (4.1)-(4.3) est une version de (1.1) du chap. II de [1], version adaptée à l'éventuelle courbure du tuyau et à l'éventuelle présence des forces extérieures $\rho f + f_0$ et des sources de la chaleur $\rho h + h_0$. Pour les propriétés physiques du système d'équations, on peut consulter par exemple [7].

A partir de l'équation (4.1), nous faisons la première transformation des équations et nous écrivons $\rho(x)$ à la fonction $\omega(x)$, c'est-à-dire on aura

$$\rho(x) = \frac{K_\rho}{S(x)\omega(x)}, \tag{4.4}$$

où $K_\rho$ est une constante ; on peut supposer que $K_\rho > 0$ (le cas $K_\rho = 0$ est évident). En substituant (2.4) -la loi du gaz idéal- et (4.1) dans (4.2) et (4.3) , nous pouvons réduire le système de deux équations avec deux seules fonctions inconnues la vitesse $\omega$ et la température $T$

$$\frac{K_\rho}{S}\omega' + K_\rho R_1\left(\frac{T}{S\omega}\right)' = \varepsilon(a_0\omega + a_1\omega' + a_2\omega'') + \frac{K_\rho}{S\omega} f + f_0, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{K_\rho}{S} c_\nu T' + \frac{K_\rho}{S}\frac{T}{\omega} R_1\omega' = \varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') \\ &+\varepsilon(d_0\omega^2 + d_1\omega\omega' + d_2(\omega'')^2) + \frac{K_\rho}{S\omega} h + h_0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'abord, il nous faut rappeler que la petitesse des coefficients de viscosité et de thermoconductibilité nous permet de trouver une solution avec la condition de l'entrée et de la sortie du domaine du gaz dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et sans diffusion de la chaleur.

Pour celà, on va montrer l'existence de la solution $(\omega, T)$ du système d'équations de mouvement stationnaire d'un gaz en une dimension (4.5)-(4.6) avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit au voisinage de la solution $(\bar{\omega}, \bar{T})$ du système (4.5)-(4.6) avec $\varepsilon = 0$.

Considérons les équations correspondantes à (4.5)-(4.6) avec $\varepsilon = 0$ ; en écrivant les fonctions inconnues la vitesse $\bar{\omega}$ et la température $\bar{T}$, on a à considérer

$$\frac{K_\rho}{S}\bar{\omega}' + K_\rho R_1\left(\frac{\bar{T}}{S\bar{\omega}}\right)' = \frac{K_\rho}{S\bar{\omega}}f + f_0, \tag{4.7}$$

$$\frac{K_\rho}{S}c_\nu\bar{T}' + \frac{K_\rho}{S}\frac{\bar{T}}{\bar{\omega}}R_1\bar{\omega}' = \frac{K_\rho}{S\bar{\omega}}h + h_0. \tag{4.8}$$

Nous supposons que le système d'équations (4.7)-(4.8) avec $\varepsilon = 0$ dans l'intervalle $[0, 1]$ admet une solution $(\bar{\omega}, \bar{T})$ appartient à $H^2(0, 1) \times H^2(0, 1)$ et vérifiant les relations

$$\inf_{0\leq x\leq 1}\bar{\omega}(x) > 0, \quad \inf_{0\leq x\leq 1}\bar{T}(x) > 0. \tag{4.9}$$

En posant

$$\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}(0), \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}(1), \quad \bar{T}_0 = \bar{T}(0), \quad \bar{T}_1 = \bar{T}(1), \tag{4.10}$$

nous allons considérer le système d'équations (4.5)-(4.6) avec $\varepsilon > 0$ et avec les conditions aux limites

$$\omega(0) = \bar{\omega}_0, \quad \omega(1) = \bar{\omega}_1, \quad T(0) = \bar{T}_0, \quad T(1) = \bar{T}_1. \tag{4.11}$$

## 4.2 Equation linéarisée et estimation de la solution

Nous considérons le système d'équations (4.5)-(4.6)dans le domaine en une dimension $[0, 1]$, avec les conditions aux limites non homogènes (4.11).

Il nous est commode de considérer, au lieu de $\omega$ et $T$, les fonctions inconnues $u$ et $\theta$, définies en ordre comme suit

$$u = \omega - \bar{\omega}, \quad \theta = T - \bar{T}. \tag{4.12}$$

Les conditions aux limites se transforment en conditions homogènes

$$u(0) = u(1) = \theta(0) = \theta(1) = 0. \tag{4.13}$$

En substitutant la relation (4.12) dans les équations (4.7)-(4.8) avec $\varepsilon > 0$ et aprés les calculs on transforme les équations (4.7)-(4.8) en des équations en fonction de $u$ et $\theta$

$$\varepsilon a_2 u'' + B_{11}u' + B_{12}\theta' + C_{11}u + C_{12}\theta = F(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta), \tag{4.14}$$

$$\varepsilon b_2 \theta'' + B_{21}u' + B_{22}\theta' + C_{21}u + C_{22}\theta = G(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta), \tag{4.15}$$

où

$$F(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta) = -\varepsilon A_1(\bar{\omega}) - N_1(u, \theta)$$

et

$$G(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta) = -\varepsilon A_2(\bar{\omega}, \bar{T}) - N_2(u, \theta)$$

sont des sommes des termes connus et termes non linéaires avec

$$A_1(\bar{\omega}) \quad = a_0\bar{\omega} + a_1\bar{\omega}' + a_2\bar{\omega}'',$$

$$A_2(\bar{\omega}, \bar{T}) \quad = b_0\bar{T} + b_1\bar{T}' + b_2\bar{T}'' + d_1\bar{\omega}^2 + d_1\bar{\omega}\bar{\omega}' + d_2(\bar{\omega}')^2,$$

$$N_1(u, \theta) = -R_1K_\rho[(\frac{\bar{T} + \theta}{S(\bar{\omega} + u)})' - (\frac{\bar{T}}{S\bar{\omega}})' + \frac{\bar{T}}{S\bar{\omega}^2}u' - \frac{\theta'}{S\bar{\omega}} +$$

$$(\bar{T}'\frac{1}{S} + \bar{T}(\frac{1}{S}))'\frac{u}{\bar{\omega}^2} + \frac{(S\bar{\omega})'}{(S\bar{\omega})^2}\theta] + \frac{K_\rho}{S}f[\frac{1}{\bar{\omega} - u} - \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{u}{\bar{\omega}^2}],$$

$$N_2(u, \theta) = -R_1\frac{K_\rho}{S}[\frac{\bar{T} + \theta}{\bar{\omega} + u}(\bar{\omega} + u)' - \frac{\bar{T}}{\bar{\omega}}\bar{\omega}' - \frac{\bar{T}}{\bar{\omega}}u' - \frac{\bar{T}}{\bar{\omega}^2}\bar{\omega}'u - \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}}\theta]$$

$$+\frac{K_\rho}{S}h[\frac{1}{\bar{\omega} - u} - \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{u}{\bar{\omega}^2}] + \varepsilon(d_0u^2 + d_1uu' + d_2(u')^2),$$

et $B_{11}$, $B_{12}$, $B_{21}$, $B_{22}$, $C_{11}$, $C_{12}$, $C_{21}$, $C_{22}$ sont des coefficients des parties linéaires définies comme suit

$$B_{11} = -\frac{K_\rho}{S} + R_1 K_\rho \frac{\bar{T}}{S\bar{\omega}^2} + \varepsilon a_1, \qquad B_{12} = -R_1 \frac{K_\rho}{S\bar{\omega}},$$

$$B_{21} = -R_1 \frac{K_\rho \bar{T}}{S\bar{\omega}} + \varepsilon(d_1\bar{\omega} + 2d_1\bar{\omega}'), \quad B_{22} = -\frac{K_\rho}{S} c_\nu + \varepsilon b_1,$$

$$C_{11} = R_1 \frac{K_\rho}{S}\frac{\bar{T}'}{\bar{\omega}^2} + R_1 \frac{K_\rho}{S^2}\bar{T}\frac{S'}{\bar{\omega}^2} - \frac{K_\rho f}{S\bar{\omega}^2} + \varepsilon a_0, \quad C_{12} = R_1 \frac{K_\rho}{(S\bar{\omega})^2}(S\bar{\omega})',$$

$$C_{21} = R_1 \frac{K_\rho}{S}\bar{T}\frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}^2} - \frac{K_\rho}{\bar{\omega}^2 S} h + \varepsilon(2d_0\bar{\omega} + d_1\bar{\omega}'), \quad C_{22} = -R_1 \frac{K_\rho}{S}\frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} + \varepsilon b_0.$$

Avant de résoudre le système non linéaire (4.14)-(4.15) avec les conditions aux limites (4.13), il faut d'abord examiner les équations linéaires

$$\varepsilon a_2 u'' + B_{11}u' + B_{12}\theta' + C_{11}u + C_{12}\theta = \bar{F}, \tag{4.16}$$

$$\varepsilon b_2 \theta'' + B_{21}u' + B_{22}\theta' + C_{21}u + C_{22}\theta = \bar{G}, \tag{4.17}$$

Pour obtenir l'existence d'une solution $(u, \theta)$ des équations (4.14)-(4.15), on considère d'abord les équations linéarisées, pour lesquelles on obtiendra une estimation du type

$$\varepsilon^3(\|u''\|^2_{L^2} + \|\theta''\|^2_{L^2}) + \varepsilon(\|u'\|^2_{L^2} + \|\theta'\|^2_{L^2}) + \|u\|^2_{L^2} + \|\theta\|^2_{L^2} \leq C(\|\bar{F}\|^2_{L^2} + \|\bar{G}\|^2_{L^2}) \tag{4.18}$$

## 4.3 Existence de la solution du système d'équations non linéaire

Retournons aux systèmes d'équations non linéaires pour résoudre les équations (4.16)-(4.17) et estimer les termes $F(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta)$ et $G(\bar{\omega}, \bar{T}, u, \theta)$ de manière appropriée. Nous avons la proposition suivante

**Proposition 4.3.1** *On suppose que*

$$\bar{\omega}, \bar{T} \epsilon H^2([0,1]), \quad \inf_{0\leq x\leq 1} \bar{\omega}(x) > 0, \tag{4.19}$$

$$2c_\nu \leq \frac{\bar{T} R_1}{\bar{\omega}^2}(R_1 + c_\nu), \quad \forall x \epsilon [0,1], \tag{4.20}$$

$$S \epsilon C^1([0,1]); \quad f, h \epsilon C^0([0,1]), \quad \inf_{0\leq x\leq 1} S(x) > 0, \tag{4.21}$$

*La condition* $\inf_{0\leq x\leq 1} \bar{T}(x) > 0$ *est implicitement disponible dans l'hypothèse (4.20).*

*Alors il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, si* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*, le système d'équations (4.14)-(4.15) avec les conditions aux limites (4.13) admet une solution* $(u, \theta)$ *appartenant à* $H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

**Preuve.** Par des calculs élémentaires et les conditions (4.19)-(4.21), on peut constater que la fonction

$$R(., u, \theta, u', \theta') = (N_1(u,\theta), N_2(u,\theta))$$

vérifiée les conditions (**1**) et (**2**) de la section (3.1) (avec des modifications évidantes de notations).

Nous considérons le système d'équations (4.14)-(4.15) sous la condition (4.20) ce qui garantit l'inversiblilité de la matrice $B$, donc on peut définir une matrice $\Gamma$ indépendante de $x$ sous la forme

$$\Gamma = [\bar{k} + 1]^+ \hat{B}^{-1},$$

où $\hat{B} = \int_0^1 B dx$ est inversible et $\bar{k} = \sup_{|\nu|=1} \nu^t C \nu$.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit les matrices $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ et $D$ données par

$$\begin{aligned} \tilde{B}(x) = &\quad B(x) - 2\varepsilon\Gamma, \\ \tilde{C}(x) = &\quad C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2, \\ D(x) = &\quad \begin{pmatrix} \frac{\tilde{B}_{21}}{\tilde{B}_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\tilde{B}_{21}}{\tilde{B}_{12}} \to \bar{T}$ pour $\varepsilon \to 0$,il n'est pas difficile de voir qu'il existe un $\varepsilon_0^{(1)} > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0^{(1)}$les conditions (3.5)-(3.7) soient vérifiées.

Pour appliquer la proposition 3.3.1, on pose

$$g = (g_1, g_2), \quad g_1 = \varepsilon A_1(\bar{\omega}), \quad g_2 = \varepsilon A_2(T, \bar{\omega}).$$

Nous remarquons que $A_1(\bar{\omega})$ et $A_2(T, \bar{\omega})$ sont indépendants de $\varepsilon$ ; donc, sous la condition (4.19), on a

$$\|g_1\|_{L^2} \leq \varepsilon C_1, \quad \|g_2\|_{L^2} \leq \varepsilon C_2,$$

où $C_1$ et $C_2$ sont deux constantes indépendantes de $\varepsilon$. On a donc

$$\|g\|_{L^2} \leq \varepsilon (C_1 + C_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0^{(1)}$ et que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ la condition (4.20) soit vérifée, c'est-à-dire

$$\|g\|_{L^2} = (\|g_1\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2})^2 \leq c_\alpha \varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

et donc d'après la proposition 3.3.1 le système d'équations (4.14)-(4.15) avec les conditions aux limites (4.13) admette une solution $(u, \theta)$ appartient à $H^2(0,1;\mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^2)$. ■

**Corollaire 4.3.1** *Le système d'équations (4.5)-(4.6) avec les conditions aux limites (4.11) admet une solution* $(\omega, T)$ *appartient à* $H^2(0,1;\mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^2)$.

En ce qui concerne l'unicité de la solution, la méthode utilisée ne nous permettra dans l'immédiat, d'obtenir que l'existence d'une solution et il nous semble que la question de l'unicité de la solution devra être étudiée avec une nouvelle méthode.

# Chapitre 5

# Perspectives

On pourrait tenter de démontrer l'existence d'une solution du système d'équations de l'écoulement de l'air passant sur une montagne avec la condensation de la vapeur d'eau.

Mais la présence de la fonction $H_{gl}$ représentant la quantité de condensation pose des difficultés sérieuses, par la valeur assez grande de $L_{gl}$ qui nous permet pas d'obtenir des conditions naturelles pour la convergence d'une suite de solutions approchées.

# Bibliographie


[1] Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V., Monakhov, V. N. : Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids (translated from Russian). North-Holland, 1990.

[2] Ayachi, A., Aissaoui, M. Z., Guebbai, H., Fujita Yashima, H. :Système déquations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d un gaz visqueux et calorifère. A paraître sur Rendiconti del SeminarioMatematico della Università di Padova.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l air avec la transition de phase de l eau. Sciences Technologie Univ. Constantine, vol. 31 (2011), pp. 9-17.

[4] Brezis, H. Analyse fonctionelle (théorie et applications ).Masson 1981.

[5] Fujita Yashima, H. : Modelacin matematica del movimiento de la atmsfera con la transicin de fase del agua. Rev. Invest. Operac., vol. 34 (2013), pp. 93-104.

[6] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui,M. Z. :Système d équations d un modèle du mouvement de l air impliquant la transitionn de phase de l eau dans l atmosphère. Ann.Math. Afr., vol. 2 (2011), pp. 66-92.

[7] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : Mécanique des fluides (Physique théorique,tome 6) (traduit du russe).Mir,Moscou, 1989.

[8] Lions, J.-L. : Perturbations singulières dans les problemes aux limites et en contrôle optimal. Lecture NotesMath. 323, Springer, 1973.

[9] Matveev, L. T. : Physique de l atmosphère (en russe). Gidrometeoizdat,Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[10] Prodi, F., Battaglia, A. : Meteorologia - Parte II, Microfisica. Grafica Pucci, Roma, 2004.

[11] Rozhdestvenskii, B. L., Yanenko, N. N. : Systèmes d équations quasilinéaires et leur applications à la dynamique des gaz (en russe).Nauka,Moscou,1978.

[12] Samarskii, A. A., Vabishchevich : Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion, 4 éd. (en russe). Librokom (Moscou),2009.

[13] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. :Equazioni del moto dell aria con la transizionedi fase dell acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. Accad. Sci.Torino,Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, Vol. 35 (2011), pp. 37-69.

[14] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : Physique de l atmosphère (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.