République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

TOUALBIA Saifeddine

Intitulé

Contrôlabilité sous contrainte des systèmes dynamiques fractionnaires et des systèmes intégro-différentiels fractionnaires.

Dirigé par : **Dr. KERBOUA Mourad**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BADRAOUI Salah	PROF	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. KERBOUA Mourad	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. DEBBAR Rabah	MCA	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ALLAH qui m'a donné la

Volonté et le courage pour achever ce travail, je tiens à remercier tout d'abord

Mon encadreur Mr Mourad kerboua qui m'a fourni le sujet de ce mémoire

Et de m'avoir guidé, de même je remercie Mr badraui Salah et Mr debbar Rabah

Qu'ils mon fait, en acceptant de juger ce travail.

Je remercie tous les membres de ma famille, en particulier ma mère et mon père, qui m'ont

Apporté le soutien nécessaire dans chaque parcours éducatifs.

Dédicace

Ce travail est dédié à :

A Ma cher mère Hadria : tu as trop sacrifié pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

A Mon cher père Ali : merci pour votre grand soutien à moi.

A Ma cher sœur : Rafika.

A Mes chers frères : Hamza, Moncef, Mouhamed.

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

A Toute la famille et Mes amies.

Table des matières

1 Concepts de base du calcul fractionnaire **9**
1.1 Opérateurs fractionnaires 9
1.2 Quelques fonctions spéciales 11
1.2.1 Fonction Gamma 11
1.2.2 Fonction Mittag-Leffler 12
1.3 Transformation de Laplace 13
1.4 Représentation de la Solution 14
1.4.1 Système linéaire fractionnaire 14
1.4.2 Système linéaire intégro-différentiel 15
1.5 Théorèmes du point fixe 16

2 Contrôlabilité contrainte des systèmes dynamiques fractionnaires **18**
2.1 Position du problème 18
2.1.1 Systèmes linéaires 19
2.1.2 Systèmes non linéaires 22
2.2 Contrôlabilité 23

3 Contrôlabilité contrainte des systèmes intégrodifférentiels fractionnaires **25**
3.1 Position du problème 25
3.1.1 Systèmes linéaires 25
3.1.2 Systèmes non linéaires 28
3.2 Contrôlabilité 29

4 Applications **32**
4.1 Example 1 32
4.2 Example 2 34

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions deux types des systèmes dynamiques fractionnaires linéaires et non linéaires avec des variables de contrôle prescrites. Notre objectif principal dans ce mémoire est de présenter les conditions suffisantes pour la contrôlabilité contrainte des systèmes dynamiques fractionnaires non linéaires représentés par l'équation différentielle fractionnaire et l'équation intégrodifférentielle fractionnaire. L'outil mathématique suivie ici est basée sur le calcul fractionnaire, le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.

Mots clés : contrôlabilité, systèmes dynamique fractionnaire, dérivée fractionnaire de Caputo, point fixe.

Abstract

In this memory, we study two types of linear and nonlinear fractional dynamical systems with prescribed control variables. Our main objective in this memory is to present the sufficient conditions for the constrained controllability of nonlinear fractional dynamic systems represented by the fractional differential equation and the fractional integrodifferential equation. The mathematical tool followed here is based on fractional calculus, Schauder's fixed point theorem and Banach's principle of contraction.

Keywords : controllability, fractional dynamic systems, Caputo fractional derivative, fixed point.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس نوعين من الأنظمة الديناميكية الجزئية الخطية وغير الخطية مع متغيرات التحكم الموصوفة. هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة هو تقديم الشروط الكافية للتحكم المقيد للأنظمة الديناميكية الجزئية غير الخطية المتمثلة في المعادلة التفاضلية الكسرية والمعادلة التفاضلية التكاملية الكسرية. الأداة الرياضية المتبعة هنا تعتمد على حساب التفاضل والتكامل الجزئي، نظرية شاودر للنقطة الثابتة ومبدأ باناخ للتقلص.

الكلمات المفتاحية : إمكانية التحكم، الأنظمة الديناميكية الجزئية، مشتق كابوتو الجزئي، النقطة الثابتة.

Introduction

Le calcul fractionnaire concerne la généralisation de la différenciation et de l'intégration aux ordres non entiers. Il est bien connu que l'état de nombreux systèmes à un instant donné dépend de leur configuration aux instants précédents. La dérivée fractionnaire prend en compte cette histoire dans sa définition comme une convolution avec une fonction dont l'amplitude décroît à des temps antérieurs comme une loi de puissance. Ainsi, il constitue un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires.

De nos jours, c'est le domaine des physiciens et des mathématiciens qui étudient l'utilité de ces dérivés et intégrales d'ordre non entier dans différents domaines de la physique et des mathématiques. C'est un outil efficace pour décrire les systèmes dynamiques de champ quantique complexes, la dissipation et les phénomènes à longue portée qui ne peuvent pas être bien illustrés à l'aide d'opérateurs différentiels et intégraux ordinaires. Contrairement au calcul d'ordre entier où les opérateurs sont d'ordre entier, le calcul fractionnaire implique tout nombre réel $\alpha > 0$. La signification et les applications de ce nouveau type de calcul sont assez comparables à celles du calcul ordinaire, en particulier lorsque $\alpha > 0$ se rapproche et plus proche d'un certain entier.

Une présentation systématique des applications des équations différentielles fractionnaires peut être trouvée dans les livres d'OLDHAM ET SPANIER [13] et de SABATIER ET AL. [15]. Le sujet des équations différentielles fractionnaires a gagné beaucoup d'importance et d'attention. De plus, on peut voir les monographies de KILBAS ET AL. [8], MILLER ET ROSS [12], PODLUBNY [14] et SAMKO ET AL. [16] pour une exposition claire du calcul fractionnaire.

La gestion des contraintes dans la conception du système de contrôle est une question importante dans la plupart de tous les problèmes du monde réel. On comprend aisément que tous les systèmes de contrôle du monde réel ont un ensemble associé de contraintes ; grosso modo, la contrainte est une condition qui empêche le système d'atteindre plus de son objectif.

La théorie de la contrôlabilité contrainte pour les systèmes linéaires et non linéaires a été largement discutée dans les espaces de dimensions finies. Au début, LUKES [11] a présenté des conditions suffisantes pour la contrôlabilité contrainte globale d'un système non linéaire chaque fois que sa partie linéaire est contrôlable. La théorie de la contrôlabilité contrainte pour les systèmes linéaires et non linéaires a été largement discutée dans les espaces de dimensions finies.

KLAMKA [9, 10] a dérivé les conditions suffisantes pour une contrôlabilité contrainte exacte et approchée en prenant les valeurs des contrôles en cône convexe et fermé avec le sommet à zéro. Dans ce contexte, la plupart de la littérature existante sur le sujet de la contrôlabilité contrainte pour les systèmes déterministes et stochastiques d'ordre entier traite des contrôles prescrits.
BALACHANDRAN ET KARTHIKEYAN [2, 6] ont obtenu la contrôlabilité contrainte de systèmes stochastiques non linéaires avec et sans effets d'impulsion en utilisant le principe de l'application contractante.
L'objet de notre mémoire est de présenter les formulations des systèmes dynamiques fractionnaires linéaires et non linéaires avec des variables de contrôle prescrites et d'étudier les résultats de contrôlabilité pour deux types de systèmes dynamiques fractionnaires, l'un avec un terme intégral et l'autre sans terme intégral. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes dynamiques fractionnaires non linéaires représentés par l'équation différentielle fractionnaire et l'équation intégrodifférentielle fractionnaire sont établies respectivement en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.
Ce mémoire est organisé comme suit :
Le premier chapitre est consacré aux bases mathématiques du calcul fractionnaire, quelques notions essentielles en calcul fractionnaire seront introduits comme l'approche de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo, ainsi que les fonctions spéciales (Gamma, Mittag-Leffler) et leurs transformées de Laplace et les théorèmes de point fixe qui sont trés utils à la résolution des systèmes dynamiques fractionnaire.
Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré aux systèmes dynamiques fractionnaires linéaires et non linéaires avec des contrôles prescrits et au rappel des résultats principaux de la contrôlabilité de ces systèmes.
Dans **le trosième chapitre** de ce mémoire nous présentons les résultats de contrôlabilité pour une classe de systèmes dynamiques fractionnaires représentés par l'équation intégrodifférentielle fractionnaire, les résultats sont établies en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.

Dans **le dernier chapitre** nous donnons deux exemples illustratifs, notamment l'application de la contrôlabilité contrainte pour les systèmes fractionnaires linéaires et les systèmes linéaires integro-différentiels.

Chapitre 1

Concepts de base du calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, quelques définitions mathématiques nécessaires mais relativement simples pour l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville, la dérivée de Caputo, les fonctions spéciales et leurs transformées de Laplace sont rappelées,on peut voir les monographies de KILBAS ET AL. [8], MILLER ET ROSS [12], PODLUBNY [14] et SAMKO ET AL. [16] pour une exposition claire du calcul fractionnaire.
Soit $\alpha,\ \beta > 0$, avec $n-1 < \alpha < n,\ n-1 < \beta < n,\ n \in \mathbb{N}$, et D est l'opérateur différentiel habituel. Soit $\mathbb{R}^m$ l'espace euclidien à m dimensions, $\mathbb{R}_+ = [0,\ +\infty)$ et supposons $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$, l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1.1 Opérateurs fractionnaires

Définition 1.1. (Intégrale fractionnaire de Riemann Liouville)
L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in L_1(R_+)$ est définit par

$$I_{0+}^{\alpha} f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right) ds. \tag{1.1}$$

Définition 1.2. (Dérivée fractionnaire de Caputo)

La dérivé fractinnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha < n$ est définit par

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) &= \left(I_{0+}^{n-\alpha} D^{n} f\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, 1.2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

alors que la fonction $f(t)$ a des dérivées absoluments continues jusqu'à l'ordre $(n-1)$. Si $0 < \alpha < 1$,*alors*

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds,$$

où $f'(s) = Df(s) = \frac{df(s)}{ds}$.

- Il convient de noter que le dérivé fractionnaire de Caputo calcule d'abord une dérivéz ordinaire suivi d'une intégrale fractionnaire pour atteindre l'ordre souhaité de la dérivée fractionnaire.
- Le principal avantage de l'approche de Caputo est que les conditions initiales pour les équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo prennent la même forme que pour les équations différentielles d'ordre entier.
- Dans des conditions naturelles sur la fonction $f(t)$, pour $\alpha \longrightarrow n$, la dérivée de Caputo devient une dérivée $n^{ème}$ conventionnelle de la fonction $f(t)$. Supposons que $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et que la fonction $f(t)$ a $(n+1)$ dérivées bornées continues dans $[0,\ \alpha]$, pour tout $\alpha > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\alpha}\ {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha\to n} \left(\frac{f^{n}(0) t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right) \\ &= f^{n}(0) + \int_{0}^{t} f^{(n+1)}(s) ds \\ &= f^{n}(t), \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

- Par définition, la dérivée de Caputo de la constante K est 0, c'est-à-dire, ${}^{C}D_{0+}^{\alpha} K = 0$.
- La dérivée de Caputo a une commutativité sur la dérivée d'ordre entier, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\ {}^{C}D_{0+}^{m} f(t) &= {}^{C}D_{0+}^{m}\ {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = {}^{C}D_{0+}^{\alpha+m} f(t), \\ f^{\ j}(0) &= 0,\ j = n, n+1, \cdots, m,\ m = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

– Les opérateurs fractionnaires de Caputo ne possèdent ni semi-groupe ni commutatives propriétés qui sont inhérentes aux dérivées d'ordre entier.

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}f(t) &\neq {}^{C}D_{0+}^{\alpha+\beta}f(t). \\ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}f(t) &\neq {}^{C}D_{0+}^{\beta}\,{}^{C}D_{0+}^{\alpha}f(t). \end{aligned}$$

De ce fait , le concept d'éqution différentielle fractionnaire séquentielle est discuté dans [8] , [12] .

Définition 1.3. (Dérivée séquentielle linéaire)
Pour $n \in N$, la dérivée fractionnaire séquentielle pour une suite de fonction $y(x)$ est définit par

$$y^{(k\alpha)} := (D^{k\alpha}y)(x) = (D^{\alpha}D^{(k-1)\alpha}y)(x),$$

où $k = 1, \cdots, n$, $(D^0y) = y(x)$ et D^{α} est tout opérateur différentiel fractionnaire, ici nous le mentionnons comme ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$.
Pour la brièveté de la notation, nous prenons ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ comme ${}^{C}D^{\alpha}$ et la dérivée fractionnaire est pris dans le sens de Caputo.

1.2 Quelques fonctions spéciales

Dans cette section, nous allons présenter les définitions et propriétés de base des fonctions spéciales à savoir : Gamma et Mittag-Leffler, qui sont la pierre angulaire du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

Définition 1.4. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,\ x > 0 \tag{1.3}$$

ou parfois

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2x-1}dt,\ x > 0$$

avec $\Gamma(1) = 1;\ \Gamma(0_+) = +\infty.$

Quelques propriétés sur la fonction Gamma

Soit $x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_-$.

3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

4. $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt,\ \ x > \ 0.$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir :

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}.\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

1.2.2 Fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle et c'est l'une des fonctions les plus importantes liées aux équations différentielles fractionnaires.

Définition 1.5. *Les fonctions Mittag-Leffler à un et deux paramètres sont définis respectivement par :*

$$E_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \qquad \alpha > 0 \tag{1.4}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0 \tag{1.5}$$

Exemples

Si $\alpha = 1$ et $\beta \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+2)} = \frac{e^x - 1}{x} \\ E_{1,3}(x) &: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+3)} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \end{aligned}$$

En général,

$$E_{1,m}(x) = \frac{1}{x^{m-1}}\left(e^x - \sum_{n=0}^{m-2}\frac{x^n}{n!}\right)$$

La fonction Mittag-Leffler a les relations suivantes :

1) $\frac{d}{dx}\left[E_\alpha(x)\right] = \frac{1}{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(x).$

2) $\frac{d}{dx}\left[E_\alpha(x^\alpha)\right] = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(x^\alpha).$

3) $\frac{d}{dx}\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)\right] = x^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}(x^\alpha).$

4) ${}^{C}D^\alpha E_\alpha(\lambda x^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha),\ \lambda > 0.$

5) $\int_0^x E_\alpha(t^\alpha)\,dt = xE_{\alpha,2}(x^\alpha).$

6) $\int_0^x t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\,dt = x^\beta E_{\alpha,\beta+1}(x^\alpha),\ \beta > 0.$

7) $\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\,t^{\beta-1}dt = x^{\beta+\nu-1}E_{\alpha,\beta+\nu}(\lambda x^\alpha),\ \beta > 0,\ \nu > 0.$

1.3 Transformation de Laplace

Les transformations de Laplace sont particulièrement adaptées à l'étude des problèmes de type convolution. Certaines des propriétés essentielles des transformées de Laplace de façon **continue et exponentielle**

– Si h :$[0,\infty] \to \mathbb{R}$,alors la transformation de Laplace de $h(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}[h(t)](s) = H(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt.$$

– La transformation de Laplace de la convolution

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \times \mathcal{L}[g(t)](s) = F(s)\,G(s).$$

– Si $D(t) = (d_{i,j}(t))$ est une matrice, alors $\mathcal{L}[D(t)](s) = \mathcal{L}[(d_{i,j}(t))](s).$

– Si $D(t) =$ est une matrice de $n \times n$ et $h(t)$ est une fonction vectorielle, alors

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t D(t-s)\,h(s)\,ds\right](s) = \mathcal{L}[D(t)](s)\,\mathcal{L}[h(t)](s).$$

– La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D_{0+}^\alpha f(t)\right](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}\left(0^+\right)s^{\alpha-1-k}.$$

– La transformation de Laplace de $E_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha})$ découle de l'integrale

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha})\right](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha})\,dt=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}\mp\lambda}.$$

– La transformation de Laplace de $E_{\alpha}(\pm\lambda t^{\alpha})$ est

$$\mathcal{L}\left[E_{\alpha}(\pm\lambda t^{\alpha})\right](s)=\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}\mp\lambda)}.$$

1.4 Représentation de la Solution

La solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire est obtenue par transformation de Laplaces.

1.4.1 Système linéaire fractionnaire

Considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire générale de la forme

$$\begin{array}{lll} {}^{C}D^{\alpha}x(t) & = & Ax(t)+f(t), \quad t\in[0,T], \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \tag{1.6}$$

où $0<\alpha<1,$ A est une matrice de $n\times n$, $x\in\mathbb{R}^n$ et $f(t)$ est une fonction continue. Pour trouver la solution, appliquons la transformation de Laplace des deux côtés et utilisons la transformation de Laplace du dérivèé de Caputo pour obtenir

$$s^{\alpha}X(s)-s^{\alpha-1}x(0)=AX(s)+F(s).$$

Appliquons la transformation de Laplace inverse aux deux côtés, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[s^{\alpha-1}(s^{\alpha}I-A)^{-1}\right]x_0+\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\times\mathcal{L}^{-1}\left[(s^{\alpha}I-A)^{-1}\right].$$

En remplaçant enfin la transformation de Laplace de la fonction de Mittag-leffler, nous obtenons la solution du système (1.6)

$$x(t)=E_{\alpha}(At^{\alpha})x_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})f(s)\,ds,$$

oū $E_{\alpha}(At^{\alpha})$ est l'extension matricielle de la fonction de Mittag-leffler avec la représentation suivante :

$$E_{\alpha}\left(At^{\alpha}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}t^{\alpha k}}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)}.$$

1.4.2 Système linéaire intégro-différentiel

Considérons l'équation intégrodifférentielle fractionnaire linéaire de la forme

$$\begin{array}{lll} {}^{C}D^{\alpha}x\left(t\right) & = & Ax\left(t\right)+\int_{0}^{t}D\left(t-s\right)x\left(s\right)ds,\ 0<\alpha<1,\ t\in J, \\ x\left(0\right) & = & x_{0}. \end{array} \tag{1.7}$$

oū $x\in\mathbb{R}^{n}$, A est une matrice de $n\times n$ et D est une matrice continue de $n\times n.$

En utilisant l'approche de transformation de Laplace, nous obtenons la solution du système (1.7)

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{\alpha-1}(I\lambda^{\alpha}-A-\mathcal{L}\left[D\left(\lambda\right)\right]\left(s\right))^{-1}\right]\left(t\right)x_{0} \\ &= R_{\alpha}\left(t\right)x_{0}, \end{aligned}$$

oū $R_{\alpha}\left(t\right)$ est une matrice de $n\times n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $R_{\alpha}\left(0\right)=I,$
2. ${}^{C}D^{\alpha}R_{\alpha}\left(t\right)=AR_{\alpha}\left(t\right)+\int_{0}^{t}D\left(t-s\right)R_{\alpha}\left(s\right)ds,$
3. $\mathcal{L}\left[R_{\alpha}\left(t\right)\right]\left(\lambda\right)=\int_{0}^{t}e^{-\lambda t}R_{\alpha}\left(t\right)dt:=\left\{\lambda^{\alpha-1}\left(\lambda^{\alpha}I-A-\mathcal{L}\left[D\left(\lambda\right)\right]\left(s\right)\right)^{-1}\right\}.$

Considérons le système dynamique fractionnaire linéaire représenté par l'équation intégrodifférentielle fractionnaire suivante

$$\begin{array}{lll} {}^{C}D^{\alpha}x\left(t\right) & = & Ax\left(t\right)+\int_{0}^{t}D\left(t-s\right)x\left(s\right)ds+f\left(t\right),\ t\in J,\ 0<\alpha<1, \\ x\left(0\right) & = & x_{0}, \end{array}$$

définit dans $\mathbb{R}^{n}$, oū A est une matrice de $n\times n$ et D est une matrice continue de $n\times n.$

En utilisant l'approche de transformation de Laplace, on obtient la solution du système suivante

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{\alpha-1}\left(\lambda^{\alpha}I-A-\mathcal{L}\left[D\left(\lambda\right)\right]\left(s\right)\right)^{-1}\right]\left(t\right)x_{0} \\ &\quad +\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\lambda^{\alpha}I-A-\mathcal{L}\left[D\left(\lambda\right)\right]\left(s\right)\right)^{-1}\right]\left(t\right)\times\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\lambda\right)\right]\left(t\right), \\ x\left(t\right) &= R_{\alpha}\left(t\right)x_{0}+\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}R_{\alpha,\alpha}\left(t-s\right)f(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$R_{\alpha,\alpha}\left(\theta\right)=\theta^{1-\alpha}\frac{d}{d\theta}\left(\int_{0}^{\theta}\frac{\left(\theta-\tau\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}R_{\alpha}\left(\tau\right)d\tau\right).$$

1.5 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.
En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Définition 1.6. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de F tout point $x \in E$ tel que*

$$F(x) = x.$$

En 1922 STEFAN BANACH prouva son fameux résultat dit "principe de contraction de Banach", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

DÉFINITION 1.5.1 *1.7.* ***(théorème du point fixe de shauder)***
le théorème du point fixe de shauder est une généralisation du théorème du point fixe de brower à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie.
ce théorème dit que soit$E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique séparé et C un convexe fermé non vide de E Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact,alors$T$ a un point fixe.

Théorème 1.1. (Banach)
Soit E un espace de Banach sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $\|\cdot\|$ la norme sur E. Soit D un sous ensemble fermé de E. Soit F une fonction qui applique D dans D, telle qu'il existe un nombre γ avec $0 \leq \gamma < 1$ et

$$\|Fx - Fy\| \leq \gamma \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in D.$$

Alors il existe un point unique $z \in D$ tel que $F(z) = z$.
De plus, si $x_0 \in D$ et $x_n = Fx_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = z$$

et on a l'estimation

$$\|x_n - z\| \leq \gamma^n (1-\gamma)^{-1} \|x_1 - x_0\| \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Chapitre 2

Contrôlabilité contrainte des systèmes dynamiques fractionnaires

Dans ce chapitre nous présentons les résultats de contrôlabilité pour les systèmes dynamiques fractionnaires avec des contrôles prescrits. Les conditions suffisantes pour les résultats de contrôlabilité des systèmes dynamiques fractionnaires non linéaires sont obtenues en utilisant le théorème de point fixe et le calcul fractionnaire.

2.1 Position du problème

Nous considérons le système dynamique fractionnaire linéaire représenté par l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\left.\begin{array}{l} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \in J,\ 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \\ u(0) = u_0,\ u(T) = u_T \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

et le système dynamique fractionnaire non linéaire correspondant

$$\left.\begin{array}{l} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x,u,t),\ t \in J,\ 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \\ u(0) = u_0,\ u(T) = u_T \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

définis dans $\mathbb{R}^n$, où $A,\ B$ sont $n\times n$, $n\times m$ matrices respectivement, $x(t)\in\mathbb{R}^n$ et $u(t)\in\mathbb{R}^m$ sont respectivement des vecteurs d'état et des entrées de contrôle du système. Ici, les valeurs initiales et finales peuvent être prescrites à l'avance au moyen de contrôles telles que $x(0)=x_0$, $x(T)=x_T$ et $u(0)=u_0$, $u(T)=u_T$. Nous devons donc trouver des conditions sur $A,\ B$ qui assurent que, pour $x_0, x_T\in\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u\in L_2(J;\mathbb{R}^m)$; désigne les m fonctions vectorielles à valeurs réelles mesurables définies sur J avec la norme $\|u\|_{L_2(J;\mathbb{R}^m)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|^2dt\right)^{1/2}$; et produit une réponse $x(t;u)$ satisfaisant aux conditions aux limites $x(0;u)=x_0$ et $x(T;u)=x_T$. La fonction non linéaire $f(x;u;t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{n+m+1}$.

En utilisant la transformation de Laplace, nous obtenons la solution du système (2.1) suivante

$$x(t)=E_\alpha(At^\alpha)x_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds.$$

2.1.1 Systèmes linéaires

Définition 2.1. *Le système (2.1) est dit contrôlable sur J si, pour chaque état initial donné $x_0\in R^n$ et $x_T\in R^n$, il existe un contrôle $u(t)$ avec $u(0)=u_0,\ u(T)=u_T$ défini sur J tel que la solution correspondante du système (2.1) satisfasse $x(T)=x_T$.*

Notons par

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \int_0^\theta s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(As^\alpha)Bds,\\
M(t;T) &= \int_{T-t}^T\phi^*(\theta)d\theta-\frac{t}{T}\int_0^T\phi^*(\theta)d\theta,\\
W(t;T) &= \int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)BM(s;T)ds,\\
W_T &= \int_0^T\phi(\theta)\phi^*(\theta)d\theta-\frac{1}{T}\left[\int_0^T\phi(\theta)d\theta\right]\left[\int_0^T\phi^*(\theta)d\theta\right],
\end{aligned}$$

où $*$ désigne la matrice transposée. On observe que $\phi(\theta)$, $M(t;T)$ et $W(t;T)$ sont continus. Nous définissons maintenant la fonction de contrôle du système (2.1) comme suit,

$$u(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)u_0+\frac{t}{T}u_T+M(t;T)y(T);$$

où

$$y(T) = W_T^{-1}\left\{x_T - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds\right\}.$$

Lemme 2.1. *Pour tout* $u \in R^m$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds \\
=\ & \phi(t)u_0 + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \phi(s)ds + W(t;T)y(T)2.3
\end{aligned} \tag{2.1}$$

et $W(T;T) = W_T$.

Preuve

Considérons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds \\
=\ & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bu_0ds \\
& + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \left(\int_0^s d\tau\right)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bds \\
& + y(T)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)BM(s;T)ds \\
=\ & u_0\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A\tau^\alpha)Bd\tau + W(t;T)y(T) \\
& + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \left(\int_0^s \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A\tau^\alpha)Bd\tau\right)ds \\
=\ & \phi(t)u_0 + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \phi(s)ds + W(t;T)y(T).
\end{aligned}$$

De plus, pour $t = T$ dans $W(t;T)$, on a

$$\begin{aligned}
W(T;T) &= \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) B M(s;T) ds \\
&= \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) B \int_{T-s}^T \phi^*(\theta) d\theta ds \\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) B \int_{T-s}^T \phi^*(\theta) d\theta ds \\
&= \int_0^T \phi^*(\theta) d\theta \int_{T-s}^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) B ds \\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^{\theta} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A\tau^{\alpha}) B d\theta ds \left(\int_0^T \phi^*(\theta) d\theta\right) \\
&= \int_0^T \phi^*(\theta) d\theta \int_0^{\theta} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A\tau^{\alpha}) B d\tau \\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^{\theta} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A\tau^{\alpha}) B d\tau d\theta \int_0^T \phi^*(\theta) d\theta \\
&= \int_0^T \phi(\theta)\phi^*(\theta) d\theta - \frac{1}{T}\left(\int_0^T \phi(\theta) d\theta\right)\left(\int_0^T \phi^*(\theta) d\theta\right) = W_T.
\end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Supposons que la matrice W_T soit non singulière. Ensuite, pour un $x_T \in R^n$ arbitraire, le contrôle*

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) u_0 + \frac{t}{T} u_T + M(t;T) y(T) \tag{2.4}$$

transfère le système

$$x(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha}) x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) B u(s) ds \tag{2.5}$$

de $x_0 \in R^n$ à x_T au temps T avec $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_T$.

Preuve

Pour prouver que la matrice W_T est symétrique et définie positive pour $T > 0$, il suffit de montrer que la matrice W_T est semi-définie positive. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ (non nul), nous calculons ce qui suit par l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
y.W_T y &= \int_0^T |\phi^*(\theta) y|^2 d\theta - \left|\frac{1}{T}\int_0^T \phi^*(\theta) y d\theta\right|^2 \\
&\geq \int_0^T |\phi^*(\theta) y|^2 d\theta - \left[\frac{1}{T}\int_0^T \phi^*(\theta) y d\theta\right]^2 \\
&\geq \int_0^T |\phi^*(\theta) y|^2 d\theta - \left[\frac{1}{T}\int_0^T 1.d\theta \int_0^T |\phi^*(\theta) y|^2 d\theta\right] = 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice W_T est semi-définie positive et l'égalité vaut pour $\phi^*(\theta)y = \alpha.1$ pour tout $\theta \in J$ et α est constante. Clairement, la constante serait nulle implique que $\phi^*(\theta)y = 0$ qui donne $y = 0$. Mais dans ce cas $y \neq 0$ et W_T est non singulier ce qui produit une contradiction. Par conséquent, W_T est défini positif et donc W_T^{-1} existe. Alors la paire $(x(t), u(t))$ définie en (2.5) et (2.4) est bien définie. Maintenant, par **Lemme 2.1**, (2.4) et (2.5), nous avons

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)B\left\{\left(1-\frac{s}{T}\right)u_0 + \frac{s}{T}u_T + M(s;T)y(T)\right\}ds.$$

Pour $t = 0$, nous avons $x(0) = x_0$, puisque $\phi(0) = 0$ et $W(0;T) = 0$. De plus, pour $t = T$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x(T) &= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \phi(T)u_0 + W(T;T)y(T) + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T P(s;T)ds \\ &= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \phi(T)u_0 + W(T;T)W_T^{-1}\left[x_T - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \phi(T)u_0 \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds\right] + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(\theta)d\theta \\ &= x_T. \end{aligned}$$

De plus $u(0) = u_0$, $u(T) = u_T$ puisque $M(0;T) = M(T;T) = 0$. Ainsi, la fonction de contrôle $u(t)$ oriente le système (3.1) de x_0 à x_T avec les conditions aux limites $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_T$. Par conséquent, le système (2.1) est contrôlable sur J.

2.1.2 Systèmes non linéaires

La solution du système non linéaire (2.2) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(x(s),u(s),s)ds2.6 \end{aligned} \tag{2.2}$$

et la fonction de contrôle est définie par

$$u(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)u_0 + \frac{t}{T}u_T + M(t;T)\overline{y}(T); \tag{2.7}$$

où

$$\overline{y}(T) = W_T^{-1}\left\{\begin{array}{c} x_T - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds \\ -\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(x(s),u(s),s)ds \end{array}\right\}. \tag{2.8}$$

Lemme 2.3. *Supposons que la matrice W_T soit inversible. Alors, pour un $x_T \in R^n$ arbitraire, la fonction de contrôle $u(t)$ donnée par (2.7) transfère le système $x(t)$ donné par (2.6) de x_0 à x_T au temps T avec $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_T$.*

Preuve

La preuve est similaire à celle du **Lemme 2.2.**.

Notons **Q** l'espace de Banach des fonctions continues de valeur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ définies sur l'intervalle J avec la norme $\|(x,u)\| = \|x\| + \|u\|$, où $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in J\}$ et $\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in J\}$. Autrement dit, $\mathbf{Q} = C_n(J) \times C_m(J)$, où $C_n(J)$ est l'espace de Banach des fonctions continues à valeur $\mathbb{R}^n$ définies sur l'intervalle J avec la norme $\sup$.

2.2 Contrôlabilité

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre donnant les conditions suffisantes pour les résultats de contrôlabilité.

Théorème 2.1.

Nous supposons que la fonction non linéaire $f(x,u,t)$ est continue et borné sur R^{n+m+1} et le **Lemme 2.3**. *Alors, pour chaque $p, q \in R^m,\ x_0, x_1 \in R^n$ et $0 < t_1 < T$, il existe un contrôle $v \in C(J; R^m)$ tel que*

(i) $v(0) = p,\ v(t_1) = q,\ v(T) = p$ *et*

(ii) *une solution correspondante de (2.2) pour laquelle $x(0) = x_0$ satisfait à la fois*
$x(t_1) = x_1,\ x(T) = x_0.$

Preuve

Afin de prouver le théorème, nous supposons les paramètres suivants et la preuve suit par le **Lemme 2.3**. ci-dessus. Fixons d'abord $T = t,\ u_0 = p,\ u_T = q,\ x_T = x_1$. Nous pouvons obtenir une solution $x(t; v)$ satisfaisant $x(0; v) = x_0,\ x(t_1; v) = x_1$. Ensuite, en définissant $x_0 = x_1,\ u_0 = q,\ u_T = p,\ x_T = x_0$, on obtient la solution $x(t; v)$ de (2.2) satisfaisant $x(t_1; v) = x_1,\ x(T; v) = x_0$.

En insérant (2.8) dans (2.7) et (2.6), les deux prennent la forme $(u, x)(t) = \mathcal{F}(u, x)(t)$ dans laquelle l'opérateur non linéaire $\mathcal{F}$ sur l'espace de Banach $\mathbf{Q}$ de la carte continue $t \longrightarrow (u, x)(t)$. A partir du lemme (2.3), si l'opérateur $\mathcal{F}$ a un point fixe, alors le système (2.2) a une solution $x(t, u)$ par rapport à $u(\cdot)$. Et clairement
$x(0, u) = x_0,\ x(T, u) = x_T$. Le système (2.2) est alors contrôlable.
Ainsi la contrôlabilité du système (2.2) est réduite à l'existence du point fixe de $\mathcal{F}$. Soit

$$\overline{\mathcal{F}}(u; x)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) f(x(s), u(s), s) ds.$$

Puisque $|f|$ est borné sur $\mathbb{R}^{n+m+1}$, nous avons $\left\|\overline{\mathcal{F}}(u; x)(t)\right\|$ est borné sur $\mathbf{Q}$ et puisque f est continu et donc uniformément continu sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^{n+m+1}$, l'opérateur $\mathcal{F}$ est continu. Pour tout k suffisamment grand, soit

$$\mathbf{Q}_k = \left\{(u; x) \in \mathbf{Q} : |(u, x)(t+\delta) - (u, x)(t)| < k\,|\delta|\,,\ \text{pour tout}\ t, \delta\right\}.$$

Et comme $|f|$ est borné, nous obtenons l'invariance de $\mathbf{Q}_k$ sous $\mathcal{F}$ pour k suffisamment grand.
Puisque $\mathbf{Q}_k$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{Q}$, il est fermé et par le théorème d'Arzela-Ascoli, $\mathbf{Q}_k$ est compact. Ainsi, pour tout k suffisamment grand, la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathbf{Q}_k$ fournit une application continue d'un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach en lui-même. Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder garantit que $\mathcal{F}$ a le point fixe requis. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(t) &= E_{\alpha}(At^{\alpha})x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) Bu(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha}) f(x(s), u(s), s) ds \end{aligned}$$

est la solution du système (2.2) avec $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$. Par conséquent, le système (2.2) est contrôlable sur J.

Chapitre 3

Contrôlabilité contrainte des systèmes intégrodifférentiels fractionnaires

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de contrôlabilité pour une classe de systèmes dynamiques fractionnaires représentés par l'équation intégrodifférentielle fractionnaire. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité sont établies en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.

3.1 Position du problème

3.1.1 Systèmes linéaires

Dans cette section, nous considérons le système dynamique fractionnaire linéaire représenté par l'équation intégrodifférentielle fractionnaire suivante

$$\left.\begin{array}{l} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t D(t-s)x(s)ds + Bu(t), \quad t \in J, \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \\ u(0) = u_0,\ u(T) = u_T. \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < 1,\ A,\ B$ sont respectivement $n \times n,\ n \times m$ matrices et D est une matrice continue $n \times n$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue ; De plus, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement des vecteurs d'état et de contrôle du système ; les deux ont des conditions initiales et finales telles que $x(0) = x_0,\ x(T) = x_T$ et $u(0) = u_0,\ u(T) = u_T$. Ici, les valeurs initiales et finales peuvent être prescrites à l'avance au moyen de contrôles. Nous devons donc trouver des conditions sur $A,\ B$ qui assurent que, pour $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L_2(J; \mathbb{R}^m)$ avec $u(0) = u_0,\ u(T) = u_T$ qui produit une solution $x(t; u)$ satisfaisant aux conditions aux limites $x(0; u) = x_0$ et $x(T; u) = x_T$.

En utilisant l'approche de transformation de Laplace, nous obtenons la solution du système (3.1) [9 10]

$$x(t) = R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds$$

Notons par

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \int_0^\theta s^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(s)Bds, \\
M(t;T) &= \int_{T-t}^T \phi^*(\theta)d\theta - \frac{t}{T}\int_0^T \phi^*(\theta)d\theta, \\
W(t;T) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)BM(s;T)ds, \\
W_T &= \int_0^T \phi(\theta)\phi^*(\theta)d\theta - \frac{1}{T}\left[\int_0^T \phi(\theta)d\theta\right]\left[\int_0^T \phi^*(\theta)d\theta\right],
\end{aligned}$$

où $*$ désigne la matrice transposée. On observe que $\phi(\theta)$, $M(t;T)$ et $W(t;T)$ sont continus. Nous définissons maintenant la fonction de contrôle du système (3.1) comme suit,

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)u_0 + \frac{t}{T}u_T + M(t;T)y(T);$$

où

$$y(T) = W_T^{-1}\left\{x_T - R_\alpha(t)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds\right\}.$$

Lemme 3.1. *Pour tout $u \in R^m$, on a*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \\
&= \phi(t)u_0 + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \phi(s)ds + W(t;T)y(T)3.2 \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

et $W(T;T) = W_T$.

preuve

La démonstration du lemme est similaire à celle du **Lemme 2.1.**.

Lemme 3.2. *Supposons que la matrice* W_T *soit non singulière. Alors, pour un* $x_T \in R^n$ *arbitraire, le contrôle*

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) u_0 + \frac{t}{T} u_T + M(t;T)y(T) \tag{3.3}$$

transfère le système

$$x(t) = R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \tag{3.4}$$

de $x_0 \in R^n$ *à* x_T *au temps* T *avec* $u(0) = u_0$ *et* $u(T) = u_T$.

Preuve

Pour prouver que la matrice W_T est symétrique et définie positive pour $T > 0$, il suffit de montrer que la matrice W_T est semi-définie positive. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ (non nul), nous calculons ce qui suit par l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned} y.W_T y &= \int_0^T |\phi^*(\theta)y|^2 \, d\theta - \left|\frac{1}{T}\int_0^T \phi^*(\theta)yd\theta\right|^2 \\ &\geq \int_0^T |\phi^*(\theta)y|^2 \, d\theta - \left[\frac{1}{T}\int_0^T \phi^*(\theta)yd\theta\right]^2 \\ &\geq \int_0^T |\phi^*(\theta)y|^2 \, d\theta - \left[\frac{1}{T}\int_0^T 1.d\theta \int_0^T |\phi^*(\theta)y|^2 \, d\theta\right] = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice W_T est semi-définie positive et l'égalité vaut pour $\phi^*(\theta)y = \alpha.1$ pour tout $\theta \in J$ et α est constante. Clairement, la constante serait nulle implique que $\phi^*(\theta)y = 0$ qui donne $y = 0$. Mais dans ce cas $y \neq 0$ et W_T est non singulier ce qui produit une contradiction. Par conséquent, W_T est défini positif et donc W_T^{-1} existe. Alors la paire $(x(t), u(t))$ définie en (3.4) et (3.3) est bien définie. Maintenant, par **Lemme 3.1**, (3.3) et (3.4), nous avons

$$x(t) = R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)B\left\{\left(1 - \frac{s}{T}\right) u_0 + \frac{s}{T} u_T + M(s;T)y(T)\right\} ds.$$

Pour $t = 0$, nous avons $x(0) = x_0$, puisque $\phi(0) = 0$ et $W(0;T) = 0$. De plus, pour $t = T$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x(T) &= R_\alpha(T)x_0 + \phi(T)u_0 + W(T;T)y(T) + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds \\ &= R_\alpha(T)x_0 + \phi(T)u_0 + W(T;T)W_T^{-1}\Big[x_T - R_\alpha(T)x_0 - \phi(T)u_0 \\ &\quad -\frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds\Big] + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds \\ &= x_T. \end{aligned}$$

De plus $u(0) = u_0$, $u(T) = u_T$ puisque $M(0;T) = M(T;T) = 0$. Ainsi, la fonction de contrôle $u(t)$ oriente le système (3.1) de x_0 à x_T avec les conditions aux limites $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_T$. Par conséquent, le système (3.1) est contrôlable sur J.

3.1.2 Systèmes non linéaires

Considérons le système dynamique intégrale fractionnaire non linéaire avec contrôle prescrit représenté par l'équation intégrodifférentielle fractionnaire suivante de la forme

$$\left.\begin{array}{l} {}^C D^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t D(t-s)x(s)ds + Bu(t) + f(t;x(t)), \quad t \in J, \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \\ u(0) = u_0,\ u(T) = u_T. \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

En utilisant l'approche de transformation de Laplace, nous obtenons la solution du système (3.5) [2 6 11]

$$\begin{aligned} x(t) &= R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}R_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s;x(s))ds 3.6 \end{aligned} \tag{3.2}$$

On définit la fonction de contrôle du système (3.6) par

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)u_0 + \frac{t}{T}u_T + M(t;T)\overline{y}(T), \tag{3.7}$$

où

$$\overline{y}(T) = W_T^{-1}\left\{\begin{array}{c} x_T - R_\alpha(T)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds \\ -\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}R_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s,x(s))ds \end{array}\right\}. \tag{3.8}$$

Lemme 3.3. *Supposons que la matrice W_T soit inversible. Alors, pour un $x_T \in R^n$ arbitraire, la fonction de contrôle $u(t)$ donnée par (3.7) transfère le système $x(t)$ donné par (3.6) de $x_0 \in R^n$ à x_T au temps T avec $u(0) = u_0$ et $u(T) = u_T$.*

Nous supposons les conditions suivantes :

(H_1) La fonction f satisfait la condition de Lipschitz et il existe une constante $L_1 > 0$ pour $x; y \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\|f(t;x) - f(t;y)\| \leq L_1 \|x - y\| .$$

(H_2) La fonction f est continue et satisfait la condition de croissance linéaire habituelle, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L_2 > 0$ telle que, pour tout $t \in J$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t;x)\| \leq L_2 [1 + \|x\|] .$$

Prenons les constantes positives suivantes :

$$\begin{aligned}
M &= \sup \|R_\alpha(t)\|, \quad M_1 = \sup \|B\|, \\
M_2 &= \left\|W^{-1}\right\|, \quad M_3 = \sup \|R_{\alpha,\alpha}(t)\|, \\
M_5 &= T^\alpha M_3 [\Gamma(\alpha)]^{-1}, \quad M_4 = \sup \|W(t;T)\| .
\end{aligned}$$

Définissons maintenant l'opérateur non linéaire $\mathcal{H} : C_n(J) \longrightarrow C_n(J)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}x)(t) &= R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s) f(s;x(s))ds
\end{aligned}$$

3.2 Contrôlabilité

Pour prouver le résultat de contrôlabilité, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ a un point fixe dans $C_n(J)$. Pour ce faire, nous utilisons le principe de l'application contractante. Le théorème suivant donnant les conditions suffisantes pour les résultats de contrôlabilité

Théorème 3.1. *Supposons que les conditions* (H_1), (H_2) *et les hypothèses du* **Lemme 3.3.** *sont satisfaites. Alors, pour chaque* $x_0, x_T \in R^n$ *et valeurs prescrites pour les contrôles* $u_0, u_T \in R^m$, *le système intégrodifférentiel fractionnaire non linéaire est contrôlable sur* J *à condition que*

$$L_1 M_5 (1 + M_2 M_4) < 1 \tag{3.9}$$

Preuve

Premièrement, nous prouvons que l'application $\mathcal{H}$ applique $C_n(J)$ en lui-même. On a

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{H}x)(t)\| &= \Bigg\| R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s) f(s;x(s))ds \Bigg\| \\
&\leq \Bigg\| R_\alpha(t)x_0 + \phi(t)u_0 + \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^t \phi(s)ds + W(t;T)\overline{y}(T) \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s) f(s;x(s))ds \Bigg\| \\
&\leq M|x_0| + M_1M_5|u_0| + M_1M_5|u_T - u_0| + M_4\|\overline{y}(T)\| \\
&\quad + M_5L_2\left(1 + \sup_{0\leq s\leq T}\|x(s)\|\right) \\
&\leq M|x_0| + M_1M_5|u_0| \\
&\quad + M_1M_5|u_T - u_0| + M_5L_2\left(1 + \sup_{0\leq s\leq T}\|x(s)\|\right) \\
&\quad + M_4\left\| W_T^{-1}\left\{ \begin{array}{c} x_T - R_\alpha(T)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds \\ -\int_0^t R_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s,x(s))ds \end{array} \right\}\right\| \\
&\leq (1 + M_2M_4)\left(M|x_0| + M_1M_5|u_0| + M_1M_5|u_T - u_0|\right) \\
&\quad + M_2M_4|x_T| + (1 + M_2M_4)M_5L_2\left(1 + \sup_{0\leq s\leq T}\|x(s)\|\right).
\end{aligned}$$

Il résulte de l'équation ci-dessus et de la condition (H_2) qu'il existe un $C \geq 0$ tel que

$$\|(\mathcal{H}x)(t)\| \leq C\left(1 + \sup_{0\leq s\leq T}\|x(s)\|\right), \quad \text{pour tout } t \in J.$$

L'opérateur $\mathcal{H}$ est donc bien défini. Nous montrons ensuite que l'application $\mathcal{H}$ est une contraction. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{H}x)(t) - (\mathcal{H}y)(t)\| &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s) \left[f(s;x(s)) - f(s;y(s)) \right] ds \right. \\
&\quad \left. + W W_T^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(T-s) \left[f(s;x(s)) - f(s;y(s)) \right] ds \right\| \\
&\leq L_1 M_5 \int_0^T \|x(s) - y(s)\| \, ds + L_1 M_2 M_5 M_4 \int_0^T \|x(s) - y(s)\| \, ds \\
&\leq L_1 M_5 (1 + M_2 M_4) \int_0^T \|x(s) - y(s)\| \, ds,
\end{aligned}$$

qui donne

$$\sup_{t \in J} \|(\mathcal{H}x)(t) - (\mathcal{H}y)(t)\| \leq L_1 M_5 (1 + M_2 M_4) \sup_{t \in J} \|x(s) - y(s)\| \, .$$

Par conséquent, $\mathcal{H}$ est une application de contraction et donc l'application $\mathcal{H}$ a un point fixe unique $x(\cdot)$ qui est la solution de (3.5). Ainsi le système (3.5) est contrôlable sur J.

Chapitre 4

Applications

In this chapter, we give some illustrative examples, notably the application of constrained controllability for linear fractional systems and linear integrodifferential systems.

4.1 Example 1

Consider the linear fractional control system represented by the following fractional differential equation

$$\left.\begin{array}{l} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = 2x(t) + 4u(t),\ t \in J,\ 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = 3,\ x(T) = a, \\ u(0) = 1,\ u(T) = b. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

The solution of the system is given by

$$x(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha})x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})Bu(s)ds. \tag{4.2}$$

The Mittag-Leffler matrix function of the system is given by

$$E_{\alpha}(At^{\alpha}) = E_{\alpha}(2t^{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Define the control function by

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) u_0 + \frac{t}{T} u_T + M(t;T)\overline{y}(T), \tag{4.3}$$

where

$$y(T) = W_T^{-1}\left\{x_T - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0)\int_0^T \phi(s)ds\right\}.$$

In order to show that the system is controllable, we have to evaluate
$\phi(\theta),\ M(t;T);\ W(t;T)$ and W_T.

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \int_0^\theta s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(2s^\alpha)\,(4)\,ds = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \\
M(t;T) &= \int_{T-t}^{T}\phi^*(\theta)d\theta - \frac{t}{T}\int_0^T \phi^*(\theta)d\theta \\
&= \int_{T-t}^{T} 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}d\theta - \frac{t}{T}\int_0^T 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\theta^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}d\theta \\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{\Gamma(\alpha(k+1)+2)}\left[T^{\alpha(k+1)+1} - (T-t)^{\alpha(k+1)+1} - tT^{\alpha(k+1)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(t;T) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)BM(s;T)ds \\
&= 16\int_0^t \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m(t-s)^{\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{\alpha(k+1)+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+2)}ds \\
&\quad -16\int_0^t \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m(t-s)^{\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(T-s)^{\alpha(k+1)+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+2)}ds \\
&\quad -16\int_0^t \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m(t-s)^{\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{\alpha(k+1)+1}s}{\Gamma(\alpha(k+1)+2)}ds.
\end{aligned}$$

One can easily see that W_T is nonsingular, for $T > 0$. So W_T is invertible. Also $x(t),\ u(t)$ are well defined and satisfy the boundary conditions. Clearly $u(0) = 1$ and $u(T) = b$, since $M(0,T) = M(T,T) = 4_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{\Gamma(\alpha(k+1)+2)}\left[T^{\alpha(k+1)+1} - T^{\alpha(k+1)+1}\right] = 0$. Also $x(0) = 3$ and $x(T) = a$, since $\phi(0) = W(0,T) = 0$ by **Lemme 2.2**.. Hence the control function $u(t)$ steers the given system from $x_0 = 3$ to $x(T) = a$ with the control constraints $u(0) = 1,\ u(T) = b$. Hence the system (4.1) is controllable.

4.2 Example 2

Consider the linear fractional dynamical system represented by the following fractional differential equation with prescribed controls

$$\left.\begin{array}{l} {}^{C}D^{1/2}x(t) = 2x(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} x(s)\, ds + 4u(t),\ t \in J, \\ x(0) = 4,\ x(T) = a, \\ u(0) = 1,\ u(T) = b. \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

The solution of the system is given by

$$x(t) = R_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\alpha,\alpha}(t-s)Bu(s)ds \tag{4.5}$$

Define the control function by

$$u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) u_0 + \frac{t}{T} u_T + M(t;T)\overline{y}(T), \tag{4.6}$$

where

$$y(T) = W_T^{-1} \left\{ x_T - R_{1/2}(AT^{1/2})x_0 - \phi(T)u_0 - \frac{1}{T}(u_T - u_0) \int_0^T \phi(s)ds \right\}.$$

In order to show that the system is controllable, we have to evaluate

$\phi(\theta),\ M(t;T);\ W(t;T)$ and W_T.

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= 3\int_0^\theta s^{-1/2} R_{1/2,1/2}(s)ds \\ &= 3\int_0^\theta s^{-1/2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} E_{1/2,1/2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)s^{1/2}\right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} E_{1/2,1/2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)s^{1/2}\right] \right) ds \\ &= 3\left(\left(1+\sqrt{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^k}{\Gamma\left((k+3)/2\right)} - \left(1-\sqrt{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^k}{\Gamma\left((k+3)/2\right)} \right) \theta^{(k+1)/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(t;T) &= \int_{T-t}^T \phi^*(\theta)d\theta - \frac{t}{T}\int_0^T \phi^*(\theta)d\theta \\ &= 3\left(1+\sqrt{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^k}{\Gamma\left((k+5)/2\right)} \left[T^{(k+3)/2} - (T-t)^{(k+3)/2} - tT^{(k+1)/2}\right] \\ &\quad -3\left(1-\sqrt{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^k}{\Gamma\left((k+5)/2\right)} \left[T^{(k+3)/2} - (T-t)^{(k+3)/2} - tT^{(k+1)/2}\right], \end{aligned}$$

$$W(t;T) = \int_0^t (t-s)^{-1/2} R_{1/2,1/2}((t-s)^{1/2}) BM(s;T)ds,$$

$$W_T = \int_0^T \phi(\theta)\phi^*(\theta)d\theta - \frac{1}{T}\left[\int_0^T \phi(\theta)d\theta\right]\left[\int_0^T \phi^*(\theta)d\theta\right].$$

One can easily see that W_T is nonsingular for $T > 0$. So W_T is invertible. Also $x(t),\ u(t)$ are well defined and satisfy the boundary conditions. Clearly $u(0) = 1$ and $u(T) = b$, since $M(0,T) = M(T,T) = 0$. Also $x(0) = 4$ and $x(T) = a$, since $3c6(0) = W(0,T) = 0$ by **Lemme 3.2**. Hence the control function $u(t)$ steers the given system from $x_0 = 4$ to $x_T = a$ with the control constraints $u(0) = 1,\ u(T) = b$,with $a, b \in \mathbb{R}^n$. Hence the system (4.4) is controllable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les formulations des systèmes dynamiques fractionnaires linéaires et non linéaires avec des variables de contrôle prescrites et d'étudier les résultats de contrôlabilité pour deux types de systèmes dynamiques fractionnaires, l'un avec un terme intégral et l'autre sans terme intégral. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes dynamiques fractionnaires non linéaires représentés par l'équation différentielle fractionnaire et l'équation intégrodifférentielle fractionnaire sont établies respectivement en utilisant le calcul fractionnaire, le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.

Bibliographie

[1] K. BALACHANDRAN AND J. P. DAUER, Controllability of nonlinear systems in Banach spaces : A survey, Journal of Optimization Theory and Applications, 115 (**2002**), 7-28.

[2] K. BALACHANDRAN AND S. KARTHIKEYAN, Controllability of nonlinear stochastic systems with prescribed controls, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 27 (**2010**), 77-89.

[3] K. BALACHANDRAN, J. Y. PARK AND J. J. TRUJILLO, Controllability of nonlinear fractional dynamical systems, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 75 (**2012**), 1919-1926.

[4] A. CHIBOUTA ET R. ACHI, Contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire, Mémoire de fin d'études (Master) soutenue en juillet **2019**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma.

[5] R. HERRMANN, Fractional Calculus : An Introduction for Physicists, World Scientific, Singapore, **2011**.

[6] S. KARTHIKEYAN AND K. BALACHANDRAN, Constrained controllability of nonlinear stochastic impulsive systems, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 21 (**2011**), 307-316.

[7] L. KEXUE AND P. JIGEN, Laplace transform and fractional differential equations, Applied Mathematics Letters, 24 (**2011**), 2019-2023.

[8] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA AND J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, **2006**.

[9] J. KLAMKA, Constrained controllability of nonlinear systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 201 (**1996**), 365-374.

[10] J. KLAMKA, Constrained controllability of semilinear systems with delays, Nonlinear Dynamics, 56 (**2009**), 169-177.

[11] D. L. LUKES, Global controllability of nonlinear systems, SIAM Journal on Control, 10 (**1972**), 112-126.

[12] K. S. MILLER AND B. ROSS, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, **1993**.

[13] K. B. OLDHAM AND J. SPANIER, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, **1974**.

[14] I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, London, **1999**.

[15] J. SABATIER, O. P. AGRAWAL AND J. A. TENREIRO MACHADO (Eds.), Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, Dordrecht, **2007**.

[16] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS AND O. I. MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordan and Breach, Amsterdam, **1993**.