

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : SAILOUDI Ilhem

Intitulé

**Sur l'approximation numérique des équations intégrales de
Volterra non linéaires par la méthode bloc par bloc**

Dirigé par : Dr. GHIAT Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. MENACEUR Amor	M.C.B Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. GHIAT Mourad	M.C.B Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. TABOUCHE Nora	M.C.B Univ-Guelma

Session septembre 2020

Sur l'approximation numérique des équations
intégrales de Volterra non linéaires par la
méthode bloc par bloc

SAIOUDI Ilhem

Mémoire de Master en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

6 octobre 2020

Table des matières

Dédicace	3
Remerciements	4
Introduction	6
1 Définitions et rappels	9
1.1 L'équation intégrale	9
1.1.1 L'équation intégrale singulière	10
1.2 L'équation intégrale de Volterra	10
1.3 Équation intégrale-différentielle	11
1.3.1 Équation intégrale-différentielle de Volterra	11
1.3.2 Équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra	
à noyau faiblement singulier	12
1.4 Propriété de dérivation	12
1.5 Théorème de point fixe de Banach	12
1.5.1 L'application Lipschitzienne	13
1.6 Théorème d'Arzela-Ascoli	14
1.7 Théorème de Schauder	15

1.8 Interpolation	15
1.8.1 Méthode de L'agrange	16
1.8.2 Interpolation de Lagrange	16
1.8.3 Erreur d'interpolation	17
2 Équation intégrale de Volterra de deuxième espèce	19
2.1 L'équation intégrale linéaire de Volterra	19
2.1.1 Étude analytique	19
2.1.2 Étude numérique	21
2.2 Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra	25
2.2.1 Étude analytique	26
2.2.2 Étude numérique	27
2.2.3 Test numérique	30
3 Équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra avec	
noyau faiblement singulier	34
3.1 Étude analytique	35
3.1.1 Étude d'existence	35
3.1.2 Étude d'unicité	39
3.2 Étude numérique	43
3.3 Test numérique	53

Je dédie ce mémoire avec un énorme plaisir et une immense joie

A mes très chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

*A mes chères frères Iheb et Youcef, mes chères soeurs Layen, Imen et son
mari Kader.*

A mes grands parents.

*A mes meilleurs amis Marwa et Mouslem pour leurs encouragement et
soutient.*

A mes chères Meriem, Soumia, Khawla, Nada, Lamis, Imen

A tous ceux que j'aime.

Remerciements

Avant tout, je remercie le GRAND DIEU le tout puissant qui, m'a aidé
pour achever ce travail.

Je remercie en premier lieu mon directeur de mémoire, Monsieur **GHIAT
Mourad** pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les
bonnes orientations, ses précieux conseils et ses encouragements. Je lui
exprime toute ma gratitude.

Je désire aussi remercier Mr. Hamza GUEBBAI qui m'a toujours encouragé.

Je le remercie pour son aide, son soutien inestimable et ses conseils.

En particulier, mes profonds remerciements vont à mes parents, mes
collègues et mes amis et toutes les personnes qui m'ont soutenue durant la
réalisation de mon mémoire.

Enfin, J'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres du
jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations intégrales et intégral-différentielles de Volterra avec noyau faiblement singulier.

Le but de ce travail est de construire une méthode numérique plus efficace pour résoudre les équations intégrales et intégral-différentielles de Volterra dans un grand intervalle $[a, b]$.

L'étude analytique de ces équations a été prouvée, où en exigeant des hypothèses assez faibles du point de vue pratique pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

Finalement, des tests numériques basés sur l'approximation par la méthode de bloc par bloc sont présentés qui nous confirment l'efficacité de cette nouvelle méthode.

Mots clés : équation intégrale de Volterra, équation intégral-différentielle de Volterra, équation linéaire, équation non linéaire, point fixe, méthode bloc par bloc.

Abstract

In this thesis, We are interested in Volterra integral and integro-differential equations with weakly singular kernel.

The goal of this work is to build a more efficient numerical method for solving the Volterra integral and integro-differential equations in a large interval $[a, b]$.

The analytic study of these equations has been proven, where we require hypotheses weak enough from a practical point of view to ensure the existence and the uniqueness of the solution.

Finally, numerical tests based on the approximation by the block by block method are presented. Which confirm the effectiveness of this new method.

Keywords : Volterra integral equation, Volterra integro-differential equation, linear equation, nonlinear equation, fixed point, block by block method

.

Introduction

C'est possible de construire des méthodes d'ordre supérieur grâce à l'utilisation des règles d'intégration. Malheureusement, ces méthodes conduisent à des formules qui ne sont pas intuitivement évidentes, sont difficiles à calculer et encore plus difficiles à analyser.

De plus, ils souffrent de l'inconvénient d'exiger des valeurs de départ. Beaucoup de ces problèmes peuvent être surmontés en recourant au méthode numérique bloc par bloc qui s'appuie sur l'interpolation de Lagrange du Noyau de l'intégrale.

Le travail dans ce mémoire s'appuie sur l'utilisation de cette méthode sur les équations intégrales et intégréo-différentielles de Volterra qui sont traitées par [[7]. [9].[11]], ces équations jouent un rôle très important dans plusieurs domaines tels que, la modélisation mathématique [9, 4], l'ingénierie et même les sciences physiques et sociales.

— Notre premier chapitre est un rappel sur les équations intégrales et les équations intégréo-différentielles linéaires et non linéaires avec des notions de base dans l'analyse numérique et fonctionnelle qui seront utilisées dans notre travail.

- Le deuxième chapitre représente l'étude analytique et numérique d'équation intégrale linéaire et non linéaire de Volterra avec des tests numériques.
- Le dernier chapitre sera consacré à l'étude d'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra avec noyau faiblement singulier en utilisant la méthode de bloc par bloc pour approcher la solution unique de la dernière équation.

Chapitre 1

Définitions et rappels

1.1 L'équation intégrale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables apparaît sous le signe intégral.

Cela tient compte de plusieurs formes spécifiques et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent.

On peut noter ça par deux exemples typiques

$$\int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds = f(t) \quad a \leq t \leq b$$

$$\varphi(t) - \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds = f(t) \quad a \leq t \leq b$$

φ est l'inconnue, la fonction $k(t, s)$ qui s'appelle *noyau* avec le terme libre f sont donnés.

1.1.1 L'équation intégrale singulière

L'adjectif **singulière** est parfois employée d'une part quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou bien si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné.

1.2 L'équation intégrale de Volterra

1. On appelle équation intégrale de Volterra **non linéaire de seconde espèce** une équation sous la forme

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s, \varphi(s)) ds$$

où la fonction inconnue $\varphi(t)$ apparaît à l'extérieur du signe intégral, $k(t, s)$ et $f(t)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

2. Une équation de la forme

$$\int_a^t k(t, s, \varphi(s)) ds = f(t)$$

dans laquelle $\varphi(t)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra **non linéaire de première espèce**.

3. On appelle une équation intégrale **linéaire de Volterra de seconde espèce** une équation sous la forme

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s) \varphi(s) ds$$

où la fonction inconnue $\varphi(t)$ apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral, $k(t, s)$ et $f(t)$ sont connues et λ un paramètre réel.

4. Si $f(t)=0$ l'équation devient

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t k(t, s)\varphi(s)ds$$

qui est appelée équation intégral **linéaire homogène de Volterra de seconde espèce**

5. Une équation à une inconnue $\varphi(t)$ de la forme

$$\int_a^t k(t, s)\varphi(s)ds = f(t)$$

est appelée équation intégral **linéaire de Volterra de première espèce**

1.3 Équation intégral-différentielle

C'est une équation dans la quelle la fonction inconnue apparaît comme la combinaison du dérivé ordinaire et sous le signe intégral.

1.3.1 Équation intégral-différentielle de Volterra

C'est une équation qui fait intervenir les dérivées et les intégrales d'une fonction au même temps et apparaît sous la forme

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)\varphi(s)ds.$$

1.3.2 Équation intégrro-différentielle non linéaire de Volterra à noyau faiblement singulier

C'est l'équation où la dérivée de la solution apparait dans l'intégral sous la forme

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, \varphi(s), \varphi'(s))ds + f(t). \quad (1.1)$$

Le noyau a une partie p qui est faiblement singulier, f est donnée.

Donc le problème est de trouver une fonction $\varphi \in C^1(a, b)$ qui vérifie l'équation au dessus.

1.4 Propriété de dérivation

Soit ψ une fonction définie de $[a, b]^2$ à image dans \mathbb{R} , tel que pour tout $s \in [a, b]$, $\psi(\cdot, s) \in C(a, b)$. On définit la fonction suivante

$$t \in [a, b] \quad \varphi(t) = \int_a^t \psi(t, s)ds.$$

Proposition 1.4.1

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s)ds.$$

Preuve : 7

1.5 Théorème de point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point

fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

C-à-d,

$$\exists x^* \in T \quad x^* = T(x^*).$$

Tant que $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$.

1.5.1 L'application Lipschitzienne

Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T : M \rightarrow M$.

On dit que T est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive $k > 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'élément x, y de M , l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Si $k \leq 1$, T est appelé non expansive,

si $k < 1$, T est appelé contraction.

Théorème 1.5.1 *Si T est contractante, alors elle a un unique point fixe $x^* \in X$. De plus, la suite*

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = T(x_n) \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers x^* et on a

$$\|x_n - x\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

Démonstration 1 Voir [5]

1.6 Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1.6.1 *Un ensemble de fonction définies sur un espace topologique et à valeurs dans un espace métrique est dites **équicontinue** si toute les fonctions sont continues et ont des variations sensiblement équivalentes sur un voisinage donné.*

Théorème 1.6.1 *soit K compacte d'une espace métrique (X, d)*

$D \subset C^1(K)$ est relativement compacte dans $C^1(K)$ ' muni de la norme

$$\|f\|_{C^1(K)} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty},$$

\Leftrightarrow 1- D est uniformément bornée dans $C^1(K)$ c-à-d,

$$\exists M > 0 \quad \forall f \in D \quad \|f\|_{C^1(K)} \leq M$$

2-Les familles

$$D_0 = \{u = f, f \in D\},$$

$$D_1 = \{v = f', f \in D\},$$

sont équicontinues c-à-d,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall t, t' \in K, \quad \forall f \in D$$

$$d(t, t') < \delta_0 \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon,$$

$$d(t, t') < \delta_1 \Rightarrow |f'(t) - f'(t')| < \varepsilon.$$

preuve [\[\[6\],\[3\]\]](#).

1.7 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 1.7.1 (brouwer) *La boule B_n (la boule unité fermée de \mathbb{R}^n) à la priorité du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.7.2 *Soit E un espace de Banach et K un sous ensemble non vide compact et convexe.*

Alors toute application $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.

preuve [3].

1.8 Interpolation

Soit f une fonction définie d'un intervalle $I = [a, b]$ à image dans \mathbb{R} . Supposons qu'on peut déterminer cette fonction sur une subdivision de $[\alpha, \beta]$ de la forme suivante :

$$\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n = \beta,$$

c.-à-d. on peut calculer $y_i = f(t_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

On appelle le polynôme P d'ordre $n-1$ qui passe par les points $\{(t_i, y_i)\}_{i=1}^n$ l'**interpolant** de f , cette opération s'appelle **interpolation**.

1.8.1 Méthode de L'agrange

Le but de la méthode de *Lagrange* est de contourner la résolution du système de la méthode de *Vandermonde*. Donc, elle nous permet de construire le polynôme d'interpolation d'une façon directe et simple. L'outil et l'ingéniosité de cette méthode se résume dans la construction des polynômes notés l_i .

Soit la subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ suivante

$$\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n = \beta.$$

Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(t - t_j)}{(t_i - t_j)}.$$

On remarque que pour tout $1 \leq i, k \leq n$,

$$l_i(t_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Les l_i sont appelés **les polynômes de Lagrange** correspondant à la subdivision $\{t_i\}_{i=1}^n$. Le polynôme d'interpolation devient

$$L_n[f](t) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(t).$$

1.8.2 Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée sur \mathbb{R} et x_0, x_1, \dots, x_n réels donnés distincts, Interpolation de la fonction f par un polynome de degré n aux points x_1, \dots, x_n consiste à résoudre le problème suivant,

Trouver un polynôme p de degré $\leq n$ tel que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Si un tel polynome existe, il s'écrit de manière unique

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i,$$

car les l_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En prenant $x = x_k$ pour $0 \leq h \leq n$ et en utilisant que $l_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $l_k(x_k) = 1$, on obtient

$$\alpha_k = p(x_k) = f(x_k).$$

L'unique solution du problème est donc

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x_i),$$

ce polynome s'appelle l'interpolant de la fonction f de degré n aux points x_1, \dots, x_n .

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction plus ou moins compliquée par une fonction plus simple car polynomiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise.

1.8.3 Erreur d'interpolation

Soit f une fonction assez régulière définie sur $[\alpha, \beta]$. On cherche à majorer l'erreur suivante

$$E_n(t) = f(t) - P_n(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

où, P_n est le polynôme interpolant f sur la subdivision $\{t_i\}_{i=1}^n$. Nous savons que $E_n(t_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, reste à voir cette erreur pour $t \notin \{t_i\}_{i=1}^n$.

Théorème 1.8.1 *Si $f \in C^n(\alpha, \beta)$, alors*

$$E_n(t) = \frac{f^{(n)}(\xi(t))}{n!} \prod_{i=1}^n (t - t_i), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \xi(t) < \beta.$$

Dans les deux chapitres suivants on va présenter une nouvelle méthode numérique de bloc par bloc qu'on a exposé à la conférence de **International Voronezh Spring Mathematical School VVMH [2]**.

Chapitre 2

Équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

Dans ce chapitre on va étudier analytiquement et numériquement l'équation linéaire et non linéaire de Volterra de deuxième espèce.

2.1 L'équation intégrale linéaire de Volterra

L'équation est donnée sous la forme,

$$u(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)u(s)ds \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad , \quad (2.1)$$

Dans laquelle $u(t)$ est la fonction inconnue que l'on veut déterminer, le noyau de Volterra $k(t, s)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues données.

2.1.1 Étude analytique

Pour cette étude on doit démontrer l'existence et l'unicité de solution de notre équation, et pour cela on applique la méthode des approximations successives de **Picard**, qui donne une approximation pour l'équation intégrale

linéaire de Volterra de deuxième espèce, dont laquelle on va construire une série de fonctions $\{u_n(t)\}$ qui converge vers f .

Soit

$$\begin{cases} u_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)u_{n-1}(s)ds & n \in N^*, \\ u_0(t) = g(t), \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t) & n \in N^*, \\ u_0(t) = g(t). \end{cases}$$

φ_n vérifie

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= u_n(t) - u_{n-1}(t) = \int_0^t k(t, s)(u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s))ds \\ &= \int_0^t k(t, s)\varphi_{n-1}(s)ds. \end{aligned}$$

Démontrons que

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t),$$

en effet

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \\ &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n (u_i(t) - u_{i-1}(t)), \\ &= \varphi_0(t) + u_n(t) - u_0(t) \\ &= u_n(t) \end{aligned}$$

Existence et unicité de la solution :

Théorème 2.1.1 *Si $k(t, s)$ est continue en $0 \leq s \leq t \leq T$, et $g(t)$ est continue en $0 \leq t \leq T$, donc (2.1) possède une unique solution continue en $0 \leq t \leq T$.*

Démonstration : [8]

2.1.2 Étude numérique

On va utiliser la méthode bloc par bloc qui est basée sur l'approximation numérique des intégrales par des polynomes de degré supérieur à 1 pour l'équation,

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^t p(t-s)u(s)ds. \quad (2.2)$$

Interpolation du Lagrange sur les points $t_0; t_1; t_2$

On a,

$$u(t_2) = g(t_2) + \int_{t_0}^{t_2} p(t_2-s)u(s)ds.$$

Alors,

$$l_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{2h^2},$$

$$l_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = -\frac{(t-t_0)(t-t_2)}{h^2},$$

$$l_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{2h^2}.$$

Qui donne,

$$u(s) = \frac{(s-t_1)(s-t_2)}{2h^2}u(t_0) - \frac{(s-t_0)(s-t_2)}{h^2}u(t_1) + \frac{(s-t_0)(s-t_1)}{2h^2}u(t_2).$$

Quand on utilise le changement de variable suivant,

$$x = \frac{s - t_0}{h} \quad \text{alors} \quad s = hx + t_0 \quad \text{et} \quad ds = hdx.$$

On obtient,

$$\begin{aligned} u(t_2) &= \frac{h}{2}u(t_0) \int_0^2 p(t_2 - s)(s - 1)(s - 2)ds - hu(t_1) \int_0^2 p(t_2 - s)s(s - 2)ds \\ &+ \frac{h}{2}u(t_2) \int_0^2 p(t_2 - s)s(s - 1)ds. \end{aligned}$$

Interpolation de Lagrange sur les points t_0 ; $t_{\frac{1}{2}}$; t_1 :

On a,

$$u(t_1) = g(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} p(t_1 - s)u(s)ds.$$

Alors,

$$\begin{aligned} l_0(t) &= \frac{(t - t_{\frac{1}{2}})(t - t_1)}{(t_0 - t_{\frac{1}{2}})(t_0 - t_1)} = \frac{2(t - t_{\frac{1}{2}})(t - t_1)}{h^2}, \\ l_1(t) &= \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_{\frac{1}{2}} - t_0)(t_{\frac{1}{2}} - t_1)} = -\frac{4(t - t_0)(t - t_1)}{h^2}, \\ l_2(t) &= \frac{(t - t_0)(t - t_{\frac{1}{2}})}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_{\frac{1}{2}})} = \frac{2(t - t_0)(t - t_{\frac{1}{2}})}{h^2}. \end{aligned}$$

Qui donne,

$$\begin{aligned} u(t_1) &= g(t_1) + \frac{2}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} p(t_1 - s)(s - \frac{1}{2})dsu(t_0) - \frac{4}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} p(t_1 - s)(s - t_0)(s - t_1)dsu(t_{\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{2}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} p(t_1 - s)(s - t_0)(s - t_{\frac{1}{2}})dsu(t_1). \end{aligned}$$

Quand on utilise la changemet de variable suivante,

$$x = \frac{s - t_0}{\frac{h}{2}} \quad \text{alors} \quad s = \frac{h}{2}x + t_0 \quad \text{et} \quad ds = \frac{h}{2}dx.$$

On obtient,

$$\begin{aligned} u(t_1) &= g(t_1) + \frac{2}{h^2}u(t_0) \int_0^2 p(t_1 - t_0 \frac{h}{2}s)(s-1)(s-2)ds \\ &\quad - \frac{h}{2}u(t_{\frac{1}{2}}) \int_0^2 p(t_1 - t_0 - \frac{h}{2}s)s(s-2)ds \\ &\quad + \frac{h}{4}u(t_1) \int_0^2 p(t_1 - t_0 - \frac{h}{2}s)s(s-1)ds. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$u(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{(-\frac{h}{2})(-\frac{3h}{2})}{2h^2}U_0 + \frac{(\frac{h}{2})(-\frac{3h}{2})}{-h^2}U_1 + \frac{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})}{2h^2}U_2.$$

$$u(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{8}U_0 + \frac{3}{4}U_1 - \frac{1}{8}U_2.$$

On pose,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x, y, z) = \frac{z}{2} \int_0^2 (1-s)(2-s)p(x, y + sz)ds, \\ \beta(x, y, z) = z \int_0^2 s(2-s)p(x, y + sz)ds, \\ \gamma(x, y, z) = \frac{z}{2} \int_0^2 s(s-1)p(x, y + sz)ds. \end{array} \right.$$

Maintenant, on calcule $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ explicitement pour $p(x, y, z) = (x - y - sz)^p$ et cela nous donne les résultats suivantes,

$$\begin{aligned}\alpha(x, y, z) &= \frac{1}{p+1}(x-y)^{p+1} + \frac{1}{2(p+1)} \left[\frac{-1}{z(p+2)}(x-y-2z)^{p+2} - \frac{3}{z(p+2)}(x-y)^{p+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{z(p+2)} \left(-\frac{1}{z(p+3)}(x-y-2z)^{p+3} + \frac{1}{z(p+3)}(x-y)^{p+3} \right) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(x, y, z) &= \frac{1}{(p+1)} \left[\frac{2}{z(p+2)}(x-y-2z)^{p+2} + \frac{1}{z(p+2)}(x-y)^{p+2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{z(p+2)} \left(-\frac{1}{z(p+3)}(x-y-2z)^{p+3} + \frac{1}{z(p+3)}(x-y)^{p+3} \right) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(x, y, z) &= \frac{-1}{p+1}(x-y-2z)^{p+1} + \frac{1}{z(p+1)} \left[-\frac{3}{z(p+2)}(x-y-2z)^{p+2} - \frac{1}{z(p+2)}(x-y)^{p+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{z(p+2)} \left(-\frac{1}{z(p+3)}(x-y-2z)^{p+3} + \frac{1}{z(p+3)}(x-y)^{p+3} \right) \right].\end{aligned}$$

On les remplace dans les équations d'origines, ce qui donne le système suivant :

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\beta(t_1, t_0, \frac{h}{2}) + \frac{\beta(t_1, t_0, \frac{h}{2})}{8(1+\gamma(t_2, t_0, h))}} \left(g(t_2) + \frac{\beta(t_1, t_0, \frac{h}{2})}{8(1-\gamma(t_2, t_0, h))} - g(t_2) \right) \\ &\quad + \left(\alpha(t_1, t_0, \frac{h}{2}) - \frac{3}{8}\beta(t_1, t_0, \frac{h}{2}) + \alpha(t_1, t_0, \frac{h}{2}) \frac{\beta(t_1, t_0, \frac{h}{2})}{8(1+\gamma(t_2, t_0, h))} \right) U_0,\end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{1}{1-\gamma(t_2, t_0, h)} [g(t_2) + \alpha(t_2, t_0, h)U_0 - \beta(t_2, t_0, h)U_1].$$

En appliquant les mêmes étapes précédente pour $U_3, U_4 \dots$ et par analogie on obtient le système suivant,

$$\begin{aligned}U_{2m+1} &= \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) + \frac{\beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})}{8(1+\gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h))}} \left[g(t_{2m+1}) + \frac{\beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})}{8(1-\gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h))} g(t_{2m+2}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) - \frac{3}{8}\beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) + \alpha(t_{2m+2}, t_{2m}, h) \frac{\beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})}{8(1+\gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h))} \right) U_{2m} \right],\end{aligned}$$

$$U_{2m+2} = \frac{1}{1 - \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h)} [g(t_{2m+2}) + \alpha(t_{2m+2}, t_{2m}, h)U_{2m} - \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h)U_{2m+1}].$$

Il est clair et évident que le système admet une solution unique.

2.2 Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra

Dans cette partie on va étudié un autre type d'équations intégrale de Volterra avec un noyau qui contient une partie faiblement singulière, mais sans l'intervention de la dérivé de l'inconnu, cette équation se présente comme suit,

$$u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s))ds + f(t); \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.3)$$

où, $u \in C(a, b)$ inconnu, et K est une fonction définie par,

$$\begin{aligned} K : [a, b]^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s, u) &\mapsto K(t, s, u), \end{aligned}$$

vérifiant les hypothèses suivantes,

$$(H1) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad K \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) \quad \exists A > 0, \forall t, s \in [a, b], \forall X, Y \in \mathbb{R} \\ |K(t, s, X) - K(t, s, Y)| \leq A|X - Y|. \end{array} \right.$$

La partie faiblement singulière p vérifie les hypothèses suivantes,

$$(H2) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad p \in L^1(a-b, b-a), \\ (2) \quad \forall t \geq 0 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\delta} |p(t+\delta-s)| ds = 0. \end{array} \right.$$

2.2.1 Étude analytique

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.4) on va construire deux suites de fonctions, $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} u_n(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)K(t,s,u_{n-1}(s))ds, \forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_0(t) = f(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{cases}$$

Il est clair que,

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t).$$

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (H1) et (H2) et sachant qu'il existe des points $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, tel que, pour $0 \leq i \leq n$, et pour $t \in [T_i, T_{i+1}]$*

$$A \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |p(t-s)| ds \leq \rho, \quad (2.4)$$

où, ρ est indépendant de t et de n , donc (2.4) admet une unique solution dans $C(a, b)$.

Démonstration 2 [7].

2.2.2 Étude numérique

Pour atteindre cette étude en utilisant la méthode bloc par bloc, d'abord on va faire une approximation numérique par des polynomes de Lagrange sur l'équation,

$$u(t_2) = \int_a^t p(t-s)K(t,s,u(s))ds + g(t_2); \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.5)$$

Interpolation du K sur les points t_0 ; t_1 ; t_2 :

Avec, $t_0 = 0$, $t_1 = h$ et $t_2 = 2h$.

Donne,

$$L_2[K](s) = \frac{1}{2h^2}(s-h)(s-2h)K(t_2, t_0, U_0) + \frac{1}{h^2}s(s-2h)K(t_2, t_1, U_1) + \frac{1}{2h^2}s(s-h)K(t_2, t_2, U_2).$$

Interpolation du K sur les points t_0 ; $t_{\frac{1}{2}}$; t_1 :

Avec, $t_0 = 0$, $t_{\frac{1}{2}} = \frac{h}{2}$ et $t_1 = h$, donne,

$$L_2[K](s) = \frac{2}{h^2}(s-\frac{h}{2})(s-h)K(t_1, t_0, U_0) - \frac{4}{h^2}s(s-h)K(t_1, t_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{h^2}s(s-\frac{h}{2})K(t_1, t_1, U_1).$$

L'approximation de $U_{\frac{1}{2}}$ donne,

$$U_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}U_0 + \frac{3}{4}U_1 - \frac{1}{8}U_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} L_2[K](s) &= \frac{2}{h^2}(s-\frac{h}{2})(s-h)K(t_1, t_0, U_0) - \frac{4}{h^2}s(s-h)K(t_1, t_{\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_0 + \frac{3}{4}U_1 - \frac{1}{8}U_2) \\ &+ \frac{2}{h^2}s(s-\frac{h}{2})K(t_1, t_1, U_1). \end{aligned}$$

Quand on remplace les résultats obtenues dans l'équation (2.5) avec le changement de variable $x = \frac{s - t_0}{\frac{h}{2}}$ on trouve que,

$$\begin{aligned}
U_1 &= g(t_1) + \int_0^2 p(t_1 - s)K(t_1, s, f(s))ds \\
&\simeq g(t_1) + \int_0^2 p(t_1 - \frac{h}{2}s)(s - 1)(s - 2)dsK(t_1, t_0, U_0) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_1 - \frac{h}{2}s)s(s - 2)dsK(t_1, t_{\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_0 + \frac{3}{4}U_1 - \frac{1}{8}U_2) \\
&+ \frac{h}{4} \int_0^2 p(t_1 - \frac{h}{2}s)s(s - 1)dsK(t_1, t_1, U_1).
\end{aligned}$$

Et pour $x = \frac{s - t_0}{h}$ on trouve que,

$$\begin{aligned}
U_2 &\simeq g(t_2) + \int_0^2 p(t_2 - t_0 - hs)(s - 1)(s - 2)dsK(t_2, t_0, U_0) \\
&- h \int_0^2 p(t_2 - t_0 - hs)s(s - 2)dsK(t_2, t_1, U_1) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_2 - t_0 - hs)s(s - 1)dsK(t_2, t_2, U_2).
\end{aligned}$$

On fait les mêmes étapes pour calculer U_3 , U_4 , U_5 ... et par analogie on obtient le système suivant,

$$\begin{aligned}
U_{2m+1} &= g(t_{2m+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+1}, t_{2j}, h)K(t_{2m+1}, t_{2j}, U_{2j}) + \beta(t_{2m+1}, t_{2j}, h)K(t_{2m+1}, t_{2j+1}, U_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2j}, h)K(t_{2m+1}, t_{2j+2}, U_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})K(t_{2m+1}, t_{2m}, U_{2m}) + \\
&+ \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}U_{2m+1} - \frac{1}{8}U_{2m+2}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, U_{2m+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2m+2} &= g(t_{2m+2}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j}, U_{2j}) + \beta(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+1}, U_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+2}, U_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m}, U_{2m}) \\
&+ \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, U_{2m+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, U_{2m+2}).
\end{aligned}$$

Étude du système

Théorème 2.2.2 *Pour h suffisamment petit, le système (Γ) a une unique solution.*

preuve 2.2.1

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

On pose :

$$\Psi \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \Psi \begin{pmatrix} U_{2m+1} \\ U_{2m+2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}X - \frac{1}{8}Y) - K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}\bar{X} - \frac{1}{8}\bar{Y})) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, X) - K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, \bar{X})), \\
\eta_2 &= \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, X) - K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, \bar{X})) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, Y) - K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, \bar{Y})).
\end{aligned}$$

Comme K est lipschitzien,

$$\begin{aligned} |\eta_1| &\leq \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \left(\frac{3}{4}A |X - \bar{X}| + \frac{1}{8}A |Y - \bar{Y}| \right) + \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})A |Y - \bar{Y}|, \\ |\eta_2| &\leq \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X - \bar{X}|) + \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (B |Y - \bar{Y}|). \end{aligned}$$

Alors,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(A, B) \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\beta_1 & \frac{1}{8}\beta_1 + \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Après les calculs de β_1 , β_2 , γ_1 et γ_2 on obtient,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \right\|_1 \leq h^{p+1} C \max(A, B) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Pour h suffisamment petit, d'après le théorème du point fixe de Banach ψ est contractante. Par conséquent le système précédent admet une unique solution .

2.2.3 Test numérique

Exemple 2.2.1 Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra définie comme suit :

$$u(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^p t \frac{s^2 + 1}{1 + u(s)^2} ds, \quad 0 \leq t \leq T = 1 \quad (2.6)$$

$$K(t, s, u(s)) = t \frac{s^2 + 1}{1 + u(s)^2}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T = 1,$$

Si on prend

$$g(t) = t - t \left(\frac{1}{p+1} \right) t^{p+1},$$

on obtient,

$$u(t) = t.$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée $|U_n - u(t_n)|$, de l'équation précédente avec $p = -\frac{1}{5}$

n	$E(h)$
10	0.0135
50	7.2043e-004
100	2.0584e-004
500	1.1313e-005
1000	3.2473e-006
1500	1.5650e-006

TABLE 2.1 – Résultats numériques de l'exemple

Exemple 2.2.2 On prend le même exemple précédent mais cette fois avec $0 \leq s \leq t \leq T = 50$ et le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée $|U_n - u(t_n)|$, de l'équation (2.6) avec $p = -\frac{1}{5}$

n	$E(h)$
155	0.1306
200	0.0807
250	0.0531
1000	0.0041
2000	0.0011
5000	2.1846e-004

TABLE 2.2 – Résultats numériques de l'exemple

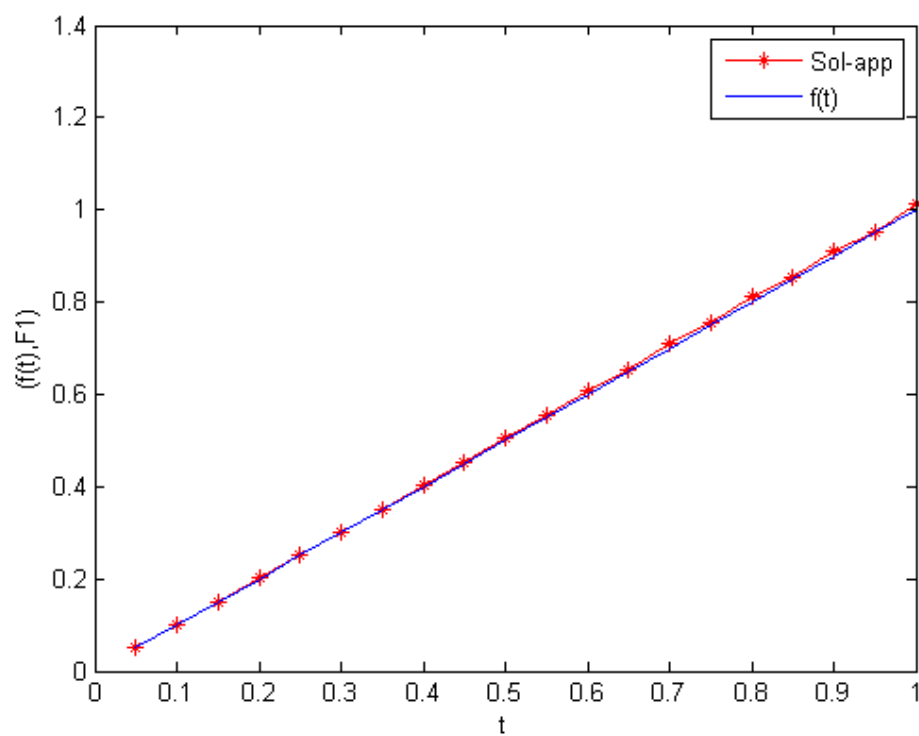


FIGURE 2.1 – La solution exacte et la solution approchée avec $n=10$.

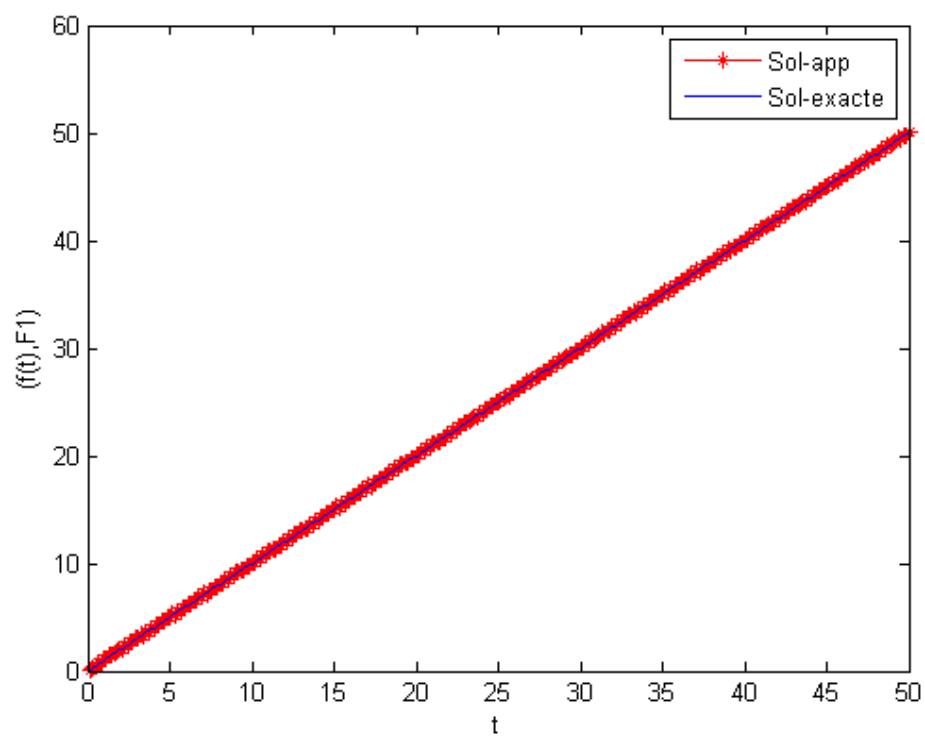


FIGURE 2.2 – La solution exacte et la solution approchée avec $n=155$.

Chapitre 3

Équation intégrro-différentielle non linéaire de Volterra avec noyau faiblement singulier

Dans ce chapitre on va faire une étude analytique et numérique pour l'équation intégrro-différentielle non linéaire de Volterra avec noyau faiblement singulière qui est sous la forme,

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t). \quad (3.1)$$

La partie singulière p vérifie les hypothèses suivantes,

$$(\mathcal{H}_1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p \in W^{1,1}([a-b, b-a]), \\ (2) \quad p(0)=0, \end{array} \right.$$

où, $W^{1,1}([a-b, b-a])$ est un espace de Banach avec la norme suivante,

$$\|x\|_{W^{1,1}([a-b, b-a])} = \|x\|_{L^{1,1}(a-b, b-a)} + \|x'\|_{L^{1,1}(a-b, b-a)},$$

et s'est calculé au sens faible. Nous avons, $\forall t \in [a, b] \quad \forall \delta > 0$

$$\int_t^{t+\delta} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t+\delta, s) \right| ds = \int_a^\delta |p'(\tau)| d\tau,$$

La partie régulière k est définie par,

$$\begin{aligned} K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s, u, v) &\mapsto K(t, s, u, v), \end{aligned}$$

est supposée vérifiée les hypothèses suivantes,

$$(\mathcal{H}_2) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall t, s \in [a, b], \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ (2) \quad \max \left(|K(t, s, u, v)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) \right| \right) \leq M. \\ (3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t, s \in [a, b], \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ |K(t, s, u, v) - K(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq A|u - \bar{u}| + B|v - \bar{v}|, \\ \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v}) \right| \leq \bar{A}|u - \bar{u}| + \bar{B}|v - \bar{v}|. \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Quand on dérive les deux cotés d'équation (3.1), on trouve,

$$\forall t \in [a, b], u'(t) = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + f'(t).$$

3.1 Étude analytique

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution on prend le cas où la partie singulière est égale à $(t-s)^{1-\alpha}$, c-à-d,

$$\phi(u)(t) = \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.2)$$

3.1.1 Étude d'existence

On va chercher un point fixe u quelconque $\phi(u) \equiv u$, et pour cela on utilise la méthode de **Schauder**. c-à-d,

ϕ doit être continue sur un compact et convexe F dans un espace de Banach.

Pour cela on définit la fonctionnelle ϕ_f par,

$$\forall \xi \in C^1(a, b), \forall t \in [a, b], \quad \Phi_f(\xi)(t) := \int_a^t p(t-s)K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f(t).$$

Proposition 3.1.1 *Pour tout $f \in C^1(a, b)$, Φ_f est continu de $C^1(a, b)$ dans lui-même.*

Démonstration 3 *Soit $\xi \in C^1(a, b)$. Il est clair que $\Phi_f(\xi)$ est continu sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$,*

$$\Phi_f(\xi)'(t) := \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f'(t),$$

qui est continue sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\xi)'(t)| &\leq M \left(\int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds + \int_a^t |p(t-s)| ds \right) + \|f\|_{C^1(a,b)}, \\ &\leq M \left(\int_0^{t-a} |p'(\tau)| d\tau + \int_0^{t-a} |p(\tau)| d\tau \right) + \|f\|_{C^1(a,b)}, \\ &\leq M \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} + \|f\|_{C^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Alors, $\Phi_f(\xi) \in C^1(a, b)$. Puis on met une suite $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C^1(a, b)$ qui converge vers $\xi \in C^1(a, b)$.

On a,

$$\begin{aligned} \Phi_f(\xi)(t) - \Phi_f(\xi_n) &= \int_a^t p(t-s)(K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) - K(t, s, \xi_n(s), \xi_n'(s))) ds, \\ \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |\Phi_f(\xi)(t) - \Phi_f(\xi_n)(t)| &\leq \max_{t \in [a, b]} |\xi(t) - \xi_n(t)| A \int_a^t |p(t-s)| ds \\ &\quad + \max_{t \in [a, b]} |\xi'(t) - \xi_n'(t)| B \int_a^t |p(t-s)| ds, \\ &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \max(A, B) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)}, \\ \max_{t \in [a, b]} |\Phi_f(\xi)'(t) - \Phi_f(\xi_n)'(t)| &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} (\max(A, B) + \max(\bar{A}, \bar{B})) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)}. \end{aligned}$$

Donc, Φ_f est continue de $C^1(a, b)$ dans lui-même.

Maintenant on définit l'ensemble suivant pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
 F & : = \{\xi \in C^1(a, b); \xi(a) = f(a), \xi'(s) = f'(a), \forall t \in [a, b], \\
 |\xi(t) - f(t)| & \leq M \sup_{t \in [a, b]} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} ds \\
 |\xi'(t) - f'(t)| & \leq M \left(\sup_{t \in [a, b]} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} ds + \sup_{t \in [a, b]} \int_a^t (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} ds \right).
 \end{aligned}$$

Il est clair que F est fermé et convexe

Pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi)(a) & = f(a), \\
 |\phi(\xi)(t) - f(t)| & = \left| \int_a^t (t-s)^{(1-\alpha)} k(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right|, \\
 & \leq M \left| \int_a^t (t-s)^{(1-\alpha)} ds \right|, \\
 & \leq M \sup_a^t \int_a^t (t-s)^{(1-\alpha)} ds.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(\phi)'(\xi)(t) - f'(t)| & = \left| \int_a^t (1-\alpha)(t-s)^{(-\alpha)} k(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right. \\
 & \quad \left. + \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial k}{\partial t}(k(t, s, \xi(s), \xi'(s))) ds \right| \\
 & \leq M \left(\sup_a^t \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} ds + \sup_a^t \int_a^t (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} ds \right)
 \end{aligned}$$

$$\leq M \|(t-s)^{1-\alpha}\|_{w^{1,1}}$$

Donc $\phi(F) \subset F$

Puis, il faut montrer que $\phi(F)$ est relativement compact.

Pour cela, on utilise le théorème **d'Arzela-Ascoli** . $\forall t, t' \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |\phi_f(\xi)(t) - \phi_f(\xi)(t')| &= \left| \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} k(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} k(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds + f(t) - f(t') \right| \\ &\leq \left| \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} k(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} k(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right| + |f(t) - f(t')|, \\ &\leq \left| \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} K(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds - \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} K(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right| + |f(t) - f(t')| \\ &\leq \left| \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds - \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} K(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, \xi(s), \xi'(s)) ds + \int_a^{t'} (t'-s)^{1-\alpha} K(t', s, \xi(s), \xi'(s)) ds \right| + |f(t) - f(t')|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \int \left| (t-s)^{1-\alpha} - (t'-s)^{1-\alpha} \right| ds \sup |k(t, s, \xi(s), \xi'(s)) - k(t', s, \xi(s), \xi'(s))| \\
&\quad + M \sup \int_t^{t'} (t-s)^{1-\alpha} ds |t-t'| + \max |f(s)| |t-t'|, \\
&\leq M \frac{1}{2-\alpha} (t-b)^{2-\alpha} |t-t'| + \max_{s \in [a,b]} |f(s)| |t-t'|.
\end{aligned}$$

Alors, $\phi(F)$ est relativement compact.

Les conditions de Shauder sont réalisées, donc ϕ_f a un point fixe dans C^1 .

3.1.2 Étude d'unicité

Théorème 3.1.1 *Par rapport à les deux hypothèses précédent et sachant qu'il existe des points $a = T_0 < T_1 < \dots < T_n = b$, tel que, pour $0 \leq i \leq n$, et pour $t \in [T_i, T_{i+1}]$,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |p(t-s)| ds \leq \rho < \frac{1}{3}, \\ \max \{A, B\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \leq \rho < \frac{1}{3}, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où, ρ est indépendant de t et de n

Pour prouver l'unicité de la solution on doit d'abord la montrer sur l'intervalle réduit $[T_0, T_1]$ puis on le prolonge sur tout l'intervalle $[a, b]$.

On suppose que l'équation (2.2) a deux solutions u_1 et u_2 dans $C^1[a, b]$.

On met, $\forall t \in [T_0, T_1]$

$$\gamma(t) := |u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)|.$$

On a,

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| &= \left| \int_a^{t_1} (t-s)^{1-\alpha} (K(t,s,u_1(s),u_1'(s)) - K(t,s,u_2(s),u_2'(s))) ds \right| \\ &= \left| \int_a^{t_1} (t-s)^{1-\alpha} (k(t,s,u_1(s),u_2(s)) - k(t,s,u_1'(s),u_2'(s))) ds \right|, \\ &\leq \int_a^{t_1} |(t-s)^{1-\alpha}| (A|u_1(s) - u_2(s)| + B|u_1'(s) - u_2'(s)|) ds, \\ &\leq \rho \left(\max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [a, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| \right), \\ &\leq \rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(a, T_1)}. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} |u_1'(t) - u_2'(t)| &\leq \left| \int_a^{t_1} (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} (K(t,s,u_1(s),u_1'(s)) - K(t,s,u_2(s),u_2'(s))) ds \right| \\ &+ \left| \int_a^{t_1} (t-s)^{1-\alpha} \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u_1(s),u_1'(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t,s,u_2(s),u_2'(s)) \right) ds \right|, \\ &\leq \int_a^{t_1} |(1-\alpha)(t-s)^{-\alpha}| (A|u_1(s) - u_2(s)| + B|u_1'(s) - u_2'(s)|) ds \\ &+ \int_a^{t_1} |(t-s)^{1-\alpha}| (\bar{A}|u_1(s) - u_2(s)| + \bar{B}|u_1'(s) - u_2'(s)|) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| A \int_a^{t_1} |(1 - \alpha)(t - s)^{-\alpha}| ds \\
&+ \max_{t \in [a, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| B \int_a^{t_1} |(1 - \alpha)(t - s)^{-\alpha}| ds \\
&+ \max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| \bar{A} \int_a^{t_1} |(t - s)^{1-\alpha}| ds \\
&+ \max_{t \in [a, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| \bar{B} \int_a^{t_1} |(t - s)^{1-\alpha}| ds, \\
&\leq \int_a^{t_1} |(1 - \alpha)(t - s)^{-\alpha}| ds \max(A, B) (\max |u_1(t) - u_2(t)| + \max |u_1'(t) - u_2'(t)|) \\
&+ \int_a^{t_1} |(t - s)^{1-\alpha}| ds \max(\bar{A}, \bar{B}) (\max |u_1(t) - u_2(t)| + \max |u_1'(t) - u_2'(t)|), \\
&\leq 2\rho (\max_{t \in [a, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [a, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)|), \\
&\leq 2\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\max_{T_0 \leq t \leq T_0} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_0} |u_1'(t) - u_2'(t)| \leq 3\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)}.$$

Ce qui donne,

$$\|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)} - 3\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq 0,$$

c-à-d,

$$(1 - 3\rho) \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq 0, \quad (3.4)$$

Mais, on a $\rho < \frac{1}{3}$ alors, $1 - 3\rho > 0$.

Donc (2.4) soit correct si et seulement si

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{C^1(T_0, T_1)} &= 0, \\ \Rightarrow u_1(t) &= u_2(t), \quad \forall t \in [a, T_1]. \end{aligned}$$

Prolongement de la solution

Pour $t \in [T_1, T_2]$, on écrit l'équation comme suit,

$$u_1(t) = F(t) + \int_{T_1}^t (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, u_1(s), u_1'(s)) ds, \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad (3.5)$$

Dans laquelle,

$$F(t) = f(t) + \int_a^{T_1} (t-s)^{1-\alpha} K(t, s, u_0(s), u_0'(s)) ds,$$

et $u_0(s)$ est la solution obtenue dans la première étape. Mais (2.5) est une équation de Volterra avec l'origine décalée de $a \rightarrow T_1$. On peut donc appliquer les mêmes étapes de base.

On définit,

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [T_0, T_1], \\ u_1(t) & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est clair que $u \in C^1(T_0, T_2)$, est la solution unique de (2.2) sur $[T_0, T_2]$.

Cet argument peut être répété et puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sous intervalles dans $[a, b]$, nous construisons ainsi la solution unique sur $C^1(a, b)$.

3.2 Étude numérique

Les méthodes bloc par bloc peuvent être s'appliquer aux équations intégrales différentielles. Celui-là Fournit une classe de méthodes pouvant être utilisées pour fournir des valeurs de départ convient pour les méthodes en plusieurs étapes ou comme technique pour résoudre des problèmes globaux.

Dans cette section, on applique la méthode pour approcher notre solution unique construite analytiquement dans la section précédente. Pour atteindre notre objectif, d'abord on va faire une approximation numérique par des polynomes de Lagrange, On a,

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + g(t).$$

Et leur dérivée,

$$\forall t \in [a, b], u'(t) = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)K(t, s, u(s), u'(s))ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds + g'(t).$$

Interpolation de K et $\frac{\partial K}{\partial t}$ sur les points $t_0; t_{\frac{1}{2}}; t_1$:

$$\begin{aligned} L_3[k](s) &= \frac{(s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1)}{(t_0 - t_{\frac{1}{2}})(t_0 - t_1)} K(t_1, t_0, U_0, V_0) + \frac{(s - t_0)(s - t_1)}{(t_{\frac{1}{2}} - t_0)(t_{\frac{1}{2}} - t_1)} k(t_1, t_1, U_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{(s - t_0)(s - t_{\frac{1}{2}})}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_{\frac{1}{2}})} K(t_1, t_1, U_1, V_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right](s) &= \frac{(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)}{(t_0-t_{\frac{1}{2}})(t_0-t_1)} \frac{\partial K}{\partial t}(t_1, t_0, U_0, V_0) + \frac{(s-t_0)(s-t_1)}{(t_{\frac{1}{2}}-t_0)(t_{\frac{1}{2}}-t_1)} \frac{\partial k}{\partial t}(t_1, t_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{(s-t_0)(s-t_{\frac{1}{2}})}{(t_1-t_0)(t_1-t_{\frac{1}{2}})} \frac{\partial K}{\partial t}(t_1, t_1, U_1, V_1).
\end{aligned}$$

Interpolation de K et $\frac{\partial K}{\partial t}$ sur les points t_0 ; t_1 ; t_2 :

$$\begin{aligned}
L_3[k](s) &= \frac{(s-t_1)(s-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} K(t_2, t_0, U_0, V_0) + \frac{(s-t_0)(s-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} k(t_2, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{(s-t_0)(s-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} K(t_2, t_2, U_2, V_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right](s) &= \frac{(s-t_1)(s-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} \frac{\partial K}{\partial t}(t_2, t_0, U_0, V_0) + \frac{(s-t_0)(s-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} \frac{\partial k}{\partial t}(t_2, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{(s-t_0)(s-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} \frac{\partial K}{\partial t}(t_2, t_2, U_2, V_2).
\end{aligned}$$

Quand on utilise le changement de variable suivant,

$$x = \frac{s-t_0}{h/2} \quad \text{ç-à-d} \quad s = \frac{h}{2}x + t_0 \quad \text{et} \quad ds = \frac{h}{2}dx.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
U_1 &= g(t_1) + \frac{h}{4} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx K(t_1, t_0, U_0, V_0) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)x(x-2)dx K(t_1, t_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{h}{4} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)x(x-1)dx K(t_1, t_1, U_1, V_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= g(t_1) + \frac{h}{4} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_1 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx K(t_1, t_0, U_0, V_0) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_1 - xh - t_0)x(x-2)dx K(t_1, t_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{h}{4} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_1 - xh - t_0)x(x-1)dx K(t_1, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{h}{4} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx \frac{\partial K}{\partial t}(t_1, t_0, U_0, V_0) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)x(x-2)dx \frac{\partial K}{\partial t}(t_1, t_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{h}{4} \int_0^2 p(t_1 - xh - t_0)x(x-1)dx \frac{\partial k}{\partial t}(t_1, t_1, U_1, V_1).
\end{aligned}$$

Pour le changement de variable :

$$x = \frac{s - t_0}{h} \quad \text{alors} \quad s = hx + t_0 \quad \text{et} \quad ds = hdx.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
U_2 &\simeq g(t_2) + \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx K(t_2, t_0, U_0, V_0) \\
&- h \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)x(x-2)dx K(t_2, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)x(x-1)dx K(t_2, t_2, U_2, V_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &\simeq g(t_2) + \frac{h}{2} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_2 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx K(t_2, t_0, U_0, V_0) \\
&- h \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_2 - xh - t_0)x(x-2)dx K(t_2, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t_2 - xh - t_0)x(x-1)dx K(t_2, t_2, U_2, V_2) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)(x-1)(x-2)dx \frac{\partial K}{\partial t}(t_2, t_0, U_0, V_0) \\
&- h \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)x(x-2)dx \frac{\partial K}{\partial t}(t_2, t_1, U_1, V_1) \\
&+ \frac{h}{2} \int_0^2 p(t_2 - xh - t_0)x(x-1)dx \frac{\partial k}{\partial t}(t_2, t_2, U_2, V_2).
\end{aligned}$$

Ou U_i et V_i approche les $u(t_i)$ et $u'(t_i)$.

On pose,

$$\begin{aligned}
\alpha(x, y, z) &= \frac{z}{4} \int_0^2 p(x - y - sz)(1-s)(2-s)ds, \\
\beta(x, y, z) &= \frac{z}{2} \int_0^2 p(x - y - sz)s(s-2)ds, \\
\gamma(x, y, z) &= \frac{z}{4} \int_0^2 p(x - y - sz)s(s-1)ds, \\
\bar{\alpha}(x, y, z) &= \frac{z}{4} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(x - y - sz)(1-s)(2-s)ds, \\
\bar{\beta}(x, y, z) &= \frac{z}{2} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(x - y - sz)s(s-2)ds, \\
\bar{\gamma}(x, y, z) &= \frac{z}{4} \int_0^2 \frac{\partial p}{\partial t}(x - y - sz)s(s-1)ds,
\end{aligned}$$

On applique les mêmes étapes pour calculer $U_3, U_4, U_5 \dots$ et on note $\frac{\partial K}{\partial t} = \bar{K}$.

Par analogie on obtient le système suivant,

$$\begin{aligned}
U_{2m+1} &= g(t_{2m+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \beta(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}U_{2m+1} - \frac{1}{8}U_{2m+2}, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}V_{2m+1} - \frac{1}{8}V_{2m+2}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2m+2} &= g(t_{2m+2}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \beta(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, U_{2m+2}, V_{2m+2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2m+1} &= \bar{g}(t_{2m+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \bar{\alpha}(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \bar{\beta}(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \bar{\gamma}(t_{2m+1}, t_{2j}, h) K(t_{2m+1}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \bar{\alpha}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \bar{\beta}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}U_{2m+1} - \frac{1}{8}U_{2m+2}, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}V_{2m+1} - \frac{1}{8}V_{2m+2}) \\
&+ \bar{\gamma}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}) \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+1}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \beta(t_{2m+1}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}U_{2m+1} - \frac{1}{8}U_{2m+2}, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}V_{2m+1} - \frac{1}{8}V_{2m+2}) \\
&+ \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2m+2} &= \bar{g}(t_{2m+1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \bar{\alpha}(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \bar{\beta}(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2j}, h) K(t_{2m+2}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \bar{\alpha}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \bar{\beta}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}) \\
&+ \bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, U_{2m+2}, V_{2m+2}) \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \{ \alpha(t_{2m+2}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2j}, U_{2j}, V_{2j}) \\
&+ \beta(t_{2m+2}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2j+1}, U_{2j+1}, V_{2j+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2j}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2j+2}, U_{2j+2}, V_{2j+2}) \} \\
&+ \alpha(t_{2m+2}, t_{2m}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m}, U_{2m}, V_{2m}) \\
&+ \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+1}, U_{2m+1}, V_{2m+1}) \\
&+ \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+2}, U_{2m+2}, V_{2m+2}).
\end{aligned}$$

Ou les U_i, V_i approche les $u(t_i)$ et $u'(t_i)$.

Étude du système

Théorème 3.2.1 *Pour h suffisamment petit, le système (Γ) a une unique solution.*

Démonstration 4

$$\forall \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \left\| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |X_1| + |X_2| + |Y_1| + |Y_2|.$$

On pose,

$$\Psi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} := \Psi \begin{pmatrix} U_{2m+1} \\ U_{2m+2} \\ V_{2m+1} \\ V_{2m+2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{8}X_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}Y_1 - \frac{1}{8}Y_2) \\
&\quad - K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}\bar{X}_1 - \frac{1}{8}\bar{X}_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}\bar{Y}_1 - \frac{1}{8}\bar{Y}_2)) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)), \\
\eta_2 &= \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, X_2, Y_2) - K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, \bar{X}_2, \bar{Y}_2)), \\
\eta_3 &= \bar{\beta}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{8}X_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}Y_1 - \frac{1}{8}Y_2) \\
&\quad - K(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}\bar{X}_1 - \frac{1}{8}\bar{X}_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}\bar{Y}_1 - \frac{1}{8}\bar{Y}_2)) \\
&\quad + \bar{\gamma}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - (K(t_{2m+1}, t_{2m+1}, X_1, Y_1))) \\
&\quad + \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (\bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{8}X_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}Y_1 - \frac{1}{8}Y_2) \\
&\quad - \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+\frac{1}{2}}, \frac{3}{8}U_{2m} + \frac{3}{4}\bar{X}_1 - \frac{1}{8}\bar{X}_2, \frac{3}{8}V_{2m} + \frac{3}{4}\bar{Y}_1 - \frac{1}{8}\bar{Y}_2)) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (\bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - \bar{K}(t_{2m+1}, t_{2m+1}, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)), \\
\eta_4 &= \bar{\beta}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - K(t_{2m+2}, t_{2m+1}, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)) \\
&\quad + \bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, X_2, Y_2) - K(t_{2m+2}, t_{2m+2}, \bar{X}_2, \bar{Y}_2)) \\
&\quad + \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (\bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+1}, X_1, Y_1) - \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+1}, \bar{X}_1, \bar{Y}_1)) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (\bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+2}, X_2, Y_2) - \bar{K}(t_{2m+2}, t_{2m+2}, \bar{X}_2, \bar{Y}_2)).
\end{aligned}$$

On calcule $\gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})$, $\gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h)$, $\bar{\gamma}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2})$ et $\bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2m}, h)$

et comme K et $\frac{\partial K}{\partial t}$ sont lipschitziens,

$$\begin{aligned}
|\eta_1| &\leq \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \left(\frac{3}{4}A |X_1 - \bar{X}_1| + \frac{1}{8}A |X_2 - \bar{X}_2| + \frac{3}{4}B |Y_1 - \bar{Y}_1| + \frac{1}{8}B |Y_2 - \bar{Y}_2| \right) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (A |X_1 - \bar{X}_1| + B |Y_1 - \bar{Y}_1|), \\
|\eta_2| &\leq \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X_1 - \bar{X}_1| + B |Y_1 - \bar{Y}_1| + A |X_2 - \bar{X}_2| + B |Y_2 - \bar{Y}_2|) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X_2 - \bar{X}_2| + B |Y_2 - \bar{Y}_2|), \\
|\eta_3| &\leq \bar{\beta}(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \left(\frac{3}{4}A |X_1 - \bar{X}_1| + \frac{1}{8}A |X_2 - \bar{X}_2| + \frac{3}{4}B |Y_1 - \bar{Y}_1| + \frac{1}{8}B |Y_2 - \bar{Y}_2| \right) \\
&\quad + \bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X_1 - \bar{X}_1| + B |Y_1 - \bar{Y}_1|) \\
&\quad + \beta(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) \left(\frac{3}{4}\bar{A} |X_1 - \bar{X}_1| + \frac{1}{8}\bar{A} |X_2 - \bar{X}_2| + \frac{3}{4}\bar{B} |Y_1 - \bar{Y}_1| + \frac{1}{8}\bar{B} |Y_2 - \bar{Y}_2| \right) \\
&\quad + \gamma(t_{2m+1}, t_{2m}, \frac{h}{2}) (\bar{A} |X_1 - \bar{X}_1| + \bar{B} |Y_1 - \bar{Y}_1|), \\
|\eta_4| &\leq \bar{\beta}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X_1 - \bar{X}_1| + B |Y_1 - \bar{Y}_1|) + \bar{\gamma}(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (A |X_2 - \bar{X}_2| + B |Y_2 - \bar{Y}_2|) \\
&\quad + \beta(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (\bar{A} |X_1 - \bar{X}_1| + \bar{B} |Y_1 - \bar{Y}_1|) + \gamma(t_{2m+2}, t_{2m}, h) (\bar{A} |X_2 - \bar{X}_2| + \bar{B} |Y_2 - \bar{Y}_2|)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{pmatrix} \right\|_1 &\leq \max(A, B, \bar{A}, \bar{B})C \left\| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{pmatrix} \right\|_1. \\
C &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\beta_1 + \gamma_2 & \frac{1}{8}\beta_1 & \frac{3}{4}\beta_1 + \gamma_2 & \frac{1}{8}\beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 + \gamma_2 & \beta_2 & \beta_2 + \gamma_2 \\ \frac{3}{4}\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_2 + \frac{3}{4}\beta + \gamma_1 & \frac{1}{8}\bar{\beta}_1 + \frac{1}{8}\beta_1 & \frac{3}{4}\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_2 + \frac{3}{4}\beta_1 & \frac{1}{8}\bar{\beta}_1 + \frac{1}{8}\beta_1 \\ \beta_2 + \beta_2 & \gamma_2 + \bar{\gamma}_2 & \beta_2 + \bar{\beta}_2 & \gamma_2 + \bar{\gamma}_2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= h^p C'.
\end{aligned}$$

Mais, $\lim_{h \rightarrow 0} \max C = 0$, alors d'après le théorème du point fixe de Banach Ψ_i est contractante pour h assez petit. Par conséquent le système étudié admet une unique solution.

3.3 Test numérique

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation intégral-différentielle non linéaire suivante :*

$$\forall t \in [0, 1], u(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} \frac{e^t s^2}{u^2(s) + (u'(s))^2 + 1} ds.$$

Le noyau

$$K(t, s, x, y) = \frac{e^t s^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Satisfais (H2) avec,

$$M = e, A = B = \bar{A} = \bar{B} = 2e.$$

Si on prend

$$f(t) = \sin(t) - 8/105 t^{\frac{7}{2}} e^t,$$

on obtient,

$$u(t) = \sin(t).$$

Pour la programmation Matlab de notre méthode sur l'équation intégral-différentielle faiblement singulière, on a pas encore arriver à la réaliser.

Conclusion

Le présent travail a permis de traiter l'aspect analytique et numérique d'équation intégrale et intégral-différentielle faiblement singulière de Volterra.

En utilisant une méthode numérique plus efficace qu'on a participé avec au **VVMH**, elle nous a montré une grande efficacité car il offre un moyen pratique et efficace de résoudre l'équation sur tout l'intervalle .

La programmation Matlab de cette méthode sur l'équation intégral-différentielle est à laisser pour les recherches prochaines.

Bibliographie

- [1] H. GUEBBAI, M. Z. AÏSSAOUI, I. DEBBAR, B. KHALLA, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation". AMC, 229 (2014), p 367-373.
- [2] I. SAILOUDI, M. GHIAT, H. GUEBBAI, "Block-by-Block approximation for Volterra integro-differential equation with weakly singular kernel", Vorenzh, Russia, 2020
- [3] I. SAILOUDI, H. GUEBBAI, "Etude analytique et numérique des équations intégró-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier", 2019
- [4] INTEGRALS.WOLFRAM.COM
- [5] K. ATKINSON, W. HAN, THEORETICAL NUMERICAL ANALYSIS : A FUNCTIONAL ANALYSIS FRAMEWORK. SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 2001.
- [6] L.V KANTOROVICH, V. I. KRYLOV APPROXIMATE METHODS OF HIGHER ANALYSIS, §5
- [7] M. GHIAT, H. GUEBBAI, "Etude analytique et numérique des équations intégró-différentielle de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers". Mathématiques Appliquées, 2018.

- [8] N. BOUAZILA, I. HAFAYDIA, M. GHIAT, "Etude analytique et numérique de l'équation de Volterra de deuxième espèce", 2015
- [9] P. LINZ, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.