République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

RAMDANI Haroun

Intitulé

Processus stochastique d'ordre fractionnaire : Existence, unicité et contrôlabilité

Dirigé par :

BENCHAABANE Abbes
Devant le jury

PRESIDENT	Dr. SEKRANI Soumia	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BOUHADJAR Slimane	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BENCHAABANE Abbes	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Je tiens remercier tout d'abord mon encadreur

Le ***Dr. A. Benchaabane*** m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et les conseils m'ont été précieux.

Je voudrais également remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de **l'université 8 Mai 1945 Guelma** et tous mes compagnons de promotion.
Et enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes frères, mes amis et à tous qui sont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

A mon père qui ma donner la volanté pour continue les études.

A ma mère qui ma donné l'espoir et le courage pour les moments difficile.

A mes chers frère khairo,taki, saif

A tout mes chère amies :

Amine, Rabah, Zaki

A tout mes **professeurs .**

A tout ma **promotion .**

Table des matières

Chapitre 1. Calcul Fractionnaire **6**
1.1. Espaces L^p 7
1.2. Fonctions Mathématiques Utiles 7
1.2.1. Fonction Gamma 7
1.2.2. Fonction Bêta 8
1.2.3. Fonction de Mittag-Leffler : 9
1.3. Intégration Fractionnaire 9
1.3.1. Lintégrale fractionnaire sur un intervalle [a ;b] 9
1.3.2. L'intégrale de Riemann-Liouville 9
1.4. Dérivée fractionnaire 11
1.4.1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 11
1.4.2. Dérivée fractionnaire au sens de caputo 12
1.5. Transformation de Fourier 12
1.6. Produit de convolution : 13
1.7. Transformation de l'aplace 13
1.8. Théorème du point fixe de Banach 13

Chapitre 2. Equation stochastiques fractionnaires **14**
2.1. Préliminaires 15

2.2. Existence et unicité 16
2.3. Contrôlabilité approximative 19

Abstract

Une classe de systèmes de contrôle dynamique décrits par des équations différentielles stochastiques fractionnelles non linéaires dans les espaces de Hilbert est considérée. En utilisant la technique du point fixe, les calculs fractionnaires, la technique d'analyse stochastique et les méthodes adoptées directement à partir des problèmes de contrôle déterministe, un nouvel ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approximative des équations différentielles stochastiques fractionnaires est formulé et prouvé. En particulier, nous discutons de la contrôlabilité approximative de la stochastique fractionnaire non linéaire des système de contrôle en supposant que le système linéaire correspondant est approximativement contrôlable.

ملخص

يتم إعتبار فئة من أنظمة التحكم الديناميكية الموصوفة بواسطة المعادلات التفاضلية العشوائية الجزئية غير الخطية في فضاءات هلبرت. باستخدام

تقنية النقطة الثابتة ،والحسابات الجزئية ،وتقنية التحليل العشوائي والطرق المعتمدة مباشرة من مشاكل التحكم الحتمية يتم صياغة مجموعة جديدة من الشروط الكافية للتحكم التقريبي في المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية غير الخطية لأنظمة التحكم على إفتراض أن النظام الخطي المقابل يمكن التحكم فيه تقريبيا.

Introduction

la théorie du contrôle est un domaine important des mathématique axées sur les application qui traite de la conception et de l'analyse de systèmes de contrôle. En particulier, le concept de contrôlabilité joue un rôle important à la fois dans le déterminisme et théorie du contrôle stochastique.

Ces dernières années, les problèmes de contrôlabilité de divers types de systèmes dynamiques non linéaires des espaces de dimension infinie en utilisant différents types d'approches ont été considérés dans de nombreus travaux.

La contrôlabilité exacte permet de diriger le système vers un état final arbitraire tandis que la contrôlabilité approximative signifie que le système peut être dirigé vers un état arbitraire au voisinage de l'état final.

Les systèmes contrôlables approximatifs sont plus répandus et la contrôlabilité très souvent approximative est tout à fait adéquate dans les applications. La contrôlabilité approximative des systèmes représentés par une évolution non linéaire. Les conditions sont établies à l'aide de la théorie des semi-groupes et de la technique des points fixes en supposant que le parti linéaire du système non linéaire associé est approximativement contrôlable.

Les équations différentielles stochastiques ont de nombreuses applications en économie, en écologie et en finance. Ces dernières années, les problèmes de contrôlabilité des équations différentielles stochastiques sont devenus un domaine d'intérêt croissant. Les extensions des concepts de contrôlabilité déterministe aux systèmes de contrôle stochastiques n'ont été discuté que dans un nombre limité de travaux.

Klamka a étudié la stochastique relative exact et approximatif problème de contrôlabilité pour les systèmes dynamiques stationnaires linéaires de dimension finie avec un retard ponctuel variable dans le contrôle en mettant en œuvre le théorème de l'application ouverte. Un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes sont établis pour la contrôlabilité stochastique exacte et approximative du système linéaire avec des retards d'état.

Le concept de dérivée non intégrale et intégrale est utilisé pour étudier le comportement des problèmes du monde réel en science et ingénierie. Dans divers problèmes de physique, mécanique, électrochimie, processus de diffusion et viscoélasticité, les dérivés fractionnaires décrivent certains phénomènes physiques plus précisément que les dérivés d'ordre entier.

Nous étudierons dans cet mémoire le problème de contrôlabilité approximative pour les systèmes stochastiques fractionnaires non linéaires, qui sont des généralisations naturelles de concepts de contrôlabilité bien connus dans la théorie des systèmes de contrôle déterministes de dimension infinie. Plus précisément, nous étudier la contrôlabilité approximative des systèmes de commande fractionnée non linéaires en supposant que le système linéaire est approximativement contrôlable. Les principaux outils utilisés dans cet mémoire sont les techniques d'analyse stochastique, calculs fractionnaires et principe de contraction de Banach. De plus, sans supposer la compacité du semi-groupe, les résultats sont établis pour la contrôlabilité exacte des systèmes stochastiques fractionnaires.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordres non entiers sont à présent largement appliquées dans de nombreux domaines, par exemple, en probabilité, viscoélasticité, électronique,économie,mécanique et en biologie,etc.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommes et des caoutchoucs. En bref, toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

1.1 Espaces L^p

Soit $[a, b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p-intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$: $L^p[a, b] = f : [a, b] \to \mathbb{C}$; f mesurable, et $\|f\|_{L^p[a,b]} < \infty$, avec $\|f\|_{L^p[a,b]}$ $= (\int_a^b |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$.*

L'espace $L^p[a, b]$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach. Si $p = 2$, alors $L^2([a, b])$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a, b]$. Le produit scalaire sur $L^2([a, b])$ est défini pour toutes $f, g \in L^2([a, b])$ par $(f, g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. L'espace $L^2([a, b])$,muni par la norme $\|f\|_{L^2[a,b]} = (\int_a^b |f(x)|^2 \, dx)^{1/2}$ est un espace de Hilbert.

1.2 Fonctions Mathématiques Utiles

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction gamma (notée par Γ) est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (à l'exception des entiers négatifs) : on a pour tout entier n > 0 :

$$\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1).$$

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale impropre.

Définition 2. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \;\; x > 0$$

En utilisant les relations de récurrence, on obtient les formules

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0,$$

en particulier

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \forall x \in N.$$

Comme conséquence de cette propriété,on a :

$$\Gamma(x+1) = x!,\ \forall x \in N$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

Exemple 3. *1.* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{1-1}dx = 1$

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

1.2.2 Fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale impropre.

Définition 4. *La fonction Bêta est définie par :*

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^{2x-1}cos(t)^{2y-1}dt, \quad x,y > 0. \end{aligned}$$

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(x;y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x), \forall x,y : Re(x) > 0, Re(y) > 0.$$

Quelques propriétés sur la fonction Bêta Soient $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, alors :

1. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$
2. $B(x,1-x) = \frac{\pi}{sin(\pi x).}$
3. $B(x,1) = \frac{1}{x}$
4. $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x.(x+1)...(x+n-1)}, n \geq 1.$
5. $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, m \geq 1$ et $n \geq 1.$

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler :

Définition 5. *soit $z \in \mathbb{C}$,alors la fonction de Mittag-leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est donné par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0$$

la fonction de Mittag-leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0)$$

1.3 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.3.1 Lintégrale fractionnaire sur un intervalle [a ;b]

Définition 6. *Soit $f : [a, b) \to R$ une fonction continue. La primitive de f est donnée par :*

$$I_\alpha^1 f(x) = \int_\alpha^x f(t)dt.$$

pour une primitive seconde on aura

$$\begin{aligned} I_\alpha^2 f(x) &= \int_\alpha^x (x-t) f(t)dt. \\ I_\alpha^3 f(x) &= \int_\alpha^x I_\alpha^2 f(s)ds = \frac{1}{2}\int_\alpha^x (x-t)^2 f(t)dt. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$I_\alpha^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^x (x-t)(^{n-1}) f(t)dt.$$

1.3.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Selon l'approche de Riemann-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α, $(\alpha > 0)$ généralise la célèbre formule d'intégrales répétées n-fois

$$\begin{aligned} (I_\alpha^n f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\alpha^x dt_1 . \int_\alpha^{t_1} dt_2 ... \int_\alpha^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

qui réduit le calcul de la $n^{éme}$ primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ à une seule intégrale de type convolution.

Notons par D^n, $n \in \mathbb{N}$,, l'opérateur de dérivation d'ordre n, alors on a

$$D^n I_\alpha^n = I \quad , I_\alpha^n \; D^n \neq I$$

où I est l'opérateur d'identité.

Définition 7. *Soient α un réel positif et $f : [a, b) \to R$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_\alpha^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt.$$

Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 8. *Considérons la fonction $f(x) = x^\beta$. En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient*

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{(\alpha-1)} t^\beta dt.$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (xu)^\beta x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

d'où

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

Exemple 9. *$f(x) = (x-\alpha)^n$ avec $n > 1$, alors*

$$I_\alpha^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

En effet

$$I_\alpha^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{(\alpha-1)} (t-\alpha)^n dt.$$

On utilise le changement de variable : $t = \alpha + y(x-\alpha)$*,* $0 \leq s \leq 1$ *et on utilise la fonction bêta on obtient :*

$$\begin{aligned}
I_\alpha^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-\alpha)^{\alpha+n}\int_\alpha^x y^n(1-y)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-\alpha)^{\alpha+n}\beta(\alpha, n+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-\alpha)^{\alpha+n}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\
I_\alpha^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(x-\alpha)^{\alpha+n}
\end{aligned}$$

Au cas on a $\alpha = 0$ *on a :*

$$I_0^0 f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)}x^{\alpha+n}$$

Au cas ona $\alpha = 1$ *on a :*

$$I_1^1 f(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1+n+1)}(x-1)^{1+n}$$

1.4 Dérivée fractionnaire

1.4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 10. *Soit* $n-1 < \beta < n$ *avec* $n \in N$*. La dérivée d'ordre* β *au sens de Riemann Liouville d'une fonction* f *est définie par :*

$$\begin{aligned}
D^\beta f(x) &= D^n(I^{(n-\beta)}f(x)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_\alpha^x (x-t)^{n-\beta-1}f(t)dt.
\end{aligned}$$

Si on suppose que : $\alpha = n-\beta$*, avec* $0 < \alpha < 1$*, On a alors :*

$$D^\beta f(x) = D^n(I^\alpha f(x))$$

Exemple 11.

1. *La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :*

$$D^\beta C = \frac{c}{\Gamma(1-\beta)}(x-\alpha)^{-\beta}$$

2. *La dérivée de* $f(x) = (x-\alpha)^n$ *au sens de Riemann-Liouville : Soit* β *non entier et* $0 \leq n-1 < \beta < n$ *et* $\alpha > -1$*, alors on a :*

$$D^\beta(x-\alpha) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_\alpha^x (x-t)^{n-\beta-1}\,(t-\alpha)^n dt.$$

En faisant le changement de variable $t = \alpha + y(t-a)$, *on aura :*

$$\begin{aligned}
D^{\beta}(t-a) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}(x-t)^{n+\alpha-\beta}\int_0^1 (1-y)^{n-\beta-1}y^{\alpha}dy \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-\beta+1)\gamma(n-\beta,\alpha+1)}{\Gamma(n-\beta)}(x-\alpha)^{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-\beta+1)\Gamma(n-\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(n+\alpha-\beta+1}(x-\alpha)^{\alpha-\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}(x-\alpha)^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de caputo

Définition 12. *La dérivée de Caputo d'ordre fractionnaire* $\alpha > 0$ *d'une fonction* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *est défini par :*

$$^{c}D^{\alpha}f(t)\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds$$

où $n = [\alpha]+1$ *et* α *désigne la partie entière de* α

Définition 13. *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* $\beta \in \mathbb{R}+$ *d'une fonction* f *défini par :*

$$^{c}D_{\alpha}^{\beta}f(t) = J_{\alpha}^{n-\beta}f^{(n)}(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\beta-1}f^{(n)}(t)dt \quad x > \alpha$$

ou $\quad n-1 < \beta \leq n \ , n \in \mathbb{N}^*$,

Exemple 14. *On pose* $f(x) = (x-\alpha)^k$ *avec* $k > 0$ *alors pour* $(0 < \beta \leq 1)$ *on oura :*

$$^{c}D_{\alpha}^{\beta}f(x) = I_{\alpha}^{1-\beta}f'(x) = kI_{\alpha}^{1-\beta}(x-\alpha)^{k-1} = \frac{k}{\Gamma(1-\beta)}\int_{\alpha}^{x}(x-s)^{-\beta}(t-1)^{k-1}ds$$

On utilise le changement $t = \alpha + s(x-\alpha) \quad 0 \leq s \leq 1$, *on obtient :*

$$^{c}D_{\alpha}^{\beta}f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\beta+k)}(x-\alpha)^{-\beta+k}$$

1.5 Transformation de Fourier

Définition 15. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *une fonction valeurs complexes. La transformation de fourier de* f *notée* $F(f)$ *est la fonction de la variable* $t \in \mathbb{R}$, *donner par :*

$$(\mathcal{F}f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}d(x), t \in \mathbb{R}$$

la transformé de fourier inverse de f est définit par :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}d(x)$$

1.6 Produit de convolution :

Définition 16. *Soient f et g deux fonctions réelles, leur produit de convolution noté $f * g$ est définie par :*

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t).g(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)dt$$

Elle existe notamment lorsque : f et $g \in L^1(R)$, alors $f*g \in L^1(R)$, $f \in L^1(R)$ et g bornée.

1.7 Transformation de l'aplace

Définition 17. *Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ existe, alors elle s'appelle transformée de Laplace de la fonction f et on note :*

$$F(s) = L\{f(t); s\} = L[f](s)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

La fonction $f(t)$ est appelée fonction originale.

1.8 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Définition 18. *Soient (X, d) un espace métrique complet et T une application de X dans X. On dit que T est une application Lipschitizienne s'il existe une constante positive k telle que l'on ait :*

$$\forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) :$$

Si $k < 1$, T est appelée contraction.

Théorème 19 (**Théorème du point fixe de Banach**). *Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ une application contractante. Alors T admet un point fixe unique, autrement dit :*

$$\exists! x \in X : Tx = x$$

Chapitre 2

Equation stochastiques fractionnaires

2.1 Préliminaires

Dans cette section, nous fournissons des définitions, des lemmes et des notations nécessaires pour établir nos principaux résultats. Nous utilisons les notations suivantes.

Soit (Ω, Γ, P) un espace de probabilité complet équipé d'une filtration normale $\Gamma_t,\ t \in J = [0, b]$ satisfaisant aux conditions habituelles (c'est-à-dire continu à droite et Γ_0 contenant tous les ensembles P- nuls). Nous considérons trois espaces réels séparables X, E et U et Q-Wiener sur (Ω, Γ_b, P) avec l'opérateur de covariance borné linéaire Q tel que $trQ < \infty$. Nous supposons qu'il existe un système orthonormé complet $\{e_n\}_{n\geq 1}$ dans E, une séquence bornée de nombres réels non négatifs $\{\lambda_n\}$ tels que $Qe_n = \lambda_n e_n,\ n = 1, 2,$.et une séquence $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ de mouvements brownien indépendant tels que

$$\langle W(t), e\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, \langle e_n, e\rangle\, \beta_n(t), \quad e \in E, t \in [0, b]$$

et $\Gamma_t = \Gamma_t^w$, où Γ_t^w est la tribu engendrée par $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Soit $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}, E, X)$ l'espace des toutes Les opérateurs de Hilbert-Schmidt de $Q^{1/2}E$ de X avec le produit interne $\langle \Psi, \pi\rangle\, L_2^0 = tr[\ \Psi Q\ \pi^*]$. Soit $L^2(\Gamma_b, X)$ l'espace de Banach de tous les variables aléatoires Γ_b mesurable et carré intégrable à valeurs dans l'espace de Hilbert X. Soit $C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ l'espace de Banach des applications continues de $[0, b]$ dans $L^2(\Gamma, X)$ satisfaisant $\sup_{t\in J} E \parallel x(t) \parallel^2 < \infty$. Soit $H_2([0, b]; X)$ est un sous-espace fermé de $C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ composé de Processus adapté $x \in C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ avec la norme $\parallel x \parallel_{H_2} = (\sup_{t\in J} E \parallel x(t) \parallel_X^2)^{1/2}$.

Le but de cet mémoire est d'étudier la contrôlabilité approximative d'une classe des équation différentielle stochastiques fractionnaires non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} {}^cD_t^q x(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\frac{dw(t)}{dt}, t \in J, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < q < 1;^c D_t^q$ désigne l'opérateur de dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre q; $x(.)$ prend ses valeurs dans l'espace de Hilbert X; A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs linéaires compact uniformément bornés $\{S(t), t \geq 0\}$; la fonction contrôle $u(\cdot) \in L_\Gamma^2([0, b], U)$ l'espace des contrôles admissibles, U est un espace de Hilbert. B est un opérateur linéaire borné de U à X ; $f : J \times\ X \to X$ et $\sigma : J \times\ X \to L_2^0$ sont des fonctions appropriées, x_0 est Γ_0 variables aléatoires mesurables évaluées en X indépendant de w. Les résultats suivants seront utilisés tout au long de cet mémoire.

Lemme 20. *Soit* $G : [0,b] \times \Omega \to L_2^0$ *une application fortement mesurable telle que* $\int_0^b E \parallel G(t) \parallel_{L_2^0}^p < \infty$, *alors*

$$E \left\| \int_0^t G(s)dw(s) \right\|^p \leq L_G \int_0^b E \parallel G(t) \parallel_{L_2^0}^p ds$$

pour tout $0 \leq t \leq b$ *et* $p \geq 2$, *où* L_G *est la constante dépend de* p *et* b.

2.2 Existence et unicité

Maintenant, nous présentons la solution douc du problème 2.1.

Définition 21. *Un processus stochastique* $x \in H_2([0,b], X)$ *est une solution mild de 2.1 si pour chaque* $u \in L_\Gamma^2([0,b], U)$, *il satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s))]ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s)\sigma(s, x(s))dw(s), \end{aligned}$$

Où $T(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) S(t^q \theta) d\theta$; $S(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) S(t^q\theta) d\theta$; $S(t)$ *est un* C_0*-semi-groupe engendré par l'opérateur linéaire* A *sur* X; ξ_q *est une fonction de densité de probabilité définie sur* $(0, \infty)$, *c'est-à-dire* $\xi_q(\theta) \geq 0$,$\theta \in (0,\infty)$ *et* $\int_0^\infty \xi_q(\theta) d\theta = 1$.

Lemme 22. *Les opérateurs* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *et* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *sont fortement continus, c'est-à-dire que pour* $x \in X$ *et* $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, *nous avons* $\parallel T(t_2)x - T(t_1)x \parallel \to 0$ *et* $\parallel S(t_2)x - S(t_1)x \parallel \to 0$ *comme* $t_1 \to t_2$.

Nous imposons les conditions suivantes aux données du problème :

(i) Pour tout $t \geq 0$ fixe , $T(t)$ et $S(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés, c'est-à-dire pour tout $x \in X$,

$$\parallel T(t)x \parallel \leq M \parallel x \parallel, \ \parallel S(t)x \parallel \leq \frac{Mq}{\Gamma(q+1)} \parallel x \parallel .$$

(ii) La fonction $f : J \times X \to X$ et $\sigma : J \times X \to L_2^0$ satisfont les conditions de croissance linéaire et de Lipschitz. De plus, il existe des constantes positives $N > 0, \widetilde{N} > 0, L > 0$ et $\widetilde{L} > 0$ telles que

$$\begin{aligned} &\| \ f(t,x) - f(t,y) \|^2 \leq N \| x - y \|^2, \ \| f(t,x) \|^2 \leq \widetilde{N}(1 + \| x \|^2) \\ &\| \ \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \|^2 \leq L \| x - y \|^2, \ \| \sigma(t,x) \|_{L_2^0}^2 \leq \widetilde{L}(1 + \| x \|^2). \end{aligned}$$

(iii) Le système stochastique linéaire est approximativement contrôlable sur $[0, b]$.

Pour chaque $0 \leq t < b$, l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ dans la topologie de l'opérateur fort comme $\alpha \to 0+$, où

$$\Psi_0^b = \int_0^b (b-s)^{2(q-1)} S(b-s) B B^* S^*(b-s) ds$$

est le Gramian de contrôlabilité, ici B^* désigne l'adjoint de B et $S^*(t)$ est l'adjoint de $S(t)$. Observez ce système de contrôle déterministe fractionnaire linéaire

$$\begin{cases} D_t^q x(t) = Ax(t) + (Bu)(t), t \in [0, b], \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

correspondant à 2.1 est approximativement contrôlable sur $[0, b]$ si l'opérateur $\alpha\ (\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ fortement si $\alpha \to 0^+$.

Définition 23. *Le système 2.1 est approximativement contrôlable sur* $[0, b]$ *si* $\overline{\Re(b)} = L^2(\Omega, \Gamma_b, X)$, *où*

$$\Re(b) = \{x(b) = x(b, u) : u \in L_\Gamma^2([0, b], U)\},$$

ici $L_\Gamma^2([0, b], U)$, *est le sous-espace fermé de* $L_\Gamma^2([0, b] \times \Omega; U)$, *composé de tous les processus stochastiques* Γ_t*-adapté à valeurs dans U.*

Le lemme suivant est requis pour définir la fonction de contrôle.

Lemme 24. *Pour tout* $\widehat{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, *il existe* $\widehat{\Phi} \in L_\Gamma^2\ (\Omega; L^2(0, b; L_2^0))$ *tel que*

$$\widehat{x}_b = E\widehat{x}_b + \int_0^b \widehat{\Phi}(s) dw(s).$$

Maintenant pour tout $\alpha > 0$ et $\widehat{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, nous définissons la fonction de contrôle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u^{\alpha}(t,x) &= B^*(b-t)^{q-1}S^*(b-t)\left[(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(E\widehat{x}_b-T(b)x_0)+\int_0^t(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\widehat{\Phi}(s)dw(s)\right] \\ &\quad -B^*(b-t)^{q-1}S^*(b-t)\int_0^t(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)f(s,x(s))ds \\ &\quad -B^*(b-t)^{q-1}S^*(b-t)\int_0^t(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)\sigma(s,x(s))dw(s) \end{aligned}$$

Lemme 25. *Il existe une constante réelle positive* $\widehat{M}$ *telle que pour tout* $x,y\in H_2$*, nous avons*

$$\begin{aligned} &E\left\|u^{\alpha}(t,x)-u^{\alpha}(t,y)\right\|^2\leq\tfrac{\widehat{M}}{\alpha^2}\int_0^t E\left\|x(s)-y(s)\right\|^2ds \\ &E\left\|u^{\alpha}(t,x)\right\|^2\leq\tfrac{\widehat{M}}{\alpha^2}(1+\int_0^t E\left\|x(s)\right\|^2ds \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Démonstration. Tout d'abord, nous fournirons la preuve de l'inégalité 2.2-a, puisque 2.2-b peut être établi de manière similaire. Soit $x,y\in H_2$. Du l'inégalité de Holder, on obtient

$$\begin{aligned} & E\left\|u^{\alpha}(t,x)-u^{\alpha}(t,y)\right\|^2 \\ \leq\ & 2E\left\|B^*(b-t)^{q-1}S^*(b-t)\int_0^t(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)\left[f(s,x(s)-f(s,y(s))\right]ds\right\|^2 \\ & +2E\left\|B^*(b-t)^{q-1}S^*(b-t)\int_0^t(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)\left[\sigma(s,x(s)-\sigma(s,y(s))\right]dw(s)\right\|^2 \\ \leq\ & \frac{2}{\alpha^2}\left\|B\right\|^2(b)^{2q-2}(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^4\ \frac{b^{2q-1}}{2q-1}\ [N+L]\ \int_0^t E\left\|x(s)-y(s)\right\|^2ds \\ \leq\ & \frac{\widehat{M}}{\alpha^2}\int_0^t E\left\|x(s)-y(s)\right\|^2ds \end{aligned}$$

où $\widehat{M}=2\left\|B\right\|^2(b)^{2q-2}\ (\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^4\ \frac{b^{2q-1}}{2q-1}\ [N+L]$ □

2.3 Contrôlabilité approximative

Maintenant, présentons le résultat principal de cet mémoire. Dans cette section, nous prouvons la contrôlabilité approximative du système 2.1 en utilisant le principe de la fonction de contraction. En particulier, nous établissons la contrôlabilité approximative du système 2.1 sous l'hypothèse selon lesquelles le système linéaire correspondant est approximativement contrôlable. Pour tout $\alpha > 0$, définissez l'opérateur $F_\alpha : H_2 \to H_2$ par

$$\begin{aligned} F_\alpha x(t) &= T(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s)[f(s,x(s)) + Bu^\alpha(s,x)ds] \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s)\sigma(s,x(s))dw(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Maintenant, nous énonçons et prouvons le lemme suivant, qui sera utilisé dans la preuve du résultat principal.

Lemme 26. *Pour tout , $x \in H_{2,}$ $F_\alpha(x)(t)$ est continue sur $[0,b]$ en sens L^2.*

Démonstration. Soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$. Alors pour tout $x \in H_{2,}$ fixe , à partir de l'équation. 2.3, on a

$$E \parallel (F_\alpha x)(t_2) - (F_\alpha x)(t_1) \parallel^2 \leq 4[E \parallel (T(t_2) - T(t_1))x \parallel^2 + \sum_{i=1}^{3} E \left\|\Pi_i^x(t_2) - \Pi_i^x(t_1)\right\|^2]$$

La forte continuité de $T(t)$, le premier terme passe à zéro comme $t_2 - t_1 \to 0$. Ensuite, il résulte de l'inégalité de Holder et hypothèses sur le théorème

$$\begin{aligned}
E\left\|\Pi_1^x(t_2)-\Pi_1^x(t_1)\right\|^2 &\leq 3E\left\|\int\limits_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}S(t_2-s)-S(t_1-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\quad +3E\left\|\int\limits_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}-S(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\quad +3E\left\|\int\limits_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\leq 3\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int\limits_0^{t_1}E\left\|S(t_2-s)-S(t_1-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\quad +3(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^2\left(\int\limits_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}ds\right)\left(\int\limits_0^{t_1}E\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds\right) \\
&\quad +3\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^2\int\limits_0^{t_1}E\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
E\left\|\Pi_2^x(t_2)-\Pi_2^x(t_1)\right\|^2 &\leq 3E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}S(t_2-s)-S(t_1-s)Bu^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 \\
&\quad +3E\left\|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}-S(t_2-s)Bu^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 \\
&\quad +3E\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)Bu^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 \\
&\leq 3\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}E\left\|S(t_2-s)-S(t_1-s)Bu^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 \\
&\quad +3(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^2\left\|B\right\|^2\left(\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}ds\right) \\
&\quad \times\left(\int_0^{t_1}E\left\|Bu^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 ds\right) \\
&\quad +3\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^2\left\|B\right\|^2\int_0^{t_1}E\left\|u^{\alpha}(s,x)ds\right\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

De même, en utilisant les hypothèses sur le théorème que nous obtenons

$$
\begin{aligned}
E\left\|\Pi_3^x(t_2)-\Pi_3^x(t_1)\right\|^2 &\leq 3E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(S(t_2-s)-S(t_1-s))\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
&+3E\left\|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\times\ S(t_2-s)\sigma(s,x(s))dw(\right. \\
&+3E\left\|\int_{t_1}^{t_2}((t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
&\leq 3L_\sigma\frac{{t_1}^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}E\parallel(S(t_2-s)-S(t_1-s))\sigma(s,x(s))\parallel^2 ds \\
&+3L_\sigma(\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds) \\
&\times\left(\int_0^{t_1}\parallel S(t_2-s)\sigma(s,x(s))\parallel^2 ds\right)
\end{aligned}
$$

$$
+3L_\sigma\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)})^2\int_{t_1}^{t_2}E\quad\parallel\quad S(t_2-s)\sigma(s,x(s))\parallel^2 ds
$$

□

Par conséquent, en utilisant la continuté forte de $S(t)$ et le théorème de convergence dominé par Lebesgue, nous concluons que les inégalités ci-dessus tend vers zéro lorsque $t_2-t_1\rightarrow 0$. Ainsi, nous concluons que $F_\alpha(x)(t)$ est continue de la droite dans $[0,b)$.Un argument similaire montre qu'il est également continu de la gauche dans $(0,b]$. Ceci complète la preuve de ce lemme.

Théorème 27. *Supposons que les hypothèses* (i) *et* (ii) *sont satisfaites. Alors, le système* 2.1 *a une solution mild sur* $[0,b]$.

Démonstration. Nous prouvons qu'il existe un point fixe pour l'opérateur F_α en utilisant le principe de l'application contractante

$$
E\left\|F_\alpha(x)(t)\right\|_{H_2}^2\leq 4\left[\sup_{0\leq t\leq b}E\parallel T(t)x_0\parallel^2+\sup_{0\leq t\leq b}\sum_{i=1}^{3}E\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2\right]
$$

L'utilisation des hypothèses $(i)-(ii)$ et les calculs standard donnent

$$\sup_{0\le t\le b} E \parallel T(t)x_0 \parallel^2 \le M^2 \parallel x_0 \parallel^2$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le b}\sum_{i=1}^{3} E\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2 \quad &\le \quad 3\left(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)}\right)^2\left[\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\widehat{N}-\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\widehat{L}L_\sigma\right]\left(1+\|x\|_{H_2}^2\right)\\ &+3\left(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)}\right)^2\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\|B\|^2\frac{\widehat{M}}{\alpha}\left(1+b\|x\|_{H_2}^2\right)\end{aligned}$$

Donc $E \parallel F_\alpha x \parallel_{H_2}^2 < \infty$. Ainsi pour chaque $\alpha > 0$, l'opérateur F_α est une application

dans H_2 en lui-même. Ensuite, nous utilisons le théorème du point fixe de Banach pour prouver que F_α a un point fixe unique dans H_2 . Nous affirmons qu' il existe un n naturel tel que F_α^n est une contraction sur H_2. Pour voir cela, supposons $x, y \in H_2$ et nous avons

$$\begin{aligned} E \quad \| \quad (F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t) \|^2 &\le 3E\sum_{i=1}^{3} E\left\|\Pi_i^x(t_2)-\Pi_i^y(t_1)\right\|^2]\\ &\le \quad 3\left(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)}\right)^2\left[\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N+\frac{\widehat{M}\|B\|^2}{\alpha}\frac{b^{2q-1}}{2q-1}b^2+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\widehat{L}L_\sigma\right]\int_0^t E\|x(s)-y(s)\|^2\,ds\\ &\le \quad 3\left(\frac{Mq}{\Gamma(q+1)}\right)^2\left[\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N+\frac{\widehat{M}\|B\|^2}{\alpha}\frac{b^{2q-1}}{2q-1}+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\widehat{L}L_\sigma\right]\int_0^t E\|x(s)-y(s)\|^2\,ds\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons une constante réelle positive $\gamma(\alpha)$ telle que

$$E \parallel (F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t) \parallel^2 \le \gamma(\alpha)\int_0^t E \parallel x(s)-y(s) \parallel^2 ds$$

pour tout $t \in J$ et pour tout $x, y \in H_2$. Pour tout nombre naturel n , il résulte de l'itération successive de l'inégalité ci-dessus que, par prendre le sup sur $[0, b]$

$$\parallel (F_\alpha^n x)(t)-(F_\alpha^n y)(t) \parallel_{H_2}^2 \le \frac{(b\gamma(\alpha))^n}{n!} \parallel x-y \parallel_{H_2}^2$$

Pour tout $\alpha > 0$ fixe , pour n suffisamment grand, $\frac{(b\gamma(\alpha))^n}{n!} < 1$. Il résulte de que F_α^n est une contraction, de sorte que le principe de contraction garantit que l'opérateur F_α a un point fixe unique x_α dans H_2 , qui est une solution douce de 2.1. $\square$

Théorème 28. *Supposons que les hypothèses* $(i)-(iii)$ *sont vérifient. De plus, si les fonctions* f *et* σ *sont uniformément bornées et* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *est compact, alors le système* 2.1 *est approximativement contrôlable sur* $[0,b]$.

Démonstration. Soit x_α un point fixe de F_α. En utilisant le théorème de Fubini stochastique, on peut facilement voir que

$$\begin{aligned} x_\alpha(b) &= \widetilde{x}_b + \alpha(\alpha I + \Psi)^{-1}(E\widetilde{x}_b - T(b)x_0) \\ &+\alpha\int_0^b \alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)f(s,x_\alpha(s))ds \\ &+\alpha\int_0^b \alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\left[(b-s)^{q-1}S(b-s)\sigma(s,x_\alpha(s)) - \widetilde{\phi}(s)\right]dw(s) \end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse sur f et σ qu'il existe $D>0$ tel que

$$\| f(s,x_\alpha(s) \|^2 + \| \sigma(s,x_\alpha(s)) \|^2 \leq D$$

pour tous $(s,\omega) \in [0,b]\times\Omega$. Il y a ensuite une sous-séquence encore désignée par $\{f(s,x_\alpha(s)),\sigma(s,x_\alpha(s))\}$ qui converge faiblement par exemple, $\{f(s),\sigma(s)\}$ dans $X \times L_2^0$. D'après l'équation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} E \ \| \ & x_\alpha(b) - \widetilde{x}_b \|^2 \leq 6 \,\| \alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}(E\widetilde{x}_b - T(b)x_0) \|^2 \\ &+6E\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\widetilde{\phi}(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right) \\ &+6E\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \| S(b-s)(f(s,x_\alpha(s)) - f(s)) \| ds\right)^2 \\ &+6E\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \| S(b-s)f((s) \| ds\right)^2 \\ &+6E\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \| S(b-s)(\sigma(s,x_\alpha(s)) - \sigma(s)) \|_{L_2^0}^2 ds\right) \\ &+6E\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \| S(b-s)\sigma(s) \|_{L_2^0}^2 ds\right) \end{aligned}$$

Par contre, par l'hypothèse (iii), pour tout $0 \leq s < b$ l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1} \to 0$ fortement comme $\alpha \to 0+$ et en plus $\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \leq 1$. Ainsi, par le théorème de convergence dominé de Lebesgue et la compacité de $S(t)$ implique que $E \parallel x_\alpha(b) - \widetilde{x}_b \parallel^2 \to 0$ comme $\alpha \to 0+$. Cela donne la contrôlabilité approximative de 2.1. $\square$

Bibliographie

[1] Sakthivel, R., Suganya, S., & Anthoni, S. M. (2012). Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations. Computers & Mathematics with Applications, 63(3), 660-668.

[2] Meriem Kaddouri . (2017) Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire

[3] abbes benchaabane. Cours Processus stochastique 3 année mathématique.