République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du Diplôme de Master 2

Option :

Équations aux dérivées partielles et analyse numérique

Thème

Méthode de régularisation avec des conditions auxiliaires modifiées pour un problème parabolique rétrograde à coefficients dépendants du temps

Présenté par :
M^{elle} *B.* Haridi

Soutenu le : 30/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	M^r *Benarioua* Khadir	PROF, Université 8 Mai 1945 Guelma.
Rapporteur :	D^r *Benrabah* Abderafik	M.C.A, Université 8 Mai 1945 Guelma
Examinateurs :	M^r *Bousstila* Nadjib	M.C.B, Université 8 Mai 1945Guelma

Année universitaire 2019/2020

Résumé

Dans ce travail, nous considérons un problème classique mal posé au sens d'Hadamard (la solution même si elle existe et unique elle n'est pas stable), à savoir le problème rétrograde pour l'équation parabolique. Le problème inverse de type parabolique a été étudié par plusieurs auteurs et par l'utilisation de nombreuses méthodes au cours des quatre dernières décennies. La plupart des travaux concerne les problèmes paraboliques à coefficients constant. L'objectif principal de cet mémoire est d'étudier un problème parabolique mal-posé à coefficient dépondant du temps. Par application de la méthode de la transformée de Fourier et la méthode de régularisation avec des conditions auxiliaires modifiée, nous donnerons une nouvelle stratégie de régularisation pour le problème considéré avec quelque estimations d'erreurs.

Abstract

In this work, we consider a classical problem ill- posed problem in the sense of Hadamard (the solution even if it exists and only it is not stable), namely the backward problem for the parabolic equation. The inverse parabolic-type problem has been studied by several authors and by the use of many methods over the past four decades. Most of the work concerns parabolic problems with constant coefficients. The main objective of this dissertation is to study an ill-posed parabolic problem with a time-dependent coefficient. By applying the Fourier transform method and the Modified Regularization Method with Auxiliary conditions, we will give a new regularization strategy for the problem considered with same error estimates.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mon cher pére

Pour son aide et soutien et son patience, cette aventure n'aurait certainement pas existé sans vous !

A ma chére mére

En tèmoignage de mon èternelle reconnaissance, que Dieu vous protége et vous prête bonne santè et longue vie.

A mes fréres

qui ont toujours su me motiver même dans les moments de doute. Un grand merci pour leur encouragement et leur soutien moral.

A tous les gens qui m'aiment

En tèmoignage de mon amour et de ma profonde admiration.

Remerciements

A mon encadreur Mr.Benrabah Abderafik

J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement. Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle. Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration. Veuillez bien Monsieur recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de ce travail.

Aux membres du jury

Je tiens également à remercier le Docteur Benarioua Khadir qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que le Professeur Bousstila Nadjib d'avoir acceptè examiner ce mèmoire et de participer à ce jury.

Table des matières

1 Résultats préliminaires

1.1 Introduction

De nombreux problèmes de la physique, chimie, biologie et de la géophysique sont modélises par des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui décrivent le comportement temporel ou spatio-temporel des inconnus du modèle. La résolution de ces équations constitue ce que l'on appelle **le problème direct**. Cela ne peut se faire que si tous les paramètres du systèmes sont connus, les conditions initiales et aux limites, les coefficients intervenant dans les équations, ainsi que le domaine spatial. Lorsque l'une (ou plusieurs) des composantes du problème est manquante l'équation ne peut plus être résolue sans informations complémentaires et la résolution de l'équation n'est plus directe mais **inverse**.

D'après Jd.B.Keller [22], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre; si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un ***problème inverse*** consiste à déterminer des **causes** d'un phénomène en fonction de l'observation de ses **effets**. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé **problème direct** consistant à chercher les **effets** à partir des **causes** qui sont observables. Par exemple, localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse.

On peut décrire le schéma d'un **problème direct** comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \text{(entrée) input} & \rightarrow & \text{processus} \rightarrow \text{output (sortie)} \\ \text{cause} & \rightarrow & \text{modèle} \ \rightarrow \text{effet} \end{array}$$

Si on symbolise les données d'entrées par x et le processus par K, alors le **problème direct** consiste à trouver Kx. Par conséquent, le schéma d'un **problème direct** devient comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \text{input} & \rightarrow & \text{processus} \rightarrow \text{output} \\ x & \rightarrow & \boxed{\text{K}} \ \rightarrow \ ? \\ \text{cause} & \rightarrow & \text{modèle} \ \rightarrow \text{effet} \end{array}$$

Les ***problèmes inverses*** peuvent être classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de ***problèmes inverses***, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique. Les ***problèmes inverses*** sont multiples et leurs applications se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la détection des fissures, le contrôle non destructif, la mécanique des structures,...

D'après la définition d'un ***problème inverse***, on peut voir que ces problèmes risquent de poser des difficultés particulières. En effet, il est raisonnable d'exiger qu'un **problème direct** soit ***bien posé*** : "les mêmes **causes** produisent les mêmes **effets**". Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes **effets** puissent provenir de **causes** différentes. Ceci illustre une difficulté de l'étude des ***problèmes inverses*** : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour les différencier.

Une autre difficulté majeure dans l'étude des **problèmes inverses** est qu'elles nécessitent une bonne connaissance de **problèmes directs**. Lorsqu'il est question d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du **problème direct**) ; cette inversion généralement instable nécessite un traitement particulier. Il s'agit de techniques, dites de ***régularisation***, dont le but est de rendre le problème étudié ***bien posé*** et rendre son implémentations numériques réalisable, et ce en le perturbant légèrement pour éliminer les éléments responsables de l'instabilité.

Contenu du mémoire

Le mémoire est composé de trois chapitres.

- Dans le Chapitre 1, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales et les ingrédients nécessaires du calcul différentiel pour l'étude des problèmes proposés, et pour faciliter la lecture du mémoire.
- Le Chapitre 2, traite un problème de la chaleur mal posé, où l'objectif d'étude est d'étendre la méthode de régularisation par des conditions auxiliaires à certaines classes de problèmes linéaires paraboliques à coeficients dépendant du temps. En utilisant une variante modifiée de la méthode de régularisation par des conditions auxiliaires, on construit une famille de problèmes bien posés, qui approchent le problème traité, et on montre la convergence de cette procédure de régularisation.
- Dans le Chapitre 3, on propose l'étude d'un problème inverse non linéaire engendré par une équation parabolique à coefficients dépendant du temps. On montre que ce problème est fortement mal posé et on propose une méthode de régularisation basée sur la méthode modifiée de régularisation par des conditions auxiliaires.
- Ce travail se termine par une conclusion et quelques pespectives

1.1.1 Problèmes bien et mal posé

En étudiant la résolution des équations aux dérivées partielles, le mathématicien Jacques Hadamard (1902) a exprimé le concept de problème bien-posé. Nous allons voir une définition précise cidessous sous la forme de trois conditions. Ces conditions refêtent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution raisonnable du problème qui représente.

Soient X et Y deux espaces métriques, $A : X \to Y$ un opérateur. Considérons l'équation :

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

où x est l'inconnue, y est la donné (généralements des mesures expérimentales) et $A : X \to Y$ est un opérateur d'un espace X vers un espace de Y.

Notons que plusieurs problèmes physiques se ramènent à une telle équation . Selon **Hadamard** [9], on dit que le problème (2.15) est bien posé si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. La solution x existe c'est à dire pour tout y dans Y, il existe au moins un x dans X tel que $Ax = y$ (Surjectivité de A).
2. La solution x est unique c'est à dire pour tout y dans Y il existe au plus un x dans X tel que $Ax = y$ (Injectivité de A).
3. La solution x est stable dépend continûment de la donnée y c'est à dire toute petite perturbation des données y implique une petite variation de la solution x

ce qui équivalent a dire, le problème (2.15) est bien posé si :

1. A est surjective [1]
2. A est injective [2]
3. A^{-1} l'inverse de A est continu sur Y.

• La non existence de la solution dans un certain domaine nous conduit à utiliser une technique de relaxation qui consiste à transformer des contraintes fortes en des contraintes moins fortes afin d'élargir le domaine d'existence pour avoir une solution.

• Certains problèmes peuvent avoir plusieurs solutions, il est donc nécessaire de disposer d'informations supplémentaires (ou conditions) pour discriminer entre elles et choisir une solution convenable.

• Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sur très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale, En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Prenons par exemple la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} 12x_1 + 11x_2 = & 23 \\ 13x_1 + 12x_2 = & 25. \end{cases}$$

Ce système a pour solution $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$. Si on introduit une perturbation dans la matrice des coefficients, par exemple

$$\begin{cases} 12.05x_1 + 11x_2 = & 23 \\ 13x_1 + 11.95x_2 = & 25, \end{cases}$$

qui a pour solution $x_1 = 0.15$ et $x_2 = 2.25$, solution fort différente de la précédente. Une petite perturbation de A entraîne une grande perturbation de x. Ce problème est donc mal posé car la troisième condition n'est pas satisfaite. Dans ce cas-ci, on dit que **la matrice** A **est mal conditionnée.**

1. Une fonction $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est dite surjective si, pour tout élément y de F,l'équation $y = f(x)$ admet toujours au moins une solution x appartenant à $\mathbb{E}$
2. f est injective si pour tous a, b de $\mathbb{E}$, $f(a) = f(b)$ entraîne $a = b$.

Plusieurs problèmes physique ne vérifient pas forcément ces conditions simultanément, alors au moins l'une des trois conditions n'est pas vérifiée, et le problème (2.15) est dit *mal posée*.

La réalité expérimentale montre que les problèmes inverses sont le plus souvent mal-posés car ils ne répondent pas à la troisième condition (la stabilité). Le problème est instable quand de petites variations sur les données entraînent des grandes variations sur la solution. Cette stabilité est liée au système étudié et va indiquer la robustesse de l'inversion face aux problèmes de bruits de mesures.

En mathématique, la ***régularisation*** est une procédure qui consiste à modifier un problème ***mal posé*** par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés (***bien posé***) rendant son étude théorique et numérique plus aisée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de ***régularisation*** ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy ***mal posés***. Parmi elles, on cite :

- La méthode de quasi-réversibilité, introduite par Lattes et Lions (1969)[15], qui consiste à transformer le problème de Cauchy ***mal posé*** d'ordre 2 en un problème différentiel ***bien posé*** d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notamment : Klibanov et Santosa [18] et plus récemment Bourgeois([20],[21]).
- La méthode de quasi-réversibilité modifiée qui a été introduite par Gasjewski et développée par plusieurs auteurs dont N. Boussetila et F. Rebbani [2].
- La méthode de ***régularisation*** de Tikhonov [19] est la méthode de ***régularisation*** la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original ***mal posé*** en un problème de minimisation.
- La méthode itérative de Kozlov et al.[14] est basée sur une procédure itérative. Elle consiste à résoudre une suite alternative de problèmes ***bien posés*** avec conditions aux limites mêlées jusqu'à satisfaire un certain critère d'arrêt. La solution approchée converge pour des données compatibles, vers la solution du problème de Cauchy considéré.
- La méthode de ***régularisation*** par les conditions non locales **"Quasi-Boundary-Value Method"** introduite par Showalter [16]. L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème ***mal posé*** par un problème ***bien posé***, dans lequel on perturbe la condition finale en la remplaçant par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre α. Elle a été utilisée par plusieurs auteurs, comme D.N. Hào [10].

1.1.2 Exemples de problèmes mal posé

Dans cette section nous présentons quelques problèmes inverses mal posé, et nous indiquons laquelle des conditions de Hadamard n'est pas véifiée :

Exemple 1.1.1. ***(Problème de dérivation)***

La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le (prototype) du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral, est définie par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

il est facile de voir que cet opérateur est injectif et que $A \in L^2(0,1)$ par contre son image est le sous espace vectoriel

$$R(A) = \Big\{u \in H^1(0,1), \quad u(0) = 0\Big\},$$

où $H^1(0,1)$ est l'espace de sobolve, en effet l'équation $Af = g$ est équivalente à :

$$f(x) = g^{'}(x), \quad et\ g(0) = 0.$$

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0,1)$, en conséquance, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0,1)$, comme le montre le contre exemple suivant :

Considérons une fonction $f \in C^1([0,1])$ et $n \in N$. Soit

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin(n^2x),$$

où

$$f_n^{'}(x) = f^{'}(x) + n\cos(n^2x),$$

d'où

$$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,$$

mais

$$\|f^{'} - f_n^{'}\|_2 = \frac{1}{n}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \infty.$$

Donc la différence entre $f^{'}$ et $f_n^{'}$ peut être arbitrairement grande, alors que la différence entre f et f_n est arbitrairement petite.

Exemple 1.1.2. *considérons l'espace de Hilbert ℓ^2 de dimension infinie tel que :*

$$x = (x_1, x_2..., x_n, ...) \in \ell^2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty,\ et\ \|x\|_{\ell^2} = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $A : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ un opérateur diagonale dans ℓ^2 tel que

$$Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...),$$

considérons le problème :

$$Ax = y,$$

l'inverse A^{-1} de A est donné par

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, ..., ny_n, ...).$$

Donc on a l'existense de la solution de ce problème pour un certain $y \in \ell^2$, et on peut encore montrer facilement l'unicité de la solution.

Prenons maintenant

$$y_n = (0, 0, .., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...),$$

donc

$$A^{-1}y_n = (0, 0, .., \sqrt{n}, 0, ...).$$

$\|y_n\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ *lorsque n tend vers* $+\infty$ *mais* $\|A^{-1}y_n\|_{\ell^2} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ *lorsque n tend vers* $+\infty$. *Donc on a pas la stabilité de la solution d'où le probléme est* ***mal posés***.

Exemple 1.1.3. ***(Problème du Potentiel)*** *Supposons un corps* $D \subset \mathbb{R}^3$ *avec une densité* $\rho(x)$ *où* $x \in \mathbb{R}^3$ *ce corps génére un potentiel*

$$u(x) = \int_D \frac{\rho(x)}{4\pi\|x-y\|} dy. \tag{1.2}$$

On considère le problème inverse suivant

"Trouver la densité $\rho(x)$, étant donné le potentiel $u(x)$ pour $x \in B_R^{'} = \{x, |x| \geq \mathbb{R}\}$ loin de *D." Sachant qu'une masse ponctuelle m est une masse uniformément distribuée dans une boule de rayon R génère le même potentiel* $u(x) = \frac{m}{|x|}$ *donc il n'est pas possible de déterminer d'une manière unique* $\rho(x)$ *en mésurant* $u(x)$ *ce problème est donc* ***mal posés****, car la deuxième conditions de Hadamard n'est pas véifiée.*

Exemple 1.1.4. ***(Équation de la chaleur)*** *On considère une tige en métal de longueur* π *dont les deux extrémités sont maintenues à la température* 0*, a chaque instant* $t \in (0, T)$*, la température de la baguette à la position x est présentée par* $u(x, t)$*.*

Étant donnée une température finale

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in (0, \pi)$$

on cherche à expliciter la distribution initiale $u_0 = u(x, 0)$*. C'est le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, ce dernier s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi\,, 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, T) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Par séparation de variables, on peut montrer que la solution du probléme (1.3) est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-tn^2)\psi_n sin(nx),$$

où $\psi_n = \frac{2}{\Pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) dy$*. Donc on doit déterminer* $u_0 = u(., 0)$ *à partir de l'équation intégrale*

$$u(x, T) = \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K(x, y) u_0(y) \sin(ny) dy, \quad si\ 0 \leq x \leq \pi,$$

où

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 T) \sin(nx) \sin(ny).$$

Ainsi u est solution du problème (1.3) si et seulement si φ *satisfait* ***l'équation de Fredholm*** *de premiére espéce*

$$Lu_0 = \varphi,$$

où L est l'opérateur intégral de noyau $K(.,.)$*. Comme L est compact,* L^{-1} *n'est pas borné. Alors le problème (1.3) est* ***mal posé****.*

Exemple 1.1.5. ***(Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace)*** *Soit le problème suivant*

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.4}$$

où $\varphi(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),\ n > 0.$

Le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx).\sinh(ny).$$

On a $\varphi \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$ *tandis que* $u(x,y)$ *peut être arbitrairement grand quand* n *prend des valeurs suffisamment élevées. La solution du problème (1.4) ne dépend pas continûment des données initiales. Donc le problème est* ***mal posés****.*

1.2 Applications

L''etude des problèmes inverses a connu un développement très important au cours des dernières années. Cela est dû à la richesse du sujet et au fait que ces problèmes sont réellement présents dans de nombreux domaines, nous pouvons entre autres citer :

1. L'imagerie médicale (échographie, Scanners, ...),
2. L'ingénierie pétrolière (Identification de perméabilité,magnétisme,...)
3. L'hydrologie
4. La chimie (Détermination des constantes de réaction)
5. Le radar (Détermination de la forme d'un obstacle)
6. L'acoustique sous-marine
7. Mécanique quantique (Détermination du potentiel)
8. Traitement d'image (Restauration d'images floues)

Les problèmes inverses constituent donc l'un des sujet où le lien entre la théorie mathématique et la pratique est le plus fort.

1.2.1 Imagerie

Regardons de manière simplifiée comment fonctionne la tomographie à Rayons X. L'objet à analyser est décomposé de manière théorique en (pixels). Il est donc divisé en m lignes et n colonnes, ce qui fait $m \times n$ pixels, tous caractérisés par un coefficient d'atténuation du rayon X. Le but est de retrouver ces coefficients. En envoyant un faisceau de rayons X sur l'objet dans une direction précise, par exemple le long des lignes, chacun des m détecteurs mesure l'intensité après propagation du rayon le long des lignes, i.e. après avoir traversé n pixels. Nous avons ainsi m mesures. La même opération est réalisée n fois avec des angles différents. Nous obtenons $m \times n$ mesures dépendant de nos $m \times n$ coefficients d'atténuation à trouver. **C'est un problème inverse**.

De manière tout à fait générale et théorique, le but de la tomographie est de reconstruire une fonction f à partir des observations de ses intégrales sur des hyperplans. Ce problème de reconstruction apparaÎt dans de nombreux domaines de l'imagerie médicale à la théorie du radar, en passant par la géophysique. L'un des premiers cas où ce principe est apparu est la radiologie par utilisation de rayons X. Le principal outil mathématique utilisé pour la tomographie est la **Transformation de Radon**, qui à une fonction f fait correspondre les intégrales sur des hyperplans. La transformée de Radon d'une fonction f est définie par

$$Rf(s,u) = \int_{w:(w,s)=u} f(w)dw,$$

où $u \in \mathbb{R}$ et $s \in S^{d-1}$ est la sphère unité et$\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$. Ainsi, $Rf(s,u)$ est l'intégrale sur l'hyperplan défini par (s,u). La tomographie est un problème inverse mal-posé où l'opérateur à inverser est la transformation de Radon. Notons qu'il existe de très nombreux modèles différents, qui dépendent du domaine considéré et de la complexité désirée dans la modélisation Les images numériques obtenues sont souvent dégradées par un bruit additif et un opérateur (flou). L'opérateur de flou donne une image observée y, modélisée par une convolution discrète bidimensionnelle

$$y(i,j) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{t-1} x(k,l)h((i-k)_{mod\,n},(j-l)_{mod\,n}).$$

A partir de y, on cherche à retrouver x. C'est donc un problème de déconvolution aveugle à deux dimensions.

2

Problème mal-posé abstrait

2.1 Position du problème

Soit A un opérateur positif ($A \geq \delta > 0$) auto-adjoint,[1] linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable $(H, \langle .,. \rangle)$ tel que A est le générateur d'un semi-groupe de contraction et compact[2]

On considère le problème à valeur finale suivant qui consiste à trouver $u : [0,T] \longrightarrow H$: tel que

$$\begin{cases} u_t + Au(t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u(T) = g. \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec $g \in H$ une fonction donnée. On suppose que $0 \in \rho(A)$[3] et que A^{-1} est compact auto-adjoint . Soit φ_n une base orthonormée des vecteurs associée aux valeurs propres λ_n de A i.e $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. On suppose que

$$0 < \delta < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 .... < \lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

Formellement la solution de (2.1) si elle existe, elle s'écrit sous la forme

$$u(t) = \exp(A(T-t))g. \tag{2.2}$$

C'est un problème mal posé du fait que si la solution unique existe sur $[0,T]$, elle ne dépendra pas nécessairement, continûment de la donnée finale g.

2.2 Problème mal-posé à coefficient indépendant du temps

En mathématique, la régularisation est une procédure qui consiste à modifier un problème non régulier par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés rendant son étude théorique et numérique plus facile.

En d'autres termes, régulariser un problème mal-posé c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensé par le gain de stabilité.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problèmes mal poses à titre d'exemple citons :

1. On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $A = A^*$ c-à-d $\forall x, y \in E \ \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$
2. Un opérateur A est dit compact si toute suite borné (f_n) de $D(A)$ contiènne une sous-suite (f_{nk}) pour laquelle (Af_{nk}) est convergente sur H.
3. $\rho(A)$ ensemble résolvant de A (L'ensemble des points réguliers) :$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} / (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et borné} \right\}$

2.2.1 Régularisation par perturbation de l'opérateur

D'après l'expression (2.2) et puisque $A \geq \delta > 0$, le terme $e^{A(T-t)} \longrightarrow \infty$. Donc l'idée globale consiste à remplacer l'opérateur A par une suite d'opérateur (A_α) dépendant d'un petit paramètre α, appelé **paramètre de régularisation**, parmi ces méthodes de régularisation nous citons

- **Méthode quasi-réversibilité :** Initialement introduite par Lattès-Lions 1967[15] consiste à transformer le problème de cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4). L'idée principale consiste à remplacer l'opérateur A par A_α pour obtenir un problème inverse bien posé, le problème (2.1) devient :

$$\begin{cases} u_t^\alpha + A_\alpha u^\alpha(t) = 0, & t \in [0,T] \\ u^\alpha(T) = g. \end{cases} \tag{2.3}$$

  Ensuite, en utilisant les informations sur la solution du problème perturbé et la résolution du problème d'origine, nous obtenons un autre problème bien posé et cette solution peut parfois être considérée comme la solution approximative du problème mal posé.

- ▹ Dans la méthode d'origine, R.Lattes et J.L.Lions ont proposés $A_\alpha(A) = A - \alpha A^2$ voir [15]
- ▹ Gajewski a proposé $g_\alpha(A) = A(I + \alpha A)^{-1}$ voir [6]
- ▹ Dans [17] de K. Miller a introduit une approximation plus générales, en remplaçant l'opérateur A par $f(A)$ et a imposé de certaines conditions sur la fonction f pour améliorer l'ordre de convergence.
- ▹ N.Boussetila et F.Rebbani $A_\alpha = -\frac{1}{PT}\ln(\alpha + e^{(-PTA)})$ [2]

2.2.2 Régularisation par perturbation des conditions initiales où aux limites

Un problème similaire a était traité d'une autre manière, en perturbant les condition et parmi cette méthode de régularisation on citons
méthode des valeurs aux limites auxiliaires
En 1983, Showalter [16] a présenté une méthode appelée quasi-boundary value(Q.B.V méthode) pour régulariser le problème homogène linéaire(L) qui a donné une meilleure estimation par rapport à la méthode quasi-réversibilité. L'idée principale de cette méthode est d'ajouter un «correcteur» approprié dans les données finales i.e on perturbe la donnée finale pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre.

• Elle a été développée dans les travaux de G. W. Clark -S. F. Oppenheimer [3] et M. Denche-K. Bessil [4]

• Aussi dans le travail de A. Benrabah et N.Boussetila [5] qui sont approchés le problème inverse harmonique suivant

$$\mathcal{T}w \equiv \Delta^2 w = w_{yyyy}(x,y) + 2w_{yyxx}(x,y) + w_{xxxx}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$w|_{x=0} = 0,\ \Delta w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=\pi} = 0,\ \Delta w|_{x=\pi} = 0, \tag{2.5}$$

$$w|_{y=0} = 0, \ \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2.6}$$

$$\Delta w|_{y=\ell} = 0, \ \frac{\partial \Delta w}{\partial y}|_{y=\ell} = g(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2.7}$$

Par le problème perturbés suivant

$$(P_\alpha^\delta) \quad \begin{cases} \Delta^2 w_\alpha^\delta(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ w_\alpha^\delta(0,y) = \Delta w_\alpha^\delta(0,y) = 0, & 0 \le y \le \ell, \\ w_\alpha^\delta(\pi,y) = \Delta w_\alpha^\delta(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le \ell, \\ w_\alpha^\delta(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial w_\alpha^\delta(x,0)}{\partial y} + \alpha \dfrac{\partial w_\alpha^\delta(x,\ell)}{\partial y} = f^\delta(x), & 0 \le x \le \pi, \\ \Delta w_\alpha^\delta(x,\ell) = 0, \quad \dfrac{\partial \Delta w_\alpha^\delta(x,\ell)}{\partial y} + \alpha \dfrac{\partial \Delta w_\alpha^\delta(x,0)}{\partial y} = g^\delta(x), & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2.2.3 Perturbation de l'opérateur et les conditions du problème

Dans le but d'améliorer l'ordre de convergence, cette méthode combine les deux techniques de régularisation précédentes. On perturbe l'opérateur et une condition au limite où initiale du problème (2.1) à la fois. Donc on obtient un problème régularisé qui dépend de deux paramètre de régularisation.

Parmi les utilisateurs de cette technique

- A. Benrabah, N.Boussetila et F.Rebbani [1] qui sont approchés le problème :

$$(A) \quad \begin{cases} u''(t) - Au(t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(0) = \varphi, \\ u'(0) = 0, \end{cases}$$

par le problème perturbé suivant :

$$(A_\sigma) \quad \begin{cases} u_\sigma''(t) - A_\sigma u_\sigma(t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ \beta u_\sigma(0) + u_\sigma(0) = \varphi, \\ u_\sigma'(0) = 0, \end{cases}$$

où l'opérateur A est remplacé par $A_\alpha = A(I+\alpha A)^{-1}$ et la condition initiale $u(0) = \varphi$ est remplacé par $u(0) + \beta u(T) = \varphi$, où $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\sigma = (\alpha, \beta)$.

2.3 Problème rétrograde à coefficient dépendant du temps

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times [0,T]$, où T est un réel positive.
On considère le problème rétrograde suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t) = a(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ u(x,T) = g(x). \end{cases}$$

Où $a(t)$ and $g(t)$ sont des fonctions données.
Hypothèse

$\forall t \in [0,T], a(t) > 0$

Notation
On note

$$F(T) = \int_0^t \frac{1}{a(s)} \mathrm{d}s \tag{2.8}$$

Remarque 2.3.1. *l'équation aux dérivées partielles dans (P) est équivalente a*

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t) = a(t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a(t)}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \underbrace{\frac{1}{a(t)}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t)}_{A(t)} = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + A(t)u(x,t) = 0.
\end{aligned}$$

Alors le problème (P) est un cas particulier du problème $(P_{A(T)})$ suivant :

$$\left(P_{A(t)}\right) \qquad \begin{cases} u_t(x,t) + A(t)u(x,t) = 0, & t \in [0,T], x \in \mathbb{R},\\ u(x,T) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $A(t)\,u(x,t) = -\dfrac{1}{a(t)} u_{xx}(x,t).$ $(*)$

2.3.1 Détermination de la solution

Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de la fonction h, notée $\hat{h}$ où $\mathscr{F}$ est donnée par :

$$\mathscr{F}(h) = \widehat{h}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} h(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Si de plus $\hat{h} \in L^1(R)$, alors d'après la formule d'inversion partielle on a :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \widehat{h}(z)\mathrm{d}z. \tag{2.10}$$

Pour une fonction de deux variable, $u : (x,t) \longrightarrow u(x,t)$ la transformée de Fourier de u par rapport à x est donnée par :

$$\widehat{u}(x,t)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} u(x,t)\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Donc de la même manière :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \widehat{u}(z) \mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à x sur (P), on obtient :

$$(P_{\mathscr{F}}) \begin{cases} \mathscr{F}(u_{xx}(x,t))(z) = \mathscr{F}(a(t)u_t(x,t))(z), & (x,t) \in \Omega, \\ \mathscr{F}(u(x,T)) = \mathscr{F}(g(x)). \end{cases}$$

Remarque 2.3.2. *1.* $g \in L^1(\mathbb{R})$.

2. $\mathscr{F}(u_{xx}(x,t))(z) = -z^2 \mathscr{F}(u(x,t)) = -z^2 \widehat{u}(x,t)(z)$.

3.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(u_t(x,t))(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} u_t(x,t) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-izx} u(x,t)) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} u(x,t) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(x,t)(z). \end{aligned}$$

D'après la remarque (2.3.2) le problème $P_{(F)}$ devient

$$\begin{cases} -z^2 \widehat{u}(x,t)(z) = a(t) \widehat{u_t}(x,t))(z), & (x,t) \in \Omega, \\ \widehat{u}(x,T)(z) = \widehat{g}(z), \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -z^2 u(x,t)(z) = a(t) \widehat{u}'(x,t)(z), & (x,t) \in \Omega, \\ \widehat{u}(x,T)(z) = \widehat{g}(z), \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\widehat{u}'(x,t)(z)}{\widehat{u}(x,t)(z)} = \dfrac{-z^2}{a(t)}, & (x,t) \in \Omega, \\ \widehat{u}(x,T)(z) = g(z). \end{cases}$$

Puis on intègre par rapport à t de 0 à t,on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\widehat{u}'(x,s)(z)}{\widehat{u}(x,s)(z)} &= -z^2 \int_0^t \frac{1}{a(s)} \mathrm{d}s \\
\ln|\widehat{u}(x,s)|\Big|_0^t &= -z^2 F(t) \\
\ln|\widehat{u}(x,t)| - \ln|\widehat{u}(x,0)| &= -z^2 F(t) \\
\ln\left|\frac{\widehat{u}(x,t)}{\widehat{u}(x,0)}\right| &= -z^2 F(t) \\
\frac{\widehat{u}(x,t)}{\widehat{u}(x,0)} &= e^{-z^2 F(t)} \\
\widehat{u}(x,t) &= \widehat{u}(x,0) e^{-z^2 F(t)}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

On remplace $t = T$ et on utilise la condition final on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(x,T) &= \widehat{u}(x,0) e^{-z^2 F(T)} \\
\widehat{g}(z) &= \widehat{u}(x,0) e^{-z^2 F(T)} \\
\widehat{u}(x,0) &= \widehat{g}(z) e^{z^2 F(T)}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

En combinant (2.13) est (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(x,t) &= \widehat{u}(x,0) e^{-z^2 F(t)} \\
&= \widehat{g}(z) e^{z^2 F(t)} e^{-z^2 F(t)} \\
&= \widehat{g}(z) e^{z^2 (F(T) - F(t))}.
\end{aligned}$$

Par la formule d'inversion de Fourier :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{z^2(F(T)-F(t))} \widehat{g}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z. \qquad (2.15)$$

2.3.2 Méthode de régularisation par les conditions auxiliaires(non-locales)

L'idée de base, dans cette méthode consiste à remplacer la condition final $u(x,T) = g(x)$, par une condition de la forme

$$u(x,T) + \varepsilon u(x,0) = g(x). \qquad (2.16)$$

Où ε est le paramètre de régularisation $(1 > \varepsilon > 0)$. Puisque la solution dépend de ε, notons $u(x,t) \equiv u_\varepsilon(x,t)$, alors avec (15) le problème (P) devient (P_ε) comme suit :

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon(x,t) = a(t) \dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x,T) + \varepsilon u_\varepsilon(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par application de la transformée de Fourier par rapport à x, la solution du problème (P_ε) est donnée par :

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{z^2F(t)}}{\varepsilon + e^{z^2F(T)}} \widehat{g}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z. \tag{2.17}$$

Par application de la méthode de la transformée de Fourier et de la méthode de régularisation modifiée par des conditions auxiliaires, nous donnerons deux méthodes régularisation pour le problème (P). Une estimation d'erreur entre la solution régularisée et la solution exacte est donné dans ce chapitre.

2.3.3 Première méthode

Cette méthode consiste à remplacer la solution (2.15) par :

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{z^2F(t)}}{\varepsilon z^2 + e^{-z^2F(T)}} \widehat{g}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z. \tag{2.18}$$

2.3.4 Seconde méthode

Cette méthode est basée sur la même idée développée dans la première méthode avec une petite modification en introduisant le paramètre m. la solution régularisée est donnée par :

$$v_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2 + e^{-z^2(F(T)+m)}} \widehat{g}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z, \tag{2.19}$$

on note par u_{ex}la solution exacte et u_ε, v_ε les solutions régularisées.

Remarque 2.3.3. *1. On note g_ε la donnée mesurée de g. Vérifiant $\|g - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, où ε est le niveau de bruit.*

2. On doit montrer que les solution données par (2.18) et(2.19) vérifient les relations suivantes :

$$\|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 \leq c_1^{te}.h_1(\varepsilon), \tag{2.20}$$

où $h_1(\varepsilon) \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

$$\|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 \leq c_2^{te}.h_2(\varepsilon), \tag{2.21}$$

où $h_2(\varepsilon) \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour montrer les deux estimations (2.20) et (2.21) nous sommes besoin de quelques lemmes :

lemme 2.3.1. *Soit $(0 < \varepsilon < M)$ et $f(y) = \frac{1}{\varepsilon y + e^{-yM}}$.*
Alors on a

$$f(y) \leq \frac{M}{\varepsilon(1 + \ln(\frac{M}{\varepsilon}))} \leq \frac{M}{\varepsilon \ln(\frac{M}{\varepsilon})}. \tag{I}$$

Démonstration. Il est clair que $\lim_{|y|\longrightarrow\infty} f(y) = 0$, puis en dérivant f par rapport à y :

$$\begin{aligned}
f'(y) &= -\frac{[\varepsilon - Me^{-yM}]}{(\varepsilon y + e^{-yM})^2} = 0 \\
&\Longrightarrow Me^{-yM} = \varepsilon \\
&\Longrightarrow e^{-yM} = \frac{\varepsilon}{M} \\
&\Longrightarrow yM = \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) \\
&\Longrightarrow y^* = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(y^*) &= \sup|f(y)| \\
&= \frac{1}{\varepsilon y^* + e^{-y^*M}} \\
&= \frac{1}{\frac{\varepsilon}{M}\ln(\frac{M}{\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{M}} \\
&= \frac{M}{\varepsilon[1 + \ln(\frac{M}{\varepsilon})]}.
\end{aligned}$$

□

lemme 2.3.2. *Soient* $0 \leq t \leq s \leq M$, $0 < \varepsilon < M$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *et* $M_1 = \max\{1, M\}$ *alors on a les inégalités suivantes :*

(a) $\dfrac{e^{(s-t-M)y^2}}{\varepsilon y^2 + e^{-My^2}} \leq M_1[\varepsilon \ln(\dfrac{M}{\varepsilon})]^{\frac{t-s}{M}}$

(b) $\dfrac{e^{y^2}}{\varepsilon y^2 + e^{-My^2}} \leq M_1[\varepsilon \ln(\dfrac{M}{\varepsilon})]^{\frac{t-s}{M}}$

Démonstration. (a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(s-t-M)y^2}}{\varepsilon y^2 + e^{-My^2}} &= \frac{e^{(s-t-M)y^2}}{(\varepsilon y^2 + e^{-My^2})^{\frac{s-t}{M}}(\varepsilon y^2 + e^{-My^2})^{\frac{M-(s-t)}{M}}} \\
&\leq \frac{e^{(s-t-M)y^2}}{(e^{-My^2})^{\frac{M+s-t}{M}}(\varepsilon y^2 + e^{-My^2})^{\frac{s}{M}-\frac{t}{M}}} \\
&= \left[\frac{1}{\varepsilon y^2 + e^{-My^2}}\right]^{\frac{s}{M}-\frac{t}{M}} \\
&\leq \left[\frac{M}{\varepsilon \ln(\frac{M}{\varepsilon})}\right]^{\frac{s-t}{M}} \\
&\leq M_1\left[\varepsilon \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{s-t}{M}},
\end{aligned}$$

où $M_1 = \max\{1, M\}$. □

(b) Posons $N = s$, on obtient directement

$$\frac{e^{(s-t-M)y^2}}{\varepsilon y^2 + e^{-My^2}} \leq \left[M_1\right]\left[\varepsilon \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{t-M}{M}}.$$

lemme 2.3.3. *Soit* $\varepsilon \in]0, F(T)[$, g_1, $g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $u_\varepsilon(g_1)$, $u_\varepsilon(g_2)$ *deux solution données par la formule (2.18) en fonction des données finales* g_1 *et* g_2 *respectivement. Alors on a l'estimation :*

$$\|u_\varepsilon(g_1)(.,t) - u_\varepsilon(g_2)(.,t)\|_2 \leq T_0\left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \|g_1 - g_2\|,$$

où $\|.\|_2$ *est la norme dans* $L^2(\mathbb{R})$ *et* $T_0 = \max\{1, F(T)\}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u_\varepsilon}(g_1)(.,t) - \widehat{u_\varepsilon}(g_2)(.,t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_\varepsilon}(g_1)(z,t) - \widehat{u_\varepsilon}(g_2)(z,t)|^2 \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2 + e^{-F(T)z^2}}(\widehat{g_1}(z) - \widehat{g_2}(z))\right|^2 \mathrm{d}z \\
&\leq \left[T_0\left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\right]^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_1}(z) - \widehat{g_2}(z)|^2 \mathrm{d}z \\
&\leq \left[T_0\left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\right]^2 \|\widehat{g_1}(z) - \widehat{g_2}(z)\|^2.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\|\widehat{u_\varepsilon}(g_1)(.,t) - \widehat{u_\varepsilon}(g_2)(.,t)\|_2 \leq T_0[\varepsilon \ln(F(T)/\varepsilon)]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \|\widehat{g_1} - \widehat{g_2}\|_2,$$

finalement, d'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\|u_\varepsilon(g_1)(.,t) - u_\varepsilon(g_2)(.,t)\|_2 \leq T_0[\varepsilon \ln(F(T)/\varepsilon)]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \|\widehat{g_1} - \widehat{g_2}\|_2.$$

□

lemme 2.3.4. *Soit* $\varepsilon \in]0, F(T)]$, $m > 0$ $g_1, g_2 \in L^2(R)$ *et* $v_\varepsilon(g_1)$, $v_\varepsilon(g_2)$ *deux solutions données par la formule (2.19) en fonction des données finales* g_1 *et* g_2 *respectivement. Alors on a l'estimation :*

$$\|v_\varepsilon(g_1)(.,t) - v_\varepsilon(g_2)(.,t)\|_2 \leq T_m\left[\varepsilon \ln\left(\frac{(F(T)+m)}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \|g_1 - g_2\|_2,$$

où $\|.\|_2$ *est la norme dans* $L^2(\mathbb{R})$ *et* $T_m = \max\{1, F(T) + m\}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{v_\varepsilon}(g_1)(.,t)-\widehat{v_\varepsilon}(g_2)(.,t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v_\varepsilon}(g_1)(z,t)-\widehat{v_\varepsilon}(g_2)(z,t)|^2 \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)}} (\widehat{g_1}(z)-\widehat{g_2}(z)) \right|^2 \mathrm{d}z \\
&\leq \left[T_m \left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon} \right) \right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \right]^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_1}(z)-\widehat{g_2}(z)|^2 \mathrm{d}z \\
&\leq \left[T_m \left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon} \right) \right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \right]^2 \|\widehat{g_1}(z)-\widehat{g_2}(z)\|^2.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\|\widehat{v_\varepsilon}(g_1)(.,t)-\widehat{v_\varepsilon}(g_2)(.,t)\|_2^2 \leq T_m \left[\varepsilon \ln\left((F(T)+m)/\varepsilon \right) \right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \|\widehat{g_1}-\widehat{g_2}\|_2,$$

finalement, d'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\|v_\varepsilon(g_1)(.,t)-v_\varepsilon(g_2)(.,t)\|_2 \leq T_m \left[\varepsilon \ln\left(F(T)+m/\varepsilon \right) \right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \|g_1-g_2\|_2.$$

□

À partir de(2.18) nous construirons la solution régularisée correspondant aux données mesurées

$$u_\varepsilon(g_\varepsilon)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}} \widehat{g_\varepsilon}(z) e^{izx} \mathrm{d}z, \tag{2.22}$$

et la solution régularisée correspondant aux données exactes

$$u_\varepsilon(g_{ex})(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}} \widehat{g_{ex}}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z. \tag{2.23}$$

Nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t)-u_{ex}(.,t)\|_2 &= \|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t)\underbrace{-u_\varepsilon(g_{ex})(.,t)+u_\varepsilon(g_{ex})(.,t)}_{=0}-u_{ex}(.,t)\|_2 \\
&\leq \|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t)-u_\varepsilon(g_{ex})(.,t)\|_2+\|u_\varepsilon(g_{ex})(.,t)-u_{ex}(.,t)\|_2,
\end{aligned}$$

d'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t)-u_{ex}(.,t)\|_2$$

$$\leq \|\widehat{u_\varepsilon}(g_\varepsilon)(.,t)-\widehat{u_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)\|_2+\|\widehat{u_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)-\widehat{u_{ex}}(.,t)\|_2. \tag{2.24}$$

Théorème 2.3.1. *Posons* $\varepsilon \in]0, F(T)]$, $u_{ex}(.,t) \in L^2(R)\, \forall t \in [0,T)$, $g_\varepsilon, g_{ex} \in L^2(R)$ *tel que* $\|g_\varepsilon - g_{ex}\|_2 \leq \varepsilon$ *et* $0 < Q = \int_R |z^2 e^{z^2 F(T)} \widehat{g_{ex}}(z)|^2 \mathrm{d}z$. *On obtient*

$$\|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 \leq T_0(1+\sqrt{Q})\Big[\varepsilon \ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}},$$

pour tout $t \in [0,T]$, *avec* $T_0 = max\{1, F(T)\}$.

Démonstration. De 2.3.3 posons $g_1 = g_\varepsilon$ et$g_2 = g_{ex}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u_\varepsilon}(g_\varepsilon)(.,t) - \widehat{u_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)\|_2 &\leq T_0\Big[\varepsilon \ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \underbrace{\|\widehat{g_\varepsilon} - \widehat{g_{ex}}\|_2}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq T_0 \varepsilon^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \varepsilon \Big[\ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \\
&\leq T_0 \varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}} \varepsilon^{\frac{-F(T)}{F(T)}} \varepsilon \Big[\ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}} \\
&\leq T_0 \varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}} \Big[\ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

d'autre part on sait que

$$\begin{aligned}
\widehat{u_{ex}}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{z^2(F(T)-F(t))} \widehat{g_{ex}}(z) e^{izx} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{z^2(F(T)}}{e^{z^2 F(t)}} \widehat{g_{ex}}(z) e^{izx} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2(F(t)}}{e^{-z^2 F(T)}} \widehat{g_{ex(z)}} e^{izx} \mathrm{d}z. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Alors d'après (2.15) et (2.26)

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)\|_2 &= \left|\frac{e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}}\widehat{g}_{ex}-\frac{e^{-z^2F(t)}}{e^{-z^2F(T)}}\widehat{g}_{ex}\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}}-\frac{1}{e^{-z^2F(T)}}\right]\widehat{g}_{ex}e^{-z^2F(t)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{-z^2F(T)}-\varepsilon z^2-e^{-z^2F(T)}}{(\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)})e^{-z^2F(T)}}\widehat{g}_{ex}e^{-z^2F(t)}\right| \\
&= \left|\frac{\varepsilon z^2e^{z^2F(T)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}}\widehat{g}_{ex}e^{-z^2F(t)}\right| \\
&= \left|\frac{\varepsilon z^2e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}}\widehat{g}_{ex}e^{z^2F(T)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{-z^2F(t)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2F(T)}}\varepsilon z^2e^{z^2F(T)}\widehat{g}_{ex}\right| \\
&\le \left|T_0\left[\varepsilon\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\varepsilon\right|\left|z^2e^{z^2F(T)}\widehat{g}_{ex}\right| \\
&\le T_0\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\left|z^2e^{z^2F(T)}\widehat{g}_{ex}\right|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)\| &= T_0\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\left\||z^2e^{z^2F(T)}\widehat{g}_{ex}\right\|_2 \\
&= T_0\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\left[\int_{\mathbb{R}}\left|z^2e^{z^2F(T)}\widehat{g}_{ex}\right|^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= T_0\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}\sqrt{Q}, \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

d'après(2.24) (2.25) et (2.27)on a

$$\|\widehat{u_\varepsilon}(g_\varepsilon)(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)\|_2 = T_0(1+\sqrt{Q})\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}.$$

D'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\|u_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t)-u_{ex}(.,t)\|_2 = T_0(1+\sqrt{Q})\varepsilon^{\frac{F(t)}{F(T)}}\left[\ln(F(T)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)}}.$$

□

Théorème 2.3.2. *Posons $\varepsilon\in]0,F(T)]$, $u_{ex}(.,t)\in L^2(R)\,\forall\,t\in[0,T)$, g_ε, $g_{ex}\in L^2(R)$ tel que $\|g_\varepsilon-g_{ex}\|_2\le\varepsilon$ et v_ε la solution définie par (2.19). Si l'on suppose, en plus, qu'il existe un nombre* *positif m tel que* $0 < Q_m = \int_R |z^2 e^{z^2(F(T)+m)} \widehat{g}_{ex}(z)|^2 \mathrm{d}z$. *On obtient*

$$\|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 = T_m(1+\sqrt{Q_m})\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}} \Big[\ln(F(T)/\varepsilon)\Big]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}},$$

avec $t \in [0,T]$, *et* $T_m = max\{1, F(T)+m\}$.

Démonstration. À partir de(2.19)nous construisons la solution régularisée correspondant aux données mesurées

$$v_\varepsilon(g_\varepsilon)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2 + e^{-z^2(F(T)+m)}} \widehat{g}_\varepsilon(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z, \tag{2.28}$$

et la solution régularisée correspondant aux données exact

$$v_\varepsilon(g_{ex})(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2 + e^{-z^2(F(T)+m)}} \widehat{g}_{ex}(z)\, e^{izx} \mathrm{d}z, \tag{2.29}$$

nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 &= \|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) \underbrace{- v_\varepsilon(g_{ex})(.,t) + v_\varepsilon(g_{ex})(.,t)}_{=0} - u_{ex}(.,t)\|_2 \\ &\leq \|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - v_\varepsilon(g_{ex})(.,t)\|_2 + \|v_\varepsilon(g_{ex})(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2, \end{aligned}$$

d'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\begin{aligned} &\|v_\varepsilon(g_\varepsilon)(.,t) - u_{ex}(.,t)\|_2 \\ &\leq \|\widehat{v_\varepsilon}(g_\varepsilon)(.,t) - \widehat{v_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)\|_2 + \|\widehat{v_\varepsilon}(g_{ex})(.,t) - \widehat{u}_{ex}(.,t)\|_2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

D'après lemme 2.3.4, on a

$$\begin{aligned} \|\widehat{v_\varepsilon}(g_\varepsilon)(.,t) - \widehat{v_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)\|_2 &\leq T_m \left[\varepsilon \ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \|g_\varepsilon - g_{ex}\|_2 \\ &\leq T_m \varepsilon^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \left[\ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \varepsilon \\ &\leq T_m \varepsilon^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}+1} \left[\ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} \\ &\leq T_m \varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}} \left[\ln\left(\frac{F(T)+m}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

avec $T_m = max\{1, F(T)+m\}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{v_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)| &= \left|\frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)}}\widehat{g}_{ex}(z)-\frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{e^{-z^2(F(T)+m)}}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-z^2(F(t)+m)}e^{-z^2(F(T)+m)}-\left[\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)}\right]e^{-z^2(F(t)+m)}}{\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)}e^{-z^2(F(T)+m)}}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&= \left|\frac{\varepsilon z^2 e^{-z^2(F(t)+m)}}{(\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)})e^{-z^2(F(T)+m)}}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-z^2(F(t)+m)}}{(\varepsilon z^2+e^{-z^2(F(T)+m)})}\varepsilon z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)\right|,
\end{aligned}$$

d'après lemme 2.3.2

$$\begin{aligned}
&|\widehat{v_\varepsilon}(g_{ex})(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)| \\
&\leq \left|T_m\left[\varepsilon\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}\varepsilon z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&\leq \left|T_m\varepsilon^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}+1}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&\leq \left|T_m\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}} z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)\right| \\
&\leq T_m\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}\left\| z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)\right\|_2 \\
&\leq T_m\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}\left[\int_R |z^2 e^{z^2(F(T)+m)}\widehat{g}_{ex}(z)|^2 dz\right] \\
&\leq T_m\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}\sqrt{Q_m}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

D'après (2.31) et (2.32)

$$\|\widehat{v_\varepsilon}(g)_{ex}(.,t)-\widehat{u}_{ex}(.,t)\| = T_m(1+\sqrt{Q_m})\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}},$$

et d'après **le théorème de Plancherel**, on obtient :

$$\|v_\varepsilon(g)_{ex}(.,t)-u_{ex}(.,t)\| = T_m(1+\sqrt{Q_m})\varepsilon^{\frac{F(t)+m}{F(T)+m}}\left[\ln((F(T)+m)/\varepsilon)\right]^{\frac{F(t)-F(T)}{F(T)+m}}. \qquad (2.33)$$

□

3 Problème rétrograde non linéaire de la chaleur

Dans le présent chapitre, nous considérons un problème de chaleur inverse non linéaire avec un coefficient dépendant du temps dans un domaine non borné. On propose en suite une méthode de régularisation modifiée pour le résoudre. De nouvelles estimations d'erreur pour la solution régularisée seront données sous quelques hypothèses sur la solution exacte.

3.1 Position du probème

Soit T un nombre positif. Nous considérons le problème de trouver la température $u(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, telle que

$$\begin{cases} u_t(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) = f(x,t,u(x,t)), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $a(t)$, $\varphi(x)$ et $f(x,t,z)$ sont des fonctions données satisfaisant des conditions qui seront spécifiées ultérieurement.

Le problème (3.1) est bien connu pour être fortement mal posé. C'est ce qu'on appelle le problème de chaleur rétrograde, problème de Cauchy rétrograde, ou problème de valeur finale.

Comme on le sait, si la distribution de température initiale dans un corps conducteur de chaleur est donnée, alors la distribution de température à un moment ultérieur peut être déterminée et le problème est bien posé. C'est le problème direct. Dans l'exploration géophysique, on est souvent confronté au problème de la détermination de la distribution de température dans la Terre ou toute partie de la Terre à un instant $t_0 > 0$ à partir de la mesure de la température à un instant $t_1 > t_0$. C'est le problème de la chaleur rétrograde. **Ce type de problème est fortement mal posé; c'est-à-dire que les solutions n'existent pas toujours, et en cas d'existence, elles ne dépendent pas continuellement des données fournies.** En fait, même avec un petit bruit de mesures physiques contaminés, les solutions correspondantes présentent de grandes erreurs. Cela rend difficile les calculs numériques. En raison de la mauvaise position du problème, il est impossible de résoudre le problème de la chaleur inverse en utilisant des méthodes numériques. Par conséquent, des stratégies de régularisation doivent être employées. Dans le cas le plus simples $f = 0$ et $a(t) = 1$, le problème (3.1) devient

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Des auteurs tels que Lattes et Lions [15], Showalter [16], Clark et al. [3] ont approximé le problème (3.2) par la méthode de quasi-réversibilité. Tautenhahn et Schröter [**?**] ont établi une estimation d'erreur optimale pour (3.2). Certains articles [7, 8] ont approximé (3.1) par des méthodes de troncuature spectrales. Une méthode de quasi-réversibilité modifiée du problème (3.1) a été étudiée par Denche et al. [4].

Bien qu'il existe de nombreux travaux sur le problème inverse de la chaleur à coefficients constant, la littérature sur le cas non linéaire du problème avec un coefficient dépendant du temps (à savoir le problème (3.1) est assez rare. Dans le présent chapitre nous présentons une méthode afin de régulariser le problème (3.1). Sous certaines hypothèses sur la solution exacte, nous obtenons des vitesses de convergence plus rapides. Dans un sens, c'est une amélioration des résultats connus dans [11, 13, 12].

3.1.1 Notations

On suppose que $a : [0, T] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0, T]$ vérifiant $a(t) > 0$. La fonction $B(t)$ est définie par

$$B(t) = \int_0^t \frac{1}{a(s)} ds. \tag{3.3}$$

Soit $\widehat{g}(\xi)$ la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ définie comme suit

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx. \tag{3.4}$$

Soit $H^1 = W^{1,2}$ et $H^2 = W^{2,2}$ les espaces de Sobolev définis par

$$H^1(\mathbb{R}) = \Big\{ g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \xi \widehat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \Big\},$$

$$H^2(\mathbb{R}) = \Big\{ g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \xi^2 \widehat{g}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \Big\}.$$

On note $\|.\|$, $\|.\|_{H^1}$ et $\|.\|_{H^2}$ les normes dans $L^2(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R})$, respectivement, à savoir

$$\|g\|_{H^1}^2 = \|g\|^2 + \|g_x\|^2 = \|\sqrt{(1+\xi^2)}\widehat{g}(\xi)\|^2,$$

$$\|g\|_{H^1}^2 = \|g\|^2 + \|g_x\|^2 + \|g_{xx}\|^2 = \|\sqrt{(1+\xi^2+\xi^4)}\widehat{g}(\xi)\|^2.$$

Expliquons d'abord ce qu'est une solution faible du problème (3.1).

lemme 3.1.1. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(x, y, 0) = 0$ et*

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq K|u - v|, \tag{3.5}$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ et pour une constante $K > 0$ indépendante de x, t, u, v.

Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons que $u \in C([0, T], H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ est la solution de l'équation

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{(B(T)-B(t))\xi^2} \varphi(\xi) - \int_t^T e^{-(B(t)-B(s))\xi^2} \widehat{f}(\xi, s, u) ds. \tag{3.6}$$

Alors u_t, $u_{xx} \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$.

Démonstration. En posant $t = T$ dans (3.6), on a immédiatement $\widehat{u}(\xi, T) = \widehat{\varphi}(\xi)$. Par conséquent, on obtient $u(x, T) = \varphi(x)$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

En multipliant l'équation ci-dessus par $e^{B(t)\xi^2}$, on obtient

$$e^{B(t)\xi^2}\widehat{u}(\xi, t) = e^{B(T)\xi^2}\varphi(\xi) - \int_t^T e^{B(s)\xi^2}\widehat{f}(\xi, s, u)ds, \quad t \in [0, T].$$

La dérivation de cette dernière équation par rapport à t, donne

$$e^{B(t)\xi^2}\left(\xi^2\widehat{u}(\xi, t) + \frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi, t)\right) = e^{B(t)\xi^2}\widehat{f}(\xi, t, u),$$

alors

$$\xi^2\widehat{u}(\xi, t) + \frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, t, u), \quad t \in [0, T].$$

Puisque $u \in C([0, T], H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ on a que $\xi^2\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}_{xx}(\xi, t)$ et $\frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi, t)$ appartiennent à $C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$. Cela donne u_t, et $u_{xx} \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$ et (3.6) donne une formulation faible de la solution du problème (3.1). Cela met fin à la preuve. □

Une solution du problème (3.1) est une fonction $u(x, t)$ satisfaisant (3.1) au sens classique et pour tout $t \in [0, T]$ fixé, la fonction $u(, t) \in L^2(\mathbb{R})$. Dans cette classe de fonctions, si la solution du problème (3.1) existe, alors elle doit être unique (voir [11]). En général, nous ne connaissons aucune condition générale dans laquelle le problème (3.1) peut être résolu. L'objectif principal de cette partie est de donner une méthode de calcul de la solution exacte lorsqu'elle existe.

Soit $u(x, t)$ une solution unique de (3.1) (si elle existe). En utilisant la technique de la transformée de Fourier au problème (3.1) par rapport à la variable x, on peut obtenir la transformée de Fourier $\widehat{u}(\xi, t)$ de la solution exacte $u(x, t)$, ce qui est donné dans (3.6). Puisque $t < T$, on sait d'après (3.6) que, quand $|\xi|$ devient grand, $e^{B(t)\xi^2}$ et $e^{(B(s)-B(t))\xi^2}$ augmentent assez rapidement. Ainsi, ces termes sont les causes de l'instabilité.

3.2 Estimation d'erreur

Par conséquent, pour régulariser le problème, nous devons remplacer ces termes par d'autres termes qui sont proches dans un sens. L'idée est de les remplacer par

$$\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}},$$

et

$$\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}},$$

respectivement, où $(m > 0, k > 1)$.

La principale conclusion du chapitre est :

Théorème 3.2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme dans le lemme 3.5. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_\epsilon \in L^2(\mathbb{R})$ les données mesurées telles que $\|\varphi_\epsilon - \varphi\| \leq \epsilon$. Supposons que le problème (3.1) a une solution unique $u \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}))$. Soit $m > 0$ et $k > 1$ des nombres réels tel que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^{2k}e^{(B(t)+m)\xi^2}\widehat{u}(\xi, t)|^2 d\xi < \infty. \tag{3.7}$$

Ensuite nous avons

$$\|u(,t) - w_\epsilon(,t)\| \le P(k,m)\epsilon^{\frac{(B(t)+m)}{(B(T)+m)}} \left[\ln\left(\frac{I(k,m)}{\epsilon}\right)\right]^{\frac{(kB(t)-kB(T))}{(B(T)+m)}}, \tag{3.8}$$

pour tout $t \in (\,0, T]$, où w_ϵ est la fonction dont la transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{w_\epsilon}(\xi,t) = \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\widehat{\varphi_\epsilon}(\xi) \tag{3.9}$$

$$- \int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\widehat{f}(\xi,s,w_\epsilon)ds \tag{3.10}$$

et

$$I(k,m) = \frac{(B(T)+m)^k}{k}, \tag{3.11}$$

$$P(k,m) = \sqrt{A(k,m)}e^{T^2K^2H^2(k,m)} + \sqrt{2}H(k,m)e^{T^2K^2H^2(k,m)}, \tag{3.12}$$

$$A(k,m) = 2H^2(k,m)\sup_{0\le t\le T}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi^k e^{(B(t)+m)\xi^2}\widehat{u}(\xi,t)|^2 d\xi, \tag{3.13}$$

$$H(k,m) = \min\left\{1, (kB(T)+km)^k\right\}. \tag{3.14}$$

La preuve est basée sur les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2.

lemme 3.2.1. *Pour $M,\epsilon,x > 0$, et $k > 1$, on a l'inégalité*

$$\frac{1}{\epsilon x^k + e^{-Mx}} \le D(k,M)\epsilon^{-1}\ln\left(\left(\frac{E(k,M)}{\epsilon}\right)\right)^{-k}, \tag{3.15}$$

où $D(k,M) = (kM)^k$, et $E(k,M) = \frac{M^k}{k}$.

Démonstration. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\epsilon x^k + e^{-Mx}}$. La dérivée de g est

$$g'(x) = \frac{\epsilon k x^{k-1} - Me^{-Mx}}{(\epsilon x^k + e^{-Mx})^2}.$$

L'équation $g'(x) = 0$ donne une solution unique x_0 telle que $\epsilon k x_0^{k-1} - Me^{-Mx_0} = 0$. Cela signifie que $x_0^{k-1}e^{Mx_0} = \frac{M}{k\epsilon}$. Ainsi, la fonction g atteint son maximum à un point unique $x = x_0$. Par conséquent

$$g(x) \le \frac{1}{\epsilon x_0^k + e^{-Mx_0}}.$$

Comme $e^{-Mx_0} = \frac{k\epsilon}{M}x_0^{k-1}$, on a

$$g(x) \le \frac{1}{\epsilon x_0^k + e^{-Mx_0}} \le \left(\epsilon x_0^k + \frac{k\epsilon}{M}x_0^{k-1}\right)^{-1}.$$

En utilisant l'inégalité $e^{Mx_0} > Mx_0$, on obtient

$$\frac{M}{k\epsilon} = x_0^{k-1}e^{Mx_0} \le \frac{1}{M^{k-1}}e^{(k-1)Mx_0}e^{Mx_0} = \frac{1}{M^{k-1}}e^{kMx_0}.$$

Cela donne $e^{kMx_0} > \frac{M^k}{k\epsilon}$, ou de manière équivalente $kMx_0 > \ln\left(\frac{M^k}{k\epsilon}\right)$. Par conséquent, $x_0 > \frac{1}{kM}\ln\left(\frac{M^k}{k\epsilon}\right)$. On obtient donc

$$g(x) \leq \frac{1}{\epsilon x_0^k} \leq \frac{(kM)^k}{\epsilon \ln^k\left(\frac{Mk}{k\epsilon}\right)}.$$

□

lemme 3.2.2. *Soit s, t des nombres réels telle que $0 \leq t \leq s \leq T$. Soit $\epsilon > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, $k \geq 1$. Alors on les estimations suivantes*

$$\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \leq H(k,m)\epsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left(\ln\left(\frac{I(k,m)}{\epsilon}\right)\right)^{\frac{kB(t)-kB(T)}{B(T)+m}}, \tag{3.16}$$

$$\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \leq H(k,m)\epsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left(\ln\left(\frac{I(k,m)}{\epsilon}\right)\right)^{\frac{kB(t)-kB(T)}{B(T)+m}}, \tag{3.17}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} &= \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(T)-B(t)}{B(T)+m}}} \\
&\leq \frac{1}{\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(T)-B(t)}{B(T)+m}}} \\
&\leq D(k,M)\epsilon^{-1}\left(\ln^{-k}\left[\frac{E(k,M)}{\epsilon}\right]\right)^{\frac{B(T)-B(t)}{B(T)+m}} \\
&\leq D(k,B(T)+m)^{\frac{B(T)-B(t)}{B(T)+m}}\epsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left[\ln\left(\frac{E(k,B(T)+m)}{\epsilon}\right)\right]^{k\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}} \\
&\leq H(k,m)\epsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left[\ln\left(\frac{I(k,m)}{\epsilon}\right)\right]^{k\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}},
\end{aligned}$$

où $H(k,m) = \min 1, D(k,B(T)+m)$, et $I(k,m) = E(k,B(T+m))$. Pour le second point on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} &= \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(T)+m-B(s)+B(t)}{B(T)+m}}\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(s)-B(t)}{B(T)+m}}} \\
&\leq \frac{1}{\left(\epsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}\right)^{\frac{B(s)-B(t)}{B(T)+m}}} \\
&\leq D(k,B(T)+m)^{\frac{B(s)-B(t)}{B(T)+m}}\epsilon^{\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}}\left[\ln\left(\frac{E(k,B(T)+m)}{\epsilon}\right)\right]^{k\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}} \\
&\leq H(k,m)\epsilon^{\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}}\left[\ln\left(\frac{I(k,m)}{\epsilon}\right)\right]^{k\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}}.
\end{aligned}$$

□

Démonstration. **(Théorème 3.2.1)** Nous divisons la preuve en trois étapes.

— Étape 1 : Construction de la solution régularisée w_ε.

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned}\hat{w}_\varepsilon(\xi,t) &= \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)\\ &- \int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{3.18}$$

ou

$$\begin{aligned}w_\varepsilon(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi\\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)e^{i\xi x}\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Premièrement, nous montrons que le problème (3.19) a une solution unique w_ε appartenant à $C([0,T];L^2\mathbb{R})$. Notons

$$G(w)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(x,t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)e^{i\xi x}\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi$$

pour tout $w \in C([0,T];L^2\mathbb{R})$ et

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi.$$

Puisque $f(x,y,0)=0$, et en raison de la propriété lipschitzienne de $f(x,y,w)$ par rapport à w, on obtient $G(w) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ pour tout $w \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$.
Nous prétendons que, pour tout $w,v \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$, $n \geq 1$, on a

$$\|G^n(w)(.,t)-G^n(v)(.,t)\|^2 \leq \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{2n}\frac{(T-t)^n C_1^n}{n!}|||w-v|||^2, \tag{3.20}$$

où $C_1 = \max\{T,1\}$ et $|||.|||$ est la norme sup dans $C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. Nous prouverons cette dernière inégalité par induction.
Lorsque $n=1$, nous avons

$$\begin{aligned}\|G(w)(.,t)-G(v)(.,t)\|^2 &= \|\hat{G}(w)(.,t)-\hat{G}(v)(.,t)\|^2\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,w)-\hat{f}(\xi,s,v)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}\xi\\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_t^T\left(\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\right)^2\mathrm{d}s\right.\\ &\times \left.\int_t^T|\hat{f}(\xi,s,w)-\hat{f}(\xi,s,v)|^2\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Notez que si $0<\varepsilon<1$ alors il découle de $\frac{(B(t)-B(s))}{(B(T)+m)} > -1$

$$\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \leq \varepsilon^{(B(t)-B(s))/(B(T)+m)} \leq \varepsilon^{-1}.$$

cela donne

$$\int_t^T \left(\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\right)^2 \mathrm{d}s \quad \leq \quad \int_t^T \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon^2}(T-t). \tag{3.22}$$

En combinant (3.21) et (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|G(w)(.,t)-G(v)(.,t)\|^2 \\
&\quad\leq \frac{1}{\varepsilon^2}(T-t)\int_t^T \|\hat{f}(.,s,w(.,s))-\hat{f}(.,s,v(.,s))\|^2\mathrm{d}s \\
&\quad= \frac{1}{\varepsilon^2}(T-t)\int_t^T \|f(.,s,w(.,s))-f(.,s,v(.,s))\|^2\mathrm{d}s \\
&\quad= \frac{K^2}{\varepsilon^2}(T-t)\int_t^T \|w(.,s)-v(.,s)\|^2\mathrm{d}s \leq C_1\frac{K^2}{\varepsilon^2}(T-t)\|w-v\|^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (3.20) est vrai pour $n=1$. Supposons que (3.20) est vrai pour $n=p$. Montrons que (3.20) est vrai pour $n=p+1$. On a

$$\begin{aligned}
\|G^{p+1}(w)(.,t)-G^{p+1}(v)(.,t)\|^2 &= \|\hat{G}(G^p(w))(.,t)-\hat{G}(G^p(v))(.,t)\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_t^T \frac{e^{(s-t-T-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(T+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,G^p(w))-\hat{f}(\xi,s,G^p(v))\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_t^T\left(\frac{e^{(s-t-T-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(T+m)\xi^2}}\right)^2\mathrm{d}s\right. \\
&\qquad \left.\times\int_t^T|\hat{f}(\xi,s,G^p(w))-\hat{f}(\xi,s,G^p(v))|^2\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}\xi. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.22), nous avons

$$\begin{aligned}
&\|G^{p+1}(w)(.,t)-G^{p+1}(v)(.,t)\|^2 \\
&\quad\leq \frac{1}{\varepsilon^2}(T-t)\int_t^T \|f(.,s,G^p(w)(.,s))-f(.,s,G^p(v)(.,s))\|^2\mathrm{d}s \\
&\quad\leq \frac{K^2}{\varepsilon^2}(T-t)\int_t^T \|G^p(w)(.,s)-G^p(v)(.,s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Il découle de

$$\|G^p(w)(.,t)-G^p(v)(.,t)\|^2 \quad\leq\quad \left(\frac{K^2}{\varepsilon}\right)^{2p}\frac{(T-t)^pC_1^p}{p!}\|w-v\|^2 \tag{3.24}$$

que

$$\begin{aligned}
&\|G^{p+1}(w)(.,t)-G^{p+1}(v)(.,t)\|^2 \\
&\quad\leq \frac{K^2}{\varepsilon^2}(T-t)\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{2p}\int_t^T\frac{(T-s)^p}{p!}\mathrm{d}s\,C_1^0|||w-v|||^2 \\
&\quad\leq \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{2(p+1)}\frac{(T-t)^{(p+1)}C_1^{(p+1)}}{(p+1)!}|||w-v|||^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par le principe d'induction, nous avons pour chaque m

$$\|G^m(w) - G^m(v)\| \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^m \frac{T^{m/2}}{\sqrt{m!}} C_1^m |||w - v|||$$

pour tout $w, v \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R})$.
On considère $G : C([0,T]; L^2(\mathbb{R})) \to C([0,T]; L^2(\mathbb{R})$. Puisque

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^m \frac{T^{m/2}}{\sqrt{m!}} C_1^m = 0,$$

il existe un nombre entier positif m_0 tel que G^{m_0} est une contraction. Ça suit que $G^{m_0}(w) = w$ a une solution unique $w_\varepsilon \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R})$. Nous prétendons que $G(w_\varepsilon) = w_\varepsilon$. En fait, on a $G(G^{m_0}) = G(w_\varepsilon)$, par conséquent $G^{m_0}(G(w_\varepsilon)) = G(w_\varepsilon)$ par l'unicité du point fixe de G^{m_0}, on a $G(w_\varepsilon) = w_\varepsilon$, c'est-à-dire que l'équation $G(w) = w$ a une solution unique w_ε dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R})$.
L'objectif principal du présent chapitre est d'estimer l'erreur $\|w_\varepsilon - u\|$. À cette effet, nous procédons par les deux prochaines étapes.

— Étape 2.Soit u_ε la solution du problème (3.19) correspondant à la valeur finale φ. Nous évaluerons l'erreur $\|w_\varepsilon - u_\varepsilon\|$. A partir des formules pour w_ε et u_ε, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{w}_\varepsilon(\xi,t) &= \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) \\ &\quad - \int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{u}_\varepsilon(\xi,t) &= \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) \\ &\quad - \int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} \hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Par l'utilisation de l'égalité de Parseval et de l'inégalité $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon(.,t) - u_\varepsilon(.,t)\|^2 &= \|\hat{w}_\varepsilon(.,t) - \hat{u}_\varepsilon(.,t)\|^2 \\ &\le 2\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} (\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)) \right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\quad + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} (\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon) - \hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon))\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\le J_1 + J_2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Le terme J_1 in (3.27) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k} + e^{-(B(T)+m)\xi^2}} (\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)) \right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\le 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(T)}{B(T)+m}} \left(\ln(I(k,m)/\varepsilon) \right)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}} \|\hat{\varphi}_\varepsilon - \hat{\varphi}\|^2 \\ &\le 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(T)}{B(T)+m}} \left(\ln(I(k,m)/\varepsilon) \right)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|^2, \end{aligned} \tag{3.28}$$

et le terme J_2 peut être estimé comme suit

$$
\begin{aligned}
J_2 &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon))\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}\xi\\
&\leq 2(T-t)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_t^T H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(s)}{B(T)+m}}\\
&\quad\times|\hat{f}(\xi,s,w_\varepsilon)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi\\
&\leq 2(T-t)K^2H^2(k,m)\int_t^T \varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(s)}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\|w_\varepsilon(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

En combinant (3.27), (3.28) et (3.29), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|w_\varepsilon(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2\\
&\quad\leq 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(T)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}\|\varphi_\varepsilon-\varphi\|^2\\
&\quad+ 2(T-t)K^2H^2(k,m)\int_t^T \varepsilon^{\frac{2B(t)-2B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(s)}{B(T)+m}}\\
&\quad\times \|w_\varepsilon(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{-2B(t)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{-2kB(t)}{B(T)+m}}\|w_\varepsilon(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2\\
&\leq 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{-2B(T)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{-2kB(t)}{B(T)+m}}\|\varphi_\varepsilon-\varphi\|^2\\
&\quad+2K^2H^2(k,m)(T,t)\int_t^T \varepsilon^{\frac{-2B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{-2kB(s)}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\|w_\varepsilon(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{-2B(t)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{-2kB(t)}{B(T)+m}}\|w_\varepsilon(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2\\
&\leq 2e^{2K^2H^2(k,m)(T,t)^2}\varepsilon^{\frac{-2B(T)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{-2kB(T)}{B(T)+m}}\|\varphi_\varepsilon-\varphi\|^2.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\begin{aligned}
&\|w_\varepsilon(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\| \\
&\quad\le \sqrt{2}H(k,m)e^{k^2H^2(k,m)(T-t)^2}\varepsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\right)^{\frac{kB(t)-kB(T)}{B(T)+m}}\|\varphi_\varepsilon-\varphi\| \\
&\quad\le \sqrt{2}H(k,m)e^{k^2H^2(k,m)(T-t)^2}\varepsilon^{\frac{B(t)-B(T)}{B(T)+m}}\left(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\right)^{\frac{kB(t)-kB(T)}{B(T)+m}}\varepsilon \\
&\quad= \sqrt{2}H(k,m)e^{k^2H^2(k,m)(T-t)^2}\varepsilon^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\left(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\right)^{\frac{kB(t)-kB(T)}{B(T)+m}}.
\end{aligned}$$

— Étape 3. Soit u la solution exacte du problème (3.1) correspondant à la valeur φ. Nous évaluerons l'erreur $\|u_\varepsilon - u\|$.
Soit u_ε la fonction définie à l'étape 2. On rappelle la transformée de Fourier de u et u_ε de (3.6) et (3.26)

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{(B(T)-B(t))\xi^2}\hat{\varphi}(\xi)-\int_t^T e^{-(B(T)-B(s))\xi}\hat{f}(\xi,s,u)\mathrm{d}s \tag{3.30}$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{u}_\varepsilon(\xi,t) \quad = \quad & \frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}(\xi) \\
& -\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)}\xi^2}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Par un calcul direct, et à partir de (3.30) et (3.31) on obtient

$$\begin{aligned}
&\hat{u}(\xi,t)-\hat{u}_\varepsilon(\xi,t) \\
&\quad= \left(e^{(B(T)-B(t))\xi^2}-\frac{e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\right)\hat{\varphi}(\xi) \\
&\qquad -\int_t^T e^{-(B(t)-B(s))\xi^2}\hat{f}(\xi,s,u)\mathrm{d}s+\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)\mathrm{d}s \\
&\quad= \frac{\varepsilon e^{(B(T)-B(t))\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}(\xi)-\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t))\xi^2}\varepsilon}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,u)\mathrm{d}s \\
&\qquad +\int_t^T \frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2=\int_{+\infty}^{+\infty}|\hat{u}(\xi,t)-\hat{u}_\varepsilon(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{+\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\varepsilon\xi^{2k}e^{(B(T)-B(t))\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}-e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{\varphi}(\xi)-\int_t^T\frac{e^{(B(s)-B(t))\xi^2}\varepsilon}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{f}(\xi,s,u)\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_t^T\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon))\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{+\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\varepsilon\xi^{2k}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\hat{u}(\xi,t)\\
&\quad-\int_t^T\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}(\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon))\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}\xi\\
&\le 2\int_{+\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\varepsilon e^{-(B(t)+m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}\xi^{2k}e^{(B(t)+m)\xi^2}\hat{u}(\xi,t)\Big|^2\mathrm{d}\xi\\
&\quad+2\int_{+\infty}^{+\infty}\Big|\int_t^T\frac{e^{(B(s)-B(t)-B(T)-m)\xi^2}}{\varepsilon\xi^{2k}+e^{-(B(T)+m)\xi^2}}|\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)|\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Il découle du lemme 3.1.1 que

$$
\begin{aligned}
\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\| &\le 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\int_{+\infty}^{+\infty}|\xi^{2k}e^{(B(T)+m)\xi^2}\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+2H^2(k,m)\\
&\quad\times\int_{+\infty}^{+\infty}\Big|\int_t^T\varepsilon^{\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{kB(t)-kB(s)}{B(T)+m}}|\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)|\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}\xi\\
&= 2\hat{A}_1+2\hat{A}_2
\end{aligned}
$$

où le terme $\hat{A}_1$ est donné par

$$
\hat{A}_1=\varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}\int_{+\infty}^{+\infty}|\xi^2e^{(B(t)+m)\xi^2}\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi.
$$

Nous estimons $\widehat{A_2}$ comme suit

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_2 &= \int_{+\infty}^{+\infty}\left|\int_t^T \varepsilon^{\frac{B(t)-B(s)}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{kB(t)-kB(s)}{B(T)+m}}|\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)|\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}\xi\\
&\leq \varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}(T-t)\int_{+\infty}^{+\infty}\int_t^T\varepsilon^{\frac{-2B(s)-2m}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{kB(T)-kB(s)}{B(T)+m}}|\hat{f}(\xi,s,u)-\hat{f}(\xi,s,u_\varepsilon)|\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}\xi\\
&= \varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}(T-t)\int_t^T\varepsilon^{\frac{-2B(s)-2m}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(s)}{B(T)+m}}\|f(.,s,u(.,s))-f(.,s,u_\varepsilon(.,s))\|^2\mathrm{d}s\\
&\leq \varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(s)}{B(T)+m}}K^2(T-t)\\
&\quad\times\int_t^T\varepsilon^{\frac{-2B(s)-2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(s)}{B(T)+m}}\|u(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Cela implique

$$
\begin{aligned}
&\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2\\
&\qquad\leq 2H^2(k,m)\varepsilon^{\frac{2B(t)+2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(t)-2kB(T)}{B(T)+m}}\\
&\qquad\quad\times\Bigg[\int_t^T|\xi^{2k}e^{(B(t)+m)\xi^2}\hat{u}(\xi,t)|^2+2K^2H^2(k,m)(T-t)\int_t^T\varepsilon^{\frac{-2B(s)-2m}{B(T)+m}}\\
&\qquad\quad\times\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(s)}{B(T)+m}}\|u(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s\Bigg].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{-2B(t)-2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(t)}{B(T)+m}}\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2\\
&\leq A(k,m+)+2K^2H^2(k,m)T\int_t^T\varepsilon^{\frac{-2B(s)-2m}{B(T)+m}}\\
&\quad\times\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(s)}{B(T)+m}}\|u(.,s)-u_\varepsilon(.,s)\|^2\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

où $A(k,m)$ est défini en (3.13). En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$
\varepsilon^{\frac{-2B(t)-2m}{B(T)+m}}\Big(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\Big)^{\frac{2kB(T)-2kB(t)}{B(T)+m}}\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|^2
$$

$$\leq \quad A(k,m)e^{2K^2H^2(k,m)T(T,t)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\|u(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\| \\
&\quad \leq \quad \sqrt{A(k,m)}e^{K^2H^2(k,m)T(T-t)}\varepsilon^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\bigg(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\bigg)^{\frac{kB(T)-kB(T)}{B(T)+m}}.
\end{aligned}$$

D'après les résultats des étapes 2 et 3, nous obtenons l'estimation suivante en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon(.,t)-u(.,t)\| &\leq \|w_\varepsilon(.,t)-u_\varepsilon(.,t)\|+\|u_\varepsilon(.,t)-u(.,t)\| \\
&\leq \sqrt{2}H(k,m)e^{k^2H^2(k,m)(T-t)^2}\varepsilon^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\bigg(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\bigg)^{\frac{kB(T)-kB(T)}{B(T)+m}} \\
&\quad +\sqrt{A(k,m)}e^{k^2H^2(k,m)T(T-t)}\varepsilon^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\bigg(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\bigg)^{\frac{kB(T)-kB(T)}{B(T)+m}} \\
&\leq P(k,m)\varepsilon^{\frac{B(t)+m}{B(T)+m}}\bigg(\ln(I(k,m)/\varepsilon)\bigg)^{\frac{kB(T)-kB(T)}{B(T)+m}}.
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,T]$. Ceci complète la preuve du théorème.

$\square$

3.3 Conclusion :

Nous avons considéré un problème de régularisation pour une équation de chaleur inverse linéaire et non linéaire avec coefficient dépendant du temps, à savoir problème $(P1)$ et $(P2)$ Sous certaines hypothèses sur la solution exacte, nous avons également établi des estimations d'erreur pour tout $t \in [0,T]$.

Comme perspective, il est important de considérer le cas d'une conductivité thermique en fonction du temps et de l'espace.

Bibliographie

[1] Benrabah A, Boussetila N, Rebbani F. Regularization method for an ill-posed Cauchy problem for elliptic equations. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems.* 2017 ; Vol. 25, Issue 3, 311-329.

[2] Boussetila N, Rebbani F. Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems. *Electron. J. Differential Equations*. 2006 ; 147, 1-15.

[3] G.W.Clark, S. F.Oppenheimer : Quasireversibility methods for non-well-posed problems. Electron. J. Differ. Equ. 1994 (1994), 1–9.

[4] M.Denche, K. Bessila : A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. J. Math. Anal. Appl. 301 (2005), 419–426.

[5] A. Benrabah and N. Boussetila, Modified nonlocal boundary value problem method for an ill-posed problem for the biharmonic equation, Inverse Probl. Sci. Eng, 27, 340–368 (2019).

[6] Gajewski H, Zaccharias K. Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolutiongleichungen. *J. Math.Anal.Appl.* 1972 ; Vol. 38, 784-789.

[7] W.Cheng, C. L.-Fu : A spectral method for an axisymmetric backward heat equation. Inverse Probl. Sci. Eng. 17 (2009), 1085–1093.

[8] C.-L.Fu, X.-T. Xiong, Z.Qian : Fourier regularization for a backward heat equation. J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 472–480.

[9] Hadamard J, *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Equation*. Dover, New York. 1953.

[10] Hào DN, Duc NV, Lesnic D. A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations. *Inverse Problems*. 2009 ; 25, 055002(27pp).

[11] P. H.Quan, D.D.Trong : A nonlinearly backward heat problem : uniqueness, regularization and error estimate. Appl. Anal. 85 (2006), 641–657.

[12] P. H.Quan, D.D.Trong, L.M.Triet, N. H.Tuan : A modified quasi-boundary value method for regularizing of a backward problem with time-dependent coefficient. Inverse Probl. Sci. Eng. 19 (2011), 409–423.

[13] D.D.Trong, N. H.Tuan : Regularization and error estimate for the nonlinear backward heat problem using a method of integral equation. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods 71 (2009), 4167–4176.

[14] Kozlov, VA, Maz'ya, VG, Fomin AV. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *USSR Comput. Math. Phys.* 1991 ; **31**(1), 45-52.

[15] Lattès R, Lions JL. The method of quasi-reversibility ; Applications to partial differential equations. *Elsevier, New York.* 1969.

[16] Showalter, RE. The final value problem for evolution equations. *J. Math.Anal.Appl.* 1974 ; 47, 563-572.

[17] Miller, K., Stabilized quasi-reversibility and other nearly best possible methods for non- well-posed problems, Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 316, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 161-176. MR 52 :14710

[18] M.V. Klibanov, F. Santosa, A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, SIAMJ. Appl.Math. 51, 1653-1675, 1991.

[19] A.N. Tikhonov V.Y. Arsenin, Solution of ill-posed problems,Winston Sons,Washington, DC, (1977).

[20] L. Bourgeois, A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, Inverse Problems 22 (2006), 413-430.

[21] L. Bourgeois, Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, Inverse Problems 21 (2005), No. 3, 1087-1104.

[22] J.B. Keller, Inverse problems, Amer.Math.Monthly, 83 : 107-118, (1976).