République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mr. Bounefla Chemes Eddine

Intitulé

Equations intégrales de Fredholm et altérnatives de Fredholm

Dirigé par : Mme Larribi Naima

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Ghiat Mourad	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Larribi Naima	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Bahloul Tarek	MCA	Univ-Guelma

Session Octobre 2020

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Dieu, notre créateur de m'avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.
je veux remercier particulièrement mon encadreur la docteur **Larribi Naima** qui à proposée le thème de ce mémoire, pour ses conseils, pour ses aides précieuse et pour le temps qu'elle m'a consacrée.
Je remercie lr Dr : Ghiate Mourad d'avoir accepter de présider le jury.
Je remercie lr Dr : Bahloul Tare d'avoir accepter de faire partie du jury.
Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toute ma famille Surtout mon pére et ma mére Pour leurs sacrifices avec moi
Tout au long de ma carrière universitaire, sans oublié madame ounes allah yerhamha elle a laissé un grand vide je veux présenter un dédicace à l'occasion de l'obtention du diplôme .
enfin, je veux dire alhamdou lillah pour tout .

Table des matières

Résumé

L'objectif principal de ce travail, et de présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales de Fredholm de la forme

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt$$

où $F(u(t))$ est une fonction linéaire ou non linéaire, avec $\alpha(x)$, $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions données et $u(x)$ l'inconnu à déterminer, λ est un paramaitre réel ou complexe différent de zéro.

Mots clé : Les équations intégrales, équations intégrales linéaires, équations intégralres non linéaire, équations intégrales de Frédholm.

Abstract

In this work we give some resolution methods of Fredholm intergral equations of the forme

$$\alpha(x)\,u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F\left(u(t)\right) dt$$

where $F\left(u(t)\right)$ is linear or non linear function of $u(x)$, and $u(x)$ the unknown function, λ is a parameter, and a and b are constants. For this type of equations, the kernel $k(x,t)$ and the function $\alpha(x)$, $f(x)$ are given real-valued functions.

Keywords : Intergral equations, linear intergral equations, non intergral equations, Fredholm intergral equations.

Intoduction

Les équations intégrales présentent un grand intérêt scientifique, elle sont parmi les branches les plus importantes en mathématiques, il est connu qu'elles touchent divers domaine des mathématiques appliquées et de la physique. En effet, la plus part des modèles construit à partir des problèmes physiques d'ingénierie et de la biologie, sont mieux traités lorsqu'ils sont présentés sous la forme d'équations intégrales.

Historiquement, la première équation intégrale a été résolue est

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^x} = F(x)\,,\ 0 < x < 1$$

rencontré par d'Abel dans un problème élémentaire de la mécanique.

Longtemps aprés, un mathématicien russe N. Sonine étudia une équation de la même forme que l'équation d'Abel mais un peut plus générale. Sonine épuisait pour ainsi dire la portée de l'artifice de calcul employé par Abel et la question semblé close, lorsque en 1896, M, Vito Volterra dans une suite de notes présentées aux Académies des sciences de Turin et Rome, aborda avec succés complet et par une méthode directe, qui puisait aux sources même de l'analyse, l'étude générale de l'équation intégrale

$$\int_0^x k(x,s)\,\varphi(s)\,ds = F(x)\,,$$

Les beaux résults qu'il obtient. Furent immédiatement suivis par Ivar Fredholm en 1900 sur l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 k(x,s)\,\varphi(s)\,ds = F(x)$$

dont l'importance pour l'analyse, a été particulièrement mise en évidence par I. Fredholm lui-même, D. Hillbert et E. Picard.

Dés lors, les travaux se succédent sans interruption. Dans une suite de communications présentées à la société scientifique de Gottinge, D.Hillbert prent comme instrument de démonstration, la résolution d'une certaine classe d'équations linéaire à une infinité de variables, met en évidence par une étude approfondie le rôle de la symétrie du noyau et en étudie des applications importantes.

En même temps, M. E. Picards signalait l'importance de cette équation intégrale en montrant les nombreuses applications dont elle est susceptible dans la physique mathématique.

Dans ce travail on va présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales de Fredholm linéaires et non linéaires.

Dans le premier chapitre, on va donner quelques rappels et définitions concernant les équations intégrales et les équations intégrales de Frédholm qui serrons utilisées par la suite. Ensuite on donne quelques méthodes de résolution des équation intégrales linéaires de Fredholm. Enfin, dans le troisième chapitre, on donne quelques méthodes de résolution des équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Chapitre 1

Rappel et généralisation

Dans ce chapitre, on va donner quelques rappels et définitions concernant les équation intégrales et les équations intégrales de Frédholm.

1.1 Introduction

Une équation intégrale dans laquelle la fonction d'une ou plusieurs variable figure sous le signe intégral est dite équation intégrale.

La forme ordinaire d'une telle équation est donnée par

$$\alpha\left(x\right)u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{\gamma(x)}^{\beta(x)} k(x,t) F\left(u(t)\right) dt$$

où $F\left(u(t)\right)$ une fonction de $u(t)$.

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires ; dont la forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha\left(x\right)u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{\Omega} k(x,t) u(t) dt$$

où $\alpha\left(x\right), \beta\left(x\right), \gamma\left(x\right), f\left(x\right)$ et $k\left(x,t\right)$ sont des fonctions réelles données et $u(x)$ l'inconnu à déterminer, λ est un paramaitre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k\left(x,t\right)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale.

1.2 Equations intégrales de Fredholm

Définition 1.2.1 *une équation intégrale dont les bornes d'intégration sont fixées c-à-d* $\Omega = [a, b]$ *est dite équation intégrale de Fredholm, donc est de la forme*

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt$$

1.2.1 Classification des équations intégrales de Fredholm

Equations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 1.2.2 *Une équation intégrale de Fredholm de la forme*

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt \tag{1.1}$$

est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

$1-$ *Si* $\alpha(x) = 0,$ *l'équation devient*

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt = 0 \tag{1.2}$$

et elle est dite de première espèce.

$2-$ *Si* $\alpha(x) = 1,$ *l'équation devient*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt \tag{1.3}$$

et elle est dite de seconde espèce.

$3-$ *Si* $\alpha(x)$ *est continue et s'annule en certains point, mais pas en tout point de* $[a, b]$, *l'équation*

devient

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt \tag{1.4}$$

et elle est dite de troisième espèce.
-Si de plus $f(x) = 0$, on dit que les équations sont homogènes.

Exemple 1.2.1 1− $2x^2 - x + 4 = \int_0^1 (x-t)\theta(t)dt$ *est une équation intégrale linéaire de Fredholm de premiére espéce.*

Exemple 1.2.2 2− $\theta(x) = x + 4 - \int_0^1 (x-t)\theta(t)dt$ *est une équation intégrale linéaire de Fredholm de second espéce*

Equations intégrales non linéaires de Fredholm

Définition 1.2.3 *Une équation intégrale de Fredholmde la forme*

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt \tag{1.5}$$

où F est une fonction non linéaire de $u(t)$, on dit que l'équation intégrale de Fredholm est non linéaire.
1− *Si $\alpha(x) = 0$, l'équation devient*

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt = 0 \tag{1.6}$$

et elle est dite de première espèce.
2− *Si $\alpha(x) = c$, l'équation devient*

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t))\, dt \tag{1.7}$$

et elle est dite de seconde espèce.
3− *Si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains point, mais pas en tout point de $[a,b]$, l'équation devient*

$$\alpha(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,u(t)) dt \tag{1.8}$$

et elle est dite de troisième espèce.
Si de plus $f(x) = 0$, on dit que les équations sont homogène.

1.3 Noyaux particuliers

1− Si le noyan $k(x,y)$ d'une équation intégral s'écrit sous la forme

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,(x)\,\beta_i\,(x)$$

où les fonctions $\alpha_i\,(x)\,\beta_i\,(x)$ $i = \overline{1,n}$ sont linéairement indépondantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré.

2− Si le noyan $k(x,y)$ est une fontion à valeur complexe telle que

$$k(x,y) = \overline{k(x,y)}$$

alors il est dit noyau symétrique ou hermitien. une équation intégrale à noyau symétrique est dite symétrique.

1.4 Théorèmes d'existance et d'unicité

Théorème 1.4.1 [9] *Alternative de Fredholm*

Si l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de seconde espèce

$$u\,(x) = \lambda \int_a^b k\,(x,t)\,u\,(t)\,dt$$

admet la solution trivial $u\,(x) = 0$ comme l'unique solution, alors l'équation non-homogène correspondante admet toujours une solution unique.

Théorème 1.4.2 [9] *Unique solution*

Si le noyau $k\,(x,t)$ de l'équation intégrale de Fredholm (1.3) *est une fonction à valeur réelle bornée et continue sur $[a,b] \times [a,b,]$, et si $f\,(x)$ est une fonction continue à valeur réelle, alors la condition nécessaire d'existance et d'unicité d'une solution pour l'équation* (1.3) *est donner par*

$$|\lambda|\,M\,(b-a) < 1 \tag{1.9}$$

où

$$|k\,(x,t)| \leq M \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

Théorème 1.4.3 *Soit l'équation intégale non linéaire de Fredholm de seconde espèce de la forme*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, t, u(t))dt \tag{1.11}$$

l'équation (1.11) *admit une solution si les conditions suivantes sont satisfaites*

1− *La fonction* $f(x)$ *est bornée,* $|f(x)| < R$ *pour* $x \in [a, b]$.

2− *La fonction* $G(x, t, u(t))$ *est intégrable et bornée,* $|G(x, t, u(t))| < K$ *pour* $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$.

3− *La fonction* $G(x, t, u(t))$ *est Lipschitzienne,*

$$|G(x, t, z) - G(x, t, z')| < M |z - z'|$$

Par la méthode des approximations succesives, voir [1] ; *la série converge si*

$$\lambda < \frac{1}{k(b-a)}$$

où

$$k = \max\left(M, K\left(1 + \frac{R}{|\lambda| K (b-a)}\right)\right)$$

Définition 1.4.1 *Point de bufircation et point singulier*

Si l'équation intégrale non linéaire de Fredholm contient le paramaitre λ, *il est évident que la solution depend du paramaitre* λ. *Il est possible que* λ *contient un point de bufircation. Un point de bufircation est le point* λ_0, *où si* λ *a changé alors la solution a changé*

Exemple 1.4.1 *L'équation intégrale* $u(x) = 3 + \lambda \int_0^1 u^2(t)dt$, *admet comme solution*

$$u(x) = \frac{1 + 2\lambda \pm \sqrt{1 - 12\lambda}}{2\lambda}$$

le point de bufircation $\lambda_0 = \frac{1}{12}$, *si* $\lambda \leq \frac{1}{12}$, *on a une solution réelle sinon on a une solution complexe.*

Si $\lambda = 0$, *la solution* $u(x) = 3$, *le point* $\lambda = 0$ *est un point singulier.*

Remarque 1.4.1 1− *La solution de l'équation non linéaire n'est pas nécessairement unique.*

2− *Le point de bufircation n'est pas nécessairement unique.*

Définition 1.4.2 *Un opérateur est une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel. On dit que l'opérateur A d'un espace de Hilbert H dans lui même est coercif ssi*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle A(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire de H et $\|.\|$ la norme associée.

Chapitre 2

Méthodes de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm

2.1 Equations de Fredholm de seconde espèce

Dans cette section, on va présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce [9].

2.1.1 Méthode de décomposition d'Adomain

George Adomain a introduit et développé une méthode de décomposition dite d'Adomain qui consiste d'écrire la fonction inconnue $u(x)$ sous forme d'une série :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.1}$$

où $u_n(x)$, $n \geq 0$ est défini par récurrence. En remplaçant (21) dans (1.3) , On obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt \tag{2.2}$$

alors, par identification, on a la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \neq 0 \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x,t)\, u_n(t)\, dt \end{cases} \tag{2.3}$$

Exemple 2.1.1 *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm :*

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(t)\, dt$$

Par la MDA $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *tel que :*

$$\begin{cases} u_0(x) = e^x - x \\ u_{n+1}(x) = x \int\limits_0^1 tu_n(t)\, dt \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x \\ u_1(x) &= x \int_0^1 tu_0(t)\, dt = x \int_a^b t\left(e^t - t\right) dt = \frac{2}{3}x, \\ u_2(x) &= x \int_a^b tu_1(t)\, dt = x \int_a^b t\left(\frac{2}{3}t\right) dt = \frac{2}{9}x = \frac{2}{3^2}x, \\ u_3(x) &= x \int_a^b tu_2(t)\, dt = x \int_a^b t\left(\frac{2}{9}t\right) dt = \frac{2}{27}x = \frac{2}{3^2}x, \end{aligned}$$

on déduit que

$$u_n(x) = \frac{2}{3^n}x$$

On peut démontrer facilement ce résultat par récurrence.
Alors on a :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

On remarque que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *une série géométrique de racine* $r = \frac{1}{3}$ *et de premier terme* 1 *tel que, la somme partielle*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}$$

Alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}$
D'où on obtient :

$$u(x) = e^x$$

2.1.2 Méthode de décomposition d'Adomain modifier

Dans la méthode de décomposition d'Adomain, si la fonction $f(x)$ est une fonction polynômiale de deux termes au plus, les composantes $u_n(x)$ sont faciles à calculer. Dans le cas où la fonction $f(x)$ est une fonction polynômiale de plus de deux termes, trigonométrique, hyperbolique etc, le calcule de $u_n(x)$ sera plus difficile. Pour simplifier les calcules Adomain a développé la méthode précédente définie comme suit $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ u_0(x) &= f_1(x) \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(t)\, dt \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)\, u_n(t)\, dt,\ \ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1.2 *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm :*

$$u(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) + \int_0^1 t u(t)\, dt$$

Par la MDA modifier $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *tel que :*

$$f(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) = f_1(x) + f_2(x)$$

on pose

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x + e^{4x} \\ f_2(x) &= -\frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) = 3x + e^{4x} \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, u_0(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) + \int_0^1 t\left(3t + e^{4t}\right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b k(x,t)\, u_n(t)\, dt, \;\; n \geq 1 \\ &= 0, \;\; \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

alors la solution $u(x) = 3x + e^{4x}$

2.1.3 Equation à noyau séparable

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espéce à noyau séparable de la forme (1.3) , avec

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

Alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \beta_i(t) \right] u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t) u(t) dt \end{aligned}$$

En posant

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt, \quad i = 1, ...n$$

On obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \alpha_m(x), \tag{2.6}$$

où les c_i sont les constantes à déterminer. Pour ce faire, nous multiplions les deus membre de l'équation (2.6) par $\beta_m(x)$ et intégrer de a à b nous obtenons

$$\int_a^b \beta_m(x)u(x)dx = \int_a^b \beta_m(x)f(x)dx + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \beta_m(x)\alpha_i(x)dx \tag{2.7}$$

En utilisant les notations suivantes

$$\int_a^b \beta_m(x)f(x)dx = B_m, \int_a^b \beta_m(x)\alpha_i(x)dx = a_{mi}$$

l'équation (2.7) devient

$$c_m - \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_{mi} = B_m, \; m = \overline{1, n} \tag{2.8}$$

qui est un système d'équations linéaire de n inconnus de la forme :

$$(I-\lambda A)\,c=B$$

où I est la matrice identité et $A=(a_{mi})_{1\leq i,m\leq n}$ une matrice d'ordre n, avec c et B des matrices colonnes.

Exemple 2.1.3 *Résoudre l'équation*

$$u(x)=1+\lambda\int_0^1 u(t)\,dt$$

Il est clair que la solution de cette équation est de la forme

$$u(x)=1+\lambda c$$

où

$$c=\int_0^1 u(t)\,dt$$

En intégrant les deux membres de l'équation

$$c-\lambda c=1$$

Si $\lambda\neq 1$, $c=\frac{1}{1-\lambda}$, *et la solution est unique*

$$u(x)=1+\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Si $\lambda=1$, *il n'existe pas de solution.*

2.1.4 Méthode de Fredholm

Soit l'équation de Fredholm de seconde espéce (1.3), sa solution est donnée sous la forme

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

où la fonction

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

est la résolvante, sous une condition $D(\lambda) \neq 0$ (λ ne soit pas un pôle pour $R(x;t;\lambda)$)

Les déterminants sont donnés par les formules suivantes :

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} B_n(x,t)\lambda^n$$

et

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} C_n(\lambda)\lambda^n$$

où les fonctions $B_n(x;t)$ et C_n sont données par :

$$\begin{aligned} B_0(x,t) &= k(x,t) \\ B_n(x,t) &= \underbrace{\int_a^b ... \int_a^b}_{n \text{ fois}} \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & ... & k(x,t_n) \\ k(x_1,t) & k(x_1,t_1) & ... & k(x_1,t_n) \\ . & . & . & . \\ k(x_n,t) & k(x_n,t_1) & ... & k(x_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n \end{aligned}$$

et

$$C_n = \underbrace{\int_a^b ... \int_a^b}_{n \text{ fois}} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & ... & K(t_1,t_n) \\ . & . & . \\ K(t_1,t_n) & ... & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n$$

Remarque 2.1.1 *Le détérminant $D(x;t;\lambda)$ est appellé le détérminant de Fredholm. $D(\lambda)$ est appellé le détérminant mineur de Fredholm. Les détéminants convergent si $\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt$ est finie. $R(x,t,\lambda)$ est une série analytique pour tout λ et $k\epsilon L_2$.*

2.1.5 Méthode des approximations successives

Soit l'équation de Fredholm de seconde espéce (1.3) , sa solution est donnée sous la forme

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

où la suite $u_n(x)$ est définie comme suit

$$\begin{cases} u_0(x) = une \text{ fonction arbitraire à valeur réelle.} \\ u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u_n(t)\, dt \end{cases} \tag{2.9}$$

en générale, on prend $u_0(x) = 0,\ 1,\ x$.

Théorème 2.1.1 *Si $f(x)$ est continue sur $[a,b]$ et $k(x,t)$ est continu sur $[a,b] \times [a,b]$, alors la suite u_n définie par (2.9) coverge vers la solution de l'équation intégrale donnée.*

Remarque 2.1.2 *Notons que la différence entre la méthode des approximations successives et la méthode de Adomain sont*

1− Il est intéréssant de noter que la méthode d'Adomain admit la formule suivante

$$\begin{cases} u_0(x) = une \text{ fonction arbitraire à valeur réelle n'est pas défini dans l'intégration} \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) u_n(t)\, dt \end{cases}$$

2− Les u_n dans la méthode d'Adomain sont des composantes de la solution contrairement, dans la méthode des approximations successives sont des approximations de la solution.

Exemple 2.1.4 *Résoudre avec la méthode des approximations successives l'équation suivante*

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)\, dt$$

On prend le premier terme $u_0(x) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_0(t)\,dt = x + e^x \\
u_2(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_1(t)\,dt \\
&= x + e^x - \int_0^1 xt\left(t + e^t\right)dt \\
&= e^x - \frac{1}{3}x \\
u_3(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_2(t)\,dt = e^x + \frac{1}{9}x \\
&\vdots \\
u_{n+1}(x) &= x + e^x - \int_0^1 xtu_n(t)\,dt = e^x + \left(\frac{-1}{3}\right)^n x
\end{aligned}$$

on peut démontrer la dernièrev relation facilement récurrence, alors la solution est

$$u(x) = \lim_{n\to 0} u_n(x) = \lim_{n\to 0} e^x + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} x = e^x$$

2.1.6 Méthode des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce (1.3) , nous alons chercher une solution de cette équation en utilisant la suite itérative suivante :

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt \tag{2.10}$$

La mise en oeuvre de ce processus itératif nécessite la donnée d'un itéré initial, on peut prendre par exemple $u_0(x) = f(x)$. En substituant cet élément dans le coté droit de l'équation récurrente (2.10), on obtient le premier itéré

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt \tag{2.11}$$

et ainsi de suite. Cette méthode d'approximation est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel u_n tend uniformément vers une limite u. Bien entendu, une telle limite si elle existe, elle est n´écessairement une solution de l'équation intégrale (1.3). Pour étudier cette convergence, nous allons examiner en détail le processus itératif (2.10) tout en cherchant à déterminer les conditions pour inverser l'équation intégrale à l'aide de la

résolvante. A partir des deux premières itérations, nous avons

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt \tag{2.12}$$

et

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt \qquad (2.13) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \left[\int_a^b k(t,z)f(z)dz \right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)\,dt \end{aligned}$$

où

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k(z,t)dz \tag{2.14}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_2(t)dt \qquad (2.15) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)\,dt + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)f(t)\,dt \end{aligned}$$

avec

$$k_3(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_2(z,t)dz \tag{2.16}$$

En continuant ce processus itératif, et en notant

$$k_m(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_{m-1}(z,t)dz \tag{2.17}$$

On obtient le $(n+1) - iéme$ itéré, solution approchée de l'équation intégrale (1.3)

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt \tag{2.18}$$

L'expression $k_m(x,t)$ est appelée le $m - iéme$ terme de la suite des noyaux itérés, avec $k_1(x,t) = k(x,t)$. Par passage à la limite, $n \to \infty$, on obtient ce qu'on appelle la série de Neumann

$$u(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt \tag{2.19}$$

Il convient de montrer, sous quelles conditions cette série converge-t-elle ? Pour ce faire, nous allons étudier la somme partielle et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir une majoration du terme général

$$\left| \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |k_m(x,t)|^2 \, dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right) \tag{2.20}$$

En posant

$$D^2 = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt, \;\; C_m^2 = \sup_x \int_a^b |k_m(x,t)|^2 \, dt \tag{2.21}$$

l'inégalité (2.20) devient

$$\left| \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt \right|^2 \leq C_m^2 D^2 \tag{2.22}$$

Il faut établir donc une majoration de la constante C_m^2. Pour cela, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la relation (2.17)

$$|k_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 \, dz \int_a^b |k(z,t)|^2 \, dz$$

et intégrer les deux cotés par rapport à t, ce qui donne

$$\int_a^b |k_m(x,t)|^2 \, dt \leq B^2 C_{m-1}^2 \tag{2.23}$$

où

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |k(z,t)|^2 \, dz dt \tag{2.24}$$

De l'inégalité (2.23), on obtient la relation récurrente

$$C_m^2 \leq B^{2m-2} C_1^2 \tag{2.25}$$

Ainsi, des relations (2.22) et (2.25), en on déduit

$$\left| \int_a^b k_m(x,t) f(t) dt \right|^2 \leq B^{2m-2} C_1^2 D^2 \tag{2.26}$$

Donc, le terme général de la somme partielle (2.18) est en valeur absolue majoré par la quantité $DC_1 |\lambda|^m B^{m-1}$. Il en résulte que la série infinie (2.19) converge plus rapidement que la série géométrique de raison $|\lambda| B$. Par conséquent, si

$$|\lambda| B < 1 \tag{2.27}$$

la convergence uniforme de cette série est assurée. Par ailleurs, il faut montrer ainsi l'unicité de la limite pour u_n qui satisfait cette condition. On suppose que l'équation (1.3) admet deux solutions $u_1(x)$ et $u_2(x)$, soient

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u_1(t) dt \\ u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u_2(t) dt \end{aligned}$$

Si, on soustrait ces deux équations, en posant $u_1(x) - u_2(x) = \varphi(x)$, on obtient l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.28}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette équation, on trouve

$$|\varphi(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt \times \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt \tag{2.29}$$

et intégrer ensuite par rapport à x pour obtenir

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 \, dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt dx \times \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt$$

où

$$\left(1 - |\lambda|^2 B^2\right) \int_a^b |\varphi(x)|^2 \, dx \leq 0 \tag{2.30}$$

Comme $|\lambda|^2 B < 1$, on conclut que $\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x) = 0$, i.e. $u_1(x) = u_2(x)$. Jusqu'ici, la question de convergence de cette méthode itérative est achevée. Pour établir son bien fondée, nous avons besoin aussi d'établir une estimation de l'erreur commise.

Cela revient à donner une estimation aux termes négligés dans la série de Neumann (2.19) qu'on peut réécrire aussi sous la forme

$$u(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t) f(t) dt + E_n(x)$$

Alors, il en résulte de l'analyse précédente que

$$|E_n(x)| \leq \frac{DC_1 |\lambda|^{n+1} B^n}{1 - |\lambda| B} \tag{2.31}$$

Finalement, notons qu'on peut évaluer la résolvante en fonction des noyaux itérés $k_m(x,t)$. En effet, en échangeant l'ordre entre l'intégration et la somme dans la série de Neumann (2.19), on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{m=1}^{n} \lambda^{m-1} \ k_m(x,t) \right) f(t)dt \tag{2.32}$$

de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R\left(x,t;\lambda\right) f(t)dt \tag{2.33}$$

où

$$R\left(x,t;\lambda\right) = \sum_{m=1}^{n} \lambda^{m-1} \ k_m(x,t) \tag{2.34}$$

Théorème 2.1.2 [5]*A toute fonction $k(x,t)$ carré intégrable correspond une unique résolvante $R(x,t;\lambda)$, analytique en λ, régulière au moins à l'intèrieur du cercle $|\lambda| < 1/B$, et est donnée par la série* (2.34)*. En outre, si $f(x)$ est carré intégrable, alors la solution de l'équation* (1.3) *est unique, valable dans le cercle $|\lambda| < 1/B$, et est donnée par la formule* (2.33)*.*

Exemple 2.1.5 *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm par la méthode des noyaux itérées*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b e^{x-y} u(t)dt$$

On a

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R\left(x,t;\lambda\right) f(t)dt$$

Remarque 2.1.3 *Dans le cas où $f\left(x\right) = 0$ la méthode d'Adomain n'est pas applicable parce que $u_0\left(x\right) \neq 0$.*

2.2 Equations de Fredholm de première espèce

Dans cette section, on va donner quelques méthodes de résolution des équations intégrales de première espéce définie par

$$\int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{2.35}$$

où $x \in D$, ne coincide pas nécéssarement avec $[a,b]$. Ce type des équations interviennent de la physique comme radiographie et stéréologie ... etc.

2.2.1 Méthode de régularisation

Cette méthode est établie par Phillips et Tikhonove voir [6]. La méthode de régularisation consiste de réécrire l'éqution (2.35) à une équation intégrale de Fredholm approximative de la forme

$$f(x) - \int_a^b k(x,t)u_\mu(t)dt = \mu u_\mu(x) \tag{2.36}$$

où μ est paramètre positive suffisament petit. Il est clair que l'équation (2.36) est une équation de seconde espèce de la forme

$$\frac{1}{\mu}f(x) - \frac{1}{\mu}\int_a^b k(x,t)u_\mu(t)dt = u_\mu(x) \tag{2.37}$$

alors, on peut résoudre l'équation (2.37) par une des méthodes étudier précédement et la solution

$$u(x) = \lim_{\mu \to 0} u_\mu(x) \tag{2.38}$$

(pour plus de détait voir [2]).

Lemme 2.2.1 *Soit l'opérateur intégral*

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad H \to H \\ u \quad &\to \quad \int_a^b k(x,t)u(t)dt \end{aligned}$$

Si A est continu et coercif dans un espace de Hilbert contient $f(x)$, $u(x)$, $u_\mu(x)$ *alors*

$1-$ $|u_\mu(x)|$ *est borné indépendement de* μ *et*

$2-$ $|u_\mu(x)-u(x)| \to 0$ *quand* $\mu \to 0$.

Exemple 2.2.1 *Résoudre l'équation suivante par la méthode de régularisation*

$$\frac{1}{4}e^x = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u(t)dt$$

D'aprés la méthode de régularisation, on peut transformer l'équation à une équation intégrale de seconde espèce de la forme

$$\frac{1}{4\mu}e^x - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-t}u_\mu(t)dt = u_\mu(x)$$

Par la méthode des noyaux séparables, on a

$$k(x,t) = e^x e^{-t} = \alpha(x)\beta(t)$$

On pose

$$c = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-t}u_\mu(t)dt$$

et

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\frac{1}{4}} \alpha(x)\beta(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{x-x}dx = \frac{1}{4} \\ B &= \int_0^{\frac{1}{4}} \beta(x) f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\mu}dx = \frac{1}{16\mu} \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{16\mu} = \left(1+\frac{1}{4\mu}\right)c,$$

d'où

$$c = \frac{1}{4\,(4\mu + 1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_\mu(x) &= \frac{1}{4\mu}e^x - \frac{1}{4\mu}\frac{1}{4\mu+1}e^x \\ &= e^x\left(\frac{1}{4\mu} - \frac{1}{4\mu\,(4\mu+1)}\right) \\ &= e^x\frac{1}{4\mu+1} \end{aligned}$$

On déduit que

$$u\,(x) = \lim_{\mu\to 0} u_\mu(x) = e^x$$

Chapitre 3

Méthodes de résoution des équations intégrales non linéaires de Fredholm

Dans ce chapitre, on va donner quelques méthodes de résolution des équations intégrales non-linéaires de Fredholm de première et de seconde espèce (pour plus de détait voir [1; 9].

3.1 Equations de Fredholm de seconde espèce

Dans cette section, on donne quelques méthodes de résolution des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u(t)) \, dt \tag{3.1}$$

où $F(u(x))$ est une fonction non linéaire de $u(x)$.

3.1.1 Equations à noyaux séparables

Comme l'équation et à variable séparable alors

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \beta_i(t)$$

En possant

$$c_i = \int_a^b \beta_i(t) F(u(t)) \, dt \tag{3.2}$$

substituant (3.2) dans (3.1), on trouve

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) c_i$$

on a

$$u^2(x) = \left[f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) c_i \right]^2$$

multipliant par $\beta_m(x)$ les deux membres de l'égalité et intégrant par rapport à x, on trouve un système d'équation dont les inconnus sont c_i.

Exemple 3.1.1 *Résoudre l'équation suivante*

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 x t u^2(t) \, dt$$

On a

$$k(x,t) = xt$$

On pose

$$c = \int_0^1 t u^2(t) \, dt,$$

et

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda x c \\ u^2(x) &= (x + \lambda x c)^2 \end{aligned}$$

multipliant par x et intégrant par rapport à x

$$c = \int_0^1 \left(x^3 + 2\lambda x^3 c + \lambda^2 x^3 c^2 \right) dx$$

on trouve

$$c = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\lambda c + \frac{1}{4}\lambda^2 c^2$$

alors

$$c = \frac{2 - \lambda \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda^2}$$

donc

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda x \frac{2 - \lambda \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda^2} \\ u(x) &= x\left(\frac{2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

On distingue les cas suivants
Si $\lambda = 0,\ u(x) = x,$ *et* $\lambda = 0$ *est un point singulier.*
Si $\lambda = 1,\ u(x) = x,$ *et* $\lambda = 1$ *est un point de bufircation.*
Si $\lambda < 1,$ *l'équation admit deux solutions réelles.*

3.1.2 La solution sous forme d'une série

Dans cette partie, on suppose que la solution de l'équation (3.1) existe et analytique ; alors on peut l'écrire sous la forme d'une série de Taylors,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.3}$$

Remplaçant (3.3) dans (3.1) , on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, F\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt \tag{3.4}$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor de la fonction $f(x)$. Alors aprés les calculs d'intégrations et par identification, on trouve les inconnus a_n.

3.1.3 Méthode de décomposition d'Adomain

La méthode d'Adomain est donnée par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{3.5}$$

où $u_n(x)$ est donné par la formule de récurrence suivante

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x,t) A_n(t)\, dt \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \tag{3.7}$$

Rappelant que la méthode d'Adomain modifier est donnée par

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ u_0(x) = f_1(x) \\ u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int\limits_a^b k(x,t) A_0(t)\, dt \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x,t) A_n(t)\, dt, \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

où $A_n(x)$ est défini précédemment.

Remarque 3.1.1 *La méthode d'Adomain est donnée une seule solution même si la solution n'est pas unique.*

3.1.4 La méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives ou la méthode d'ittération de Picard pour les équations non linéaires de Fredholm de second espèse est donnée par

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

où la suite $u_n(x)$ est définie comme suit

$$\begin{cases} u_0(x) = une \text{ fonction arbitraire à valeur réelle.} \\ u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(u_n(t))\, dt \end{cases}$$

la condtion de convergence est étudie dans [1] et donnée par le théorème (4.3).

3.2 Equations de Fredholm de première espèse

3.2.1 Méthode de régularisation

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de la forme

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) F(u(x))\, dt \tag{3.8}$$

La méthode de régularisation consiste de réécrire l'éqution (3.9) à une équation intégrale linéaire de Fredholm ; on fait le changement de variable

$$v(x) = F(u(x)),$$

On suppose que la fonction F est inversible, alors

$$u(x) = F^{-1}(v(x))$$

On obtient

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) v(t) dt \tag{3.9}$$

Une remarque importante a été énnoncé dans [4], pour que la solution de l'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce existe, est que la fonction $f(x)$ soit lier au noyau $k(x,t)$; par exemple si $k(x,t) = e^x \sin t$, il faut alors $f(x)$ soit un multiple de e^x.

La régularisation de (3.9) est

$$\frac{1}{\mu}f(x) - \frac{1}{\mu}\int_a^b k(x,t)v_\mu(t)dt = v_\mu(x) \tag{3.10}$$

où μ est paramètre positif suffisament petit.

Alors, on peut résoudre l'équation (3.10) par une des méthodes étudier précédement et la solution

$$v\left(x\right) = \lim_{\mu\to 0} v_\mu(x) \tag{3.11}$$

et

$$u\left(x\right) = F^{-1}\left(v\left(x\right)\right) \tag{3.12}$$

(pour plus de détait voir [3; 4; 8]).

Exemple 3.2.1 *Résoudre l'équation*

$$e^x = \int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{x-4t}u^2(t)dt \tag{3.13}$$

On pose

$$v\left(t\right) = u^2(t)$$

On obtient

$$e^x = \int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{x-4t}v(t)dt$$

C'est une équation linéaire de première espèce, par la méthode de régularisation, on a

$$\frac{1}{\mu}e^x - \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{x-4t}v_\mu(t)dt = v_\mu(x)$$

Par la méthode de noyau séparable, on obtient

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{2\left(1-e^{\frac{1}{2}}\right)}{2-\left(2+\mu\right)e^{\frac{1}{2}}}\right)e^x$$

alors

$$v(x) = \frac{e^{x+\frac{1}{2}}}{2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)}$$

donc

$$u(x) = \pm\sqrt{\frac{e^{x+\frac{1}{2}}}{2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)}}$$

Bibliographie

[1] G. Adomian, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Math. Comput. Modelling, 13(1992)17−43.

[2] R.F. Churchhouse, Handbook of Applicable Mathematics, Wiley, New York, (1981).

[3] H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, Publications, New York, (1962).

[4] M. Masujima, Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, Wiley-VCH, Weinheim, (2005).

[5] A. Rahmoune, Equations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution, August 16, 2018, (cours M2) .

[6] A.N. Tikhonov, On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization, Soviet Math, 4 (1963) 1035–1038.

[7] A.M. Wazwaz, A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations, Appl.Math. Comput., 181(2006)1703 − 1712.

[8] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP and Springer, Beijing and Berlin, (2009).

[9] A.M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications, ISBN, 978-7-04-031694-0, Springer, 2011.